

Э

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ КИБЕРНЕТИКИ

К

**АКАДЕМИЯ НАУК  
УКРАИНСКОЙ СОВЕТСКОЙ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ  
ГЛАВНОЙ РЕДАКЦИИ УКРАИНСКОЙ СОВЕТСКОЙ ЭНЦИКЛОПЕДИИ**

Н. П. БАЖАН (председатель Научного совета), Б. М. БАБИЙ, И. К. БЕЛОДЕД, П. А. ВЛАСЮК, В. М. ГЛУШКОВ, Г. В. ГОЛОВКО, В. Н. ГРИДНЕВ, В. С. ГУТЫРЯ, Г. М. ДОБРОВ, А. З. ЖМУДСКИЙ, Р. Е. КАВЕЦКИЙ, В. И. КАСИЯН, И. И. КОМПАНИЕЦ (зам. председателя Научного совета), В. М. КОРЕЦКИЙ, И. Д. НАЗАРЕНКО, Л. Н. НОВИЧЕНКО, О. С. ПАРАСЮК, Б. Е. ПАТОН, В. Ф. ПЕРЕСЫПКИН, И. Г. ПИДОПЛИЧКО, В. Б. ПОРФИРЬЕВ, Л. Н. РЕВУЦКИЙ, Н. Е. СИВАЧЕНКО, А. Д. СКАБА, К. Ф. СТАРОДУБОВ, С. И. СУББОТИН, В. М. ТЕРЛЕЦКИЙ, П. Т. ТРОНЬКО, А. Я. УСИКОВ, П. М. ФЕДЧЕНКО, И. М. ФЕДОРЧЕНКО, И. Н. ФРАНЦЕВИЧ, В. В. ЦВЕТКОВ, Р. В. ЧАГОВЕЦ, Н. З. ШАМОТА, Г. А. ШВЕД (ответственный секретарь Научного совета), Г. Г. ШЕВЕЛЬ, В. И. ШИНКАРУК, С. М. ЯМПОЛЬСКИЙ.





# ЭНЦИКЛОПЕДИЯ КИБЕРНЕТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
ЭНЦИКЛОПЕДИИ КИБЕРНЕТИКИ

В. М. ГЛУШКОВ (ответственный редактор), Н. М. АМОСОВ, И. А. АРТЕМЕНКО, А. А. БАКАЕВ, В. В. ИВАНОВ, Л. А. КАЛУЖНИН, В. А. КОВАЛЕВСКИЙ, В. С. КОРОЛЮК, М. И. КРАТКО, В. М. КУНЦЕВИЧ, А. И. КУХТЕНКО (зам. ответственного редактора), Б. Н. МАЛИНОВСКИЙ, В. С. МИХАЛЕВИЧ, П. В. ПОХОДЗИЛО (ответственный секретарь), Г. Е. ПУХОВ, Б. Н. ПШЕНИЧНЫЙ, З. Л. РАБИНОВИЧ, Б. Б. ТИМОФЕЕВ, Е. Л. ЮЩЕНКО.

ТОМ ПЕРВЫЙ

---

Абс — Мир

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
УКРАИНСКОЙ СОВЕТСКОЙ ЭНЦИКЛОПЕДИИ  
К И Е В — 1974

6. П2. 154. 1 (03)

© ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ УСЭ, 1974 г.

Том подписан к печати 2 апреля 1974 г.

---

ХАРЬКОВСКАЯ КНИЖНАЯ ФАБРИКА им. М. В. ФРУНЗЕ

Э  $\frac{305 - 003}{М-222(04)74}$  367-74

Издание Энциклопедии кибернетики (ЭК) в двух томах осуществлено в соответствии с постановлением Центрального Комитета Коммунистической партии Украины и Совета Министров Украинской ССР. Создание ЭК — результат творческого сотрудничества Главной редакции Украинской Советской Энциклопедии и ордена Ленина Института кибернетики Академии наук Украинской ССР.

Кибернетика — наука об общих закономерностях, принципах и методах обработки информации и управления сложными системами — находится ныне на самом острие научно-технического прогресса. Трудно назвать отрасль науки, техники или народного хозяйства, где бы ни применялись ее методы и средства. Кибернетикой пользуются инженеры и математики, экономисты и социологи, врачи и биологи, археологи, лингвисты, педагоги и специалисты многих других отраслей. Более чем в 500 сферах науки, техники, народного хозяйства применяются ныне электронные вычислительные машины — эти универсальные преобразователи информации и мощные средства ее переработки, являющиеся основными орудиями современного научного работника или инженера.

Роль кибернетики в народном хозяйстве нашей страны будет возрастать и дальше. В Резолюции XXIV съезда КПСС указано на необходимость «...шире применять организационную и электронно-вычислительную технику, автоматизированные системы и научные методы управления и планирования» (Материалы XXIV съезда КПСС. М., 1971, с. 202).

Интерес к кибернетике как к науке и к ее применениям возрастает с каждым днем. Создание ЭК является первой попыткой удовлетворить все возрастающий спрос на энциклопедические издания по этой отрасли знаний. Большинство статей Энциклопедии по содержанию и форме доступны широкому кругу научных и инженерно-технических работников, однако есть в ней и статьи, понятные лишь узкому кругу читателей, имеющих соответствующую подготовку.

На страницах Энциклопедии читатель познакомится с проблемами и вопросами теоретической кибернетики — ее математического аппарата, теории систем, теории информации, основ и методов программирования, построения алгоритмических языков, теории автоматов.

В статьях по экономической кибернетике рассмотрены вопросы о применении методов и средств кибернетики для изучения экономических систем и управления ими — вопросы создания экономико-математических моделей, решения задач распределения, транспортных задач, создания автоматизированных систем управления предприятиями, отраслями народного хозяйства, вопросы разработки и применения методов научной организации труда, методов научного прогнозирования и т. п.

Большое место в Энциклопедии занимают статьи по технической кибернетике, охватывающие вопросы автоматического управления сложными техническими системами и комплексами, автоматизации научного эксперимента, создания оптимальных систем управления технологическими процессами, оптимизации взаимодействия человека и машины в сложных системах управления, разработки методов и устройств управления.

В статьях по вычислительной технике приведены сведения о принципах построения и конструкции технических средств кибернетики — электронных вычислительных

машин и моделирующих устройств. В Энциклопедии описаны почти все отечественные и наиболее важные зарубежные вычислительные машины.

В цикле статей по биологической кибернетике и бионике рассмотрены проблемы, связанные с процессами управления биологическими системами, — создания моделей мозга, моделей органов человека и регулирующих систем организма для лечения и профилактики заболеваний, создания и применения средств кибернетической техники для автоматизации постановки диагноза, выработки оптимальных средств лечения, перенесения совершенств живой природы в технические устройства и средства.

Большая группа статей посвящена вопросам прикладной и вычислительной математики, в них изложены наиболее употребительные методы вычисления и решения отдельных классов математических задач и даны рекомендации по оптимизации вычислений.

Отдельные циклы статей охватывают философские и социологические вопросы кибернетики, вопросы применения ее методов и средств для автоматизации информационной работы, лингвистических исследований, программированного обучения и т. д.

Всего в двух томах ЭК помещено более 1700 статей, к значительному большинству которых дана библиография. Статьи Энциклопедии иллюстрированы среднетекстовыми схемами, чертежами, рисунками и цветными вклейками, которые делают наглядным освещение наиболее важных вопросов или сфер применения кибернетики.

ЭК рассчитана на широкие круги специалистов по самым разнообразным отраслям науки, техники и народного хозяйства, она призвана стать также универсальным справочником для студентов и аспирантов физико-математических, технических, экономических и медицинских профилей. Энциклопедия должна дать ответ на наиболее важные вопросы всем, кто в той или иной мере занимался проблемами и вопросами обработки информации и управления, и тем, кто этим только что заинтересовался.

В создании ЭК приняли участие (в качестве авторов, рецензентов и консультантов) свыше 600 ученых и специалистов различных отраслей народного хозяйства из 102 организаций, учреждений и предприятий Москвы, Ленинграда, Новосибирска и союзных республик СССР.

Главная редакция Украинской Советской Энциклопедии и редакционная коллегия ЭК выражают искреннюю благодарность ученому совету и всему коллективу Института кибернетики АН УССР, а также всем организациям и лицам, принимавшим участие в подготовке этого издания.

Редакционная коллегия искренне благодарна акад. АН СССР А. И. Бергу, А. А. Дородницыну, Г. И. Марчуку, А. Н. Тихонову, Н. Н. Яненко; чл.-кор. АН СССР А. П. Ершову, Ю. Л. Ершову, А. М. Летову, Б. С. Сотскову, С. В. Яблонскому; акад. АН Узб. ССР В. К. Кабулову, акад. АН Киргиз.ССР Ю. Е. Неболюбову, акад. АН Латв. ССР Э. А. Якубайтису; чл.-кор. АН Эст.ССР Б. Г. Тамму и чл.-кор. АН Груз.ССР В. В. Чавчанидзе за их научно-методическую помощь в подготовке Энциклопедии кибернетики.

Замечания и пожелания просим присылать по адресу: 252650, Киев-30, «ГСП», ул. Ленина, 51, Главной редакции Украинской Советской Энциклопедии АН УССР.

В Энциклопедии кибернетики статьи размещены по алфавиту. Названия статей поданы преимущественно в единственном числе («АЛГОРИТМ», а не «Алгоритмы», «ПОДАВТОМАТ», а не «Подавтоматы»); во множественном числе — только тогда, когда есть необходимость осветить в одной статье обобщенный термин, принятый в науке («ИГРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ»), или же когда статья содержит в себе несколько понятий («АВТОМАТЫ БЕСКОНЕЧНЫЕ», «КАНАЛЫ СВЯЗИ», «ЯЗЫКИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ»). Названия статей об иностранных и международных организациях и промышленных объединениях (федерациях, корпорациях, фирмах и т. д.) даны в русской транскрипции.

Если названия статей состоят из имен существительного и прилагательного, то на первое место в большинстве случаев поставлено существительное (напр., «СЛОВАРЬ АВТОМАТИЧЕСКИЙ», а не «Автоматический словарь», «АННОТИРОВАНИЕ АВТОМАТИЧЕСКОЕ», а не «Автоматическое аннотирование»). Прилагательное ставится на первое место лишь тогда, когда оно вместе с существительным составляет установившееся понятие («ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ПРОГРАММИРОВАНИЯ») или когда на прилагательное падает логическое ударение, подчеркивающее специфическое содержание статьи («КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД РАСПОЗНАВАНИЯ», «ЗАПОМИНАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО»).

В названиях некоторых статей, состоящих из нескольких слов, обычный порядок слов изменен для того, чтобы в начале стояли слова, главные по значению, напр., «АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЦВМ». В статьях о методах или устройствах, названных по фамилии человека, предложившего этот метод или устройство, на первом месте стоит фамилия («ТЬЮРИНГА МАШИНА», «ПОСТА КОМБИНАТОРНАЯ ПРОБЛЕМА»).

Названия статей набраны полужирным шрифтом, прописными буквами. Если названием статьи является научный термин, имеющий один или несколько синонимов, то эти синонимы даны после названия статьи вразрядку и отделены от основного термина запятой (напр., МАШИННЫЙ ПЕРЕВОД, а в т о м а т и ч е с к и й п е р е в о д).

Как правило, в статьях, где упомянута фамилия ученого, в скобках указаны даты его рождения и смерти. Все даты даны по новому стилю.

Если название статьи требует некоторого уточнения, то слово или группа слов, уточняющих это название, набраны после названия вразрядку (напр., АДРЕС в п р о - г р а м м и р о в а н и и).

Чтобы помочь читателю полнее ознакомиться с интересующим его вопросом, а также предупредить лишнее повторение материала в смежных статьях, в Энциклопедии применена система ссылок. Название статьи, на которую делается ссылка, набрано курсивом. В Энциклопедии помещен ряд коротких статей-ссылок, среди которых имеются: *расширенные ссылки* (с определением термина), напр., ИНСТРУМЕНТАЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ, *приборная погрешность* — погрешность, возникающая вследствие несовершенства измерительных приборов, решающих элементов или составных частей вычислительных машин (см. *Погрешность решающего элемента, Погрешностей вычислений теория*); *обратные ссылки*, вызванные изменением в основной статье принятого в Энциклопедии

порядка слов (напр., ВЕРОЯТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *Распределение вероятностей*); синонимические ссылки с терминов, широко применяемых в спец. литературе (напр., ВНЕШНЕЕ ОБОРУДОВАНИЕ — то же, что и *внешние устройства*, ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПРОЦЕСС — то же, что и *случайный процесс*); ссылки с терминов на статьи, в которых раскрыто содержание этих терминов (напр., ИЕРАРХИЧНОСТЬ УПРАВЛЕНИЯ — см. *Иерархические системы управления*). Система ссылок дана в соответствии с граф-схемами, составленными в соответствии с каждым тематическим разделом Энциклопедии.

Знак ударения в набранных черным шрифтом терминах поставлен над ударными гласными во всех входящих в название статьи словах (кроме односложных). В сложных словах обозначено лишь главное ударение (напр., МНОГОПЮЛЮСНИК КОНТАКТНЫЙ). В словах, употребляющихся с двойным ударением, проставлены два ударения.

Условные обозначения и сокращения применяются с целью экономии места. Кроме общепринятых сокращений, применяются и сокращения, принятые для Энциклопедии кибернетики (см. «Основные сокращения и условные обозначения», с. 9—10).

Если слова, составляющие название статьи, повторяются в ее тексте, то там они обозначаются начальными буквами, например: в статье «АВТОМАТ» — А., в статье «КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ» — К. т. с. п. Наименования величин и единиц величин и их обозначения, применяемые в Энциклопедии кибернетики, выражены в Международной системе единиц в соответствии с ГОСТ 9867—61.

Подтекстовая библиография, как правило, приведена на языке издания. Средитекстовая библиография указана на русском языке — независимо от языка оригинала. Названия периодических изданий на иностранных языках в тексте статьи даны на языке оригинала, а в скобках дан русский перевод названия. Труды В. И. Ленина даны по Полному собранию сочинений (5-му изданию). Труды К. Маркса и Ф. Энгельса приведены по 2-му русскому изданию Сочинений.

Существенным дополнением к статьям служат иллюстрации: цветные вклейки, текстовые рисунки, графики и др. Цветные вклейки даны к наиболее важным статьям с указанием «Илл. между с. ...—...». Текстовые иллюстрации, как правило, помещены в статье. Если посылка дана на иллюстрации, помещенные в других статьях или в другом томе, то указывается лишь название статьи, без номера тома и номера страницы (напр., в ст. «Дискретных преобразователей теория» указано: «Илл. см. в ст. *Автомат управляющий*»).

Рисунки к ряду статей даны преимущественно в таблицах с соответствующими подтекстовками. Если подписи под рисунком нет, это означает, что сам текст статьи является объяснением к этому рисунку.

<b>А</b>	ангстрем (с числом)	гс	гаусс (с числом)	киберн.	кибернетический
<b>а</b>	ампер (с числом)	гл. о.	главным образом	ккал	килокалория
абс.	абсолютный	гн	генри (с числом)	к.-л.	(с числом)
абс. ед.	абсолютная единица	гос.	государственный	км	какой-либо
авиаци.	авиационный	гос-во	государство	км <sup>2</sup>	километр (с числом)
АВМ	аналоговая вычислительная машина	°С	градус стоградусной шкалы Цельсия (с числом)	км <sup>3</sup>	квадратный километр (с числом)
автомат.	автоматический	°К	градус абсолютной шкалы Кельвина (с числом)	км/сек	кубический километр
АИМ	амплитудно-импульсная модуляция	греч.	греческий	км/час	километров в секунду (с числом)
акад.	академик	гц	герц (с числом)	к.-н.	километров в час (с числом)
алгебр.	алгебраический	ГЭС	гидроэлектростанция	кн.	какой-нибудь
алгоритм.	алгоритмический	дж	джоуль (с числом)	кон.	книга
АМ	амплитудная модуляция	ДЗУ	долговременное запоминающее устройство		конец
амер.	американский	диагн.	диагностический	коорд.	(в сочетании, напр., «в кон. 19 в.»)
англ.	английский	дифф.	дифференциальный	коэфф.	координаты
АН СССР	Академия наук СССР	дм	дециметр (с числом)	кпд	коэффициент
АН УССР	Академия наук УССР	дм <sup>2</sup>	квадратный дециметр (с числом)	к-т	коэффициент полезного действия
араб.	арабский	др.	другие	кэв	комитет
арифм.	арифметический	д-р	доктор		килоэлектрон-вольт (с числом)
а·сек	ампер-секунда (с числом)	европ.	европейский	л	литр (с числом)
асинхр.	асинхронный	ехр	экспонента	лат.	латинский
АСУ	автоматизированная система управления	ж.-д.	железнодорожный	леч.	лечебный
АСУП	автоматизированная система управления предприятием	зам.	заместитель	лит.	литературный
АУ	арифметическое устройство	з-д	завод	лк	люкс (с числом)
биол.	биологический	зап.	западный	лм	люмен (с числом)
б. ч.	большей частью	зп.	запад	логарифм.	логарифмический
в	вольт (с числом)	засл. деят. н.	заслуженный деятель науки	логич.	логический
в., вып.	выпуск	засл. деят. н. и т.	заслуженный деятель науки и техники	м	метр (с числом)
в т. ч.	в том числе	ЗУ	запоминающее устройство	м <sup>2</sup>	квадратный метр (с числом)
ва	вольт-ампер (с числом)	ил. см. в ст.	иллюстрацию	м <sup>3</sup>	кубический метр (с числом)
верх.	верхний	ил. см. с.	смотрите в статье	ма	миллиампер (с числом)
ВЗУ	внешнее запоминающее устройство	ИМ	смотрите на странице	магн.	магнитный
ВМ	вычислительная машина	им.	импульсная модуляция	макс.	максимальный
ВС	вычислительная система	инж.	имени	матем.	математический (с термином)
вкл.	включительно	ин-т	инженер (с фамилией)	маш.	машинный
внеш.	внешний	интегр.	институт	маш.-строит.	машиностроительный
внутр.	внутренний	ИПС	интегральный	м/сек	метров в секунду (с числом)
воен.	военный	к	информационно-поисковая система	м/час	метров в час (с числом)
в·сек	вольт-секунда (с числом)	канд.	кулон (с числом)	мв	милливольт (с числом)
вт	ватт (с числом)	кандидат	кандидат	мет	милливатт (с числом)
ВТ	вычислительная техника	капиталистич.	капиталистический	мг	миллиграмм (с числом)
вт·сек	ватт-секунда (с числом)	кв.	квадратный	Мец	мегагерц (с числом)
вт·час	ватт-час (с числом)	кв.	киловольт (с числом)	мед.	медицинский
ВЦ	вычислительный центр	кв	киловольт-ампер (с числом)	междунар.	международный
выс.	высота	кв	киловатт (с числом)	металлообр.	металлообрабатывающий
вычисл.	вычислительный	к-во	киловатт-час (с числом)	металлург.	металлургический
г.	год (с числом)	квт	килограмм массы	метод.	методический
г.г.	годы (с числом)	квт·час	килограмм-сила (с числом)	мех.	механический
г.	город (с названием)	кг	килограммометр (с числом)	микроскоп.	микроскопический
г	грамм массы или веса (с числом)	кгс или кгГ	килогерц (с числом)	мин	минута
геом.	геометрический	кгс·м или кгГм	килоджоуль (с числом)	миним.	минимальный
гс или Г	грамм силы (с числом)	кгц	килограмм-сила (с числом)	мкм	микрометр (с числом)
		кдж	килогерц (с числом)	мка	микроампер (с числом)
			килоджоуль (с числом)	мкв	микровольт (с числом)
				мквт	микроватт (с числом)
				мкс	максвелл (с числом)

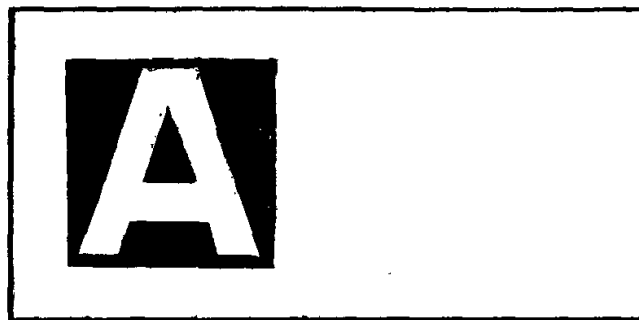
<i>мксек</i>	(микросекунда с числом)	политех.	политехнический	теор.	теоретический
<i>мкф</i>	микрофарада (с числом)	прибл.	приближенный, приблизительно	тех.	технический
млн.	миллион	произ-во	производство	технолог.	технологический
млрд.	миллиард	пром.	промышленный	тыс.	тысяч,
мм	миллиметр	пром-сть	промышленность		тысячелетие
<i>мм рт. ст.</i>	миллиметр ртутного столба (после числа единиц давления)	простр.	пространство	УВМ	(с числом)
		проф.	профессиональный		управляющая
		психолог.	психологический		вычислительная
		<i>пф</i>	пикофарада		машина
<i>мм²</i>	квадратный миллиметр	р.	родился	уд. в.	удельный вес
		разд.	раздел	укр.	украинский
<i>мм³</i>	кубический миллиметр	ред.	редактор, редакционный	УУ	управляющее
			редактор		устройство
мн-во	множество	респ.	республиканский	ун-т	университет
мн-к	многоугольник	рис.	рисунок	ур-ние	уравнение
<i>Мэв</i>	мегаэлектрон-вольт, миллион электрон-вольт (с числом)	р-н	район	устр-во	устройство
	называется	рус.	русский		(прибор, система)
наз.	например	с.	село (с названием)	уч.	учебный
напр.	народное хозяйство	САР	страница (с числом)	<i>ф</i>	фарада
нар. х-во	народнохозяйственный		система	физ.	(с числом)
нар.-хоз.	настоящий (в сочетании, напр., «наст. время», «наст. фамилия»)	САУ	автоматического регулирования система	физиол.	физический (с термином)
наст.	научный	с.-х.	автоматического управления	физ.-мат.	физиологический (с термином)
	научный	с. х-во	сельскохозяйственный		физико-математический
науч.	национальный	сек	сельское хозяйство	физ.-хим.	физико-химический
нач.	начало, начальный	синхр.	секунда (с числом)	филолог.	филологический
н.-и.	научно-исследовательский	СКБ	синхронный	ф-ла	формула
	немецкий		специальное	фонетич.	фонетический
ниж.	нижний	см.	конструкторское бюро	франц.	французский
норм.	нормальный	см	бюро	ф-т	факультет
<i>нсек</i>	наносекунда ( $10^{-9}$ сек)	см²	смотрите	ф-ция	функция
об.	оборот	см³	сантиметр (с числом)	хим.	химический
обл.	область (с названием)		квадратный	х-во	хозяйство
обработ.	обработывающий	сов.	сантиметр (с числом)	хоз.	хозяйственный
<i>об/мин</i>	оборотов в минуту (с числом)	совр.	кубический	центр.	центральный
	оборотов в секунду (с числом)	соотв.	сантиметр (с числом)	ЦВМ	цифровая
<i>об/сек</i>	оборотов в секунду (с числом)	социалистич.	советский		вычислительная
ОЗУ	оперативное запоминающее устройство	СП	советский	ч	машина
	ом (с числом)	спед.	современный	чм	час
ом	оптимальный	ср.	соответственно		частотная
оптим.	оптимизация	ст.	социалистический	чл.-корр.	модуляция
орг-ция	организация	строит.	стандартная программа	чел.	член-корреспондент
осн.	основной	<i>t°</i> т-ра	специальный	числ.	человек
офиц.	официальный	<i>t°</i> плав.	средний	шир.	(с числом)
п.	пункт (в сочетании, напр., «п. 5»)	<i>t</i>	статья	шт.	численный
пед.	педагогический	<i>тс.</i> или <i>T</i>	столетие (с числом)	э	ширина
пл.	площадь (с числом)	<i>т. е.</i>	строительный	<i>эв</i>	штука (с числом)
погр.	погрешность	<i>т. к.</i>	температура		эрстед (с числом)
подмн-во	подмножество	<i>т. н.</i>	плавления	экс.	электрон-вольт (с числом)
подпростр.	подпространство	<i>т. о.</i>	тонна массы	экс. д. с.	электродвижущая
пол.	половина (в сочетании, напр., «1-я пол. 19 ст.»)	табл.	или веса (с числом)		сила
		ТАР	тонна-сила (с числом)	эконом.	экономический
			то есть	экстрем.	экстремальный
			так как	электр.	электрический
			так называемый	энерг.	энергетический
			таким образом	ЭВМ	электронная
			таблица		вычислительная
			теория	ЭЦВМ	машина
			автоматического регулирования		электронная
					цифровая
					вычислительная
					машина
				япон.	японский



**АБСТРАКТНАЯ ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ** — направление в *автоматов теории*, характеризующееся тем, что при изучении автоматов отвлекаются от их структурных особенностей. При таком подходе внутр. состояния автомата, его входные и выходные сигналы рассматриваются как некие абстрактные символы, образующие соответственно алфавиты:  $Q$  (внутренний),  $X$  (входной),  $Y$  (выходной).  $X$  и  $Y$  считаются конечными алфавитами,  $Q$  может быть бесконечен. Автомат детерминированный определяется как  $\mathfrak{M} = \langle Q, X, Y, \Psi, \Phi \rangle$ , где  $\Psi$ -ция переходов отображает  $Q \times X$  в  $Q$ , а  $\Phi$ -ция выходов отображает  $Q \times X$  в  $Y$ . Автомат недетерминированный определяется аналогично, но с той лишь разницей, что в качестве  $\Psi, \Phi$  допускаются многозначные  $\Phi$ -ции. В случае же автомата вероятностного под  $\Psi$  и  $\Phi$  следует понимать матрицы переходных и выходных вероятностей, т. е.  $\Phi$ -ции, отображающие  $Q \times X \times Q$  и  $Q \times X \times Y$  в числовой промежуток  $(0, 1)$  и имеющие, соответственно, смысл  $\Psi(q_i, x_j, q_s)$  — вероятность того, что входной символ  $x_j$  переводит состояние  $q_i$  в состояние  $q_s$ ,  $\Phi(q_i, x_j, y_r)$  — вероятность того, что при входном символе  $x_j$  и внутр. состоянии  $q_i$  будет выполнен выходной символ  $y_r$ .

Приведенные понятия весьма общи и не конструктивны в случае, когда  $Q$  бесконечен. Более узкие классы могут быть выделены путем наложения различных ограничений на компоненты  $Q, X, Y, \Psi, \Phi$ . Поскольку эти ограничения не формулируются в структурных терминах, то они касаются гл. о. мощности алфавитов (напр., если  $Q$  конечен, то и автомат наз. конечным) или общих свойств функций  $\Psi, \Phi$ . В случае вырождения, когда тот или иной алфавит состоит из одного символа, удобнее рассматривать модифицированные определения, которые получаются при удалении вырожденных компонент. Напр., детерминированный автомат без выхода — это тройка  $\langle Q, X, \Psi \rangle$ , где  $Q, X, \Psi$  имеют прежний смысл; вероятностный автомат автономный — это пара  $\langle Q, \Psi \rangle$ , где  $\Psi$  — матрица переходных вероятностей для состояний из  $Q$  (т. е. по существу такой автомат является цепью Маркова).

В А. т. а. изучаются преимущественно такие концепции поведения (см. *Поведение автоматов*), в которых преобразуемыми или принимаемыми словами являются слова в алфавите  $X$  (входные слова), а результатами преобразования или порождения являются слова в алфавите  $Y$  (выходные слова). В основном это — реализация операторов в автомате и представление множеств в реальное время. В силу большой общности и неконструктивности употребляемых понятий автомата, даже в случае детерминированных автоматов, реализуемые операторы (представляемые мн-ва) могут оказаться неэффективными. В А. т. а. осн. изучаемыми конструктивными объектами являются *автоматы конечные*, а также реа-



лизуемые ими операторы и представляемые ими мн-ва (конечно-автоматные операторы и мн-ва). В А. т. а. широко применяются методы и понятия алгебры, *логики математической* и *алгоритмов теории*. Центр. проблемами А. т. а., которые порождены практическими задачами конструирования и эксплуатации *вычислительной техники* и получили далеко идущее теоретическое развитие, являются проблемы синтеза и анализа, а также связанная с ними теория экспериментов с автоматами.

**Анализ и синтез автоматов в А. т. а.** Проблема синтеза заключается в поиске и построении автомата, исходя из условий, предъявляемых к реализуемому им оператору или к представляемому им мн-ву, причем в А. т. а. гл. о. имеются в виду реализация или представление в реальное время. Обычно предполагается, что эти условия выражены на достаточно четком и формализованном языке (т. н. язык заказчика), напр. в виде формулы  $\mathfrak{A}$  этого языка. Кроме того, считается, что искомым автомат принадлежит заранее очерченному классу автоматов, допускающих конструктивное описание. Формальный язык, средствами которого осуществляется это описание (язык исполнителя), также считается заданным. Когда речь идет о конечных автоматах, обычно, описание автомата заключается в представлении системы его команд посредством графического или табличного задания функций  $\Psi, \Phi$  (матриц переходных и выходных вероятностей, если автомат вероятностный). Построенный в результате абстрактного синтеза автомат может быть использован впоследствии как исходный материал на этапе *синтеза автомата структурного*.

В рамках общей проблемы абстрактного синтеза возникают отд. более частные проблемы: 1) **Существование**. Существует ли оператор, удовлетворяющий условию, выраженному формулой  $\mathfrak{A}$ , и реализуемый (мн-во представимое) в автомате данного типа? 2) **Единственность**. Единственен ли этот оператор? 3) **Конструкция**. Для к.-н. оператора, удовлетворяющего условию  $\mathfrak{A}$ , построить реализующий его автомат и указать соответствующую настройку: начальное состояние, заключительные состояния, а в случае вероятностного автомата — допустимый уровень надежности. 4) **Минимизация**. Построенный автомат  $\mathfrak{M}$  привести посредством эквивалентных преобразований к эквивалентному ему автомату, удовлетворяющему

некоторым критериям оптимальности. Напр., в случае конечных автоматов — минимизация числа состояний путем склеивания неразличимых и устранения недостижимых состояний.

Решение указанных проблем мыслится в виде алгоритмов, которые по заданной формуле  $\mathcal{M}$  доставляют ответы на вопросы 1) — 2) и осуществляют необходимые конструкции и преобразования для проблем 3) — 4). Соответствующая теория существенно зависит от языков, употребляемых заказчиком; в качестве языка исполнителя обычно рассматриваются различные классы автоматных диаграмм. При выборе языка заказчика естественно руководствоваться следующими двумя (антагонистическими) требованиями: выразительность языка, т. е. удобство (для заказчика) изложения в нем условий, предъявляемых к поведению проектируемого автомата; простота алгоритмов, решающих проблему синтеза в целом и отдельные ее задачи. (Аналогия: в теории программирования — выразительность входного языка и простота транслятора). Эта ситуация подробно исследована применительно к конечным автоматам. С точки зрения простоты алгоритмов предпочтительны алгебры языки (см. *Регулярные события и выражения*). Более выразительными являются языки, основанные на применении фрагментов логики предикатов (см. *Язык логический для задания автоматов*), но и алгоритмы синтеза для них становятся более громоздкими.

Проблема анализа является обратной к проблеме синтеза: по заданному автомату требуется описать его поведение средствами языка заказчика. В некотором смысле анализ и синтез можно рассматривать как переводы с одного языка на другой, причем перевод, соответствующий анализу, обычно проще. Разработаны многие алгоритмы синтеза и анализа, гл. о., для конечных детерминированных автоматов. В качестве составной части алгоритма синтеза детерминированного автомата в него зачастую входит построение недетерминированного автомата с последующим его преобразованием в эквивалентный ему детерминированный автомат. Разработка алгоритмов абстрактного синтеза с применением логич. языков оказалась связанной с некоторыми алгоритм. проблемами матем. логики и способствовала их решению.

**Эксперименты и синтез.** Пусть имеется детерминированный автомат *инициальный*  $\langle \mathcal{M}, q_0 \rangle$ , который неизвестен экспериментатору или же (при некоторых других постановках) известна лишь какая-то верхняя оценка для числа состояний автомата  $\mathcal{M}$ . Предполагается, что с этим «черным ящиком» можно экспериментировать в том смысле, что можно подавать входные слова и наблюдать соответствующие выходные слова. Задача заключается в такой организации эксперимента, которая позволила бы извлечь полезную информацию о поведении «черного ящика», т. е. об операторе  $T(\mathcal{M}, q_0)$ , который реализуется этим «черным ящиком» в реальное время; в лучшем случае — построить автомат, эквивалентный

$\langle \mathcal{M}, q_0 \rangle$ , или по крайней мере установить к-н. достаточно характерные свойства оператора  $T(\mathcal{M}, q_0)$ . Эта задача связана и с проблемой абстрактного синтеза в следующей ситуации, часто встречающейся в инженерной практике (см. *Язык анкетный для задания автоматов*). Заказчик задумал вполне определенный оператор, который должен реализовать проектируемый автомат, однако он не в состоянии описать этот оператор на языке исполнителя. В таком случае исполнитель пытается путем подходящего опроса заказчика (выступающего здесь в роли «черного ящика») разгадать задуманный им оператор. Осн. результаты относятся к экспериментам с конечными автоматами. В последнее время имеется продвижение и для некоторых классов бесконечных автоматов.

Для конечных автоматов  $\langle \mathcal{M}, q_0 \rangle$  существует алгоритм экспериментирования, который при наличии верхней оценки для числа состояний автомата  $\mathcal{M}$  полностью восстанавливает (расшифровывает) его поведение, т. е. строит автомат, эквивалентный «черному ящику». Если же экспериментатор не располагает такой верхней оценкой, то алгоритм расшифровки невозможен; однако и в этой ситуации разработаны процедуры (называемые частными алгоритмами расшифровки), которые хотя и не для всех «черных ящиков», но для подавляющего большинства их (при разумном определении «большинства») все же устанавливают поведение. В теории экспериментов установлены и достаточно точные оценки сложности алгоритмов расшифровки (напр., оценка длины входных слов, для которых необходимо вести наблюдение). В случае частотных алгоритмов расшифровки они существенно зависят от того, с какой частотой гарантируется правильная расшифровка. Эти результаты основаны на детальных оценках параметров и спектров поведения (см. *Оператор автоматный*).

**Игры автоматов.** В А. т. а. изучаются и *автоматов игры*. В отличие от классической *игр теории*, в которой игроки заранее знают последствия тех или иных действий (своих и противника), предложено исследовать ситуацию, когда участники игры — автоматы — не обладают такой априорной информацией. Оказалось, что можно построить такие конечные автоматы, которые успешно справляются и в этой ситуации. Результаты такого рода, естественно интерпретируются в терминах целесообразного поведения одного индивидуума или коллектива.

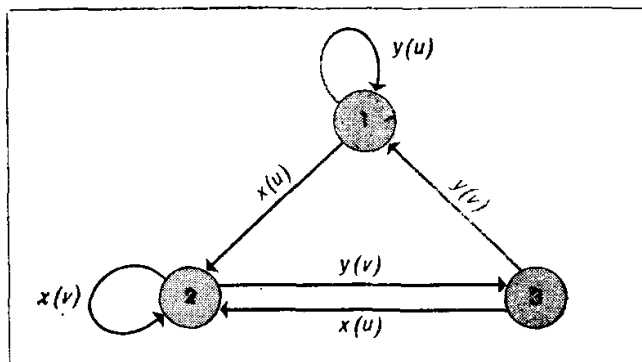
*Лит.:* Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]; Бухи Д. Р. О разрешающем методе для ограниченной арифметики второго порядка. В кн.: Кибернетический сборник, в. 8. М., 1964; Цетлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М., 1969 [библиогр. с. 306—316]; Трахтенброт Б. А., Барздин Я. М. Конечные автоматы (Поведение и синтез). М., 1970 [библиогр. с. 389—395].

Б. А. Трахтенброт.

**АБСТРАКТНОГО АВТОМАТА ГРАФ** — граф направленный, вершинам которого сопоставлены состояния автомата, а дугам — входные сигналы. Если входной сигнал  $x_i$  вызывает

переход автомата из состояния  $a_j$  в состояние  $a_k$ , то на графе автомата этому сигналу соответствует помеченная буквой  $x_i$  дуга, соединяющая вершину  $a_j$  с вершиной  $a_k$ . Такой граф задает ф-цию переходов автомата. Для задания ф-ции выходов дуги этого графа помечаются еще и соответствующими выходными сигналами (рис.). Задание автомата с помощью графа особенно наглядно при небольшом числе его состояний.

С. С. Гороховский.



Граф переходов автомата.

**АБСТРАКЦИЯ АКТУАЛЬНОЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ** — одна из основных абстракций математики и логики. Состоит в отвращении от незавершенности (и незавершимости) процесса построения бесконечного множества. А. а. б. позволяет представлять бесконечные множества, напр., бесконечные числовые множества (натуральных, целых, действительных и т. п. чисел) как построенные (существующие) объекты, независимо от процесса образования всех их элементов. При этом может существовать способ построения произвольного элемента такого множества, но заведомо не существует способа построения бесконечного множества как данного сразу всеми своими элементами. Превращая бесконечные множества в допустимые, существующие (существующим считается любой объект, определение которого не приводит к логич. противоречиям) объекты, А. а. б. открывает тем самым путь к такому изучению их, в котором используются средства логики (в частности, *исключенного третьего закона*), отработанные на конечных множествах. А. а. б. составляет идейную основу *множеств теории* и основанной на ней математики, т. н. классической математики, и классической логики. А. а. б. отвергается однако сторонниками *интуиционизма* и представителями *конструктивного направления в математике* и логике. Для конструктивистов неприемлем неконструктивный характер объектов, вводимых с помощью А. а. б., и они развивают такое построение математики и логики, которое не использует А. а. б.

Лит.: Кантор Г. Основы общего учения о многообразиях. В кн.: Новые идеи в математике, сб. № 6. СПб, 1914; Богомолов С. А. Актуальная бесконечность. Л.—М., 1934; Петров Ю. А. Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости. М., 1967 [библиогр. с. 160—162].

Б. В. Вирюков, Ю. А. Петров.

**АБСТРАКЦИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ОСУЩЕСТВИМОСТИ** — одна из абстракций математики и логики, состоящая в отвращении от реальных границ конструктивных возможностей, обусловленных ограниченностью нашей жизни в пространстве, во времени и в материалах. А. п. о. позволяет вводить в рассмотрение объекты, не учитывая возможности их реализации (напр., не учитывая требуемых для этого средств, места и т. п.), а принимая во внимание лишь возможность их построения в том смысле, что имеется эффективный (конструктивный) способ (*алгоритм*) для такого построения. В рамках А. п. о., напр., последовательность натуральных чисел есть потенциально осуществимый объект, т. к. нетрудно задать индуктивное определение, порождающее любое натуральное число. Но множество всех натуральных чисел не является потенциально осуществимым объектом, т. к. не может быть построено в рамках А. п. о.: немыслим эффективный способ построения всех вместе натуральных чисел. А. п. о. лежит в основе понятий потенциальной бесконечности как такого дискретного процесса, что если из потенциальной осуществимости некоторого шага процесса построения объекта следует потенциальная осуществимость следующего (непосредственно) шага, то потенциально осуществим любой шаг процесса (т. о., известное правило полной матем. индукции предполагает А. п. о.). Конструктивная математика и конструктивная матем. логика, отвергая абстракцию *актуальной бесконечности*, принимают А. п. о. Хотя А. п. о. — естественная предпосылка многих разделов теор. кибернетики, в последней строятся и теории, ограничивающие в той или иной форме эту абстракцию, т. к. в реальных кибернетических системах невозможны потенциально бесконечные процессы.

Лит.: Шанин Н. А. О конструктивном понимании математических суждений. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 52; Козмиди В. А. О множествах, разрешимых и перечислимых автоматах. В кн.: Проблемы логики. М., 1963; Петров Ю. А. Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости. М., 1967 [библиогр. с. 160—162].

Б. В. Вирюков, Ю. А. Петров.

**АВМ ИТЕРАТИВНАЯ** — аналоговая вычислительная машина, осуществляющая процесс решения задачи в течение некоторого числа циклов. Машина обладает дополнительными свойствами независимого управления и выполняет необходимый минимум логич. и программных операций, имеет устройства для выборки и передачи информации из одного цикла операций в другой (параллельный или последующий). Программа решения обычно задается на *наборном поле*, а при решении узко специализированных задач процесс осуществляется в соответствии с *алгоритмом*, реализуемым посредством устройства управления. Как правило, в АВМ и. реализуются итерационные способы решения (см., напр., «Итератор»). Однако, существуют итеративные аналоговые вычислительные машины, в которых на каждом цикле реализуется принципиально

точное решение исходной задачи при фиксированных значениях некоторых параметров, изменяющихся от цикла к циклу. Это бывает, напр., при решении задач оптимизации систем автомат. регулирования, ур-ний в частных производных и др.

Лит. см. к ст. Аналоговая вычислительная машина. И. М. Витенберг.

**АВМ МЕХАНИЧЕСКАЯ** — комплекс простейших механических аналоговых вычислительных устройств (АВУ), реализующих математические операции сложения, вычитания, умножения, деления, воспроизведения функций одного или двух аргументов, интегрирования и дифференцирования. Эти устройства называют также счетно-решающими механизмами (СРМ). Механические АВУ значительно надежнее (а иногда и точнее) электрических, электромеханических и др., в них не протекают электромагн. переходные процессы и в большинстве случаев они не нуждаются в спец. источниках питания. Их недостатки — относительно большие габариты и вес, сложность изготовления, высокая стоимость, меньшая гибкость при компоновке их в АВМ. Механические АВУ вытеснены электромех. и электр. АВУ, но не потеряли практического значения. Применяют их, когда требуется обеспечить высокую надежность работы или когда реализуемые ф-ции и их аргументы должны обязательно воспроизводиться мех. перемещениями. Особенно широко применяются такие СРМ, как суммирующие (конические дифференциалы) и функциональные преобразователи (кулачковые механизмы, механизмы с некруглыми зубчатыми колесами, с графиками нелинейных зависимостей и с неравномерными шкалами). Большинство СРМ имеют не более двух входов и один выход, на которых фигурируют физ. величины — углы поворота  $\varphi$  или поступательные перемещения  $L$  ведомого (выходного) и ведущих (входных) звеньев. Аналитическое выражение, описывающее поведение простейшего мех. АВУ, является законом движения ведомого звена и может иметь вид:  $\varphi_3 = \psi(\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $\varphi_3 = \psi(\varphi_1, L_2)$ ,  $\varphi_3 = \psi(L_1, L_2)$  или  $L_3 = \psi(L_1, L_2)$ ,  $L_3 = \psi(\varphi_1, L_2)$ ,  $L_3 = \psi(\varphi_1, \varphi_2)$ , где  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $L_1, L_2$  — перемещения ведущих звеньев. Многие СРМ обладают т. н. естественной обратимостью, т. е. допускают изменение направления передачи перемещения по одному из входов на обратное. Это свойство расширяет возможность применения их для реализации не только прямых матем. операций, но и обратных (напр., умножения и деления), однако это требует принятия спец. мер для обеспечения передачи движения в нужном направлении. Осн. расчетами, которые приходится производить, проектируя и применяя СРМ, кроме обычного для АВУ расчета масштабов, являются силовой расчет (закрывающийся в определении усилий или моментов, которые нужно приложить к ведущим звеньям для преодоления нагрузки на ведомые звенья) и расчет мертвых ходов (позволяющий установить точность воспроизведения соответствующей матем. операции). Механические аналоговые

машины могут быть как специализированными, так и универсальными (см. также Аналоговая вычислительная машина, АВМ электромеханическая).

Лит.: К о б р и н с к и й Н. Е. Математические машины непрерывного действия. М., 1954 [библиогр. с. 444—447]; Л е б е д е в А. Н. Счетно-решающие устройства. М., 1968. А. Н. Лебедев.

**АВМ ПНЕВМАТИЧЕСКАЯ** — вычислительная машина непрерывного действия, в которой роль машинных переменных играют величины давления воздуха в различных точках специально построенной сети.

Осн. элементами АВМ п. являются дроссели (пневматические сопротивления), пневматические емкости и мембраны. Д р о с с е л и разделяют на постоянные, регулируемые, переменные и нелинейные. Постоянный дроссель — это участок канала пневматической сети, на котором соотношение между разностью давлений на концах ( $p_1 - p_2$ ) и расходом воздуха  $G$  имеет вид  $G = \alpha(p_1 - p_2)$ , где  $\alpha$  — постоянный для данного дросселя коэффициент (коэффициент расхода). В регулируемых дросселях коэфф.  $\alpha$  можно изменять. В переменных дросселях коэфф.  $\alpha$  изменяется в процессе решения задачи в зависимости от времени или от другой переменной. Регулируемые и переменные дроссели строят гл. о. в виде сопла и какого-либо заграждения. Расстояние от сопла до заграждения изменяется, и в зависимости от этого изменяется и коэфф. расхода. Нелинейные дроссели характеризуются нелинейной функциональной зависимостью расхода от разности давлений. Коэфф.  $\alpha$  в этом случае является сложной ф-цией геометрии дросселя и параметров газа. Они обычно определяются экспериментально и обрабатываются в критериях подобия — числах Рейнольдса.

Пневматические емкости представляют собой глухие и проточные камеры. Вследствие сжимаемости воздуха, давление в камере растет по мере ее заполнения. На основе линейных дросселей и пневматической емкости, в пневматике строится апериодическое звено. Давление на входе звена связано с давлением в камере (оно здесь считается выходным) ур-нием

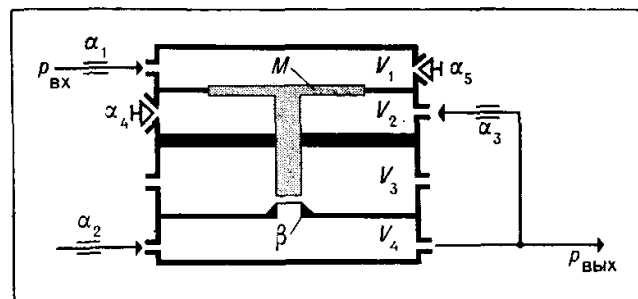


Схема пневматического усилителя.

$$\tau \frac{p_{\text{вых}}}{dt} + p_{\text{вых}} = k p_{\text{вх}} + k_0 p_{\alpha},$$
 в котором коэфф.  $k, k_0$  зависят от коэфф. расхода дросселей, а  $\tau$  — еще и от объема камеры. Т. о., при постоянном давлении на входе звена дав-

ление на выходе изменяется по экспоненциальному закону.

Мембраны используют для преобразования давления воздуха в мех. перемещение. Перемещение это весьма мало, оно составляет величину порядка сотых долей миллиметра, но этого достаточно для перемещения загораживания в дросселе. Именно такую связь очень часто используют, конструируя различные блоки АВМ п. В пневматике чаще всего применяют мембраны с жестким центром.

АВМ п., как и электронная аналоговая вычислительная машина, состоит из набора различных функциональных блоков. Входы и выходы этих блоков представляют собой штуцера, которые для решения данной задачи соединяют с помощью шлангов соответственно соединениям в электронных АВМ. Иногда схема сети может быть жесткой, тогда блоки АВМ п. собирают на платах, соединительные каналы в которых делают литьем, штамповкой либо травлением. К осн. функциональным блокам АВМ п. относятся: усилитель, сумматор, интегратор, множительное устр-во и функциональный преобразователь.

Усилитель (рис.) состоит из дросселя  $\beta$  типа сопло — заслонка, управляемого мембранным блоком  $M$ , трех постоянных дросселей  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , двух регулируемых дросселей  $\alpha_4$  и  $\alpha_5$  и четырех пневмемкостей  $V_1 — V_4$ . В емкость  $V_1$  через дроссель  $\alpha_1$  подается входное давление  $p_{вх}$ . Давление в камере  $V_1$  действует на мембрану, шток которой является заслонкой дросселя  $\beta$ . Перемещение заслонки вызывает изменение давления в камере  $V_4$ , которое создается источником питания и является выходным. Пропорциональная зависимость  $p_{вых}$  от  $p_{вх}$  обеспечивается отрицательной обратной связью. Эта связь осуществляется в виде давления (которое поступает с выхода усилителя через дроссель  $\alpha_3$ ) на обратную сторону мембраны в камере  $V_2$ . Изменением регулируемых дросселей  $\alpha_4, \alpha_5$  коэффициент усиления усилителя можно менять в широких пределах. Описанный усилитель характеризуется ограниченным расходом воздуха на выходе, т. к. в канале питания имеется постоянный дроссель. Поэтому при больших нагрузках часто применяют усилители мощности.

Наиболее простая схема сумматора представляет собой собранный в точку пучок линейных дросселей. Если суммарный расход воздуха в точке соединения равен нулю,

устр-во описывается ур-нием 
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (p_i - p_{вых}) = 0, \text{ откуда } p_{вых} = \sum_{i=1}^n k_i p_i, \text{ причем}$$

$0 < k < 1$  и  $\sum_{i=1}^n k_i = 1$ . Последние соотношения ограничивают область применения такого сумматора. Схемы, свободные от указанных ограничений, построены на принципе компенсации.

Интеграторы строят по схеме, содержащей аperiodическое звено (коэфф. передачи его равен единице), охваченное положительной обратной связью. Примером интегратора, построенного по такой схеме, может служить интегратор Фернера, работающий в диапазоне низких рабочих давлений 0—100 мм вод. ст.

Умножение давлений  $p_1$  и  $p_2$  основано на том, что коэффициентом расхода дросселя, к которому подведено давление  $p_1$ , можно управлять с помощью давления  $p_2$ . Тогда при определенных условиях реализуется зависимость  $p_{вых} = k p_1 p_2$ , в которой  $k$  — постоянное число. На этом принципе построено, напр., множительно-делительное устр-во Ин-та проблем управления АН СССР.

Погрешность решения в АВМ п. значительно выше, чем в электронных АВМ, а частотный диапазон (доли герца) уже. Поэтому их применяют в тех областях, где существенно важны их достоинства: высокая надежность, взрывобезопасность, нечувствительность к высоким т-рам, простота обслуживания, малая стоимость. Такими областями являются хим. производство, металлургия, теплоэнергетика, газовая пром-сть, нефтедобыча, нефтепереработка и т. п. Наличие в АВМ п. подвижных мех. узлов, а также низкая их точность существенно сужают сферу их применимости. Этих недостатков не имеют цифровые пневматические устр-ва струйной техники (см. *Пневматика*), которые находят все более широкое применение, вытесняя АВМ п.

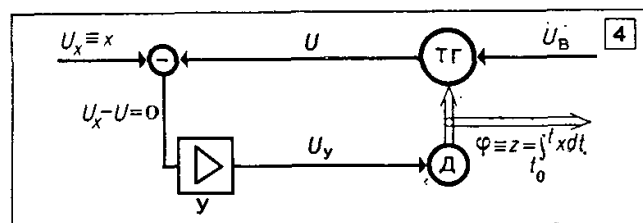
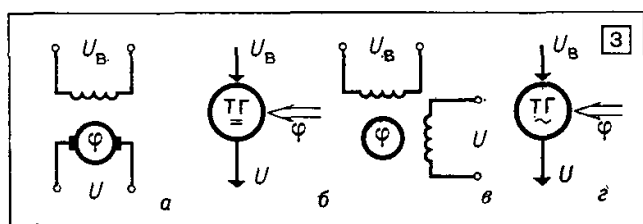
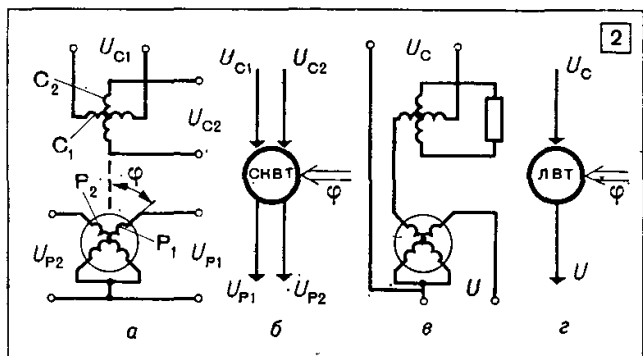
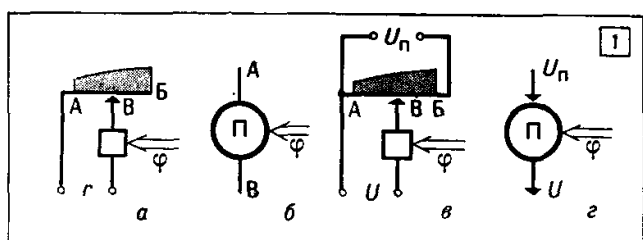
АВМ п. являются, напр., моделирующая установка ПВМ-2 (СССР), предназначенная для решения обыкновенных линейных дифф. ур-ний до 6-го порядка, и установка Фернера (ГДР) для моделирования различных цепей регулирования.

Лит.: Дмитриев В. Н., Чернышев В. И. Пневматические вычислительные приборы непрерывного действия. М.—Л., 1962 [библиогр. с. 92—93]; Пневмо- и гидроавтоматика. М., 1964.

Л. А. Казакевич.  
**АВМ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ** — комплекс простейших электромеханических и механических аналоговых вычислительных устройств (АВУ), реализующих математические операции сложения, вычитания, умножения, деления, воспроизведения функций одного или двух аргументов, интегрирования в дифференцирования. Входными и выходными физ. величинами материалов. АВУ могут быть мех. (обычно угол поворота) и электр. (обычно напряжение постоянного или переменного тока). АВМ э., по сравнению с механическими АВМ, менее надежны в работе (особенно, если они имеют скользящие контакты), более чувствительны к изменениям т-ры и влажности, но, как правило, проще в изготовлении и дешевле. Многие АВМ э. обладают принципиальными погрешностями. Точность повышается уменьшением нагрузки, применением высококачественных материалов, тщательностью изготовления и др. Для всех электромех. АВУ характерно отсутствие естественной обратимости. К электромех. АВУ относятся в

основном потенциометры, вращающиеся трансформаторы и тахогенераторы.

**Потенциометр** (рис. 1, а — з) представляет сопротивление с двумя неподвижными (А, Б) и одним подвижным (В) контактами. Наличие подвижного контакта позволяет использовать потенциометр в качестве переменного сопротивления (ПС), меняющегося по закону  $r = f(\varphi)$ , или делителя напряжения (ДН), выходное напряжение которого равно  $U = \frac{U_{\Pi}}{r_{\Pi}} f(\varphi)$ , где  $\varphi$  — угол поворота движка,  $r_{\Pi}$  — полное сопротивление,  $U_{\Pi}$  — напряжение питания потенциометра. Сопротивление потенциометра — это калиброванный провод, намотанный на плоский каркас. Движок в виде рычажка с контактной щеткой, при-



1. Потенциометр: а — как переменное сопротивление (б — его условное обозначение); в — как делитель напряжения (г — его условное обозначение).
2. Вращающийся трансформатор: а — синусно-косинусный (б — его условное обозначение); в — линейный (г — его условное обозначение).
3. Тахогенератор: а — постоянного тока (б — его условное обозначение); в — переменного тока (г — его условное обозначение).
4. Интегрирующий привод (У — усилитель, Д — двигатель).

жатой к проводу, в месте, свободном от изоляции, крепится в спец. стакане. Потенциометр, как ДН, служит для воспроизведения зависимостей  $z = x F(y)$ , в частности, как множительное устр-во, реализующее  $z = xy$ . Потенциометр как ПС служит для воспроизведения функций  $z = F(x)$ . Применение ПС в мостовых схемах позволяет реализовать весьма сложные зависимости, напр..  $z = \prod_{k=1}^m F_h(x_k) \left[ \prod_{s=1}^n F_s(y_s) \right]^{-1}$ . Специализированный синусно-косинусный потенциометр воспроизводит одновременно две ф-ции  $z_1 = x \sin y$ ,  $z_2 = x \cos y$ .

**Вращающийся трансформатор** (рис. 2, а — г) или синусно-косинусный вращающийся трансформатор (СКВТ), представляет собой индукционную электр. микромашину с двумя статорными ( $C_1, C_2$ ) и двумя роторными ( $P_1, P_2$ ) обмотками, имеющую одив мех. вход  $\varphi$  (угол поворота ротора), два электр. входа  $U_{C1}, U_{C2}$  (амплитуды напряжений, питающих обмотки  $C_1, C_2$ ) и два электр. выхода  $U_{P1}, U_{P2}$  (амплитуды эдс, индуцируемых в обмотках  $P_1, P_2$ ), причем  $U_{P1} = k_T(U_{C1} \sin \varphi + U_{C2} \cos \varphi)$ ,  $U_{P2} = k_T(U_{C1} \cos \varphi - U_{C2} \sin \varphi)$ , где  $k_T = \text{const}$ . СКВТ широко используется для моделирования различных зависимостей с тригонометрическими ф-циями, напр.,  $z_1 = x \sin y$ ,  $z_2 = x \cos y$  и др. СКВТ с особым соединением обмоток (рис. 2, в, г) превращается в линейный вращающийся трансформатор (ЛВТ), с выходным напряжением, равным  $U = k U_C \varphi$ ,  $|\varphi| \leq 60^\circ$ , где  $k = \text{const}$ .

**Тахогенератор** (рис. 3, а — г) — электр. микромашина, генерирующая напряжение  $U = k U_B \frac{d\varphi}{dt}$ , где  $k = \text{const}$ ,  $U_B$  — напряжение возбуждения,  $\varphi$  — угол поворота ротора или якоря; служит для реализации операции дифференцирования. Для воспроизведения операции интегрирования тахогенератор включается в схему интегрирующего привода (рис. 4).

В АВМ э. на постоянном токе применяются потенциометры и тахогенераторы постоянного тока; на переменном — вращающиеся трансформаторы и тахогенераторы переменного тока. В настоящее время практическое применение находят только специализированные АВМ э. Однако потенциометры как простейшие электромех. А В У широко используются и в универсальных электронных АВМ, напр., «МН-7», «ЭМУ-10» и др.

Лит.: Ходоров Т. Я. Электромеханические индукционные счетно-решающие устройства. Л., 1960 [библиогр. с. 180—181]; Лебедев А. Н. Счетно-решающие устройства. М., 1968; Белевцев А. Т. Потенциометры. М., 1969 [библиогр. с. 322—326].  
А. Н. Лебедев.

**АВТОКОД** — язык программирования, ориентированный на конкретную вычислительную машину. Из всех других машинно-ориентированных языков А. по форме и по содержанию



наиболее близок к языку машинных команд, т. е. к языку, который непосредственно интерпретируется машиной. А. позволяет использовать при программировании все возможности языка машинного. Но при этом необходимо знать операции машинные, форматы и ф-ции машинных команд, форматы данных, способы адресации памяти ЦВМ и др. особенности архитектуры данной машины. А. предоставляет удобные средства для записи машинных команд и данных, а также средства для описания вспомогательных ф-ций, полезных при подготовке и документировании программ. Программа, написанная на А., является более осмысленной для программиста, чем программа, написанная на машинном языке. Трансляция программ с А. на машинный язык осуществляется ассемблером. Несмотря на то, что А. в некоторой части специфичен для каждой машины (поскольку в нем учитываются их особенности), общая структура языка сохраняется во всех А. Основу языка составляет набор мнемонических символов, предназначенных для задания всех машинных операций и операций, выполняемых ассемблером. Кроме того, этот язык допускает конструкции, которые дают возможность в командах ссылаться на операнды, используя при этом метки, имеющиеся в машинных командах и командах ассемблера.

Удобство А. в значительной мере зависит от набора вспомогательных ф-ций, присущих ассемблеру и задаваемых его командами. Последние позволяют определять данные в допустимых представлениях, резервировать области памяти, определять метки как значения выражений, указывать входные и внешние метки программы с целью сегментации и независимой трансляции программ, управлять присвоением адресов, предписывать правила документирования программы. Для написания программы на А. обычно используется бланк, в котором выделяются поля для метки, операции, операндов, комментария и поле идентификации строки. Каждая строка бланка предназначена для записи одного предложения на А. Расширение А. может быть достигнуто в результате использования макрокоманд, которые обозначают группу действий, задаваемых пользователем в макроопределениях. А. составляют основу математического обеспечения ЦВМ и, как правило, используется для создания операционных систем, трансляторов, а также прикладных программ, предъявляющих особые требования к эффективному использованию возможностей машин.

Ю. М. Баяковский.

**АВТОКОЛЕБАНИЯ** — устойчивые незатухающие колебания, возникающие в нелинейных динамических системах вследствие инерционных и нелинейных свойств системы, при отсутствии внешних периодических воздействий. А. характерны тем, что их амплитуда и частота не зависят от изменения в определенных пределах начальных условий системы. Системы, в которых имеют место А., наз. а в т о к о л е б а т е л ь н ы м и.

Если нелинейная динамическая система описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = F[X(t)] \quad (1)$$

или разностным уравнением

$$X_{n+1} = \Phi(X_n), \quad (2)$$

где  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ ;  $X_n = X(t_n) = [x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n}]$  — векторы фазовых координат, однозначно определяющие динамическое состояние непрерывной и дискретной систем, то в режиме А. имеют место соотношения  $X(t) = X(t+T)$  или  $X_n = X_{n+N}$ , где  $T$  и  $N$  — соответственно периоды А. непрерывной и дискретной систем.

А. в физической системе возможны лишь тогда, когда поступление энергии от ее источника за период равно потере (рассеянию) энергии за это же время. Это условие баланса энергии и есть условие существования А.

В нелинейной системе с неустойчивым положением равновесия А. возникают самопроизвольно, вслед за включением системы. В системах с устойчивым в определенной области положением равновесия для возбуждения автоколебаний необходимо определенное начальное отклонение фазовых координат от их равновесного состояния. Автоколебательные системы чрезвычайно распространены в радиотехнике (для построения генераторов колебаний), в автоматическом регулировании (для создания вибрационных регуляторов), в цифровой вычислительной технике (в схемах мультивибраторов), в технической кибернетике (напр., для построения автоколебательных экстремальных систем управления и самонастраивающихся систем) и т. д. Для многих систем автоматического регулирования А. являются вредными и недопустимыми, и для устранения их вводят в систему различные корректирующие звенья, изменяющие динамические и статические свойства системы.

Лит.: Харкевич А. А. Автоколебания. М., 1954 [библиогр. с. 169—170]; Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., 1959 [библиогр. с. 905—912]. В. М. Кутцевич.

**АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ** — функция, характеризующая степень связи между значениями случайного процесса  $x(t)$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ .

Для комплексного случайного процесса  $x(t)$  А. ф. определяется следующим образом:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = M \{ [x(t_1) - m_x(t_1)] \overline{[x(t_2) - m_x(t_2)]} \}$$

(черта сверху обозначает комплексно-сопряженную ф-цию). Для действительного случайного процесса

$$R_{xx}(t_1, t_2) = M \{ [x(t_1) - m_x(t_1)] [x(t_2) - m_x(t_2)] \},$$

где  $M$  — знак матем. ожидания,  $m_x(t)$  — матем. ожидание процесса  $x(t)$ .

А. ф. можно выразить через двумерный дифференциальный закон распределения

(двумерную совместную плотность вероятности)  $p[x(t_1), x(t_2)]$  случайных величин  $x(t_1)$  и  $x(t_2)$

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)] p[x(t_1), x(t_2)] dx(t_1) dx(t_2).$$

По А. ф. можно судить о влиянии одного значения случайной ф-ции  $x(t_1)$  на другое  $x(t_2)$  и характеризовать изменчивость случайной ф-ции.

В общем случае А. ф. зависит от значений двух аргументов  $t_1$  и  $t_2$ . Для стационарных в широком смысле процессов А. ф. зависит лишь от разности этих аргументов  $\tau = t_2 - t_1$ , т. е.  $R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\tau)$ .

Если  $x(t)$  — нормальная случайная ф-ция  $t$ , то для ее полного описания достаточно знать матем. ожидание  $m_x(t)$  и корреляционную ф-цию  $R_{xx}(t_1, t_2)$ .

При практических исследованиях часто используют нормированные А. ф.

$$\rho_{xx}(t_1, t_2) = \frac{R_{xx}(t_1, t_2)}{\sqrt{R_{xx}(t_1, t_1) R_{xx}(t_2, t_2)}}.$$

А. ф. обладает рядом важных свойств: 1) при  $t_1 = t_2 = t$  А. ф. равна дисперсии случайной ф-ции  $x(t)$  и характеризует ее среднюю мощность  $D_{xx}(t) = R_{xx}(t, t)$ ; 2) для комплексной случайной ф-ции  $x(t)$   $R_{xx}(t_1, t_2) = \overline{R_{xx}(t_2, t_1)}$ , а для стационарного случая:  $R_{xx}(\tau) = \overline{R_{xx}(-\tau)}$ . Если  $x(t)$  — вещественная ф-ция, то последние выражения можно переписать соответственно:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_2, t_1);$$

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau);$$

3) А. ф. является убывающей ф-цией

$$|R_{xx}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{R_{xx}(t_1, t_1) R_{xx}(t_2, t_2)},$$

для стационарного случая

$$R_{xx}(0) = D_{xx} \geq R_{xx}(\tau);$$

4) для широкого класса случайных процессов

$$\lim_{(t_2 - t_1) \rightarrow \infty} |R_{xx}(t_1, t_2)| \rightarrow 0.$$

Для эргодического случайного процесса вычисление А. ф. можно выполнить по одной реализации (см. *Эргодическая теория*):

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [x(t) - m_x][x(t - \tau) - m_x] dt.$$

Для конечной длины реализации  $x(t)$  возможно получить только оценку А. ф., вычисляе-

мую как

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [x(t) - m_x][x(t - \tau) - m_x] dt,$$

где  $T_p$  — длина реализации. Благодаря развитию цифровых и импульсных систем, широко стали использоваться т. н. дискретные А. ф. дискретного случайного процесса  $x(nT)$ . Здесь  $T$  — интервал дискретизации,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  — дискретное время. Дискретные А. ф. подобно (1) определяются так:

$$R_{xx}(i_1T, i_2T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x(i_1T) - m_x(i_1T)][x(i_2T) - m_x(i_2T)] p[x(i_1T), x(i_2T)] dx(i_1T) dx(i_2T)$$

и обладают свойствами, аналогичными непрерывным А. ф. См. также *Случайных процессов теория*, *Корреляционная теория случайных процессов*.

Б. Ю. Мандровский-Соколов.  
**АВТОМАТ** (от греч. αὐτόματος — самодействующий) — 1) Устройство, выполняющее некоторый процесс без непосредственного участия человека. Появление А. относится к глубокой древности. Это были в основном часы и различные мех. игрушки, которым придавали форму человека или животных. Со 2-й пол. 18 в. начинается широкое применение А. в пром-сти. До недавнего времени А. строили, чтобы заменить ими человека при выполнении физ. труда. В 40—50-х гг. 20 в. появились А., выполняющие некоторые виды умственного труда. Это различного рода автомат. вычисл. машины и др. кибернетические устр-ва. Применение А. значительно повышает производительность труда, скорость и точность выполнения операций. А., кроме того, применяют для освобождения человека от утомительного, однообразного труда, для ограждения человека от условий, опасных для жизни или вредных для здоровья; используют их и там, где присутствие человека невозможно (высокая т-ра, давление, ускорение и т. п.). В настоящее время А. получили широкое применение во всех отраслях нар. х-ва и являются основой технического прогресса (см. *Кибернетика техническая*, *Цифровая вычислительная машина*).

2) Матем. понятие, модель математическая реальных (технических) А. Абстрактно А. можно представить как некоторое устр-во («черный ящик»), имеющее конечное число входных и выходных каналов и некоторое мн-во внутр. состояний. На входные каналы А. извне поступают сигналы, и в зависимости от их значения и от того, в каком состоянии он находился, А. переходит в следующее состояние и выдает сигналы на свои выходные каналы. С течением времени входные сигналы изменяются, соответственно изменяются и состояние А., и его выходные сигналы. Т. о., А. функционирует во времени (см. *Автоматического управления*



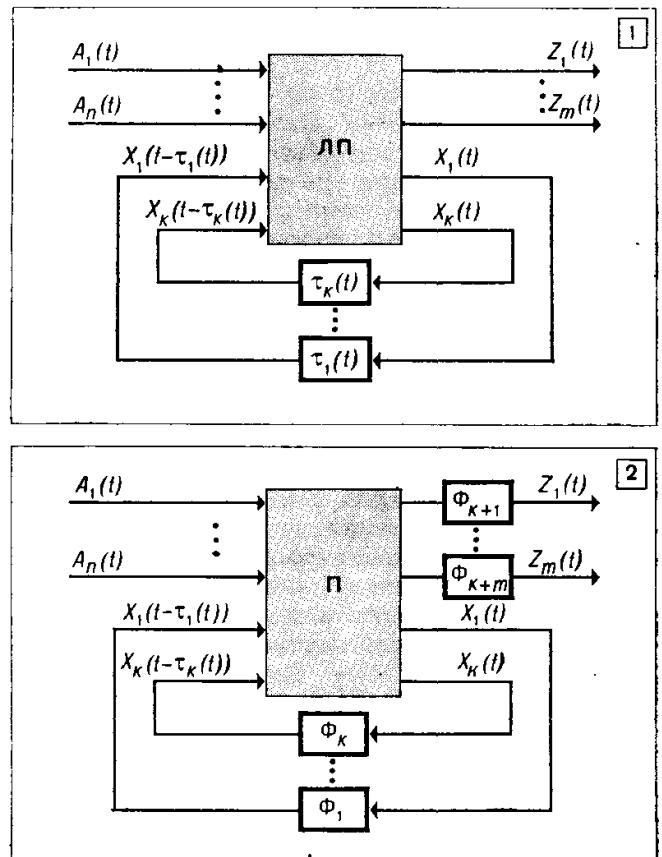
теория, Автоматов теория). В узком смысле термин А. употребляется для обозначения т. н. синхронных дискретных А. Такие А. имеют конечные мн-ва значений входных и выходных сигналов, называемые входным и выходным алфавитами. Время разбито на промежутки одинаковой длительности (такты); на протяжении всего такта входной сигнал, состояние и выходной сигнал не изменяются. Изменения происходят только на границах тактов. Следовательно, время можно считать дискретным  $t = 1, 2, \dots, n, \dots$ . Такой А. формально описывается пятеркой  $A = \langle X, Y, Q, \delta, \lambda \rangle$ , где  $X$  и  $Y$  соответственно входной и выходной алфавиты,  $Q$  — мн-во состояний,  $\delta: X \times Q \rightarrow Q$  — ф-ция переходов и  $\lambda: X \times Q \rightarrow Y$  — ф-ция выходов. В каждый такт времени А. находится в одном из состояний и на вход его поступает некоторая буква алфавита  $X$ . Если в такт  $t_0$  на вход А. поступает буква  $x_0 \in X$  и А. находится в состоянии  $q \in Q$ , то значение выхода в этом же такте равно  $\lambda(x_0, q)$  и в следующем такте А. будет находиться в состоянии  $\delta(x_0, q)$ . За  $n$  тактов работы А. преобразует последовательность входных букв длины  $n$  в последовательность выходных букв той же длины, т. е. А. определит некоторое отображение мн-ва последовательностей входных букв во мн-во последовательностей выходных букв. См. *Алгебраическая теория автоматов*. М. И. Кратко.

**АВТОМАТ АВТОНОМНЫЙ** — автомат, функционирование которого не зависит от подаваемых на его вход букв. В этом смысле говорят, что А. а. является автоматом без входов. Формально А. а. — это четверка  $\langle Q, Y, \Phi, \Psi \rangle$  и функционирование его определяется рекуррентным соотношением:  $q(t+1) = \Psi[q(t)]$ ,  $y(t) = \Phi[q(t)]$ . Бесконечным А. а. является, напр., *Тьюринга машина*, когда мн-во всех ее конфигураций рассматривается как мн-во состояний данного автомата. Если А. а. является *автоматом конечным*, то его выходная последовательность — периодическая, причем период не превышает числа состояний (см. *Поведение автоматов*).

**АВТОМАТ АСИНХРОННЫЙ** — математическая модель устройства, предназначенного для переработки последовательности входных дискретных сигналов  $A_1(t), \dots, A_n(t)$  в последовательности выходных дискретных сигналов  $Z_1(t), \dots, Z_m(t)$ . При этом считается, что очередное изменение значений входных сигналов может произойти только тогда, когда в А. а. закончится переходный процесс, вызванный предыдущим изменением этих сигналов. Схему А. а. можно построить на одних безынерционных логических элементах. Однако в подавляющем большинстве случаев в его схему вводят задержки — элементы, каждый из которых осуществляет сдвиг сигнала, подаваемого на его вход.

Наиболее распространенная схема А. а. показана на рис. 1. В этой схеме  $A_1(t), \dots, A_n(t)$  — входные,  $X_1(t), \dots, X_k(t)$  — промежуточные,  $Z_1(t), \dots, Z_m(t)$  — выходные сиг-

налы. Все  $v$  безынерционных логич. элементов А. а. собраны в логич. преобразователе (ЛП). Задержки  $\tau_1(t), \dots, \tau_k(t)$  вынесены отдельно. В общем случае величина каждой из задержек является случайной ф-цией времени с ограничением:  $t_{\max} > \tau_i(t) > 0$ , где  $i = 1, \dots, k$ ;  $t_{\max}$  — заданная предельная величина. Иногда в А. а. принимают, что  $\tau_i(t) = \text{const}$ . Поскольку практически не существует безынерционных логич. элементов, широкое распространение получила схема А. а., показанная



1. Схема асинхронного автомата с задержками  
2. Схема асинхронного автомата с фильтрами

на рис. 2. В этой схеме преобразователь  $\Pi$  представляет собой  $v$  реальных логич. элементов, каждый из которых выполняет определенное логич. преобразование и сдвигает на  $\tau_j(t)$  сигнал, полученный в результате этого преобразования. В общем случае величина рассматриваемого сдвига является случайной ф-цией времени с ограничением:  $\tau_{\max} > \tau_j(t) \geq 0$ , где  $\tau_{\max}$  — заданная предельная величина. Чтобы эта схема (рис. 2) описывалась той же системой логич. ур-ний, что и предыдущая (рис. 1), в ней  $k$  задержек заменяется  $k + m$  фильтрами. Фильтром  $\Phi_i$ , где  $i = 1, \dots, k + m$ , наз. элемент, пропускающий со сдвигом на  $\tau_i(t)$  изменение сигнала на его выходе только в том случае, когда последующее его изменение произойдет позже, чем через  $\tau_i(t)$ .

Величина сдвига, выполняемого фильтром, считается случайной ф-цией, на которую

наложено ограничение:  $t_{\max} > \tau_i(t) > t_{\min}$ , где  $t_{\min}$  — максимально возможное время переходного процесса в преобразователе П, возникающего после изменения одного либо нескольких (одновременно) входных сигналов. А. а., в котором  $k = 0$  (т. е. нет ни одного контура обратной связи), наз. *комбинаторным*, или *примитивным*. При  $k > 0$  А. а. наз. *последовательностным*. Практическое значение имеет только конечный А. а., в котором параметры  $n, k, m, v$  и количество состояний каждого элемента — конечны. Конечный А. а. задается мн-вом входных  $R = \{r_1, \dots, r_{2^n}\}$ , устойчивых внутренних  $K = \{k_1, \dots, k_s\}$  и выходных  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{2^m}\}$  состояний и функциями переходов и выходов, дающими однозначное отображение мн-ва пар состояний  $p, k$  в мн-во пар состояний  $k, \lambda$ . Конечный А. а. является матем. моделью, определяющей осн. характеристики электронных вычисл. и информационных машин, релейных устр-в и дискретных (логич.) автоматов. Важнейшей проблемой, связанной с синтезом конечного А. а., является *кодирование состояний автомата*. Эта проблема вызвана тем, что в схемах рис. 1 и 2 задержки или сдвиги могут иметь различные значения. Поэтому в конечном А. а. возникают состязания между его цепями, что приводит к появлению ошибок при переходах из одного устойчивого состояния в другое. Устранение этих ошибок производится правильным кодированием внутр. состояний. См. также *Асинхронных автоматов теория*. Лит.: Лазарев В. Г., Пийль Е. И. Синтез асинхронных конечных автоматов. М., 1964 [библиогр. с. 252—257]; Лазарев В. Г., Пийль Е. И. Синтез управляющих автоматов. М., 1970 [библиогр. с. 392—398]; Якубайтис Э. А. Синтез асинхронных конечных автоматов. Рига, 1970; Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств. Пер. с англ. М., 1962; Perrin J. P., Depouette M., Daclin E. Systèmes logiques, t. 1—2. Paris, 1967. Э. А. Якубайтис.

**АВТОМАТ БЕЗ ПАМЯТИ** — *автомат конечный*, имеющий одно внутреннее состояние. Поскольку в процессе функционирования состояние такого автомата изменяться не может, то выходной символ зависит только от входного символа в данном такте и не зависит от ранее поступивших символов. Оператор, реализуемый таким автоматом, осуществляет побуквенный перевод входных символов в выходные. Такие операторы наз. *истинностными*. Они являются, по существу, функциями многозначной логики.

**АВТОМАТ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ** — дискретный стационарный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано статистически. Свойства А. в., как входного—выходного преобразователя, изучаются на такой модели. Пусть  $X, Y, Q$  — конечные или счетные множества входных и выходных букв и состояний А. в. соответственно. Тогда на декартовом произведении множеств  $Q \times Y$  определено условное вероятностное распре-

деление  $\mu(a', y | a, x)$ , заданное на каждом элементе декартова произведения множеств  $Q \times X$ . А. в. обозначается как  $\langle X, Y, Q, \mu(a', y | a, x) \rangle$ . Функционирование А. в. состоит в том, что в дискретные моменты времени на вход устр-ва подается последовательность букв входного алфавита  $X$ . При условии, что А. в. находится в состоянии  $a \in Q$  и на вход подана буква  $x \in X$ , *автомат* переходит в следующее состояние  $a' \in Q$  и выдает букву  $y \in Y$  с вероятностью  $\mu(a', y | a, x)$ . В первом такте фиксировано начальное состояние А. в. или начальное распределение  $\mu(a)$  вероятностей состояний. Для теории А. в. существенно то, как именно сказывается закон функционирования, определенный выше для А. в. как однотоктного преобразователя информации, на законе его функционирования «в целом» как многотоктного устр-ва, определяющего преобразования последовательностей входных букв в последовательности выходных букв с тем же числом букв. Свойства А. в. как идентификатора событий изучаются на модели А. в., выход которого не рассматривается. Тогда на множестве состояний  $Q$  определяется условное распределение вероятностей  $\mu(a' | a, x)$ , заданное на каждом элементе декартова произведения множеств  $Q \times X$ . Пусть  $F \subset Q$  — подмн-во  $Q$  и  $\mu(a)$  — распределение вероятностей начальных состояний. А. в. наз. объект  $\langle X, Q, F, \mu(a' | a, x), \mu(a) \rangle$ . Функционирование такого А. в. определяется почти аналогично, с той только разницей, что условное вероятностное распределение определяет переходы лишь для его состояний. А. в. наз. *конечным*, если конечны мн-ва  $X, Y, Q$ . Пусть  $n$  — число состояний А. в. Тогда рассматривают А. в. и как систему  $(n \times n)$ -матриц с неотрицательными элементами вида  $M(y | x)$ ,  $x \in X, y \in Y$ , где элементы матриц определены как  $m_{ij}(y | x) = \mu(a_j, y | a_i, x)$  или, во втором случае, как систему стохастических  $(n \times n)$ -матриц  $A(x)$ ,  $x \in X$ , где элементы матриц определены как  $a_{ij}(x) = \mu(a_j | a_i, x)$ . Удобно рассматривать распределение вероятностей  $\mu(a)$  в векторной форме. Тогда формально функционирование А. в. можно описать матрицей преобразования  $M(q | p)$ . Обозначим слово, подаваемое на вход А. в.,  $p = x_1 \dots x_s$ . Пусть  $\mu(e)$  — вектор, составленный из вероятностей начальных состояний А. в. Тогда вектор вероятностей конечных состояний А. в. имеет вид  $\mu(p) = \mu(e) A(p)$ , где  $A(p)$  — соответствующая матрица.

Одна из осн. задач теории А. в. — описание класса событий, представимых в конечных А. в. Пусть  $\chi_A(p) = \bar{\mu}(e) A(p) \bar{n}_F$ , где координаты вектора-столбца  $\bar{n}_F$  равны единице для номеров соответствующих состояниям из  $F$  и нулю — для остальных номеров. Пусть  $F_X$  — мн-во всех слов в алфавите  $X$ . Говорят, что событие  $S \in F_X$  представлено в А. в. начальным вектором состояний  $\bar{\mu}(e)$ ,

множеством отмеченных состояний  $F$  и точкой сечения  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ , если любое слово  $p$  из  $F_X$  тогда и только тогда принадлежит  $S$ , если выполнено следующее условие:  $\chi_A(p) > \lambda$ . Класс представимых событий является континуальным множеством. Представимое событие  $T$  характеризуется тем, что определяет в пространстве  $L$  числовых последовательностей  $\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , сумма которых сходится абсолютно к единице, некоторую линейную эквивалентность  $\equiv_T$  так, что фактор-пространство  $L/\equiv_T$  по этой эквивалентности оказывается конечномерным. Существуют примеры нерегулярных представимых событий и примеры непредставимых событий, являющихся, однако, примитивно-рекурсивными мн-вами. Доказано, что класс представимых в конечных А. в. событий совпадает с классом событий, представимых в конечных автоматах линейных. Для учета реальных возможностей статистич. эксперимента по распознаванию принадлежности данного слова представляемому событию приходится вводить понятие изолированной точки сечения  $\lambda$  относительно автомата  $A$  как числа, удовлетворяющего условию  $(p) (p \in F_X \rightarrow |\chi_A(p) - \lambda| > \delta)$ , где  $\delta > 0$ . Конечный А. в. с изолированной точкой сечения представляет только регулярные события. Однако можно привести примеры регулярных событий, которые конечные А. в. представляют с меньшим числом состояний, чем детерминированные.

Задача устойчивости А. в. состоит в характеристике класса А. в., которые при достаточно малых возмущениях переходных вероятностей  $\mu(a'|a, x)$  и фиксированной точке сечения представляют одно и то же событие. Класс конечных А. в., все переходные вероятности которых строго положительны, является устойчивым относительно изолированной точки сечения.

А. в., как входной — выходной преобразователь, определяет многотактные каналы связи условием  $\tau \frac{M}{\mu(e)}(q|p) = \bar{\mu}(e) M(q|p) \bar{e}$ , где вектор-столбец  $e$  состоит только из единиц. Их существенное свойство заключается в том,

что отношения вида  $\frac{\tau(q_1 q_2 | p_1 p_2)}{\tau(q_1 | p_1)}$ , если они

определены, должны быть условными вероятностными распределениями. Состояния  $a$  и  $b$  одного или различных А. в. эквивалентны, если  $\tau_a^M(q|p) = \tau_b^N(q|p)$ ,  $p \in F_x$ ,  $q \in F_y$ .

Для распознавания эквивалентности пары состояний одного А. в. достаточно диагн. простого эксперимента длины  $(n-1)$ , а для различных А. в. — длины  $(n+m-1)$ , где  $n$  и  $m$  — числа состояний соответствующих автоматов. Два А. в. эквивалентны, если для каждого состояния одного из них найдется эквивалентное ему состояние другого.

Пусть А. в.  $A$  с  $n$  состояниями имеет пару эквивалентных состояний  $a_1$  и  $a_2$ . Система матриц  $B(y|x)$ , полученная из системы матриц

$A(y|x)$  вычеркиванием строки и столбца  $a_1$  и заменой столбца  $a_2$  на сумму столбцов  $a_1$  и  $a_2$ , определяет А. в. с  $(n-1)$  состоянием, эквивалентный данному. В отличие от теории детерминированных автоматов мн-во миним. А. в., эквивалентных данному, вообще говоря, континуально.

А. в.  $A$  гомоморфен А. в.  $B$ , если существует такая прямоугольная матрица полного ранга  $H$ , что  $A(y|x)H = HB(y|x)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  и  $Z_A H = Z_B$ , где  $Z_A$  и  $Z_B$  — допустимые мн-ва векторов состояний соответствующих автоматов. Из гомоморфизма  $A$  и  $B$  следует, что это — эквивалентные автоматы. Из эквивалентности  $A$  и  $B$  вытекает существование псевдо-вероятностного автомата  $C$ , которому гомоморфны  $A$  и  $B$ , т. е. автомата, формально определяемого как вероятностный, но переходные вероятности могут принимать отрицательные значения. Можно отметить результат, что А. в.  $A$  эквивалентен детерминированному автомату  $B$ , на входе которого установлен генератор случайных кодов, управляемый последовательностью входных букв  $A$ . Структурная теория А. в. развита пока недостаточно.

Методы теории А. в. опираются на свойства стохастических матриц, матриц с неотрицательными элементами и определяемых этими матрицами линейных преобразований. Существенное значение имеют также чисто автоматные методы, поскольку формально А. в. — это линейный преобразователь распределений вероятностей на мн-ве  $Q$ , т. е. линейный автомат с бесконечным числом состояний  $\mu(p)$ ,  $p \in F_X$ .

Изучение А. в. имеет важное значение для разработки методов анализа дискретных устр-в, проявляющих статистически закономерное случайное поведение, выяснения функциональных возможностей таких устр-в и обоснования границ целесообразности их использования, а также для решения задач синтеза устр-в, удовлетворяющих заданной системе требований.

Лит.: Рабин М. О. Вероятностные автоматы. В кн.: Кибернетический сборник, № 9. М., 1964; Карлайл И. В. Приведенные формы для стохастических последовательных машин. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, в. 2. М., 1966; Бухараев Р. Г. Вероятностные автоматы. Казань. 1970; Поспелов Д. А. Вероятностные автоматы. М., 1970 [библиогр. с. 84—87]; Starke P. H. Theorie stochastischer Automaten. «Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik», 1965, Bd. 1, H. 1—2. Р. Г. Бухараев.

**АВТОМАТ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ** — автомат, функция перехода которого является всюду определенной (однозначной) функцией  $\Psi: Q \times X \rightarrow Q$ , где  $Q$  — мн-во состояний и  $X$  — мн-во входных букв (входной алфавит). **АВТОМАТ ДЕФИНИТНЫЙ** — автомат конечный, для которого существует такое число  $t$ , что каждое входное слово длины  $t$  переводит автомат из любого состояния в одно и то же состояние, зависящее от этого входного слова. А. д. находят различные применения, в частности, при разработке теории кодирования. Схемы А. д. можно построить из элементов задержки и функций алгебры логики без петель обратной связи.

**АВТОМАТ ИНИЦИАЛЬНЫЙ** — автомат, в котором одно из состояний выделено в качестве начального состояния. Именно с этого состояния  $A$  и всегда и начинает работу. См. *Введение автоматов*.

**АВТОМАТ КОНЕЧНЫЙ** — автомат, у которого мн-во внутренних состояний и мн-во входных значений ( $a$ , следовательно, и мн-во выходных значений) являются конечными мн-вами. Абстрактно,  $A.к.$  — это пятерка  $\langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$ , где  $A, X, Y$  — конечные мн-ва, называемые соответственно мн-вом внутренних состояний, мн-вом входных сигналов и мн-вом выходных сигналов, а  $\delta$  и  $\lambda$  — однозначные ф-ции  $\delta: A \times X \rightarrow A$  — ф-ция переходов,  $\lambda: A \times X \rightarrow Y$  — ф-ция выходов. Понятие  $A.к.$  было предложено в качестве математической модели тех. устройств дискретного действия, т. к. любое такое устр-во (в силу конечности своих размеров) может иметь только конечное число состояний. Теория  $A.к.$ , являясь осн. составной частью общей теории автоматов, имеет большое прикладное значение, в частности, ее методы применяются при проектировании ЦВМ и др. автоматических дискретных устройств.

Лит.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]. М. И. Кратко.

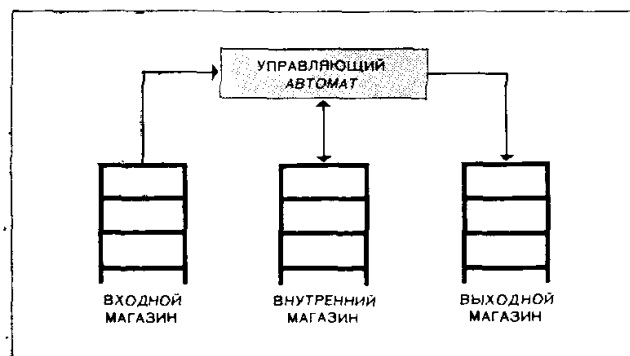
**АВТОМАТ ЛИНЕЙНЫЙ** — один из специальных видов автоматов. Его входные значения  $x(t)$ , внутренние состояния  $a(t)$  и выходные значения  $y(t)$  являются векторами над некоторым конечным полем  $P$  (размеров  $l, n, m$  соответственно), а ф-ции переходов и выходов определены так:  $a(t+1) = R \cdot a(t) + S \times x(t)$ ;  $y(t) = U \cdot a(t) + V \cdot x(t)$ , где  $R = [r_{ij}]_{n \times n}$ ;  $S = [s_{ij}]_{n \times l}$ ;  $U = [u_{ij}]_{m \times n}$ ;  $V = [v_{ij}]_{m \times l}$  — матрицы над тем же полем  $P$ .

$A.л.$  широко применяют при проектировании управляющих устройств ЦВМ, построении датчиков случайных чисел, при использовании кодов корректирующих и т. д. Эти автоматы рассматривают как промежуточное звено между автоматами конечными и линейными динамическими системами.

**АВТОМАТ МАГАЗИННЫЙ** — автомат специального вида (как правило, бесконечный), в основе которого лежит понятие памяти магазинной, или магазина. Магазин удобно представлять в виде бесконечной в одну сторону ленты, состоящей из ячеек, пронумерованных числами 1, 2, 3, ...; лента расположена вертикально таким образом, что первая ячейка оказывается самой верхней. В каждый момент времени в магазине записано некоторое слово. Первая его буква записана в первой ячейке, вторая — во второй и т. д. Остальные ячейки магазина «пусты», т. е. заполнены спец. «пустыми» символами. Магазин работает в двух режимах — чтения и записи. При чтении воспринимается лишь верхняя буква слова, записанного в магазине. Эта буква стирается, а оставшаяся часть слова поднимается на одну ячейку вверх. При записи в магазин слова  $h$  длины  $m$  слово, записанное там, сдвигается на  $m$  ячеек вниз, а в освободившиеся ячейки записываются символы слова  $h$ . Таким обра-

зом, чтение слова из магазина происходит в обратном порядке по сравнению с порядком его записи.

Структура  $A.м.$  представлена на рис. Он состоит из конечного управляющего автомата, снабженного тремя каналами для работы с магазинами — входным, выходным и внутренним. При этом входной магазин работает всегда только в режиме чтения, выходной — в режиме записи, а внутренний — в режиме чтения и записи. Множество  $A$  состояний управляющего автомата разбито на два непересекаю-



Структура магазинного автомата.

щихся подмножества  $A_1$  и  $A_2$ . Если состояние управляющего автомата относится к подмножеству  $A_1$ , то происходит считывание из входного и внутр. магазинов, если же оно относится к подмножеству  $A_2$ , то происходит считывание только из внутреннего магазина. В этот же момент автомат переходит в новое состояние и записывает во внутренний и выходной магазины некоторые слова. Пусть  $X, Y$  и  $Z$  — алфавиты входного, выходного и внутреннего магазинов, не включающие «пустой» буквы. Тогда  $A.м.$  задается двумя ф-циями  $\delta_1: A_1 \times X \times Z \rightarrow A \times F(Z) \times F(Y)$  и  $\delta_2: A_2 \times X \times Z \rightarrow A \times F(X) \times F(Y)$ .

Значения этих ф-ций  $\delta_1(a, x, z)$  и  $\delta_2(a, z)$  указывают новое состояние и слова, которые записываются во внутренний и выходной магазины. Действия автомата при пустом входном или внутреннем магазине не определены. Функции  $\delta_1$  и  $\delta_2$  могут быть частичными и многозначными (т. е. задавать не отображение, а отношение между элементами соответствующих множеств). В этом случае  $A.м.$  наз. недетерминированным. В недетерминированном  $A.м.$  мн-ва  $A_1$  и  $A_2$  могут пересекаться.

Различают распознающие  $A.м.$ , или акцепторы (выходной алфавит пуст), порождающие  $A.м.$  (входной алфавит пуст), и магазинные преобразователи или трансдюсеры (общий случай). Для определения способа функционирования  $A.м.$  рассмотрим понятие конфигурации и отношение перехода на мн-ве конфигураций. Конфигурацией наз. четверка  $(p, a, w, q)$ , где  $p \in F(X)$ ,  $a \in A$ ,  $w \in F(Z)$ ,  $q \in F(Y)$ . Конфигурация  $(p, a, wz, q)$  непосредственно переходит в конфигурацию  $(p', a', ww', qq')$ , если  $p = p'x$  и  $(a', w', q') \in \delta_1(a, x, z)$  или  $(a', w', q') \in \delta_2(a, z)$ . Конфигурация  $k$  переходит в конфигурацию  $k'$ , если сущест-

вует последовательность  $k = k_1, k_2, \dots, k_m = k'$  конфигураций, в которой каждая предыдущая непосредственно переходит в следующую. Конфигурация наз. заключительной, если она имеет вид  $(l, a^*, e, q)$ , где  $a^* \in A^*$  ( $e$  — пустое слово).

Для распознающих автоматов в определении конфигурации следует отбросить четвертую компоненту, а для порождающих — первую. В мн-ве  $A$  выделяют также начальное состояние  $a_0$  и мн-во заключительных состояний  $A^*$ , а в мн-ве  $Z$  — начальный символ  $z_0$ . Распознающий А. м. представляет (распознает) язык, состоящий из всех слов  $p$  таких, что конфигурация  $(p, z_0, e)$  переходит в одну из заключительных конфигураций. Порождающий автомат порождает язык, состоящий из всех слов  $q$  таких, что конфигурация  $(a_0, z_0, e)$  переходит в заключительную конфигурацию вида  $(a^*, e, q)$ . Класс языков, распознаваемых (порождаемых) недетерминированными А. м., совпадает с классом контекстно-свободных языков, а класс отношений, представленных недетерминированными магазинными преобразованиями, совпадает с классом отношений, порождаемых контекстно-свободными грамматиками перевода.

Лит.: Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков. Пер. с англ. М., 1970 [библиогр. с. 310—319]. А. А. Лещинский.

**АВТОМАТ МИКРОПРОГРАММНЫЙ** — 1) В технике — автомат, реализующий микропрограмму функционирования дискретного устройства. 2) Матем. понятие — см. *Автомат регистровый*.

**АВТОМАТ МИНИМАЛЬНЫЙ** — автомат, который в классе всех автоматов, реализующих данный оператор автоматный, имеет наименьшее возможное число состояний. См. *Минимизация числа состояний автомата*.

**АВТОМАТ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ** — автомат, который при данном входном символе и внутреннем состоянии может переходить в несколько различных внутренних состояний. Формально А. н. — это пятерка  $\langle X, Y, Q, \Phi, \Psi \rangle$  такая, что отображение  $\Psi: X \times Q \rightarrow Q$  не является однозначным. По аналогии с теорией автоматов детерминированных можно ввести понятия представления (порождения) множеств для А. н. Если два автомата конечных, представляющие одно и то же мн-во, считать эквивалентными, то существует алгоритм, позволяющий по каждому конечному А. н. построить эквивалентный ему конечный детерминированный автомат. При этом, естественно, детерминированный автомат имеет большее число состояний, чем А. н. В общем случае для любых автоматов подобное утверждение неверно. Напр., класс множеств, порождаемых недетерминированными автоматами с магазинной памятью, шире, чем класс множеств, порождаемых такими же детерминированными автоматами.

Лит.: Лупанов О. Б. О сравнении двух типов конечных источников. В кн.: Проблемы кибернетики, в. 9. М., 1963; Лубич Ю. И. Оценки числа состояний, возникающих при детерминизации недетерминированного автономного автомата «Доклады АН СССР», 1964, т. 155, № 1. М. И. Кратко.

**АВТОМАТ ОПЕРАЦИОННЫЙ** — устройство цифровой вычислительной машины, в котором совершаются преобразования кодов чисел или слов. А. о. состоит из набора регистров с комбинационной логикой на входах запоминающих элементов регистров. Входные сигналы А. о. отождествляются с выходными сигналами автомата управляющего — сигналами микроопераций. Эти сигналы определяют преобразования мн-ва состояний А. о. Выходными сигналами А. о. являются строки значений логич. условий, характеризующих состояния его регистров. В теории удобно рассматривать А. о. как бесконечный Мура автомат спец. вида (многорегистровый автомат). С. С. Гороховский.

**АВТОМАТ ПРИВЕДЕННЫЙ** — автомат, в котором отождествлены все эквивалентные между собой состояния. См. *Алгебраическая теория автоматов*.

**АВТОМАТ ПУШ-ДАУН** — то же, что и автомат магазинный.

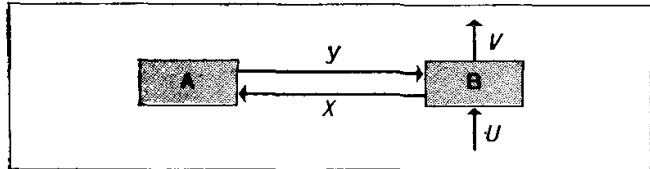
**АВТОМАТ РЕГИСТРОВЫЙ** — специального вида автомат (как правило, бесконечный), введенный как математическая модель, более близкая к структурам современных цифровых вычислительных машин. В основе определения А. р. лежит понятие регистра. Регистром (точнее,  $p$ -позиционным регистром) наз. мн-во переменных (элементов регистра) с одной и той же  $p$ -элементной областью определения  $P$ , занумерованных последовательными целыми числами и упорядоченных в соответствии с этой нумерацией.

В реальных машинах любой регистр состоит из конечного числа элементов. Однако в некоторых ситуациях более удобно считать их бесконечными. Если для нумерации элементов регистра использованы все целые рациональные числа (положительные и отрицательные), то регистр наз. двусторонним. Если для нумерации использованы все числа интервала  $(m, +\infty)$  или  $(-\infty, m)$ , то регистр наз. односторонним бесконечным регистром.

Состояниями регистра наз. всевозможные наборы значений (состояний) его элементов. Для задания преобразований мн-ва состояний регистров используются преобразования периодически-определенные. Каждое такое преобразование задается  $p$ -значной ф-цией  $f(z_1, \dots, z_p)$  и базовым ур-нием  $y_i = f(x_{i+i_1}, \dots, x_{i+i_q})$ , определяющими значение  $i$ -й переменной регистра после выполнения преобразований через значения  $x$ ; его переменных до выполнения преобразования. Набор чисел  $(i_1, \dots, i_q)$  наз. базой периода. Для бесконечного регистра в обе стороны базовое ур-ние однозначно определяет преобразование. В случае же бесконечного в одну сторону или конечного регистра может иметь место краевой эффект, когда часть или все аргументы  $x_{i+i_1}, \dots, x_{i+i_q}$

при некоторых  $i$  выходят за пределы рассматриваемого регистра. В этих случаях рассматриваемый регистр дополняется фиктивными элементами, принимающими всегда постоянные значения.

Другой тип преобразований мн-ва состояний регистра (он часто встречается на практике) дают периодически-определенные преобразования со вспомогательными переменными. В этом случае каждой осн. переменной  $x_i$  ставят в соответствие некоторое количество  $x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n)}$  вспомогательных переменных. Значения переменных после выполнения преобразования задаются в этом случае с помощью базовых ур-ний:  $y_i = f_0$ ;  $x_i^{(1)} = f_1$ ;  $x_i^{(n)} = f_n$ , пра-



Абстрактная модель центрального процессора вычислительной машины: А — управляющий автомат, В — операционный автомат.

вые части которых зависят от переменных  $x_{i+i_1}, \dots, x_{i+i_q}$  регистра и вспомогательных переменных  $x_{i+i_1}^{(k)}, \dots, x_{i+i_{q_k}}^{(k)}$ . При этом ур-

ния должны быть корректными, т. е. однозначно определять результат выполнения преобразования. Кроме указанных двух типов преобразований, применяются еще т. н. конечно-определенные преобразования, меняющие состояние только конечного числа переменных регистра, и установочные преобразования, переводящие регистр из любого состояния в некоторое фиксированное для данного регистра состояние.

Все преобразования рассмотренных типов легко переносятся на случай нескольких регистров. В этом случае можно определить мн-во состояний и ф-цию переходов А. р. В. Этот автомат состоит из некоторого конечного набора регистров  $R_1, \dots, R_n$  и состояниями его являются наборы состояний регистров. Каждому входному сигналу  $y \in Y$  входного алфавита  $Y$  автомата  $B$  соответствует некоторое преобразование  $f_y$  мн-ва  $B$  одного из указанных типов. Для задания ф-ции выходов А. р. рассматривают разбиение  $\Gamma$  мн-ва его состояний на попарно непересекающиеся классы и рассматривают ф-цию выходов как ф-цию, зависящую только от класса, которому принадлежит состояние автомата и входного сигнала. Разбиение  $\Gamma$  обычно выбирается конечным, а его классы получаются путем применения булевых операций к т. н. допустимым мн-вам. К этим мн-вам относятся прежде всего конечно-определенные мн-ва, т. е. такие, в которых заданные элементы некоторого регистра (в конечном числе) принимают заданные значения. Вообще допустимыми являются также мн-ва, в которых заданный регистр содержит определенную конечную конфигурацию значений переменных или в состоянии его заданная конфигурация периодически повторяется. Построенный т. о. автомат наз. мно-

горегистровым конфигурационно периодическим автоматом.

Применяя указанную концепцию бесконечного автомата, можно построить абстрактную модель центр. процессора вычисл. машины. Эта модель представляет собой композицию двух автоматов — автомата управляющего  $A$  и автомата операционного  $B$  (рис.). Управляющий автомат  $A$  является автоматом конечным, операционный автомат  $B$  — бесконечным конфигурационно периодическим автоматом. К автомату  $B$  добавляют обычно еще входной канал  $U$ , сигналы в котором вызывают установочные преобразования, и выходной канал  $V$ , по которому передаются состояния некоторых регистров операционного автомата. Сигналы алфавита  $V$  вызывают только периодически-определенные преобразования (возможно, со вспомогательными переменными). Эти сигналы также разрешают или запрещают поступление сигналов по каналу  $U$ . Сигналы в каналах  $U$  и  $V$  наз. также векторными. Эти каналы связывают центр. процессор с внеш. устр-вами, напр., оперативным запоминающим устройством ЦВМ.

В автомате  $A$  обычно легко выделить состояния, в которых начинается или заканчивается выполнение той или иной макрооперации машины (сложение, умножение и т. д.). Выбирая такие состояния в качестве начального и заключительного, получаем дискретный преобразователь, действующий на мн-ве состояний операционного автомата  $B$ . Элементарные операторы этого преобразователя являются микрооперациями процессора.

С теорией А. р., основы которой заложил сов. математик В. М. Глушков (р. 1923), тесно связана теория автоматов итеративных.

Лит.: Глушков В. М. Теория автоматов и вопросы проектирования структур цифровых машин. «Кибернетика», 1965, № 1. А. А. Летишевский.

**АВТОМАТ С МАГАЗИННОЙ ПАМЯТЬЮ** — см. Автомат магазинный.

**АВТОМАТ САМОВОСПРОИЗВОДИЩИЙСЯ** — автомат, который в процессе функционирования строит свою копию. Исследования по теории самовоспроизведения автоматов впервые предпринял Дж. фон Нейман, объяснивший следующим образом приведенное определение. Пусть задан автономный конечный автомат  $A$  и некоторый набор  $\Omega$  конечных автоматов (элементов). Если выходные сигналы автомата  $A$  удастся интерпретировать как указания, какой из элементов набора  $\Omega$  надо взять и к каким элементам из уже имеющегося соединения элементов его присоединить, то последовательность выходных сигналов автомата  $A$  можно рассматривать как процесс построения некоторого соединения элементов. Пусть среди выходных сигналов автомата  $A$  имеется сигнал, который интерпретируется как «построение закончено». В этом случае автомат  $A$  за некоторое конечное число шагов «строит» некоторую логическую сеть  $L$  над  $\Omega$ . Пусть эта сеть реализует автомат  $B$ , тогда говорят, что  $A$  в процессе функционирования строит автомат  $B$ . Автомат  $B$  наз. «потомком»  $A$ , а авто-



мат  $A$  — «родителем» автомата  $B$ . Следуя принятой терминологии, будем говорить, что автомат  $A$  построен в  $\Omega$ , если он реализован в некоторой логической сети над  $\Omega$ . Если бы элементы набора  $\Omega$  были выполнены в виде реальных физ. устройств и автомат  $A$  был снабжен исполнительными органами, позволяющими ему выбирать нужные элементы и делать нужные соединения, и автомату  $A$  дать достаточное  $k$ -во элементов, то он мог бы в действительности построить некоторое устр-во в виде соединения элементов.

Рассмотрим такой набор элементов  $\Omega$ , когда «родитель» любого автомата, построенного в  $\Omega$ , сам может быть построен в  $\Omega$ . Можно предположить, что для любого автомата  $A$  его «родитель» —  $p(A)$  должен быть в некотором смысле более сложным, чем  $A$ , т. к.  $p(A)$  должен обладать всей информацией о структуре автомата  $A$ . Необходимо найти такой  $A$ , что  $p(A) = A$ , т. е. автомат, который строит свою копию (автомат  $A$  в этом случае наз. с а м о в о с п р о и з в о д я щ и м с я). При этом представляет интерес не всякое самовоспроизведение автоматов, а самовоспроизведение автоматов, имеющих достаточно сложное строение. Заметим, что если  $A$  является А. с., то порожденные им автоматы также будут строить автоматы  $A$ , причем их «потомки» будут не только функционально, но и структурно эквивалентны «родителям», т. е. будут совпадать логические сети, реализующие «родителей» и «потомков».

Дж. фон Нейман рассматривал две модели самовоспроизведения. В первой, т. н. кинематической модели, автомат  $A$  «плавал» в резервуаре, в котором плавала «пища», т. е. неисчерпаемый запас элементов набора  $\Omega$ . Вторая, т. н. клеточная модель, представляет собой бесконечную двумерную итеративную сеть (см. *Автоматы итеративные*). Конфигурация  $Z$  этой сети наз. с а м о в о с п р о и з в о д я щ е й с я, если для любого натурального  $n$  найдется такой такт  $t$ , что если в такт  $t = 0$  мы зададим на клеточной модели одну конфигурацию  $Z$ , то в такт  $t$  наша модель будет содержать  $n$  непересекающихся конфигураций  $Z$ . Клеточная модель может рассматриваться как некоторая абстрактная среда, в которой пространство и время дискретны, а передвижения элементов могут быть заменены передачей сигналов.

В обоих случаях для доказательства возможности самовоспроизведения достаточно сложных автоматов Дж. фон Нейман предложил воспользоваться т. н. у н и в е р с а л ь н ы м к о н с т р у к т о р о м. Суть этого предложения сводится к следующему. Зафиксируем некоторый набор элементов  $\Omega$ . Вместо автономного автомата  $A$  рассмотрим автомат  $K$  со входом. Если, подав на  $K$  входную последовательность  $\xi$ , мы получим выходную последовательность, которую можно рассматривать как процесс построения некоторого автомата  $A_\xi$ , то  $\xi$  наз. кодом автомата  $A_\xi$  (при фиксированном  $K$ ). Код автомата  $A$  обозначают через  $\xi(A)$ . Автомат  $K$  наз. универсаль-

ным конструктором, если для любого автомата  $M$  в  $\Omega$  найдется такая входная последовательность  $\xi(M)$ , что при подаче ее на вход  $K$  на выходе будет построен автомат  $M$ . Т. к. фактически вся информация о структуре автомата, который должен быть построен, может быть записана в его коде, то универсальный конструктор может быть построен даже при достаточном простом наборах элементов.

С другой стороны, код  $\xi$  также можно представить в виде подходящего соединения элементов, реализующего автономный автомат  $\mathcal{U}(\xi)$ , выдающий этот код. Если соединить выход автомата  $\mathcal{U}(\xi)$  со входом автомата  $K$ , что соответствует подаче входной последовательности  $\xi$  на вход автомата  $K$ , то получим автономный автомат  $[\mathcal{U}(\xi) : K]$ , который порождает автомат  $A_\xi$  (символически  $[\mathcal{U}(\xi) : K] \rightarrow A_\xi$ ). В этом случае автомат  $[\mathcal{U}(\xi(K)) : K]$  — это автомат  $K$ , снабженный описанием своего же кода. Очевидно, что этот автомат не является А. с., т. к. он строит только автомат  $K$  без кода.

Для построения А. с. надо к автомату  $K$  добавить т. н. устр-во копирования  $P$ , т. е. автомат, который, получив на вход код  $\xi$ , строит на выходе копию этого кода и управляющее устр-во  $R$  (назначение его будет объяснено ниже). Полученный автомат  $K - P - R$  имеет один вход и работает следующим образом. Если на его вход подать код  $\xi$ , то сначала  $K$  построит автомат  $A_\xi$ , потом  $P$  построит копию кода  $\xi$ , и наконец, эта копия  $\xi$  будет подана на вход автомата  $A_\xi$ , т. е. будет построен автомат  $[\mathcal{U}(\xi) : A_\xi]$ . Управляющее устр-во  $R$  следит за тем, чтобы отмеченные выше действия были выполнены в указанной последовательности. Подадим теперь на вход автомата  $K - P - R$  его собственный код, т. е. построим автомат  $[\mathcal{U}(\xi(K - P - R)) : K - P - R]$ . Очевидно, что он будет строить автоматы  $[\mathcal{U}(\xi(K - P - R)) : K - P - R]$ , т. е. будет А. с. Описанный здесь механизм самовоспроизведения поразительно напоминает процесс самовоспроизведения простейших (одноклеточных) живых организмов.

Аксиоматическое построение теории самовоспроизведения предпринял амер. математик Дж. Майхилл. Он доказал теорему, являющуюся обобщением теоремы о существовании А. с. Для широкого класса нумераций автоматов имеет место следующий факт: для любой вычислимой функции  $g(x)$  существует автомат с номером  $n$  такой, что порождаемый им автомат имеет номер  $g(n)$  (при  $g(x) = x$  имеем теорему о существовании А. с.). Более того, он доказал и теорему о существовании т. н. самосовершенствующихся автоматов. Считают, что автомат  $A_2$  более совершенный, чем автомат  $A_1$  ( $A_1 < A_2$ ), если при естественном уточнении понятия вычислительной способности можно сказать, что автомат  $A_2$  способен вычислить все то, что и автомат  $A_1$  и еще что-нибудь сверх этого. Справедлива теорема: существует такая бесконечная последовательность автоматов  $\{A_i\}$ , что одновременно  $A_i <$

$< A_{i+1}$  и  $A_i \rightarrow A_{i+1}$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Доказывая эти теоремы, необходимо иметь такой набор элементов, из которых можно было бы построить универсальный конструктор, устройство копирования кода и т. д.

Амер. математик Э. Мур показал, что в любой клеточной модели из достаточно широкого класса таких моделей существуют конфигурации, которые не могут быть самовоспроизводиться. Известны попытки физ. построения моделей самовоспроизведения.

Например, англ. генетик Л. Пенроуз сделал механические элементы двух видов  $A$  и  $B$  так, что они могут сцепляться друг с другом одним из двух способов  $AB$  или  $BA$ . Если в поднос, в котором находятся несцепленные друг с другом элементы  $A$  и  $B$ , поместить «родителя»  $AB$  и затем начать поднос встряхивать, то в нем будут порождаться только сцепления  $AB$ , т. е.  $AB$  будет воспроизводить себя. Если же туда поместить  $BA$ , то будут порождаться соединения  $BA$ . Амер. ученый Г. Джекобсон построил такую электромех. модель самовоспроизведения: составленные из различных вагонов игрушечные поезда, используя системы разъездных путей, так перегоняли не сцепленные между собой вагончики, что составляли поезд, подобный себе.

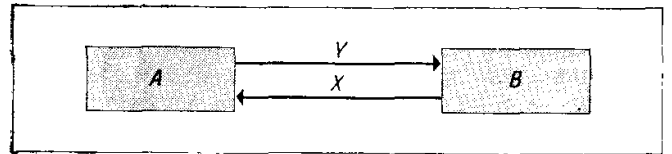
Лит.: Нейман Дж. фон. Общая и логическая теория автоматов. В кн.: Тьюринг А. Может ли машина мыслить? Пер. с англ. М., 1960; Ренгосе L. Automatic mechanical self-reproduction. «New Biology», 1959, № 28; Джекобсон Г. О моделях воспроизведения. В кн.: Кибернетический сборник, № 7. М., 1963; Майхилл Дж. Абстрактная теория самовоспроизведения. В кн.: Общая теория систем. Пер. с англ. М., 1966; Мур Э. Ф. Математические модели самовоспроизведения. В кн.: Математические проблемы в биологии. Пер. с англ. М., 1966; Арбиб М. Мозг, машина и математика. Пер. с англ. М., 1968 [библиогр. с. 217—224]; Codd E. F. Cellular automata. New York — London, 1968 [библиогр. с. 118]; Нейман Дж. фон. Теория самовоспроизводящихся автоматов. Пер. с англ. М., 1971 [библиогр. с. 322—326]. М. И. Кратко.

**АВТОМАТ СВОБОДНЫЙ.** Автомат можно рассматривать как унарную универсальную алгебру  $A = \langle Q, f_1, \dots, f_k \rangle$  (см. *Автоматов способы задания*). Автомат наз. свободным, если алгебра  $A$  — свободная. Напр., пусть дано два непересекающихся множества  $Q$  и  $X$ . Образует множество слов  $\Lambda$  таких, что первая их буква — элемент множества  $Q$ , а все остальные (если они имеются) — элементы множества  $X$ . Образует теперь из полученного множества слов  $\Lambda$  автомат  $\mathcal{U}(Q, X)$  следующим образом. Каждое слово из  $\Lambda$  назовем состоянием автомата  $\mathcal{U}(Q, X)$ , каждый элемент  $x \in X$  назовем входом автомата  $\mathcal{U}(Q, X)$  и, по определению, будем считать, что состояние  $q \in \Lambda$  под действием входа  $x$  переходит в состояние  $qx$ , где  $qx$  — слово из  $\Lambda$ , полученное приписыванием справа к слову  $q$  буквы  $x$ . Полученный автомат будет  $A$ . с. (с множеством свободнообразующих состояний  $Q$  и свободнообразующих входов  $X$ ). Верно утверждение: любой другой автомат (с множеством образующих состояний  $Q$  и образующих входов  $X$ ) является гомоморфным образом  $A$ . с.

М. И. Кратко.

**АВТОМАТ СВЯЗНЫЙ** — автомат, имеющий такое состояние, которое путем подачи подходящего входного слова может быть переведено в любое другое состояние. Инициальный автомат наз. связным, если указанное выше состояние является его начальным состоянием.

**АВТОМАТ УПРАВЛЯЮЩИЙ** — понятие, связанное с рассмотрением композиции двух автоматов, один из которых (напр., автомат  $A$ ) наз. управляющим, а другой (автомат  $B$ ) — операционным. А. у.  $A$  представ-



Композиция управляющего и операционного автоматов.

ляет собой инициальный *Мура* автомат или *Мили* автомат с заключительным состоянием. Композиция автоматов  $A$  и  $B$  определяется так, как указано на рис. Выходные сигналы  $y \in Y$  А. у.  $A$  являются входными сигналами операционного автомата  $B$  и, наоборот, выходные сигналы  $x \in X$  операционного автомата являются входными сигналами А. у. Каждый сигнал  $y$  задает некоторое отображение множества  $\mathcal{B}$  состояний операционного автомата в это же множество. Эти отображения наз. микрооперациями. Структура входного сигнала А. у. обычно задается в виде конечного набора значений логических условий  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , определенных на множестве  $\mathcal{B}$ . К рассмотрению описанной схемы взаимодействия двух автоматов сводится ряд задач прикладной алгоритмов теории, таких как проектирование структур вычисл. машин, ряд задач теории программирования и пр. В связи с этим значительный интерес представляет изучение различных форм эквивалентности А. у. См. также *Автомат регистровый*.

А. Н. Чеботарев.

**АВТОМАТ ЧАСТИЧНЫЙ** — автомат, у которого ф-ция переходов  $\Psi(a, x)$  или ф-ция выходов  $\Phi(a, x)$ , или обе эти ф-ции определены не для всех пар значений своих аргументов  $a$  и  $x$ . В связи с этим понятие эквивалентности вполне определенных автоматов и их состояний в случае А. ч. заменяется более общим понятием совместимости, основанном на соподчинении индуцируемых отображений в пересечении их областей определения.

А. Н. Чеботарев.

**АВТОМАТА ДИАГРАММА** — то же, что и абстрактного автомата граф.

**АВТОМАТА МАТРИЦА ПЕРЕХОДОВ** — один из способов задания конечного абстрактного автомата. Для автомата  $A$ , имеющего  $n$  состояний, А. м. п.  $\|A\|$  представляет собой квадратную матрицу порядка  $n$ . Пусть  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  — множество состояний автомата  $A$ , а  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  и  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  — соответственные входной и выходной алфавиты. В случае



инициального автомата  $a_1$  всегда обозначает начальное состояние. Элементом  $(i, j)$  матрицы  $\|A\|$  является множество пар вида  $(x_{is}/y_{is})$ , таких, что под воздействием входного сигнала  $x_{is}$  автомат  $A$  переходит из состояния  $a_i$  в состояние  $a_j$  и выдает при этом выходной сигнал  $y_{is}$ . Для обозначения мн-ва, состоящего из пар  $(x_{i1}/y_{i1}), (x_{i2}/y_{i2}), \dots, (x_{iq}/y_{iq})$ , обычно выписывают эти пары, соединенные знаком дизъюнкции:  $(x_{i1}/y_{i1}) \vee (x_{i2}/y_{i2}) \vee \dots \vee (x_{iq}/y_{iq})$ . От А. м. п. нетрудно перейти к любому другому способу задания абстрактного автомата, напр., к таблицам переходов и выходов, графу автомата и пр. См. также *Автоматов способы задания*.

А. Н. Чеботарев.

**АВТОМАТА ПАМЯТЬ** — число состояний автомата; иногда под термином А. п. понимают логарифм этого числа. См. *Алгебраическая теория автоматов*.

**АВТОМАТА ТАБЛИЦА** — прямоугольная таблица размера  $n \times m$ , где  $n$  — число состояний автомата,  $m$  — число входных букв. Столбцам таблицы соответствуют состояния автомата, строкам — входные буквы. На пересечении  $i$ -го столбца и  $j$ -й строки указано два значения: состояние автомата, в которое он перейдет из состояния  $q_i$  под действием входной буквы  $x_j$ , и значение его выхода при этом.

См. *Автоматов способы задания*.

**АВТОМАТА ФУНКЦИЯ** — термин, употребляемый в трех разных значениях: 1) то же, что и автоматное отображение, или *оператор автоматный*; 2) функция переходов автомата  $\delta(q, x)$ , т. е. отображение  $Q \times X \rightarrow Q$ ; 3) ре-же — функция выходов автомата  $\lambda(q, x)$ , т. е. отображение  $Q \times X \rightarrow Y$ , где  $Q$  — мн-во состояний,  $X$  — входной алфавит,  $Y$  — выходной алфавит автомата. В каком именно значении употребляется термин «А. ф.», определяют из контекста. См. *Автоматов способы задания*.

**АВТОМАТИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСНАЯ** — системный охват автоматизацией производственных и экономико-административных процессов в рамках агрегата, отдельного технологического процесса, цеха, предприятия и более высоких производственных и хозяйственных формаций. А. к. базируется на достигнутом уровне развития *кибернетики* и, в частности, ее разделов — *кибернетики технической* и *кибернетики экономической*. См. также *Автоматизация управления производственным процессом*, *Автоматизированные системы управления предприятием*, *Системотехника*.

Б. Б. Тимофеев.

**АВТОМАТИЗАЦИЯ ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ** — использование вычислительных машин для лингвистического — преимущественно комбинаторного и статистического — анализа текста как последовательности лингвистических форм.

Сущность лингвистического анализа заключается в том, что на мн-ве лингвистических форм одного уровня (напр., на множестве звуков речи, представленных в тексте буквами,

или на мн-ве слов текста) определяются отношения эквивалентности и порядка, ставящие в соответствие каждой форме класс, к которому она принадлежит, и каждой паре в последовательности форм — направление синтаксической связи между ними. Миним. классами форм являются лингвистические единицы — фонемы, конкретными представителями которых являются звуки речи, морфемы (миним. значимые единицы языка), представляемые в тексте морфемами (миним. значимыми частями слов), лексемами, представляемые в тексте словоформами, модели словосочетаний и модели предложений. На множестве лингвистических единиц могут быть вновь определены отношения эквивалентности и получены классы лингвистических единиц, такие, как гласные и согласные фонемы, служебные и знаменательные морфемы, имена и глаголы и т. п., и вновь определены отношения порядка. Такие процедуры лингвистического анализа имеют алгоритмический характер и опираются в большой степени на информацию о совместной встречаемости лингвистических форм в текстах. При этом учитывается не только информация о составе лингвистических форм в окружении, но и условная частота появления одних форм при условии появления других. Одна из типичных задач автоматического лингвистического анализа состоит в переводе текста, заданного как последовательность знаков алфавита, в последовательность лингвистических форм заданного уровня, в отождествлении различных употреблений одной и той же формы, в построении классов лингвистических форм и единиц.

В зависимости от того, предшествует ли автомату обработка текста обработка его человеком или нет, различают полуавтоматический и автоматический анализ. При полуавтоматическом анализе текст заранее членится на формы заданного уровня (напр., на слова) и каждая форма снабжается набором признаков, в котором указывается принадлежность этой формы к определенному классу форм и его подклассам и связь этой формы с другими формами текста. Проанализированный таким образом лингвистический текст переносится на носители информации (перфокарты, перфоленты) и поступает на обработку в ЦВМ. Обычными задачами такой обработки являются: 1) отождествление индивидуальных формоупотреблений внутри каждого из классов форм или единиц; 2) подсчет числа тождественных или эквивалентных формоупотреблений; 3) подсчет условной частоты совместной встречаемости форм или единиц, или классов единиц; 4) построение инвентарей лингвистических форм, единиц и классов; 5) структурный и лингвостатистический анализ инвентарей (см. *Лингвистическая статистика*) и др. Различаются следующие виды инвентарей: инвентари фонем и графем (букв) и их сочетаний, инвентари слогов, морфем и морфем, а иногда — и основ слов; инвентари словоформ и лексем [списки (индексы) слов, *словари частотные*]; инвентари словосочетаний.

В случае, если предварительной обработки текста лингвист не производит, говорят об автоматическом анализе. В частности, автоматический анализ является основной частью машинной дешифровки письменностей (см. *Дешифровка текстов*). Автоматический лингвистический анализ производится либо путем сравнения форм и их окружений в тексте с заданными в таблицах эталонами, которым сопоставлены наборы признаков, либо методами комбинаторного или комбинаторно-статистического анализа совместных встречаемостей форм. В последнем случае он базируется на предположении о том, что статистически значимые отклонения частот совместной встречаемости форм от матем. ожиданий, вычисленных в предположении об их случайном совместном появлении в тексте, свидетельствуют об определенной близости этих форм. Таким образом удается установить морфологические типы форм, синтаксические структуры и семантические группы (поля). Автоматический анализ переводимого текста является первым этапом машинного перевода.

Кроме задач, связанных непосредственно с лингвистическим анализом текстов, ЦВМ используют как средство автоматизации труда лингвиста, напр., при каталогизации лингвистических явлений, требующей сортировки и подсчета числа явлений по группе признаков. Как правило, машины используют в лингвистических исследованиях, связанных с обработкой больших массивов лингвистической информации, насчитывающих сотни тысяч формоупотреблений. При этом часто собственно лингвистический анализ сопровождается вычислением различных статистик (частоты форм, единиц и классов, длины форм — слов, предложений), проверкой статистических гипотез о равенстве вероятностей, с которыми одни и те же формы, единицы или классы употребляются в различных текстах, гипотез о наличии корреляций между частотами форм в разных текстах. С помощью ЦВМ решаются также собственно лингвостатистические задачи, связанные с изучением механизма функционирования языка в статистическом аспекте, — изучение функций распределения лингвистических статистик в словаре и в тексте.

Лит.: Шайкевич А. Я. Распределение слов в тексте и выделение семантических полей. В кн.: Иностранные языки в высшей школе, в. 2. М., 1963; Фрумкина Р. М. Автоматизация исследовательских работ в лексикологии и лексикографии. «Вопросы языкознания», 1964, № 2; Автоматизация в лингвистике. М. — Л., 1966; Засорина Л. Н. Автоматизация и статистика в лексикографии. Л., 1966; Москович В. А. Автоматизация некоторых аспектов лингвистической работы. «Вопросы языкознания», 1966, № 1; Себю И. П. Структура связанного текста и автоматизация реферирования. М., 1969; Перебийніс В. С. Кількісні та якісні характеристики системи фонем сучасної української літературної мови. К., 1970. В. М. Андрущенко.

**АВТОМАТИЗАЦИЯ МЕДИЦИНСКОЙ ДИАГНОСТИКИ** — комплекс математических и технических приемов, осуществляемых с целью повышения достоверности и надежности и ускорения медицинского диагноза. А. м. д. предполагает частичную или полную передачу

функций врача приборам и автоматам. Постановка диагноза состоит из следующих этапов: 1) сбор информации о больном и проявлениях болезни; 2) обработка и оценка собранных данных; 3) собственно установление диагноза. Автоматизации можно подвергнуть каждый из этапов постановки диагноза или весь процесс полностью. При этом полностью автоматизировать можно только те задачи медицинской диагностики, для которых существуют алгоритмы и которые в принципе можно решить без участия медицинского персонала.

На 1-м этапе разрабатывают стандартизированные истории болезни различных профилей, вопросники и др. Собранные информацию о больном записывает врач (или сам больной) в цифровой или текстовой форме в соответствующие графы стандартизированного документа. Такая запись позволяет формализовать информацию о больном и хранить ее в памяти ЦВМ. Благодаря представлению информации в такой форме формализованный естественный медицинский язык можно совмещать с языком ЦВМ. Таким образом, результат обследования конкретного  $k$ -го больного можно представить в виде троичного вектора  $f_k \{s_i\}$ , где  $s_i = 1$ , если имеется данный  $s_i$ -й симптом;  $s_i = 0$ , если этот симптом отсутствует;  $s_i = -1$ , если данный симптом не исследовали ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

На 2-м этапе постановки диагноза выделяют, обрабатывают и оценивают собранную информацию. Выделять симптомы может врач или, после предварительного обучения, ЦВМ. Затем оценивают значимость полученных симптомов для различных заболеваний. Это производит врач или ЦВМ по спец. матрицам и различным решающим правилам. Так, напр., используя методику Бродмена, можно получить диагностическую ценность  $\rho(s_i, d_j)$  симптома  $s_i$  для диагноза  $d_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) в следующем виде:

$$\rho(s_i, d_j) = \frac{p(s_i/d_j) - p(s_i)}{2(\sqrt{p(s_i)})_3} \pm 1.$$

В качестве меры информативности можно использовать дивергенцию Кульбака

$$\rho(s_i, d_j/d_i) = |p(s_i/d_j) - p(s_i/d_i)| \log \frac{p(s_i/d_j)}{p(s_i/d_i)},$$

информационную меру Шеннона

$$\rho(s_i/d_j) = -p(s_i/d_j) \log p(s_i/d_j)$$

и др.

На 3-м этапе врач или автоматическое устройство строит модель заболевания (установление диагноза) в соответствии с теми решающими правилами, по которым получены оценки симптомов. При использовании детерминистской логики модель заболевания строят, сравнивая данный неизвестный вектор  $f_k$  с эталоном. Построение эталона основано на логических операциях и данных медицины. Эталон хранится в виде записи, на ручных перфокар-

тах или в памяти ЦВМ в виде *булевой функции*  $F = (\bar{s}_1 + s_2 + \dots + s_i + \dots + s_m) \wedge (g_1 + g_2 + \dots + g_\omega + \dots + g_l) \wedge (d_1 + d_2 + \dots + d_j + \dots + d_n)$ . При этом решение принимают следующим образом: решают, что  $f_k \in d_j$  или множеству  $\{d_j\}$ , если  $F = 1$  при  $d_j = 1$  (или  $\{d_j\} = 1$ ). Используя статистические методы, модель заболевания строят путем нахождения максимально правдоподобной оценки. При минимизации среднего риска диагностирования (см. *Риск распознавания*) используется оптим. Байесовское решающее правило, сформулированное так: данный вектор  $f_k \in d_t$ , если  $\delta(d_t/f_k) = \max_t p(f_k/d_t) g_\omega$ . Значение  $t$ , при котором достигается максимум, является искомым. При  $t = 0$  принимается решение об отказе от диагностирования данного вектора  $f_k$ .

При использовании методики многоальтернативного последовательного анализа решающее правило гласит: продолжаем подсчет оценок (коэффициента правдоподобия), если  $\log B_{tj} < \Lambda < \log A_{tj}$  решаем, что  $f_k \in d_j$ , если  $\Lambda \geq \log A_{tj}$ ; решаем, что  $f_k \in d_t$ , если  $\Lambda \leq \log B_{tj}$ , где  $d_j, d_t$  ( $j, t = 1, \dots, n, t \neq j$ ) — классы заболеваний (диагнозы);  $A_{tj}$  и  $B_{tj}$  — пороги, определяемые по заданной достоверности диагностирования (или же при обучении) для каждой пары сравниваемых классов;

$$\Lambda = \sum_{i=1}^m \log \frac{p(s_i/d_t)}{p(s_i/d_j)} - \text{коэфф. правдоподобия};$$

$p(s_i/d_j)$  и  $p(s_i/d_t)$  — априорные вероятности появления  $s_i$ -го симптома в  $d_j$ -ом и  $d_t$ -ом классах. В некоторых случаях при построении модели заболевания целесообразно использовать составное нелинейное решающее правило, которое позволяет полнее учесть информацию о больном.

Следует отметить, что при построении моделей заболеваний врач или ЦВМ основываются на соответствующей структуре диагноза, т. е. при принятии решения по оценкам (весам) соответствующей информации о больном, указывают осн. и сопутствующее заболевания и состояние отдельных функций органов и *регулирующих систем организма*. Автоматизировать этот этап постановки диагноза возможно только после создания программного обеспечения для ЦВМ по формированию моделей заболевания. Однако окончательное заключение остается за врачом (см. также *Медицинская информационная система*).

Лит.: Моисеева Н. И. Проблемы машинного диагноза в неврологии. Л., 1967 [библиогр. с. 218—231]; Медицинская информационная система. К., 1971 [библиогр. с. 283—288]; Бродмен К. Постановка диагноза при помощи вычислительной машины. В кн.: Электроника и кибернетика в биологии и медицине. Пер. с англ. М., 1963; Ледли Р., Ластед Л. Медицинская диагностика и современные методы выбора решения. В кн.: Математические проблемы в биологии. Пер. с англ. М., 1966.

В. Г. Мельников, А. А. Попов, В. М. Яненко.

**АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЯ** — раздел программирования, разрабатывающий методы автоматического составления программ и решения задач на цифровых вычислительных машинах по данным, представленным в некотором формализованном виде — на *языке формальном*. А. п. базируется на применении средств вычислительной техники, предназначенных для облегчения общения пользователя с ЦВМ. Основу построения систем А. п. составляют *алгоритмические языки*, ориентированные на практические приложения, и базирующиеся на них *языки программирования*. Целью создания систем А. п. является повышение эффективности использования ЦВМ в различных сферах их применения путем создания соответствующего *математического обеспечения ЦВМ*. Таким образом, проблематика А. п. выросла из практических потребностей программирования и решения задач на ЦВМ.

Работа пользователя ЦВМ при решении задач расчленяется на ряд этапов: изучение задачи (процесса переработки информации); выработка *алгоритма* решения задачи (алгоритма, моделирующего данный процесс); составление *программы*, реализующей этот алгоритм на избранной машине; обработка алгоритма и его проверка (отладка); подготовка данных; решение задачи и оформление результатов. С расширением сфер применения ЦВМ наибольшей остроту приобрела проблема автоматизации этапов составления программ и их отладки, как наиболее механических и трудоемких. Действительно, описание сколь-нибудь сложного алгоритма в мелких *операциях машинных* связано с огромными трудностями, поскольку при ручном программировании необходимо четкое представление о размещении в *памяти ЦВМ* (обычно многоступенчатой структуры) всех потоков информации на всех этапах работы программы и о связях и соотношениях между отдельными командами программы. В связи с такими трудностями описания алгоритмов уже на ранних этапах использования ЦВМ получили развитие приемы, облегчающие труд по составлению программ. Таковы, напр., метод описания алгоритмов в виде блок-схем, метод символических (или условных) адресов, метод подпрограмм и др. Метод составления блок-схем основан на разделении задачи на ряд подзадач-блоков, из которых komponуется общая программа. Метод символических адресов заключается в применении буквенных обозначений для кодов операций и адресов программы. Введение подпрограмм расширяет набор элементарных машинных команд. Автомат. использование стандартных подпрограмм в пределах одной задачи связано с построением интерпретаторов (т. н. *интерпретирующих систем*) или спец. *трансляторов*, представляющих собой алгоритмы компоновки программ из отдельных подпрограмм. Среди ранних отечественных работ в этом плане наиболее известными стали работы по созданию интерпретирующих систем («прорабов»), отличающихся

включением операций над объектами сложной структуры (векторами и матрицами), а также системы стандартных подпрограмм, созданной для машины «М-20». Метод подпрограмм приводит к облегчению и упрощению задачи составления программ, однако он основывается на языках, принципиально мало отличающихся от *языков машинных*. Последние не могли служить средством преодоления трудностей программирования, возрастающих в связи с увеличением числа и разнообразия машин, ростом их возможностей и ростом сложности решаемых задач. Возникла проблема описания алгоритмов в терминах достаточно крупных операций — проблема составления схем программ. А. А. Ляпунов (1911—73) разработал *операторный метод программирования*; была построена алгебра программ, операции которой представляют собой абстрактное выражение наиболее существенных и чаще всего встречающихся на практике композиций программ. Дальнейшее уточнение понятия *оператора* и четкое выделение основных типов операторов в сочетании с библиотечным методом позволили использовать операторный метод программирования как основное средство А. п. на базе создания спец. трансляторов. Для операторных схем алгоритмов разработаны системы эквивалентных преобразований, позволяющие получать эффективные в том или ином смысле программы. На основе метода операторного программирования были созданы трансляторы для машин «Стрела» и «БЭСМ», послужившие началом развития А. п. в СССР на основе использования трансляторов.

Составление программ при помощи машины явилось первым серьезным использованием машин в «неарифметических» целях. Работы по А. п. дали возможность по-новому осознать возможности машин, послужили толчком не только к постановке и решению вопросов и др. неарифметических их использованиях, но и оказали влияние на характер вычисл. программ, которые все чаще и чаще оказываются в значительной мере неарифметическими. Успех первых трансляторов послужил стимулом к созданию аналогичных программ на др. вычисл. машинах. Однако языки первых трансляторов несли на себе в той или иной степени черты языков конкретных ЦВМ и поэтому являлись в известной степени *языками машинно-ориентированными* и лишь незначительно облегчали труд программиста.

Начиная с 1956 предложено ряд способов записи алгоритмов и методов программирования: метод граф-схем алгоритмов, метод специализированных программирующих программ и метод адресного программирования, основанный на спец. алгоритм. языке, названном *адресным языком*. Метод граф-схем получил распространение как метод формализации понятия *блок-схем программ*, оказавший большое влияние на развитие вопросов теории программирования. Метод специализированных программирующих программ нашел развитие и применение в работах по составлению библиотек стандартных подпрограмм и в дальнейшем был положен в основу разработки серии вычисл. машин с развитой системой непосредственной интерпретации («Промінь», «МИР» и др.).

Использование алгоритм. языков и основанных на них машинно- и процедурно-ориентированных языков программирования в качестве средств для описания алгоритмов явилось новой ступенью в развитии систем А. п.; оно позволяет решать задачу совместимости алгоритмов для их реализации на различных ЦВМ, упрощать процесс получения и отладки программ (см. *Отладочные программы*), получать строгую документацию алгоритмов, организовывать обмен программами, создавать условия для хранения и модификации программ, разрабатывать методы их оптимизации, позволяющие улучшать те или иные характеристики программ, а также вырабатывать определенные требования к *алгоритмическим структурам ЦВМ*.

Работы по созданию адресного языка оказали влияние на выбор параметров при конструировании ряда отечественных вычисл. машин, в частности, «Киев», «Днепр», «Промінь» и «Днепр-2»; адресный язык получил распространение как входной язык систем автомат. программирования для машин «Киев», «М-20» и др.

За рубежом работы по А. п. развивались с 50-х годов 20 ст. в том же направлении, т. е. по пути автоматизации использования библиотек стандартных подпрограмм, построения языков программирования, таких, как ЮНИКОД, ФЕРРАТИ и многих др. Вместе с тем обилие таких систем приводило к обособлению коллективов, работающих на различных системах, и затрудняло процесс обмена разработанными алгоритмами. В связи с этим возникла идея создания универсальных *языков процедурно-ориентированных*. Одним из таких языков является ФОРТРАН. Универсальность языка зачастую приводит к получению программ, обладающих худшими параметрами в смысле расхода памяти или времени вычислений по ним (в сравнении с программами, получаемыми с помощью искусных приемов, учитывающих те или иные особенности машины). Однако рост *быстродействия ЦВМ* и количества их делают эту потерю малоощутимой по сравнению с теми выгодами, которые дает употребление универсальных языков. В 1958 был создан проект международного языка программирования, ориентированного на класс задач вычисл. математики, известного под названием АЛГОЛ-58, доработанный вариант которого был принят в 1960 и назван *АЛГОЛом-60*. Этот язык в середине 60-х годов 20 ст. стал основой для многих разрабатываемых языков и трансляторов.

Основным назначением трансляторов является обеспечение существенного ускорения процесса получения программ в машинных языках и обеспечение более полного использования машинных ресурсов. Помимо перевода алгоритмов с одного языка (входного ма-

шинного языка) в другой (*язык промежуточный* или язык ЦВМ), транслирующая система обеспечивает выявление синтаксических и ряда семантических ошибок в алгоритмах, и этим частично решается задача отладки программ. Кроме того, за счет включения в систему соответствующих оптимизационных блоков, обрабатывающих алгоритмы посредством применения эквивалентных преобразований либо на уровне входного, либо выходного языка, транслирующая система может обеспечить получение программ, удовлетворяющих определенным требованиям качества.

Наряду с транслирующими системами все большее значение приобретают интерпретирующие системы, которые (как и транслирующие) могут быть реализованы программными и схемными средствами. Интерпретатор осуществляет пооператорную последовательную обработку (перевод в машинные команды) операторов алгоритмов, записанных на его входном языке, и их интерпретацию — выполнение машинных команд, реализующих данный оператор. Процессы перевода выполняемого алгоритма и его реализации (интерпретации) при использовании этих систем тесно взаимосвязаны, и это представляет большие удобства для отработки и отладки программ, в частности при постановке на ЦВМ задач исследовательского характера. Системы такого рода приобрели наибольшую актуальность в связи с осуществлением на ЦВМ *режима разделения времени*. Однако повторное выполнение одного и того же оператора в таких системах связано с его повторным переводом на язык интерпретации (как правило, язык машины), и следствием этого является тот факт, что по скорости выполнения готовых программ системы интерпретации уступают системам трансляции.

Проблема трансляции и интерпретации данного языка программирования распадается, по существу, на проблему анализа и проблему синтеза. В основу построения первых трансляторов была положена идея компоновки рабочей программы из программ, соответствующих отдельным операторам исходного алгоритма. Трансляторы такого рода явились многопроходовыми, т. е. трансляторами, при работе которых запись обрабатываемого алгоритма или его эквивалента просматривается несколько раз. Так, при одном из просмотров могут обрабатываться все описательные части алгоритма, в которых приводятся характеристики обрабатываемых объектов информации; при другом — переводятся на промежуточный язык арифм. операторы и т. д.; наконец осуществляется общее *памяти распределение* и присвоение истинных адресов. В случае, когда входной язык системы А. п. оказывается пригодным для описания алгоритмов трансляции, созданием таких систем в значительной мере решается проблема автоматизации самого процесса конструирования трансляторов. Первый шаг на этом пути был получен посредством использования адресного языка и соответствующего транслятора с него с целью расши-

рения входного языка системы и для создания трансляторов для других ЦВМ.

Появление языков для описания грамматик языков программирования (т. н. *метаязыков*) создало предпосылки для построения алгоритмов синтаксического контроля и анализа, способных по заданному описанию грамматики одного из данного класса языков и алгоритму в этом языке выдавать синтаксическое «дерево» последнего. Существенно при этом, что процесс синтаксического контроля или анализа для многих языков оказывается независимым от конкретных особенностей ЦВМ. Благодаря этому блок анализа транслятора становится универсальным, обслуживающим трансляцию для ряда языков данного класса. Трансляторы, в которых анализ обрабатываемой программы осуществляется на основе формального описания синтаксиса исходного языка (в некотором метаязыке), наз. *синтаксически управляемыми*.

Проблема конструирования синтаксически управляемых трансляторов, ориентированных на широкий класс грамматик, содержащих аппарат для своего расширения, стимулировала появление новых работ по формализации синтаксиса и семантики языков программирования. Последние основаны на естественном методе задания семантики посредством индукции по синтаксической структуре предложей языка. В связи с этим к проблеме формализации алгоритм. языка добавляется проблема формализации его синтаксического и семантического описания. Эта проблема решается путем создания метаязыка для описания синтаксиса и на его основе — метаязыка для описания семантики алгоритм. языков.

Процессы трансляции и интерпретации, которые для достаточно широкого класса языков программирования происходят всегда в одних и тех же условиях, могут быть описаны алгоритмами, которые в зависимости от значений некоторых параметров, определяющих конкретный язык, выполняют заданную переработку информации. В случае, когда запись на исходном языке транслируется на некоторый универсальный машинно-независимый язык, достаточно близкий к внутренним языкам некоторого класса ЦВМ, формальное описание синтаксиса и семантики языка приобретает машинно-независимую форму, и это позволяет автоматизировать процесс построения трансляторов.

Дальнейшее развитие идей А. п. привело к созданию *операционных систем*, в которых помимо процесса программирования (или перевода алгоритмов на язык интерпретации), автоматизирован комплекс всех этапов решения задач на ЦВМ от анализа задачи до синтеза программ и получения результатов в виде, пригодном для хранения, документирования или размножения. Вместе с тем, посредством использования спец. системных программ операционная система полностью автоматизирует работу обслуживающего персонала ЦВМ. Современные операционные системы представляют собой организованную совокуп-

ность алгоритмов, программ стандартных и программ обслуживающих, информационно-справочных систем и архивов данных, а также систем трансляции и интерпретации, обеспечивающих пакетную обработку программ и многопрограммную работу в режиме разделения времени и в реальном масштабе времени.

Труд специалиста по программированию при наличии таких систем приобретает более творческий характер, поскольку теперь он связывается с разработкой новых и более совершенных методов решения задач на ЦВМ и мощных систем матем. обеспечения ЦВМ и их комплексов. Вместе с тем, развитие систем А. п. оказывает существенное влияние на проектирование алгоритм. структур *вычислительных систем*, указывая пути их дальнейшего совершенствования, прежде всего за счет повышения уровня непосредственной интерпретации этих систем.

Осн. тенденцией в развитии А. п. является стремление к созданию средств, обеспечивающих реализацию задач (их программирование, отладку, решение и накопление, а также хранение программ и данных) при минимальных затратах труда программиста. Решение этой задачи обусловит дальнейшее применение ЦВМ в спец. областях. В плане этих работ особую остроту приобретает проблема унификации и стандартизации средств матем. и тех. обеспечения ЦВМ.

Расширение сфер применения ЦВМ, в свою очередь, связано с разработкой соответствующих специализированных языков и библиотек. Попытки всеобъемлющих языков (СИМУЛА-67, ПЛ-1 и АЛГОЛ-68) подтверждают закономерность развития языков, ориентированных на проблемы. При этом на первый план выдвигается проблема автоматизации процесса разработки средств матем. обеспечения, обеспечивающих эффективную реализацию этих языков, и в связи с этим создания метатрансляторов — систем программирования, в которых входной и выходной языки являются параметрами, задаваемыми посредством их описания в некоторых метаязыках.

Лит.: Ершов А. П. [и др.]. Алгоритмические языки и программирование. В кн.: История отечественной математики, т. 4, кн. 2. К., 1970. Е. Л. Ющенко.

**АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЦВМ** — использование автоматических средств в процессе проектирования цифровой вычислительной машины. А. п. ЦВМ призвана облегчить проектирование прежде всего в той его части, которая касается выполнения наиболее трудоемкой для проектировщика работы, предоставлять в распоряжение его средства для быстрой реализации принятых им решений, формализованные средства общения с другими проектировщиками, эффективные средства для совершенствования процесса проектирования и соответственно проекта. Развитие *вычислительной техники* и разработка новых машин делает задачу А. п. ЦВМ особенно важной и актуальной. Особый интерес представляет использование для А. п. ЦВМ универсальных

*вычислительных машин*. В этом случае А. п. ЦВМ выглядит как создание и использование спец. матем. и тех. обеспечения универсальных вычисл. машин, ориентированного на решение задач проектирования ЦВМ.

История развития А. п. ЦВМ прошла три стадии. На первой стадии разрабатывались конкретные автомат. устр-ва, рассчитанные на выполнение некоторого конкретного действия в процессе проектирования ЦВМ; на следующей стадии разрабатывались программы для универсальных ЦВМ, которые реализовали тот или иной *алгоритм* решения сравнительно небольшой задачи, возникающей в процессе проектирования; третья стадия характерна разработкой систем программ. В настоящее время при А. п. ЦВМ используют комплексный подход, состоящий в разработке систем тех. и матем. средств.

А. п. ЦВМ предполагает наличие методики проектирования, отражающей процесс проектирования ЦВМ. Методика проектирования ЦВМ представляет собой совокупность моделей, алгоритмов и др. матем. средств, в терминах которых можно осуществлять решение задач проектирования. Процесс проектирования ЦВМ состоит из системного, алгоритмического, логического, технического и технологического проектирования. На этапе *системного* проектирования ЦВМ осуществляется проектирование архитектуры вычисл. машины и разработка ее общей блок-схемы. *Алгоритмическое* проектирование предполагает разработку алгоритмов функционирования таких блоков машины, как центральный *процессор*, выбор системы команд машины, а также разработку алгоритмов реализации выбранной системы команд и т. д. (см. *Алгоритмический синтез ЦВМ*). *Логическое* проектирование предусматривает получение логической структуры устройств вычисл. машины применительно к выбранной элементной базе (см. *Блочный синтез ЦВМ*, *Элементный синтез ЦВМ*). На этапе *технического* проектирования осуществляется разработка конструкции вычисл. машины. Смысл *технологического* этапа состоит в разработке технологической оснастки и документации для изготовителей. Разделение процесса проектирования на этапы является в значительной степени условным и зависит от состояния развития теории и практики проектирования ЦВМ.

Поскольку история разработок ЦВМ сравнительно невелика, теории проектирования ЦВМ в строгом смысле не существует. Опыт проектирования конкретных ЦВМ позволил выделить из процесса проектирования лишь некоторую совокупность задач проектирования. Строгая постановка задач проектирования возможна лишь при наличии средств для точного описания проектируемой ЦВМ. Таким средством служит *язык описания устройств ЦВМ*. В основе всякого описания ЦВМ лежит описание ее структуры (схемы), которое позволяет судить о составе компонент, из которых она состоит, и связях между ними. Кро-



ме того, должен быть описан процесс функционирования этой структуры.

В процессе проектирования выполняется ряд описаний проектируемой ЦВМ. Они отличаются степенью детализации и подробности. Напр., на системном этапе проектирования традиционной ЦВМ описывают блок-схему машины, представляющую собой структуру из устр-ва управления, операционного устр-ва, входных и выходных устр-в, запоминающего устр-ва и т. п.; на тех. этапе проектирования описывают структуру, состоящую из конструктивных блоков, напр., плат и таблицы межплатных соединений; на логическом этапе описывают структуру, представляющую собой сеть из логических элементов ЦВМ и т. п. Полное описание проекта представляет собой иерархию структурных описаний с известными алгоритмами функционирования компонент.

В зависимости от характера результата проектирования ЦВМ и используемой информации о проекте задачи проектирования можно разделить на задачи синтеза, анализа, оптимизации и оценки. Задачи синтеза состоят, как правило, в построении структур последующего иерархического уровня. Задачи анализа предполагают определение различных качественных характеристик проекта ЦВМ. Оптимизационные задачи состоят в преобразовании имеющихся описаний проекта в соответствии с заданными критериями с целью изменения характеристик. Наконец, задачи оценки состоят в прогнозировании значений характеристик будущих структурных описаний, т. е. схем машины.

Техника решения задач проектирования зависит от цели проектирования и используемого матем. аппарата. Напр., на этапе логич. проектирования ЦВМ задачами синтеза являются задача синтеза автоматов структурного, задача синтеза комбинационной схемы, задача блочного синтеза ЦВМ и др.; задачами анализа являются задача проверки правильности функционирования автомата, задача анализа комбинационной схемы, задача синхронизации работы автоматов композиции и т. п.; задачами оптимизации являются задача минимизации числа регистров операционного устр-ва, задачи оптимизации числа уровней микропрограммного управления ЦВМ, задача минимизации затрат аппаратуры и пр.

С точки зрения задач проектирования системный и алгоритмический этапы проектирования характеризуются, прежде всего, задачами анализа. При этом объектом анализа является архитектура ЦВМ. Одним из распространенных средств решения задач этого этапа является техника моделирования, основанная на представлении общей блок-схемы ЦВМ в виде модели массового обслуживания системы. Системный и алгоритмический этапы проектирования наименее формализованы. На логич. этапе проектирования встречаются все указанные типы задач. Методы решения задач основываются на результатах совр. алгебры, автоматов теории, алгоритмов теории, логики математической и пр. Задачи тех. и тех-

нологического этапов, наиболее нуждающиеся в автоматизации, не представляют принципиальных трудностей. Однако, постановка их на вычисл. машине оказалась очень трудной, поскольку потребовалась сложная система обслуживания.

Использование в качестве осн. средства А. п. универсальных вычисл. машин требует решения таких задач, как разработка алгоритмов и программ решения задач проектирования, а также разработка организации, хранения, перемещения информационных массивов о проектируемой ЦВМ и других дополнительных данных, необходимых в процессе проектирования. При этом предполагается разработка спец. техники следующего назначения: для обслуживания внесения изменений в проект; обслуживания проектирования в диалога режиме ряда проектировщиков; обслуживания периферийных автом. устройств, используемых в процессе проектирования и изготовления схем ЦВМ; программирования задач проектирования и обслуживания процесса проектирования.

Имеется целый ряд экспериментальных систем А. п. ЦВМ. Как правило, они не являются универсальными. Их назначение ограничивается кругом решаемых задач проектирования. В качестве примера рассмотрим следующие системы А. п. ЦВМ: систему, обслуживающую проектирование «IBM-360»; систему «ПРОЕКТ»; систему А. п. ЦВМ, основанную на использовании языка ЛЯПАС. Система А. п. ЦВМ, обслуживающая проектирование «IBM-360», состоит из совокупности алгоритмов и программ на «IBM-7090», предназначенных для решения задач тех. и технологического проектирования. Эта система характерна тем, что она имеет стыковку универсальной вычисл. машины, на которую разработана, со спец. стендами и устр-вами, позволяющими автоматически решать некоторые задачи типа проверки правильности и надежности схем. Программы этой системы делятся на моделирующие и конструирующие. Моделирующие программы позволяют получить результаты моделирования схемы порядка 2—4 тыс. логич. элементов в течение 10—12 синхронизирующих тактов менее чем за 30 мин. К конструирующим программам относятся, напр., такие программы, как распределение логических элементов по ячейкам и панелям; размещение ячеек на панели; размещение кабеля, соединяющего панели; проектирование печатного монтажа на панели. Система «ПРОЕКТ», разработанная в Институте кибернетики АН УССР, представляет собой совокупность средств спец. матем. обеспечения на ЭВМ «М-220», предназначенных для решения задач алгоритмического, логич., тех. проектирования центрального процессора ЦВМ. Эта система характеризуется гибким набором средств для реализации произвольной методики проектирования. Решение задач проектирования осуществляется в терминах директив проектирования. Набор директив проектирования достаточно богат. Напр., основными

директивами, используемыми на логич. этапе проектирования, являются следующие: выделение функционального, управляющего и операционного блоков, блочный синтез устр-ва, синтез управляющего и функционального блоков и т. д. Кроме собственно директив проектирования, в системе имеется большой набор удобных для пользователей директив обслуживания *памяти распределения*, диалога, ввода и вывода *данных* и т. п. Система А. п. ЦВМ, основанная на использовании языка программирования ЛЯПАС, состоит из *библиотеки стандартных подпрограмм*, в которых реализованы алгоритмы синтеза дискретных автоматов, разработанные в современной теории автоматов.

Бурное развитие ЦВМ, использование *больших интегральных схем* (БИСов), усложнение логической структуры и схемная реализация частей *математического обеспечения ЦВМ* ведут к усилению значения и к усложнению средств А. п. ЦВМ. Разрабатывается методика проектирования ЦВМ совместно с ее матем. обеспечением и комплексы тех. и матем. обеспечения ее реализации.

Лит.: Глушков В. М., Капитонова Ю. В., Летичевский А. А. Об автоматизации проектирования вычислительных машин. «Кибернетика», 1967, № 5; Применение вычислительных машин для проектирования цифровых устройств. М., 1968 [библиогр. с. 252—254]; Глушков В. М., Капитонова Ю. В., Летичевский А. А. Математическое обеспечение автоматизированной системы проектирования вычислительных машин и систем (ПРОЕКТ). «Кибернетика», 1970, № 4; Глушков В. М., Капитонова Ю. В., Летичевский А. А. О языках описания данных в автоматизированной системе проектирования вычислительных машин (ПРОЕКТ). «Кибернетика», 1970, № 6; Глушков В. М., Капитонова Ю. В., Летичевский А. А. О методике проектирования вычислительных машин в системе ПРОЕКТ. «Кибернетика», 1971, № 2; Закревский А. Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. М., 1971 [библиогр. с. 502—504]; Кейс П. [и др.]. Автоматизация проектирования вычислительных систем с использованием логических схем на твердом теле. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, в. 1. М., 1965. В. М. Глушков, Ю. В. Капитонова, А. А. Летичевский.

**АВТОМАТИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМ ПРОЦЕССОМ** — комплекс мероприятий, обеспечивающих управление производственным процессом (ПП) с помощью системы автомат. управления и человека. Оsn. целью А. у. п. п. является совершенствование управления ПП, направленное на улучшение его технических и эконом. показателей. Более того, иногда осуществление ПП невозможно без автоматизации управления этим процессом (напр., автоматизация неустойчивых физ.-хим. процессов). В основе А. у. п. п. лежат методы *автоматического управления теории, информации теории, вычислительной техники, операций исследования* и др. А. у. п. п. — сложная комплексная инженерная проблема, в которой объединяются многие задачи. Оsn. его этапы таковы: технико-экономический анализ, оценивающий целесообразность А. у. п. п.; моделирование производственного процесса, как объекта управления; разработка структуры системы А. у. п. п. и решение задачи синтеза алгоритма управления; техническая

реализация А. у. п. п. Между этими этапами существует тесная связь, обуславливаемая прежде всего тех.-эконом. соображениями. Наличие такой связи вызывает необходимость повторения всего цикла исследований или его части, организации своего рода процедуры последовательных приближений, направленной на отыскание приемлемого варианта автоматической системы управления (САУ).

Комплексное рассмотрение проблем создания САУ в настоящее время еще не обеспечено полностью теорией и соответствующими инженерными методами расчета и проектирования. При А. у. п. п. некоторые задачи могут оказаться неразрешимыми с позиций теории автоматического управления, и тогда эти задачи должен решать человек, который оказывается включенным в систему управления и действует в соответствии со своим опытом и интуицией. В этом случае говорят о *системе автоматизированной*. Если функционирующий в этой системе человек будет действовать на основе определенного набора правил — *некоторого алгоритма*, то его можно рассматривать как автомат в составе системы управления. Различие между автоматизированной и автомат. системами с формальной точки зрения в этом случае исчезает.

Рассмотрим подробнее этапы построения САУ. Для проведения тех.-эконом. анализа необходимо принять некоторые критерии, количественно оценивающие качество управления. Простейшим критерием является себестоимость производства единицы продукции.

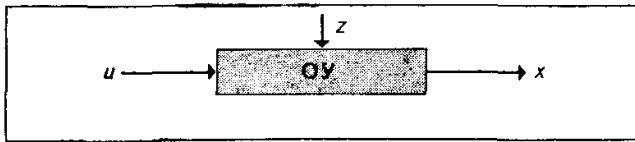
Более сложные критерии могут учитывать качество производимой продукции, себестоимость на некотором интервале времени и др. характеристики ПП. Грубым признаком плохо управляемого ПП является значительная *дисперсия* критерия качества при многократном повторении циклов производства. Для более тонких выводов необходимо провести математическое, физ. или натурное моделирование ПП с позиций теории управления. Широко используемая схема объекта управления (ОУ) представлена на рис. Здесь:  $x$  — выходные параметры ОУ, к которым относят выход ПП (в общем случае — поток энергии, вещества, изделий),  $u$  — входные величины ОУ, к которым относят регулируемые потоки компонентов, необходимых для осуществления ПП, и параметры, которые определяют протекающие ПП. В ОУ осуществляется преобразование входных потоков  $u$  в выходные  $x$ .

Сложность современных технологий приводит к большим затруднениям при получении (а иногда и последующем использовании) модели ПП. Эти затруднения обусловлены прежде всего большой размерностью входов и выходов ОУ (порядка десятков и сотен), сложной структурой и неопределенностью преобразований входных потоков внутри ОУ. Более того, во многих случаях характер этих преобразований изменяется во времени случайным образом. Эти изменения принято отображать случайным *возмущающим воздействием* (на рис. —  $z$ ). В сложных ПП применяют т. н.



декомпозиции методы — разбиение модели ПП на составляющие ее части, каждая из которых рассматривается как модель самостоятельного ОУ.

Матем. модель ПП как ОУ необходима и на следующей стадии — при выборе структурной схемы системы и определения алгоритма управления. Здесь очень существенной является информация о состоянии ОУ. В общем случае характеристики состояния ОУ извлекаются из наблюдений за его входами и выходами (см. *Идентификация объектов управления*).



Упрощенная схема объекта управления при автоматизации управления производственным процессом.

Это делает необходимым изучение вопроса о возможности измерения входных и выходных величин, о погрешностях измерений, степени достоверности получаемых результатов и пр.

Динамические свойства ПП вызывают необходимость включать в состав информации об ОУ значения его входных и выходных величин не только в текущий, но и в прошедшие моменты времени. Объем необходимой информации при этом значительно возрастает, и организация информационных потоков становится сложной тех. задачей, для решения которой требуются спец. подсистемы предварительной обработки данных.

В случае, когда модель ОУ содержит не наблюдаемые непосредственно (скрытые) возмущения (параметры), применяют системы управления замкнутые, содержащие обратную связь, по которой поступает информация об этих возмущениях или параметрах.

После выбора структурной схемы определяется информация, которую можно использовать в управляющем устройстве (УУ). Задача УУ — на основе этой информации выработать решение об управляющем воздействии на вход ОУ с целью изменить его выходную величину  $x$ . При этом необходимо установить определенное соотношение между информацией о состоянии ОУ, вводимой в УУ, и управляющим воздействием, поступающим из УУ на вход ОУ (алгоритм управления).

На этапе тех. реализации производится выбор вариантов технических средств для осуществления как операций по организации или первичной обработке информации об ОУ, так и операций по вычислению управляющих воздействий. Применение ЦВМ в качестве УУ должно быть глубоко экономически обоснованным. Иногда целесообразно использовать для реализации алгоритма управления спец. аналоговую или комбинированную вычисл. машины, обеспечив этим общий выигрыш по ряду технико-эконом. характеристик системы.

Такое комплексное рассмотрение всех этапов А. у. п. п. представляет собой своего рода

системный подход к процедуре проектирования автоматизированных или автомат. систем управления производственными процессами. Развитие инженерных методов проектирования последних систем необходимо для создания автомат. систем управления совр. технологическими процессами. Автоматизация управления цехами, предприятиями и еще более сложными объединениями пока носит лишь частичный характер (автоматизированы в основном системы обработки информации). Принятие же решений по оперативному планированию и управлению производством осуществляет человек. Лит.: Трапезников В. А. Автоматическое управление и экономика. «Автоматика и телемеханика», 1966, № 1; Бир С. Кибернетика и управление производством. Пер. с англ. М., 1965.

В. И. Иваненко.

**АВТОМАТИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКОГО ТРУДА** — комплексная перестройка управленческого труда на основе создания автоматизированных систем управления различных уровней. Для более низких звеньев задачу А. у. т. решают, создавая автоматизированные системы управления предприятием или учреждением, для более высоких — системы управления отраслью промышленности или нар. х-вом (см. *Автоматизированные системы управления в народном хозяйстве*).

**АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ** — вычислительная система, осуществляющая машинную обработку результатов измерения величин или параметров исследуемого объекта (явления) и формирования их в удобном для хранения и последующего анализа виде и обеспечивающая (программными и аппаратными средствами) обмен информацией с экспериментатором в процессе функционирования. Обработанная информация для экспресс-анализа выводится на устр-ва кратковременного отображения (экран, электроннолучевые трубки), для долговременного хранения — на магнитные, бумажные и перфокартные ленты, перфокарты и т. п. Осн. звеном современных А. с. о. э. д. являются ЦВМ. В зависимости от того, входит ли исследуемый объект в состав управляемых системой устр-в, А. с. о. э. д. может быть непосредственно связана с объектом или автономной. Диапазон возможностей А. с. о. э. д. по управлению объектом исследований очень широк: от управления аппаратурой измерений и съема экспериментальных данных до управления состояниями и динамикой объекта в процессе эксперимента. Управляющие воздействия на объект, выработанные в А. с. о. э. д. по результатам обработки снятых экспериментальных данных и приложенные к объекту в пределах заданного периода измерений, образуют в процессе управления обратную связь. В основу разработки А. с. о. э. д. можно принять алгоритм управления экспериментом, представляющий собой замкнутый цикл операций раскрытия неопределенности (см. рис. 1 в ст. *Система управления научным экспериментом*).

А. с. о. э. д. состоит из двух взаимосвязанных частей: матем. обеспечения и тех. оснаще-

ния. Матем. обеспечение — это программы вычислений, запрограммированные процессы сортировки, преобразования, редактирования, накопления, передачи, отображения, ввода, вывода и управления этими процессами, включая выработку управляющих воздействий на внешние объекты. Тех. оснащение — это устр-ва *вычислительной техники* и связи, которые осуществляют операции с потоками дискретных и непрерывных сигналов, представляющих величины, символы и их отношения. Тех. оснащение обеспечивает выполнение всего комплекса матем. операций и их комбинаций. Разработка и внедрение А. с. о. э. д. выполняется, как правило, поэтапно. Созданию матем. обеспечения предшествует выбор или разработка методов вычислений, программирующей системы, ф-ций и состава программы-диспетчера. Созданию средств тех. оснащения А. с. о. э. д. предшествует анализ и формирование операций в человеко-машинной системе «экспериментатор — объект исследований — вычисл. комплекс» (Илл. между стр. 32—33). При разработке матем. обеспечения исходят обычно из совокупности матем. моделей  $M_m$  исследуемых явлений, программ экспериментов, алгоритмов вычислений и форм представления результатов. Тех. оснащение разрабатывается с учетом специфики матем. обеспечения, состава операций в человеко-маш. системе и информационных характеристик экспериментальных данных. Важнейшими из этих характеристик являются информационная емкость эксперимента  $C_I$  (*бит*) — к-во единиц информации, снимаемых с объекта в процессе проведения единичного эксперимента, и мощность потока экспериментальных данных (*бит/сек*) — к-во единиц информации, снимаемых в единицу времени. Емкость накопителей, память машины и др. элементы А. с. о. э. д. проектируют, исходя из принятой информационной емкости эксперимента. Мощность потока данных определяет быстродействие устройств передачи данных, их преобразования и вычислений.

Система «экспериментатор — объект исследований — вычисл. комплекс» обеспечивает выполнение операций управления объектом (автоматического или ручного), процессов съема экспериментальных данных (активный эксперимент) и измерения косвенных параметров неуправляемого объекта (пассивный эксперимент), операции преобразования и сжатия данных. В А. с. о. э. д. может осуществляться, кроме того, экспресс-анализ полученных результатов измерений, контроль за процессом индексации в маш. массивах и вызов из памяти машины на средства отображения или печати промежуточных результатов преобразования, сжатия и вычислений. Режим работы А. с. о. э. д. включает, как правило, переадресацию маш. массивов, прерывание маш. счета, переформирование выводимых результатов вычислений и первичную обработку экспериментальных данных. Маш. реализация указанных операций выполняется по сервис-

ным программам, входящим в программу-диспетчер. Т. о. автоматизация эксперимента на базе А. с. о. э. д. не только обеспечивает маш. реализацию вычислений, но и изменяет алгоритм выполнения всей совокупности операций в системе «экспериментатор — объект исследования — вычисл. комплекс».

Структура построения А. с. о. э. д. определяется: а) целями эксперимента (изучение окружающей природы — гидро-, аэро- и геофиз. исследования, исследования технолог. процессов в хим., металлург. и др. отраслях промышленности, испытания образцов новой техники и исследование космического пространства и т. п.); б) видами экспериментов (активный, пассивный); в) степенью неопределенности матем. модели объекта исследований. Эффективность функционирования А. с. о. э. д. оценивается, как правило, по критериям, вытекающим из экстремального свойства минимизации времени итераций в замкнутом цикле алгоритма управления экспериментом. Осн. эффект работы А. с. о. э. д. состоит в сокращении общего времени экспериментальных исследований и достигается за счет быстродействия вычисл. устройств по обработке массивов экспериментальных данных в максимально возможном числе элементов замкнутого цикла. Современные А. с. о. э. д. в сфере испытаний образцов новой техники обеспечивают сокращение времени полной обработки экспериментальных данных в 10 раз, в задачах экспресс-анализа — в 20—30 и более раз. При гидро-, аэро- и геофиз. исследованиях значение фактора уменьшения времени уступает, как правило, значению эффекта сжатия объемов первичных экспериментальных данных за счет обработки, вычислений и формирования результатов. Суммарный эффект сжатия объемов информации за счет применения А. с. о. э. д. может достигать 50-кратной величины (отношение объема первичных данных к объему хранимых данных в *бит*). Работа А. с. о. э. д., оснащенной современным матем. обеспечением и ЭВМ с быстродействием до миллиона операций в секунду, эквивалентна работе сотен вычислителей и техников при ручных методах обработки экспериментальных данных.

Лит.: Вычислительные системы, в. 35. Новосибирск, 1969; Жуков К. Д. Автоматизация научного эксперимента. «Вестник АН УРСР», 1970, № 3; Механизация и автоматизация управления, № 3. К., 1970.

К. Д. Жуков

**АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА ПРОЕКТИРОВАНИЯ** — комплекс технических и математических средств, предназначенных для автоматизации процессов проектирования с участием человека. Совокупность этапов проектирования, связанных определенной технологической последовательностью, направлена на решение осн. задачи системы (ОЗС). Естественно, что ОЗС, ее процедурное содержание по отношению к А. с. п. в значительной степени зависит от сферы применения проектируемых на этой системе тех. средств. Так, напр., А. с. п. в сфере судостроения значительно отличается в функциональном отношении от А. с. п. в сфере *вычислительной техни-*

ки. В первом случае А. с. п. обладает хорошо развитыми устр-вами воспроизведения больших форматов чертежей и их ввода в ЭВМ. Во втором — эти устр-ва уступают место устр-вам вывода электр. схем, печатных плат и др. конструкторско-технологических документов. В матем. обеспечении эти системы отличаются алгоритм. обеспечением физических (сопровождающих процесс проектирования) расчетов, содержанием информационных структур, внешними языками системы и т. д. Типовая блок-схема процесса проектирования на базе А. с. п. показана на рисунке. Исследование ОЗС дает возможность определить состав и тех. требования, предъявляемые к тех. и матем. средствам А. с. п.

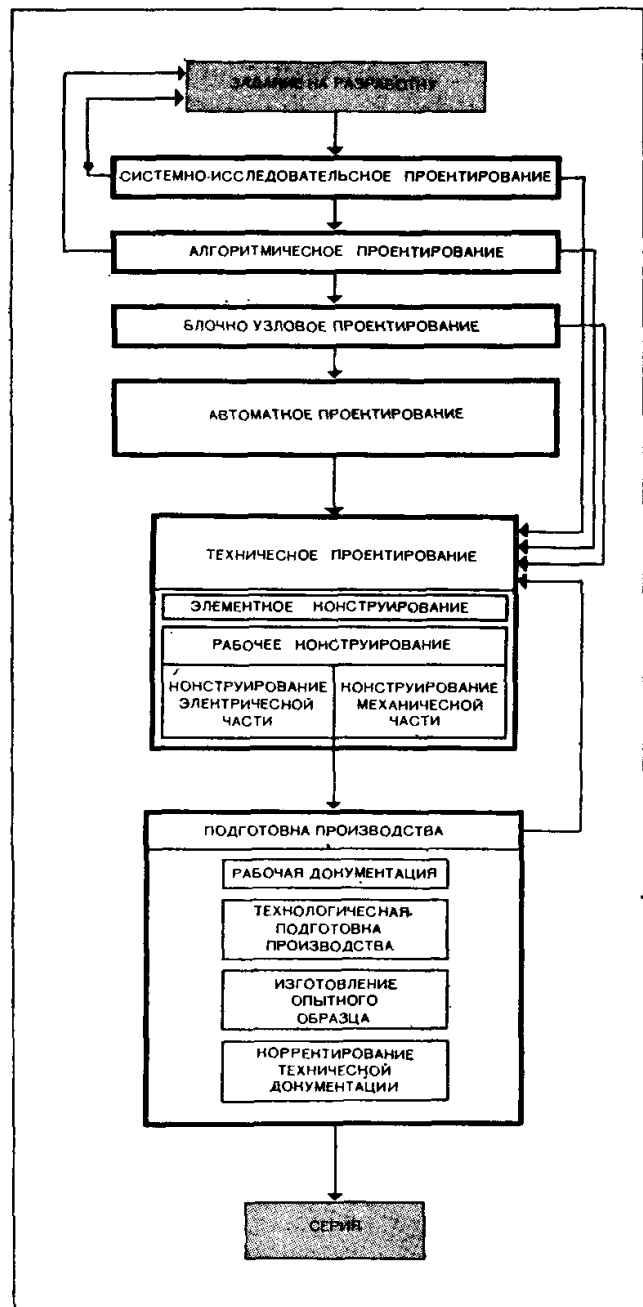
Основу технических средств в А. с. п. составляет центр. вычислитель (*процессор*), в качестве которого, как правило, выступает ЭВМ большой мощности с ЭВМ-сателлитом или без нее, если мощности первой достаточно для решения ОЗС. Поскольку А. с. п. выпускает графическую (чертежную) документацию, то естественно, что эта система должна обладать хорошо развитыми средствами ввода, вывода и размножения графической информации и документации. Вызванная недостаточной степенью алгоритмизации ОЗС необходимость вмешательства человека в процесс проектирования с целью управления им приводит к необходимости иметь в составе тех. средств устр-ва оперативного отображения графической информации и спец. пульты управления системой.

Математическое обеспечение А. с. п. состоит из двух осн. частей: из внешнего и внутреннего матем. обеспечения.

Внешнее матем. обеспечение — это матем. средства общения человека (проектировщика) с системой. В его состав входят языки представления исходной информации, средства пополнения информационной системы и языки управления работой А. с. п. (командно-операционные языки), позволяющие вести диалог человек — система. Эти языки часто наз. «сервисными». Напр., запись приказа (команды) (ПОВЕРНУТЬ ЧЕРТЕЖ № 0024/а 30° ОХ экр. № 3), означает: повернуть чертеж на угол 30° относительно оси ОХ и вывести результат на экран № 3.

Внутреннее матем. обеспечение — это матем. средства, обеспечивающие решения ОЗС в автоматизированном режиме. Функционально-внутреннее матем. обеспечение А. с. п. состоит из следующих компонентов: из *операционной системы*, программного обеспечения процедур решения ОЗС и информационной системы (ИС). В состав операционной системы входят *трансляторы* с внешних языков А. с. п., программы расширения функциональных особенностей платной операционной системы центр. вычислителя (программы, обеспечивающие работу нештатных тех. средств центр. вычислителя) и т. н. программы загрузки (программы, управляющие вычисл. процессом решения процедур ОЗС в интерпретирующем режиме).

Программное обеспечение процедур решения ОЗС состоит из: 1) программы физ. расчетов, обеспечивающих выполнение всех сопровождающих проектирование расчетов. Состав этих программ полностью определяется сферой применения А. с. п. Напр., в судостроении — это расчеты статики, динамики и физ. параметров судна; в вычисл. технике — это расчет электр. характеристик схем элементов, логических цепей и т. д.; 2) программ геом. преобразований, напр., программы построения классических линий, тел и фигур,



Типовая блок-схема процесса проектирования на основе автоматизированной системы проектирования.

программы изменения масштаба и деформации чертежа или тела, поворотов, сдвигов и др. манипуляций; 3) программ организационно-системного характера, напр., программ открытия и закрытия программы, формирования

информационных (рабочих) полей, программы обеспечения надежности хранения информации и доступа к массивам информационным и т. д.

Информационная система (ИС) включает в себя: 1) структуру и способы представления информации на носителях матем. памяти А. с. п.; 2) программы функционирования ИС (пополнение, выдача по запросу и обеспечение процедуры решения ОЗС), напр., программы поиска чертежа или отдельного его элемента, программа пополнения чертежа линией и т. д.; 3) программы, обеспечивающие самосохранение и статистическую обработку информации. Это программы, обеспечивающие дублирование и перемещение в связи с динамикой (показателями спроса) вычисл. процесса, программы внесения изменений во всю структуру информационного массива на проектируемое изделие, программы очистки массивов от неиспользованной информации и т. д.

Выше было рассмотрено функциональное определение состава тех. и матем. средств А. с. п., исходя из общности этапов проектирования. Количественное определение требований к этим средствам определяется в процессе исследования ОЗС, при анализе ее отдельных этапов и степени их алгоритмизации. Следует отметить, что именно выбор оптим. состава тех. и матем. средств и структуры А. с. п. является предметом исследования ОЗС в определенной сфере человеческой деятельности.

Лит.: Глушков В. М. Перспективы автоматизации проектирования вычислительных машин. «Вестник АН СССР», 1967, № 4; Глушков В. М., Капитанова Ю. В., Летищевский А. А. Об автоматизации проектирования вычислительных машин. «Кибернетика», 1967, № 5; Глушков В. М. Основные принципы построения автоматизированных систем управления. К., 1969; Кейс П. [и др.]. Автоматизация проектирования вычислительных систем с использованием логических схем на твердом теле. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, в. 1. М., 1965.

Я. П. Дрымаляк, Ю. Т. Митулинский.

**АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ КЛАСС** — учебное помещение, оборудованное техническими средствами для реализации программированного обучения. Применяют для повышения качества управления учебным процессом, для более полной реализации потенциальных возможностей *программированного обучения* и контроля. Основной особенностью автоматизированного обучения является управляемая самостоятельная работа обучаемых. Тех. устр-ва А. о. к. предназначены для обеспечения процесса обучения, в результате которого обучаемые приобретают новые знания, умения и навыки. Применение А. о. к. в учебном процессе приводит к повышению производительности труда преподавателя и обучаемых. Каждый обучаемый является относительно самостоятельным объектом управления, т. е. управление его деятельностью осуществляется как преподавателем, так и с помощью *обучающей программы*. Система управления обучением при этом является двухступенчатой. На верхней ступени находится преподаватель, на нижней — тех. обучающие устр-ва

(см. *Обучающая машина*). Такое построение системы управления позволяет распределять перерабатываемую информацию в соответствии с пропускными способностями ее ступеней.

Ступенчатое (иерархическое) построение системы управления процессом группового обучения обеспечивает переход от одноканального (усредненного) разомкнутого управления обучением к многоканальному (дифференцированному) замкнутому управлению. Каждый обучаемый при этом может изучать материал на доступном для него уровне сложности и в положительном темпе. Преподаватель, благодаря возложению части его функций на обучающие устр-ва, получает возможность наиболее активно и целенаправленно руководить учебно-воспитательным процессом. Одной из главных его задач на уроке в А. о. к. является восполнение своей деятельностью всего того, что не учтено или не может быть учтено заранее в обучающей программе, а также рациональное сочетание программированных методов обучения с традиционными. Освобождение преподавателя от многократного дублирования одинаковых вопросов позволяет ему более качественно проводить индивидуальную работу с обучаемыми, более полно использовать свою квалификацию и методическое мастерство.

По диапазону выполняемых в учебном процессе задач А. о. к. разделяют на специализированные и многофункциональные. Отличительной чертой многофункциональных классов является то, что в них формы взаимодействия между обучаемыми и тех. устр-вами практически не зависят от содержания и цели обучения (или контроля). Это значит, что один и тот же класс может быть использован для обучения (или контроля) по различным предметам. Основу оборудования любых типов А. о. к. составляют обучающие или контролирующие устр-ва. Ими оснащаются рабочие места обучаемых. Кроме этих устройств, в комплект оборудования наиболее совершенных А. о. к. включается киноаппаратура и телевизоры, диапроекторы и эпипроекторы, отображающая и регистрирующая аппаратура и др. Применение этой аппаратуры направлено на рационализацию труда преподавателя на различных этапах обучения, на освобождение его от выполнения трудоемких и не творческих функций по сбору и обработке статистического материала. Многие А. о. к. содержат пульта управления всем комплексом тех. средств, используемых в классе. Наличие таких пультов облегчает обслуживание и эксплуатацию А. о. к., позволяет осуществлять оперативный контроль хода обучения всей учебной группы. Блок-схема типового А. о. к. показана на рис.

По характеру управления рабочими местами различают два типа А. о. к. К первому относятся классы, оборудованные тех. устр-вами автономного исполнения. Работа с такими устр-вами осуществляется, как правило, индивидуализированно, преподаватель лишь наблюдает за ходом обучения и при необходимости оказывает на того или иного обучаемого

много соответствующее воздействие. Ко второму типу относятся А. о. к. с централизованным управлением. Такие классы имеют общую систему связи рабочих мест (пультов), обучаемых с пультом управления. Обучение и контроль в таких классах может осуществляться в индивидуальном темпе и в темпе, устанавливаемом преподавателем. Наиболее совершенными и перспективными А. о. к. с централизованным управлением являются обучающие комплексы, выполненные на базе ЦВМ (Илл. между с. 176—177). Благодаря высокому

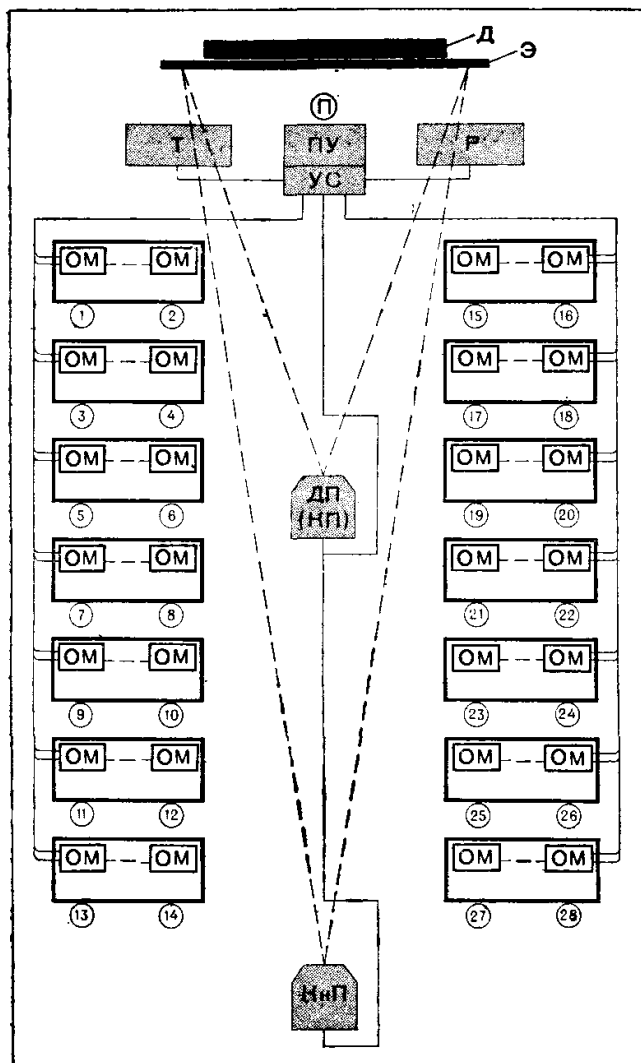


Схема типового класса автоматизированного обучения: 1—28 — рабочие места обучаемых; П — рабочее место преподавателя; ПУ — пульт управления; ОМ — обучающие (контролирующие) машины; КП — кинопроектор; ДП (КП) — диапроектор (кадропроектор); Д — классная доска; Э — экран; Т — отображающее табло; Р — регистрирующая аппаратура; УС — устройство сопряжения ПУ с техническими средствами.

быстродействию и большому объему памяти цифровой вычислительной машины А. о. к. является эффективным средством управления обучением большого к-ва учащихся (до сотен и тысяч человек). При этом представляется возможным использовать наиболее совершенные (в частности, адаптивные) обучающие программы и способы взаимодействия человека

с тех. устр-вом, обеспечить выполнение более широкого круга учебных задач. Наряду с реализацией обучающих программ, обучающий комплекс обеспечивает сбор и обработку статистического материала о качестве усвоения знаний и создает тем самым условия для точного количественного анализа и прогнозирования процесса обучения.

В состав обучающего комплекса, кроме ЦВМ и рабочих мест обучаемых, входят пульт управления, средства хранения и выдачи учебной информации, средства отображения и регистрации результатов обучения. Пульт управления предназначен для осуществления текущего контроля за ходом обучения и управления тех. средствами комплекса. Средствами хранения учебной информации могут быть альбомы программированных материалов, диафильмы, кинофильмы или видеоманитонные записи. В зависимости от типа этих средств и способа выдачи информации определяется конструкция рабочих мест обучаемых. Первый тип рабочих мест обеспечивает адресацию обучаемого к определенной странице или параграфу обучающей программы, второй — экспонирование с экрана проектора, третий — экспонирование с экрана телевизора замкнутой телевизионной системы и т. д. Перспективность использования обучающих комплексов обуславливается также тем, что их применение для обучения большого к-ва учащихся может быть сделано экономически более выгодным, чем применение А. о. к., оборудованных тех. средствами автономного исполнения. См. также *Взаимодействие человека с вычислительной машиной*.

Лит.: Ростунов Т. И. Программированное обучение и обучающие машины. К., 1967 [библиогр. с. 128—129]; Применение ЭВМ в учебном процессе. М., 1969; Столаров Л. М. Обучение с помощью машин. Пер. с англ. М., 1965.

А. Г. Михнушев, Н. А. Шишенок.

**АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ** в народном хозяйстве — системы управления предприятиями, учреждениями, территориальными объединениями, городским хозяйством, отраслями, ведомствами и т. д., основанные на регулярном применении современных математических методов и технических средств автоматической обработки информации в учете, анализе, планировании, организации, проектировании и подготовке производственно-хозяйственной деятельности.

Возможности автоматизации различных информационных процессов являются осн. научно-тех. предпосылками для создания автоматизированных систем управления (АСУ) в нар. х-ве. Благодаря разработанным тех. средствам можно коренным образом изменить технологию выполнения информационных процессов в управлении: повысить достоверность и оперативность данных, отражающих состояние произв.-хоз. деятельности, упростить процессы фиксации данных; улучшить хранение информации и ускорить поиск и группировку необходимых сведений, сведя тем самым до минимума участие человека в подготовке отчетной

информации; улучшить связи и информируемость различных звеньев управления х-вом; упорядочить документооборот за счет изъятия из обращения всех промежуточных данных; улучшить формы представления данных для управления (аппаратура отображения данных); своевременно решать сложные задачи анализа, прогнозирования и оптимизации планирования и организации нар. хозяйства.

Тех. предпосылкой для построения таких систем явилось создание и пром. производство ЭВМ, а затем и комплексной *обработки данных систем*, способных автоматизировать информационные процессы. Созданные в последние годы различные устр-ва, облегчающие общение человека с тех. средствами обработки данных, особенно на этапах фиксации и отображения информации, значительно ускорили процесс внедрения АСУ в народное хозяйство.

АСУ характеризуется качественно новой организацией информационных процессов, интегрированным характером всей системы информации, автомат. планированием решения задач, органическим единством средств, методов и организации решения задач управления. На основе автоматизации информационных процессов возможно использование наиболее совершенных *моделей математических* и методов решения задач оптим. планирования, проектирования и управления.

Отличия АСУ от традиционных систем управления, основанных на ручном и механизированном выполнении информационных процессов или разовом использовании ЭВМ, сформулированы в виде специальных принципов, определяющих осн. подходы к созданию и организации функционирования АСУ. Автоматизация и механизация отдельных процессов и стадий управления не уменьшает объема работ по подготовке данных к решению задачи. В этих условиях большое место занимают вопросы ввода и вывода информации, низкая типизация, а следовательно и распараллеливание в подготовке программного аппарата, трудоемкая эксплуатация *программ* и тех. комплекса обработки информации. Эти недостатки затрудняют решение задач перспективного долгосрочного прогнозирования на основе оперативных и объективных данных, оперативную корректировку плановых заданий, увеличивают запаздывание в представлении данных для управления.

Системы управления в нар. х-ве эффективны только тогда, когда, во-первых, задачи учета и управления решаются в едином комплексе, при охвате всей схемы движения информации от первичной до выдачи систематизированных данных управляющим органам. Во-вторых, для эффективности АСУ необходимо, чтобы функциональная деятельность, на которую направлено управление, была охвачена единой матем. моделью (комплексом взаимоувязанных матем. моделей разных уровней), когда на основе этой модели автоматически ставят и решают задачи оптим. планирования и управления. Наиболее существенно при этом, чтобы матем. модели и задачи оптимизации на

основе этой модели были неразрывно связаны с внутримашинной информацией о ходе выполнения плановых заданий и исключали участие человека на промежуточных стадиях подготовки информации для этих задач. Необходимо также, чтобы решение задач, порядок, организация и диспетчеризация определялись и производились в основном автоматически — только в этом случае системы управления могут быть действительно эффективными, иначе значительно снижается производительность машины и оперативность решения задач, а следовательно и эффективность управления.

Фундаментальное значение для АСУ имеет принцип однократности ввода *данных* в машину, согласно которому многократное использование любого рода сведений при решении задач на ЭВМ не должно приводить к повторному вводу каких-то данных в память ЭВМ.

Принцип автоматической фиксации информации и фиксации отклонений требует макс. устранения человека от стадий фиксации фактов при выполнении процессов произв.-хоз. деятельности, нацеливает на отражение, где это возможно, только сведений, указывающих на отклонение характеристик реального выполнения какого-то процесса от представлений о нем. Этот принцип ведет, в первую очередь, к сокращению вводимой в машину информации, а тем самым и к сокращению ошибок в информации. Принцип совмещения сообщений и предписаний дает возможность сопоставлять плановую и технологическую информацию с информацией, отражающей реальное выполнение процессов и организовать эффективный содержательный контроль данных в АСУ. В этом — одно из важнейших преимуществ АСУ перед другими способами применения технol. средств обработки данных в управлении.

Наиболее эффективна организация информационных процессов в АСУ в том случае, когда информация о событии фиксируется почти одновременно с происходящим событием и выполняется принцип нерегламентированного машинной ввода сообщений, а также принцип одновременного с вводом автомат. контроля и отбраковки сообщений. Одновременность достигается с помощью средств автомат. фиксации информации, а также в результате регламентированного оформления произв.-хоз. документации на машинных носителях в виде, приспособленном для ввода данных в машину, или даже одновременного с оформлением документа ввода данных в машину. Выполнение этих принципов требует, вообще говоря, использования ЦВМ *в режиме разделения времени*. Принцип автомат. контроля сообщений приводит к резкому снижению числа ошибок в данных, создает благоприятные психофизиол. условия для работы служб информации.

Следующим важным принципом в проектировании и организации функционирования АСУ является принцип базовых массивов, заключающийся в том, что вся многократно используемая информация должна быть сгруп-



пирована в спец. массивы. Задача служб информации в АСУ состоит в поддержании на уровне постоянной готовности этих базовых массивов. Принцип моделирующего характера базовых массивов позволяет определить и организовать базовые массивы. Наиболее полной и многократно используемой информацией в АСУ является информация, отражающая представления (модели) о процессах произв.-хоз. деятельности, факты выполнения этих процессов, а также состояние и динамические характеристики объектов управления (информационная модель). Отсюда становится понятным принцип неприкосновенности базовых массивов, определяемый, в свою очередь, принципом независимости процессов фиксации информации и решения задач в АСУ. Последний принцип гласит, что информация, содержащаяся в базовых массивах, может измениться только в результате выполнения реальных процессов произв.-хоз. деятельности (информационная модель) или изменения проектной документации (конструкторско-технические, календарно-плановые нормативы и предписания). Важен и принцип организации базовых массивов в электромагнитной памяти машины, т. к. перфокартная организация памяти явно неэффективна, требует большого обслуживающего персонала, приводит к использованию устаревшей техники в организации информационных процессов.

К отличительным особенностям АСУ относятся также присущий им принцип внесения изменений — постоянное обновление базовых массивов (и само формирование этих массивов) производится путем внесения изменений в уже сформированные (пустые) массивы. Большую роль в формировании базовых массивов, фиксации информации и вообще в функционировании АСУ играет принцип умолчания: если в сообщении о данном факте не отражены какие-то регламентированные параметры, значит, их можно заимствовать из предписаний. То же самое и для программ обработки данных: пропущенный, неназванный параметр или показатель берется в общепринятом (напр., среднестатистическом) значении, чтобы не останавливать решения задачи. Принцип умолчания имеет исключительное значение на стадии внедрения систем, особенно при подготовке нормативной и технол. информации, так как дает возможность сформировать эти данные путем последовательных уточнений параметров и величин, первоначально как-то заданных, исходя из принципа умолчания.

Для развития системы важен принцип «гостеприимности», в частности, напр., базовых массивов: расширение и интенсификация производства приводят к увеличению к-ва одновременно фиксируемых данных об объектах и процессах произв.-хоз. деятельности. Принцип информационного единства данных требует однозначного (с учетом принципа умолчания) построения структуры данных, системы именования данных т. о., чтобы одни и те же или тождественные факты и объекты не могли быть отнесены к различным множествам или

группировкам, чтобы разные пользователи могли понимать их одинаково. Принцип однозначности наименований в системе определяет однозначный выбор идентификаторов (равных в АСУ наименованию объекта или свойства). Применять этот принцип в АСУ не только не целесообразно, но и вредно: на разных стадиях обработки данных (особенно внутримашинной) одним и тем же объектам и показателям для повышения эффективности обработки данных могут присваиваться различные идентификаторы, поэтому важно, чтобы впоследствии был обеспечен однозначный перевод одних обозначений в другие.

Современные средства обработки данных резко снижают требования к именованию данных — особенно по сравнению со счетно-перфорационными машинами. Поэтому в АСУ наблюдается стремление заменять классификаторы, шифры и коды словарями и языками информационными, облегчающими общение человека с системой. Другие требования в АСУ предъявляются и к входным документам и формам отображения данных. Напр., нет необходимости унифицировать формы первичной информации — и некоторой степени это даже противоречит одному из главнейших принципов, лежащих в основе эффективности АСУ, — принципу фиксации отклонений. Это же требование верно и в отношении выходной информации. Здесь наиболее правильным является последовательное претворение в жизнь принципа отображения данных в виде, максимально удобном для использования. Принцип унификации обращения к базовым массивам важен для обмена информацией между потребителями и АСУ, а также между различными АСУ или АСУ различных уровней.

Часто говорят о принципе результативности информации в АСУ, подчеркивая тем самым, что промежуточная информация в процессе решения задач — это «внутримашинное» дело. Имеет значение и принцип автомат. информационной стыковки задач, который состоит в том, что между двумя разными задачами следует избегать промежуточного вывода информации, если не требуется анализ и корректировка данных на основе знаний и интуиции высококвалифицированного специалиста.

При создании АСУ выдвинут также принцип новых задач, согласно которому новая техника обработки данных, новейшие матем. модели и методы требуют не просто перевода традиционно организованных информационных процессов на новую тех. базу, а коренной реорганизации всей системы обработки информации и управления. Особенно это легко проследить на организации бухгалтерского учета в АСУ (см. *Бухгалтерского учета автоматизация*), где в известной мере наблюдается возврат (по «спирали») к мемориально-ордерной форме счетоводства. Конкретизацией этого принципа является принцип моделирующего характера решения планово-управленческих задач, отражающий накопленный опыт решения этих задач. Особенно важно, что имитационное моделирование как средство решения

оптимизационных задач инвариантно по отношению к используемым разнообразным критериям, зависящим от ситуации. Принцип разноуровневых моделей подчеркивает необходимость строить и использовать модели различной степени подробности и агрегации для различных целей (прогнозирования, прикидок плана, перспективного и текущего планирования, оперативного планирования, диспетчеризации).

Однако при этом надо, чтобы было выполнено требование автомат. информационной стыковки этих моделей, в том числе имитационных моделей и информационной модели.

Управляющую информацию в АСУ, как и первичную, всегда можно отнести к каким-то объектам и процессам. Наиболее элементарные сведения отражающего и предписывающего характера таким образом всегда имеют объектно-процессную привязку. Принцип объектно-процессной привязки первичных и управляющих документов играет важную роль на стадии разработки и создания систем. Не все вырабатываемые в АСУ данные имеют строгую направленность на ф-ции, реализуемые данной системой, т. е. отчетная информация в кибернетическом аспекте осуществляет ту же самую информационную стыковку задач и моделей разных уровней.

Достижение всех преимуществ АСУ перед другими формами организации обработки данных в системах управления возможно только при выполнении принципа автомат. организации и диспетчеризации решения задач и реализации информационных процессов в АСУ. Из сказанного следует, что необходимо также сформулировать принцип моделирующего характера матем. обеспечения АСУ — не только для реализации моделирующих алгоритмов решения задач планирования, управления и отражения процессов и объектов в виде имитационной модели, но и для решения задач организации и диспетчеризации и реализации информационных процессов. Тех. комплексы АСУ должны обеспечивать выполнение перечисленных принципов.

АСУ вовсе не ликвидирует функции управления как функции анализа и принятия решений, коренным изменениям подвергаются лишь технология и организация материальной основы управления — процессов фиксации, циркуляции, обработки и использования информации. Уже первые разработанные и внедренные АСУ доказали свою жизнеспособность и эффективность. Внедрены *автоматизированные системы управления предприятием* и АСУ технol. процессами, автоматизация и системная организация информационных процессов получили широкое распространение на транспорте, в торговле, в преподавании и в здравоохранении. ЭВМ используется для оперативного перераспределения ресурсов в отраслях и иедомствах, для решения задач размещения производства и материально-тех. снабжения. В некоторых министерствах внедрены первые очереди отраслевых АСУ (ОАСУ). XXIV съезд КПСС наметил развернутую программу внед-

рения АСУ в народное хозяйство, поставил задачу разработать общегосударственную автоматизированную систему (сбора информации, учета, планирования и управления нар. х-вом на базе единой государственной сети вычислительных центров (см. *Вычислительных центров сети*).

Лит.: Автоматизированные системы управления предприятием. К., 1966; Кибернетика и вычислительная техника, в. 12. К., 1971; Механизация и автоматизация управления, № 3. К., 1972; Актуальные проблемы управления, кн. 1. М., 1972; Г л у ш к о в В. М. Введение в АСУ. К., 1972 [библиогр. с. 304—308].

В. В. Шкурба.

**АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЕМ (АСУП)** — системы управления производственно-хозяйственной деятельностью предприятия, органически включающие в себя интегрированные *обработки данных системы*, главной целью которых является автоматизация информационных процессов на предприятии и усовершенствование формы организации их выполнения.

Сложность управления современным производством привела к замене простого руководства системами управления. Это принципиально новые формы управления, основанные на строгой упорядоченности выполнения множества функций управления, в частности, на координировании функций непосредственно управления (см. *Многоконтурная система автоматического управления*). Сложность управления предприятиями обусловлена многими причинами. Главные из них: большое к-во элементов системы (оборудование, рабочие, технологические операции) и высокая степень их взаимосвязанности в процессе произв.-хоз. деятельности, неопределенность результатов выполнения многих процессов (брак, сбой, несвоевременные поставки, нерегулярность спроса) и т. д. Существенно, что объектами и субъектами управления на предприятии являются люди, а регулирование человеческого поведения не столь очевидно и прямолинейно. Сложности возникают еще и потому, что предприятия постоянно изменяются, развиваются как системы (являются самоорганизующимися системами), что в задачи управления ими входит и проектирование, и управление процессами этого изменения и развития.

Создание и внедрение на предприятии АСУП приводит к тому, что информационным процессам, их организации, проектированию, подготовке и выполнению уделяется такое же внимание как и производственным. В структуре управления предприятием возникает специализированное подразделение — *информационно-вычислительный центр предприятия* (ИВЦ). Это подразделение ответственно за упорядочение, регламентацию и непосредственное выполнение информационных процессов на предприятии. Осн. потоки информации реализуются на предприятии через его ИВЦ.

Современные тех. средства обработки данных позволяют организовать выполнение информационных процессов на основе принципиально новой технологии. На предприятиях



в условиях АСУП вследствие многократного ускорения движения и переработки информации удастся значительно сократить запаздывание между отклонениями от нормального, запланированного хода производства с одной стороны и принятием решений — с другой; появляется возможность видеть «температурный листок» предприятия, скорее обнаруживать возникающие или возможные сбои и своевременно их предупреждать или ликвидировать. АСУП позволяет решать и такие задачи, прежде не решавшиеся из-за трудоемкости, времени, и затрат, как оптим. перспективное и оперативное планирование произ-ва, оперативное распределение и использование ресурсов. По новому организуется и работа управляющего аппарата. Работник управления становится неотъемлемым звеном в человеко-машинной системе управления, какой является АСУП, труд его более четко проектируется, планируется, регламентируется, контролируется.

Суть разработки АСУП — совершенствование системы потоков информации (как материальной основы всей системы управления) на предприятиях, системы выработки и принятия перспективных и оперативных решений. Существенные изменения претерпевает организация собственно информационных функций в управлении. ИВЦ постепенно «вбирает» в себя все работы (и службы) информационного характера и превращается в единый координационно-управляющий центр предприятия, где знания, опыт и навыки специалистов управления наилучшим образом сочетаются с быстрой работой автомат. средств переработки информации. Большинство решаемых на предприятии задач (разработка техпромфинплана предприятия, исчисление затрат и себестоимости продукции, прогнозирование тех. показателей и производительности труда) дают приемлемые правдоподобные результаты только с организацией человеко-машинных методов их решения.

В автоматизированных системах управления (АСУ) с помощью современных тех. средств реализуются процессы, характерные для информационных систем: фиксация информации о происходящих процессах произв.-хоз. деятельности, отражение состояния и динамики этой деятельности в т. н. базовых массивах, выполняющих функцию информационной модели предприятия. Информационная модель предприятия с помощью программного аппарата матем. обеспечения АСУП позволяет получать различные систематизированные данные обо всех этапах произв.-хоз. деятельности. Информационная модель поставляет также исходные данные при решении задач эконом. прогнозирования и планирования. Реализация в системе управления только функций информационной системы значительно сокращает документооборот на предприятии, ликвидируя всевозможные т. н. промежуточные документы, введенные, как правило, для рационализации традиционных ручных форм документооборота, приводит к повышению достоверности и оперативности сведений,

улучшает культуру производства и управления на предприятии. Наибольшего эконом. эффекта удастся достичь с решением на предприятии задач прогнозирования и особенно оптимального планирования производства. Своевременное прогнозирование возможных сбоев в производстве (напр., вследствие некомплектности поставок материалов или производства заготовок) позволяет принять меры по ликвидации этих сбоев или их последствий. Решение задач оптим. подбора программ предприятия и распределения их по периодам позволяют значительно повысить рентабельность производства. Решение задач оптимального календарного планирования производства, оптим. распределения материальных и трудовых ресурсов для выполнения работ способствует улучшению фондоотдачи, загрузки оборудования, использования ресурсов.

Принципиально «внемашинными» документами в АСУП остаются: 1) первичные документы, в которых фиксируются непосредственно результаты выполнения процессов произв.-хоз. деятельности; 2) предписания технологического и организующего характера, вырабатываемые человеком; 3) заявки на получение тех или иных данных, на решение задачи; 4) выходные документы и данные, выводимые из памяти ЭВМ на различные печатающие или индикационные устр-ва. Остальная (промежуточная) информация, занимавшая большое место в традиционных системах управления, становится чисто «внутримашинным» делом.

В АСУ выделяют функциональные и обеспечивающие подсистемы. Функциональные подсистемы непосредственно выполняют функции управления произв.-хоз. деятельностью. Такими функциями являются, напр., конструкторско-технологическая подготовка произ-ва; тех. подготовка произ-ва; снабжение, комплектация, складирование; произ-во (основное и вспомогательное), сбыт, реализация продукции; финансовые операции и бухгалтерский учет; эконом. анализ произв.-хоз. деятельности; учет кадров. В зависимости от сложности управления той или иной функцией, ее выполнения в АСУП и выделяется та или иная подсистема, напр., подсистема тех. подготовки произ-ва или оперативного планирования и диспетчеризации осн. производства.

Обеспечивающие подсистемы выполняют собственно информационные процессы в АСУП и ответственны за их подготовку и организацию. Чаще всего выделяют подсистемы матем., программного, тех. информационного и организационного обеспечения. В матем. обеспечение включают модели, методы и алгоритмы, их обоснования решения задач и выполнения информационных процессов в АСУП. Программное обеспечение — это комплекс программ и инструкций к ним для решения на ЭВМ задач. Тех. обеспечение включает технику автоматизации и механизации выполнения информационных процессов в АСУ, а также инструкции по их эксплуатации и обеспечению надежного функционирования.

ния. Информационное обеспечение регламентирует потоки и подготовку информации в АСУП, организацию выполнения информационных процессов в ИВЦ. Организационное обеспечение регламентирует действие каждого работника управления, каждого рабочего по отношению к системе информации и всей схеме принятия решений в АСУП. Программное обеспечение разделяют на специальное и общее. Спец. программное обеспечение нацелено на получение документов и сведений произв.-хоз. значения. Общее программное обеспечение включает *программы*, предназначенные для преобразования данных (сортировка, группировка, слияние) безотносительно к их содержанию. Чем выше уровень общего программного обеспечения, тем быстрее и легче строится спец. программное обеспечение.

Наиболее полно все перечисленные элементы АСУП представлены, напр., в системе «Львов», разработанной и внедренной на Львовском телевизионном заводе. В этой системе все информационные процессы, включая фиксацию и подготовку первичной информации, отражающей ход и состояние произв. и хоз. деятельности, обработку этой информации и подготовку различной отчетности, сосредотачиваются в координационно-управляющем центре (КУЦ) предприятия. В КУЦ сосредоточен информационно-вычисл. комплекс системы, соединенный *каналами связи* с местами возникновения информации — рабочими местами, станками, складами, диспетчерскими пультами цехов и участков, пунктами тех. контроля. Выполнение производственных процессов, поступление материалов и комплектующих деталей, сдача готовой продукции, финансовые операции фиксируются в спец. документах, передаются в КУЦ импульсами от датчиков и *счетчиков*. Вся эта информация накапливается в запоминающих устр-вах *электронных вычислительных машин* и используется для подготовки справочных и отчетных документов и для решения различных задач.

В системе «Львов» можно решать следующие задачи.

**Задачи управления производством.** Оперативно-календарное планирование заготовительных цехов: определение величин партий деталей и периодичности их запуска в произ-во; проверка достаточности производственных мощностей цеха; построение оптим. план-графика с учетом коэффициента важности запуска — выпуска деталей; выдача цеху оперативного плана произв. с учетом наличия деталей в незавершенном производстве; ежедневная выдача сводки результатов работы цехов; выдача ежедневных сменных заданий и др.

Управление цехами массового произв. (цех сборки телевизоров, деревообрабатывающий цех), заключающееся в выдаче сменных заданий, сменных рапортов, суточных рапортов, оперативных планов произв. Управление комплекточно-заготовительным цехом состоит в выдаче 4-дневного дефицита, трехсмен-

ного дефицита, прихода, расхода и наличия деталей на каждые сутки, а также в определении годовой потребности в дублерах оснастки в месячном резерве для заготовительных цехов, составление графиков потребления и произв. оснастки и инструмента.

**Задачи планирования материально-тех. обеспечения произв. и технико-эконом. планирования:** определение нормативных затрат на осн. производство (по телевизорам), отклонений от нормативных затрат, ежедневного выполнения плана реализации, налога, оборота и прибыли по телевизорам, определение ежедневного выполнения плана цехами осн. производства в натуральном и денежном выражении. Планирование численности осн. рабочих по профессиям и разрядам и фонда заработной платы цехам осн. произв.; определение потребности материалов и комплектующих изделий для цехов осн. произв., дефицита материалов и комплектующих изделий, уровня запасов материалов на складах завода, сверхнормативов и неликвидов на складах завода, составление сводной ведомости ежедневного выполнения плана цехами осн. произв., плана реализации, прибыли и рентабельности по заводу.

**Задачи учета** включают учет товарно-материальных ценностей на складах завода, товарно-материальных ценностей кладовых цехов и отделов, основных средств, расчеты с поставщиками за полученные материальные ценности, учет готовой продукции, реализации телевизоров, кассовых и банковских операций, составление баланса деталей собственного производства, учет расчетов с подотчетными лицами, расчетов с дебиторами и др., остатков, поступления и расхода сырья и материалов, остатков, поступления и расхода комплектующих изделий.

В системе решены задачи контроля работы и простоев основного оборудования, позволяющие организовать действенный учет загрузки и использования оборудования по всему заводу и особенно на наиболее ответственных участках произв.

Для обеспечения эффективного решения задач управления произв-ом, планирования и учета, накопления учетной и подготовки справочной информации в системе «Львов» разработан и функционирует совр. тех. комплекс обработки данных, оснащенный спец. программно-матем. аппаратом. В качестве центр. вычислителя комплекса используют две (первоначально одну) универсальные ЭВМ «Минск-22», доукомплектованные блоками прерывания программы (БПП), блоком дополнительных команд (БДК), блоком защиты памяти (БЗП), блоком динамического анализа сбоя (БДАС), блоком связи с оператором (БСО). В ЭВМ, используемых в качестве центрального вычислителя, предусмотрено объединение их с помощью блока обмена (БО) по внешней и оперативной памяти и внешним устр-вам (Илл. между стр. 32—33).

Отличительной особенностью работы ЭВМ в составе тех. комплекса АСУП является си-

стенный режим ее использования: работа в замкнутом контуре управления предприятием в *реальном масштабе времени*, автоматизированное решение большого к-ва взаимосвязанных задач управления как отдельными производственными подразделениями предприятия, так и предприятием в целом, автоматическое управление очередностью и последовательностью решения задач. Схемно-программный аппарат разделения времени, управляемый программой-диспетчером, позволил совместить непрерывный обмен оперативной информацией с процессами решения основных задач управления и обработки данных. Другие устр-ва, разработанные в тех. комплексе системы «Львов», обеспечивают дистанционный ввод в осн. вычислитель оперативной производственной информации от различных источников непосредственно в момент ее возникновения, а также вывод необходимых сообщений в различные производственные подразделения и службы аппарата управления предприятием. Взаимосвязанно с вычисл. комплексом работают диспетчерские пульта завода и цехов, табло и счетчики для визуального наблюдения за параметрами, определяющими общую динамику произ-ва, специально разработанные для системы «Львов».

Внедрение системы «Львов» привело к значительному росту эффективности управления предприятием, произв.-хоз. деятельности в целом, обеспечило дополнительное увеличение выпуска продукции на 7%, снижение уровня запасов на 20%, ускорение оборачиваемости оборотных средств на 10%, сокращение инженерно-технического и административно-управленческого персонала. Эконом. эффективность системы составляет около полумиллиона рублей экономии в год, срок окупаемости ее — 1 год.

Лит.: Автоматизированные системы управления предприятием. К., 1966; Автоматизированные системы управления предприятием, в. 1—4. К., 1968—69; Механизация и автоматизация управления, № 3. К., 1969; Кибернетика и вычислительная техника, в. 12. К., 1971; Глушков В. М. Введение в АСУ. К., 1972 [библиогр. с. 304—308]. В. В. Шкурба.

**АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ПОИСК ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМ** — взаимодействие человека с вычислительной машиной, направленное на поиск доказательств теорем. Система А. п. д. т. включает комплекс средств спец. матем. обеспечения ЭВМ, предназначенных не только для поиска доказательств теорем, но также для проверки на очевидность и новизну тех или иных утверждений в рассматриваемой теории, для корректирования гипотез, построения естественного доказательства, для информационно-справочных целей и т. п. Особенностью большинства работ по доказательству теорем на ЭВМ является стремление к созданию универсальных программ, ориентированных на самостоятельный поиск доказательства теорем машиной. Такой подход не соответствует опыту, накопленному в других областях применения ЭВМ. Естественный путь, которым идет машинная математика, — это развитие систем автоматизации программи-

рования и средств взаимодействия человека с машиной. Этот путь является, по-видимому, одним из реалистических путей решения проблемы А. п. д. т. Он предполагает смещение центра тяжести работы в этой области от универсализации программ для ЭВМ к кооперации между математиком и ЭВМ, к созданию специализированных систем автоматизации программирования и операционных систем, позволяющих в случае необходимости быстро программировать поиск доказательства даже одной единственной теоремы и способных работать, если потребуется, в реальном масштабе времени с математиком, ищущим доказательство этой теоремы. Человек при этом определяет принципиальное направление, план доказательства, промежуточные гипотезы, различные методы и приемы доказательства, а машина реализует намеченный план поиска, применяет рекомендуемые человеком методы, продвигает промежуточные логические выкладки, а также выдает информацию о состоянии поиска, о полученных ею результатах и о неудачах — для принятия человеком решений.

В матем. обеспечении А. п. д. т. выделяют следующие составные части: средства для описания данных в системе (внеш. и внутр. языки системы); систему алгоритмов для решения различных задач, возникающих в процессе поиска; средства (язык) общения с системой в диалога режиме; спец. операционную систему; автоматизацию и методику программирования. Необходимо, чтобы формализованный язык для записи матем. теорий был удобным для практ. использования в процессе работы с системой. Для этого в него вводят достаточно богатый запас исходных предикатов, операций и ф-ций. Часть их свойств (напр., ассоциативность) учитывается уже во внутр. представлении языка, и это может значительно облегчить поиск. С целью повышения степени практичности языка целесообразно включить в объем понятия ф-ции и определенные конструкции, часто применяемые в обычном языке. Под конструкцией в общем случае понимается многозначная  $n$ -местная ф-ция ( $n = 0, 1, \dots$ ). Напр., выражение «подмножество мн-ва  $M$ » можно рассматривать как одноместную неоднозначную ф-цию «подмножество ( $M$ )», аргумент которой принимает значения из класса мн-в (т. е. имеет тип «множество»). Другие примеры конструкций: группа, подгруппа ( $G$ ), единица ( $G$ ). В описаниях конструкций должны быть описания возможного типа их аргументов и типа значений конструкции. Это позволит строить дерево конструкций в виде суперпозиций соответствующих конструкций. Выбор подходящей конструкции является одним из решающих моментов, обеспечивающих успех доказательства. Поиск доказательства с помощью машины удобно организовать как работу эвристических программ различных уровней, которые включены в комплекс средств спец. матем. обеспечения ЭВМ. Иерархическое построение программ позволяет быстро осуществить поиск одного из

вариантов доказательств. Программа нижнего уровня реализует т. н. алгоритм очевидности и содержит набор операторов-подпрограмм, задачей которых являются элементарные преобразования обрабатываемой информации. Эта программа перебирает варианты вывода, использующие простейшие логические и теоретико-множественные приемы, а также проверяет конкретные примеры и проводит аналитические выкладки. Большинство преобразований, выполняемых в процессе работы алгоритма очевидности, имитируют действия специалиста в схожих ситуациях. Программа более высокого уровня в зависимости от ситуации перераспределяет последовательность операторов 1-й программы, задавая тем самым некоторый новый метод доказательств. Программы еще более высоких уровней служат усовершенствованию программ низшего уровня, накоплению опыта, самообучению и т. п. Если программы самого низшего уровня содержат эвристики, основой которых являются наиболее общие методы доказательства (метод цепного заключения, метод аналогии и т. п.), то программы 2-го уровня используют эвристики, разрабатываемые более сложно (эвристики распознавания образов, относящиеся к выбору наиболее эффективных методов или к выбору наиболее выгоднейших целей, семантические эвристики, основанные на использовании интерпретаций среды, и многошаговые эвристики планирования). Наиболее же сложные эвристики используются программами самых высоких уровней: эвристики обобщения прошлого опыта и эвристики индуктивных предсказаний.

Осн. средствами программирования в системе А. п. д. т. являются язык *процедурно-ориентированный* программирования и язык директив. Язык директив используется для обращения к отдельным рабочим программам в процессе поиска доказательства. Директиву может вводить пользователь, ее могут порождать рабочие программы в процессе работы. Система программ, составляющая специализированную операционную систему, распределяет ресурсы (компоненты оборудования ЭВМ) и определяет порядок выполнения инструкций, поступающих от пользователя.

Проблема А. п. д. т. связана с другой сложной и интересной проблемой — моделированием мышления и отличается от нее использованием в первую очередь не каких-либо творческих способностей машин, а их мощных исполнительских возможностей при постоянном взаимодействии с человеком. С развитием автоматизированных систем поиска доказательств и прежде всего алгоритмов поиска в направлении построения эвристической надстройки, роль математика будет состоять преимущественно в определении новых понятий и в формулировке новых предложений, а искусство доказать новую теорему с использованием машины будет состоять в умении сформулировать ряд промежуточных теорем и лемм.

Лит.: Чернявский А. Л. Моделирование процесса решения сложных логических задач на вычислительных машинах (эвристическое программирование). «Автоматика и телемеханика», 1967, № 1; Глушков В. М. Некоторые проблемы теории автоматов и искусственного интеллекта. «Кибернетика», 1970, № 2; Вычислительные машины и мышление. Пер. с англ. М., 1967 [библиогр. с. 491—546]. Ф. В. Ануфриев, З. М. Асальдеров, В. Ф. Костырко.

**АВТОМАТИКА** (греч. *αὐτμάτος* — самодействующий) — 1) Область теоретических и прикладных знаний об автоматически действующих устройствах и системах. Термин А. относится к более раннему периоду развития исследований и практических разработок в области автомат. регулирования и управления. В связи со становлением и быстрым развитием нового науч. направления — *кибернетики* — в его рамках определился крупный раздел — *кибернетика техническая*, — в который как составная часть вошла А. в виде *автоматического управления теории* вместе с теор. и прикладными основами создания и организации функционирования соответствующих тех. средств (*управляющих вычислительных машин, управляющих устройств, датчиков, исполнительных механизмов*, а также устройств, обеспечивающих взаимодействие человека с вычислительной машиной в системах автоматизированных). 2) Совокупность механизмов и устройств, действующих автоматически. См. *Агрегатная унифицированная система, Пневмоника, Телемеханика, Универсальная система элементов промышленной пневмоавтоматики*.

Б. Б. Тимофеев.

«**АВТОМАТИКА**» — украинский научно-технический журнал, в котором освещаются научные достижения в области теории автоматического регулирования, экстремальных, оптимальных, адаптивных и самонастраивающихся систем, информационных и интерполяционных систем, бионики и эвристического программирования, комплексной автоматизации и применения вычислительной техники, новых элементов и устройств автоматики, надежности и технической диагностики, теории автоматов и цифровых вычислительных машин. Издаёт «А.» Институт кибернетики АН УССР с 1956. Выходит 6 раз в год на украинском языке, а также переиздается на английском языке в США.

«**АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА**» — советский научно-технический журнал. Освещает теоретические и прикладные вопросы автоматики и телемеханики, рассматривает проблемы кибернетики, включающие вопросы общей теории автомат. управления, теорию и методы построения систем автомат. оптимизации и самонастраивающихся систем, теорию релейных схем и конечных автоматов, применение вычисл. устройств в автоматике, проблемы надежности и др. «А. и т.» освещает также методы теор. и экспериментального исследования автоматизируемых производственных процессов, принципы построения систем автомат. контроля и управления производственными процессами. Издается с 1936 (перерыв в 1942—45 гг.) Академией наук СССР. Выходит 12 раз в год.

**АВТОМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ** — выполнение комплекса операций над данными с помощью цифровой вычислительной машины (ЦВМ) с целью превращения различных сведений и фактов в сведения, представляющие ценность с определенной точки зрения. А. о. д. является обязательной составляющей функцией АСУ. Осн. носителями сведений на предприятиях, в учреждениях и орг-циях являются документы — первичные, накопительные, технологические — графики, чертежи, схемы, номенклатуры-ценники, прейскуранты, спецификации и т. д.; данными могут быть также показания контрольно-измерительных приборов и счетчиков, часов и табло; они могут возникать в ходе переписки, совещаний, собраний и бесед. Все это характеризует многообразие форм представления, источников возникновения и средств регистрации и хранения данных. Примерами типичных задач А. о. д. являются начисление зарплаты на основании сведений о затраченном времени или объеме продукции, выработанной рабочими, инвентаризация складского имущества на основе анализа накладных на полученные и отправленные товары, определение потребности в сырьевых ресурсах предприятия на основании производственного плана, учет сбыта товаров, учет предварительных заказов на билеты на самолет, обработка историй болезней с целью сбора статистики и т. д.

Как правило, А. о. д. подвергаются массивы данных. Обычно в массив включаются однородные по форме и структурной организации записи; как правило, число записей в массиве не определено; в конце массива после последней из записей содержится указание об исчерпании массива. Различают основные массивы, в которые включаются записи о состоянии определенных объектов учета или планирования, и массивы текущих записей об изменениях, относящихся к этим же объектам. Основные массивы, несущие все необходимые нормативно-расчетные, справочные и др. постоянные данные, периодически обновляются на основе массивов текущих данных и поддерживаются в состоянии готовности. Чем более полными по содержанию являются основные массивы, тем экономичнее можно вести А. о. д.

Процесс А. о. д. состоит из получения исходных данных, преобразования их согласно определенному плану с учетом вновь полученных данных и сообщения результатов. Получение исходных данных включает три стадии: сбор, или первичный учет, перезапись, необходимую для придания фактам формы, удобной для обработки, и проверку. При сборе данных факты фиксируются в момент их свершения, а обработка данных может быть выполнена в более позднее время, по мере необходимости. Для автоматического сбора данных имеются спец. устр-ва (табельные часы с перфокартами или перфокартами, буквоперфорирующие устр-ва, *читающие автоматы* и др.). Механизация первичного сбора данных — одна из важнейших предпосылок А. о. д., т. к. трудоемкость первичного учета

выше трудоемкости обработки информации. Основными носителями информации при первичном учете являются бумага, перфокарты и перфолисты; однако для дальнейшей обработки с помощью ЦВМ они должны быть заменены более эффективными для алгоритмической обработки на ЦВМ носителями, такими, как *ленты магнитные, диски магнитные* и др. Перепись данных с одних носителей на другие, как правило, выполняется автоматическими программами или спец. устр-вами. При получении исходных данных внимание уделяется проверке их полноты и достоверности, соответствию данных определенным для них форматам и формам представления и границам области изменения для числовых величин. Преобразование данных заключается в их перегруппировке и изменении их значений. Характерной чертой этого процесса является многократное повторение однотипных операций для последовательных групп данных. Перегруппировка данных включает изменение последовательности и вставку, удаление или выборку отдельных позиций массивов. Необходимость в перегруппировке данных возникает при использовании записей определенного типа для составления нескольких отчетов; далее, в процессе сбора данных, в связи с их одновременной фиксацией, они могут быть смешаны произвольно. Однако поскольку процедуры обработки и организации массивов более эффективно реализуются над упорядоченными последовательностями записей, эти записи обычно подвергают *сортировке данных*. Типичными процедурами обработки данных являются: поиск и выборка записей массива, обладающих указанным свойством; сжатие массива или удаление некоторых реквизитов из записей массива; перекомпоновка реквизитов в записи; слияние записей нескольких массивов в записи нового массива; перемещение значений реквизитов из одних записей в другие; вычисление значений выходных данных по арифметич. формулам; принятие элементарных решений. Разнообразие форм представления данных в массивах, обусловленное разнообразием устройств сбора и носителей информации, требует включения в систему А. о. д. процедур взаимных преобразований данных в различные формы представления и форматы. Сообщение полученных результатов заключается в *редактировании данных* и выдаче их в форме, удобной для потребителей выходных данных; потребителями могут быть как человек, так и новая программа А. о. д.

Для эффективного проектирования процессов А. о. д. широко применяют *языки программирования*. Необходимыми свойствами языка программирования, ориентированного на А. о. д., являются возможность оперирования со сложными иерархическими структурами данных; разнообразие допускаемых в нем форм представления и форматов данных; развитый аппарат для ввода и вывода данных; возможность обращения к произвольной вершине дерева данных, изменения структуры дерева данных и построения новых деревьев; наличие

средств задания процедур перекомпоновки, слияния, сжатия, поиска, выборки и т. д.; возможность выдачи документов заданной формы. Языками программирования для описания процессов А. о. д. являются КОБОЛ, получивший широкое распространение как стандартный язык, ориентированный на А. о. д., ТАБСОЛ, ФАКТ, ПЛ-1, а также разработанные в Советском Союзе языки АЛГЭК, АЛГЭМ и др.

В связи с расширением масштабов и увеличением темпов производства, а также значительным усложнением связей между отраслями нар. х-ва и предприятиями, невозможно сколько-нибудь рациональное управление хозяйством без переработки громадного объема информации, исчисляемого на отдельных предприятиях и в орг-циях десятками миллионов показателей или миллиардами обозначений. Поток информации непрерывно увеличивается в связи с огромным ростом общественного производства и возрастающим применением математич. методов при определении различных показателей деятельности предприятий и орг-ций. А. о. д. обеспечивает не только сокращение адм.-управленч. персонала, но и, что самое главное, быстрый, полный и точный сбор данных, их точную обработку и выдачу решений, позволяющих оперативно управлять сложным производством.

Разновидностью систем А. о. д. являются *информационно-поисковые системы*.

*Лит.:* Королев М. А. Обработка экономической информации на электронных машинах. М., 1965; Китов А. И. Программирование экономических и управленческих задач. М., 1971 [библиогр. с. 365]; Лавров С. С., Гончарова Л. И. Автоматическая обработка данных. Хранение информации в памяти ЭВМ. М., 1971 [библиогр. с. 156—160]; Грегори Р., Ван Горн Р. Система автоматической обработки данных. Пер. с англ. М., 1965; Современное программирование. Языки для экономических расчетов. Пер. с англ. М., 1967.

Л. П. Бабенко.

**АВТОМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ** — обработка данных о биомедицинских процессах, представленных в форме кривых, выполняемая частично или полностью по *алгоритмам*, реализованным на вычислительной машине широкого назначения или специализированной ЭВМ. Объектом анализа может служить любой из процессов, протекающих в организме, лечебном учреждении или во внешней среде, представленный в виде графика, кривых, ряда чисел, карт распределения биопотенциалов и т. п. Графическими выражениями медико-биол. процессов являются электрокардиограмма (ЭКГ), электроэнцефалограмма (ЭЭГ), электромиограмма (ЭМГ), импульсная активность (ИА) нервных клеток, графики температуры и др. Различают анализ дискретных сигналов (напр., ИА) и анализ непрерывных сигналов (напр., ЭЭГ, ЭМГ и др.).

Графическое представление информации применяют в *кибернетике биологической* для изучения свойств *биологической системы*, для построения её физ. или матем. модели с помощью аналоговых и цифровых ЭВМ. В ки-

*бернетике медицинской* эта форма представления информации необходима для диагностики, прогнозирования, оценки течения заболевания и действия лекарственных средств при моделировании лечебного процесса, изменения состояний внешней среды и пр. Модели анализа медико-биол. информации являются преимущественно математическими. Широко применяют автокорреляционный и спектральный анализ сложного биол. процесса, напр., анализ сократительной функции миокарда можно проводить методом баллистокардиографии. Этот метод анализа позволяет выделять на ЭКГ случайные и периодические составляющие изучаемого процесса даже в тех случаях, где исследователь не видит ничего, кроме беспорядочно распределенных во времени волн и пиков.

Все чаще применяют определение кросскорреляционной ф-ции, показывающей степень связи между двумя-тремя процессами в определенные моменты времени, напр., частоты дыхания и сердечного ритма, длительности фаз сердечного цикла и степени повышения давления крови в полостях сердца и т. п. Существенно, что ЭВМ при этом не только вычисляет ряды показателей, но и строит графики автокорреляционной и др. ф-ций. Широко распространено автомат. построение гистограмм, амплитудных распределений, временных интервалов, фаз и латентных периодов. Перспективным является применение алгоритмов многофакторного анализа, так как процессы в живом организме являются результатом взаимодействия многих факторов. Для построения моделей этих процессов необходимы количественные оценки каждого фактора в отдельности.

Аппарат *математической статистики* и *вероятностей теории* не является исчерпывающим для А. а. м.-б. п. Успешным является сочетание статистических, временных и логических методов анализа. К таким методам следует отнести изучение спектра в динамике, статистическое изучение временных соотношений между экстремальными точками и точками перегиба, методы эвристического изучения показателей и т. д.

Для А. а. м.-б. п. существуют специализированные вычислительные устр-ва, которые предусматривают обработку информации по жесткой схеме различных алгоритмов. Примерами таких устр-в являются «Нейрон-1» (СССР), «САТ-400» (США); «АТАС-401», «АТАС-501» (Япония) и др. Вычисл. машины широкого назначения ведут обработку информации по широкому списку алгоритмов. Однако проблема ввода информации в ЦВМ, связанная с автомат. анализом, представляет значительные затруднения. Поэтому для считывания и перевода ее, напр., на перфоленгу применяют устр-ва типа «Силуэт», «Маск» и «График», а ввод информации осуществляется с помощью перфоленг и перфокарт. Для ввода информации в виде электрического сигнала применяют *аналого-цифровые преобразователи*, напр., «Биокод». С середины 60-х годов в СССР и за



рубежом (США, Япония, Франция, Англия и ФРГ) ведутся работы по созданию специализированных биомедицинских вычисл. комплексов, предназначенных для сбора и автомат. обработки биоинформации.

Лит.: Математический анализ электрических явлений головного мозга. М., 1965; Кибернетика и вычислительная техника, в. 4. К., 1969; Кибернетика в медико-биологических исследованиях. М., 1971.

А. А. Попов, И. Д. Пономарева.

**АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕОРИЯ** — раздел кибернетики технической, объектом исследования которого являются системы автоматического управления (САУ) различной природы и степени сложности. А. у. т. разрабатывает принципы построения систем управления и изучает основные закономерности протекающих в них процессов. А. у. т. является одной из научных и методологических основ, на базе которых целенаправленно объединяются усилия специалистов различного профиля, участвующих в создании современных сложных САУ. При изучении процессов управления А. у. т. абстрагируется от природы и конструктивных особенностей составных частей САУ. Вместо реальных объектов в А. у. т. рассматривают их адекватные модели математические.

Основы А. у. т. как науки заложены в трудах англ. физика Дж.-К. Максвелла (1831—79), рус. ученого И. А. Вышнеградского (1832—1895), словацкого теплотехника А. Стодолы (1859—1942) и рус. математика А. А. Ляпунова (1857—1918). А. у. т. исследует две основные проблемы: 1) систем автоматического управления анализ и 2) систем автоматического управления синтез. Исторически первой была поставлена простейшая, но не утратившая своей актуальности и в настоящее время, задача управления, состоящая в поддержании заранее заданных постоянных во времени значений управляемых координат объекта при некоторых изменяющихся тем или иным способом возмущениях, действующих на него. Осн. задачей такого рода систем (систем стабилизации) является компенсация действующих на объект возмущающих воздействий, осуществление которой возможно двумя различными способами, отражающими два основных принципа управления, используемые в теории и практике построения САУ.

По принципу управления САУ разделяют на системы управления разомкнутые и системы управления замкнутые. В первых управляющее воздействие формируется в функции измеренного тем или иным способом возмущающего воздействия с целью его компенсации. Наиболее существенный недостаток такого способа управления заключается в том, что при этом оказывается принципиально невозможной компенсация действия других неизмеряемых возмущений. Кроме того, разомкнутые САУ принципиально неспособны на достаточно продолжительном отрезке времени управлять неустойчивыми объектами управления. В замкнутых САУ реализуется фундаментальная идея обратной связи, согласно которой отклонения действительных значений

регулируемых координат от их требуемых значений используются для формирования управления, которое возвращает систему в требуемое состояние. Эта идея, известная под названием принципа управления по отклонению (или управления с обратной связью) в той или иной форме лежит и ныне в основе действия большинства современных САУ различной степени сложности и назначения. Универсальность этого принципа проявляется, в частности, в том, что с применением его оказывается возможным управлять неустойчивыми объектами управления.

Характер основных проблем А. у. т. легче всего определить, рассмотрев одну из типичных задач управления. Пусть заданы объект управления, описывающийся уравнением  $\dot{x} = f(x, u, t)$ , где  $x$  — вектор фазовых координат, и его начальное состояние  $x(0) = x_0$ . Требуется определить такое программное управление  $u^* = u(t)$ , которое переводит объект из состояния  $x_0$  в некоторое другое конечное состояние  $x_T$ . При этом требуется, чтобы на траектории движения  $\dot{x} = f(x, u^*(t), t)$  достигался экстремум некоторой меры качества работы системы.

Так например, если объектом управления является летательный аппарат, а заданной целью — взлет и достижение положения  $x_T$ , то мерой качества может служить время  $T$  выполнения программы либо расход энергии на выполнение программы. Таким образом, возникает задача определения невозмущенного движения (по терминологии Ляпунова)  $\dot{x} = f(x, u^*(t), t)$ , обладающего желаемыми, в частности экстремальными свойствами. Однако всякая попытка реализовать подобное программное движение, даже при точной реализации  $u^* = u^*(t)$ , оказывается несостоятельной, т. к. всегда существуют либо неучтенные ранее, пусть даже достаточно малые, но постоянно действующие возмущения (напр., в случае летательного аппарата — турбулентность атмосферы и т. д.), либо в силу различных причин действительное начальное состояние  $x_0^* \neq x_0$ . Поэтому действительное движение объекта будет существенно отличаться от программного. В связи с этим возникает задача определения такого дополнительного управления с обратной связью  $v = u - u^* = v(y)$ , где  $y = x - x^*$  — отклонение от программного движения, которое обеспечило бы затухающий характер возмущенного движения  $\dot{y} = \varphi(y, v(y), t)$ , где  $\varphi(\cdot) = f(y + x^*, v + u^*, t) - \dot{x}^*$ , т. е. обеспечило бы устойчивость требуемого невозмущенного движения. Таким образом, центральной проблемой в А. у. т. и, в частности, в теории замкнутых систем является проблема устойчивости, понимаемой в том или ином смысле. Поскольку до последнего времени А. у. т. имела дело почти исключительно с объектами управления, матем. модели которых описывались с помощью дифф. или конечно-разностных уравнений (линейных или нелинейных),

то при анализе устойчивости САУ широко использовались качественные методы прикладной математики. Используя вначале существовавшие в математике методы решения задач анализа устойчивости, А. у. т. впоследствии оказала стимулирующее воздействие на их развитие и развила новые, не существовавшие ранее в теории колебаний частотные методы анализа устойчивости линейных систем (см. *Устойчивости критерии*), применяемые при анализе стационарных и нестационарных САУ — как непрерывных, так и дискретных, с распределенными или сосредоточенными параметрами. Специфические особенности нелинейных САУ вызвали постановку новой задачи об абсолютной устойчивости, наиболее эффективные решения которой в настоящее время удаются получать с помощью частотных критериев абсолютной устойчивости. Если до 50-х годов 20 ст. при анализе устойчивости в А. у. т. в качестве матем. моделей САУ, как правило, использовали детерминированные модели, которые во многих случаях оказывались неадекватными реальным САУ, то в 60-х годах значительный прогресс был достигнут в постановке и решении новых задач анализа стохастической устойчивости САУ, поведение которых описывается линейными и нелинейными дифф. или разностными уравнениями, коэффициенты которых являются случайными функциями времени с известными статистическими характеристиками. Соответствующая модификация развитых ранее в А. у. т. частотных критериев устойчивости и здесь позволила получить конструктивные результаты.

Учитывая, что многие САУ работают в режиме автоколебаний, естественно, что в А. у. т. существенное развитие получили методы анализа периодических режимов, основанные, в частности, на использовании в своей образной форме метода малого параметра.

А. у. т. развивалась на основе тесной и взаимной связи с рядом разделов математики. При этом по мере расширения, усложнения и повышения требований к качеству работы САУ создавались новые методы исследования этих систем. Так, напр., необходимость учета случайного характера возмущений вызвала появление нового раздела в А. у. т. — статистической динамики САУ и привлечение для развития этого научного направления методов вероятностей теории и случайных процессов теории и выдвинула перед ними новые задачи.

Для А. у. т. 2-й половины 50-х — 60-х годов 20 ст. характерно интенсивное развитие методов синтеза САУ, решающих вторую из основных проблем А. у. т., а именно: определение структуры и параметров управляющих устройств (регуляторов) на основе строго сформулированных требований к характеру возмущенного движения управляемого объекта при известной его матем. модели и заданных ограничениях, накладываемых на управление и класс возмущений, действующих на объект управления. Существенную роль при постановке и решении задачи синтеза САУ, есте-

ственно, играет выбор критерия качества систем автоматического управления. Поскольку к работе САУ зачастую предъявляются разнообразные, а порой и противоречивые требования, то очевидно, что решение проблемы выбора критерия качества систем является далеко не тривиальной задачей.

Среди различных методов синтеза, развитых в А. у. т., особое место в силу специфического характера постановки задачи и ограничений, накладываемых на элементы САУ, занимают методы синтеза инвариантных и автономных САУ (см. *Инвариантность систем автоматического управления и Автономность*). Применительно к линейным системам при ограничениях по модулю возмущений, действующих на САУ, задача инвариантности формулируется как задача отыскания такой структуры и значения параметров управляющего устройства (регулятора), которые обеспечивали бы инвариантность вынужденного движения определенной части координат управляемого объекта относительно заданной группы действующих на него возмущений. Применительно к линейным (стационарным и нестационарным; непрерывным и дискретным) системам проблемы инвариантности и автономности достаточно полно исследованы и были продемонстрированы многочисленные примеры практического использования полученных решений. Специально рассмотрены вопросы физической реализуемости инвариантных систем. Для нелинейных САУ (следует отметить, что все реальные САУ надо отнести к этому классу) еще нет достаточно подробно разработанных инженерных методов синтеза инвариантных систем.

Близкой к этим задачам является задача параметрической инвариантности (теоретическая чувствительности), т. е. получения независимости поведения системы от изменения коэффициентов дифф. или разностных уравнений, описывающих ее поведение.

Доминирующее положение в А. у. т. занимают методы синтеза САУ, основанные на использовании интегральных критериев оценки качества, для которых в качестве подинтегральной функции используется какая-либо выпуклая (чаще всего квадратичная) функция фазовых координат и управления, вычисляемая на заданном конечном  $(0, T)$  или полубесконечном интервале времени. При этом задача синтеза оптим. управления возмущенным движением формулируется как задача вариационного исчисления: найти управление  $U(X)$ , доставляющее минимум функционалу  $J = \int_0^T f(X, U) dt$  при ограничениях:  $U \in R$ ,

$\dot{X} = F(X, U, t)$ . Здесь последнее уравнение — уравнение объекта;  $X(t)$  — вектор фазовых координат;  $U$  — вектор управляющих воздействий;  $R$  — закрытая область допустимых управлений. Для дискретных систем аналогичным образом формулируется задача дискретного вариационного исчисления. Наиболее полно разработаны методы решения этой задачи для



линейных динамических систем при квадратичном функционале  $J$ , названные методами аналитического конструирования регуляторов. Эти методы позволяют найти управление в виде функции фазовых координат, т. е. найти таким образом структуру и параметры управляющего устройства (регулятора).

Трудности решения задач аналитического конструирования регуляторов для нелинейных объектов вызвали появление различных методов синтеза субоптимальных САУ, для которых удается получить решение задачи в аналитической форме. Однако при этом сохраняются трудности аналитического и вычислительного характера при определении оценки близости оптимального и субоптимального управлений.

Сформулированные в А. у. т. задачи синтеза оптим. программного управления нелинейными объектами при наличии ограничений на управление в виде неравенств стимулировали появление таких неоклассических методов решения новых задач вариационного исчисления, как *Понтрягина принцип максимума* и *программирование динамическое* Беллмана. Эти методы оказались весьма эффективными для определения программных управлений, но попытки использования их для управления возмущенным движением, т. е. для управления в реальном масштабе времени сколь угодно сложными объектами, во многих случаях наталкиваются на почти непреодолимые трудности вычислительного характера.

Поскольку работами многих авторов доказана возможность решения задач синтеза статистически оптим. систем управления с привлечением того же аппарата неоклассического вариационного исчисления, то и здесь возможности реализации получаемых теоретических результатов такие же.

Оценивая состояние проблемы разработки методов синтеза оптим. САУ, следует сказать, что решены лишь отдельные задачи синтеза замкнутых нелинейных систем управления, а вся эта проблема все еще ждет своего решения, т. к. имеющиеся здесь результаты не могут удовлетворить потребности практики проектирования и конструирования САУ.

В последние годы работами сов. и зарубежных ученых методы синтеза оптим. систем были обобщены и перенесены на сравнительно мало исследованный в А. у. т. класс систем — на *системы управления с распределенными параметрами*.

Для А. у. т. 60-х годов 20 ст. характерно отчетливое понимание того существенного обстоятельства, что принятие априори некоторой неизменяемой математической модели объекта управления неадекватно во многих случаях действительному положению вещей при проектировании и (или) эксплуатации САУ. В одних случаях это результат того, что из-за сложности процессов, протекающих в объекте управления, получение его матем. модели на основе известных физ. или хим. законов оказывается практически неразрешимой задачей, в других — это может быть результатом того,

что в процессе эксплуатации САУ под воздействием неконтролируемых внешних и (или) внутренних возмущений происходят изменения ее параметров. Вследствие этого появилось новое научное направление в А. у. т. — *методы идентификации объектов управления*. Здесь, как и вообще в А. у. т., наиболее существенные и законченные результаты получены при решении задач идентификации линейных систем, а для нелинейных систем удовлетворительные решения получены лишь в отдельных частных случаях.

Для А. у. т. конца 50-х и начала 60-х годов 20 ст. характерно появление группы новых разделов, связанных с исследованием новых разновидностей САУ, названия которых образованы сочетанием слова «само» с другими словами, напр.: «самонастраивающиеся», «самоорганизующиеся», «самообучающиеся» и т. д. системы управления. Слово «само» как раз и отражает суть дела, а именно: процесс автомат. приспособления (адаптации) системы к изменяющимся внутренним и внешним условиям ее работы. В последние годы на смену этой пестроте в новых терминах пришел единый термин «адаптивные системы управления», под которым понимается класс САУ, позволяющих в результате обработки текущей информации восполнять недостатки априорной информации и в конечном итоге — достигать наилучших, с определенной точки зрения, значений показателя качества работы системы (см. *Адаптация* в кибернетике).

Из этого класса адаптивных систем управления простейшие — *замкнутые системы экстремального регулирования* — можно выделить в самостоятельный подкласс. Здесь, как и для задач А. у. т. вообще, в зависимости от характера возмущений существуют детерминистическая и статистическая постановки задачи исследования: первую формулируют в виде задачи анализа постулированной структуры управляющего устройства (зачастую выбор ее осуществляется на интуитивной основе), вторую — в виде задачи синтеза оптим. регулятора. В значительной мере эти задачи уже можно считать решенными. А общая теория адаптивных систем управления находится лишь на этапе своего становления и накопления отдельных результатов. Хотя при исследовании адаптивных систем используются различные постановки задач и различные матем. методы, но осн. тенденция проявляется в том, что задачи адаптивного управления рассматривают как задачи, имеющие по самому существу своему вероятностный характер, и привлекают для решения их методы теории статистических решений, *стохастической аппроксимации методы*, а также методы теории управляемых случайных процессов, усиленно развивающейся в последнее время. Так, напр., применение идей стохастической аппроксимации для изучения адаптивных систем управления оказалось достаточно эффективным и позволило с единой методологической точки зрения рассмотреть и решить не только ряд задач адаптивного управления, но

и ряд задач, относящихся к таким проблемам, как *распознавание образов*, обучающиеся системы, вопросы фильтрации, задачи теории надежности и *игр теории*.

Но, несмотря на определенные успехи в развитии теории адаптивных систем управления, при практическом использовании получаемых решений для задач управления сложными динамическими объектами, характеризующимися, в частности, сравнительно высокой размерностью и сложностью внутренней структуры, возникают существенные трудности вычислительного характера, в значительной мере аналогичные трудностям, возникающим при реализации алгоритмов оптим. управления в их детерминистической постановке. Отмечавшиеся уже трудности аналитического решения задач управления сложными нелинейными объектами естественным образом привели к тому, что все большую роль в исследовании САУ и их конструировании, как и вообще в *кибернетике*, приобретают методы их аналогового и цифрового моделирования, которые из вспомогательного средства исследования все более и более превращаются в наиболее эффективный способ исследования действительно сложных САУ. В связи с этим *цифровые вычислительные машины*, с помощью которых все чаще и чаще реализуются *алгоритмы управления*, превращаются в наиболее действенное средство исследования и синтеза соответствующих алгоритмов управления.

В конце 60-х годов 20 ст. все чаще начала возникать необходимость решать задачи управления отдельными предприятиями и производствами (рассматриваемыми как единое целое), работа которых оценивается с точки зрения некоторых эконом. критериев. Характерными для этих задач являются сложность объектов управления, проявляющаяся, в частности, в их большой размерности (число координат исчисляется сотнями и тысячами) и в неоднородности структуры объектов управления, которые наряду с механизмами, машинами и автоматами включают в себя и людские коллективы, выступающие в качестве звеньев и элементов системы, поведение которых не всегда можно формализовать. Методы эффективного решения таких задач лишь разрабатываются, а сами эти задачи оказываются одновременно в «сфере действия» таких наук, как собственно А. у. т., *кибернетика экономическая* и техническая кибернетика, теория больших (или сложных) систем, теория *операций исследования и системотехника*.

Естественно, что А. у. т. в том виде, в каком она сформировалась, не может удовлетворять требованиям, которые предъявляются к теории управления, пригодной для управления сложными системами. Это становится очевидным хотя бы потому, что А. у. т. даже не располагает языком, пригодным для описания подобного рода систем. Разработка методов исследования и способов проектирования *сложных систем управления* такого класса будет, по-видимому, вестись в рамках более общей научной дисциплины — технической киберне-

тики, по отношению к которой А. у. т. является ее составной частью.

*Лит.*: Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А., Стодولا А. Теория автоматического регулирования. М., 1949; Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [библиогр. с. 926—963]; Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., 1966 [библиогр. с. 594—618]; Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., 1968 [библиогр. с. 347—381]; Теория автоматического регулирования, кн. 1—3, ч. 1—2. М., 1967—69 [библиогр. кн. 1, с. 743—763; кн. 2, с. 653—674; кн. 3, ч. 1, с. 588—604, ч. 2, с. 352—365]; Петов А. М. Динамика полета и управление. М., 1969 [библиогр. с. 347—352]; Понтрягин Л. С. [и др.]. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1969 [библиогр. с. 383—384]; Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. Пер. с англ. М., 1964; Современная теория систем управления. Пер. с англ. М., 1970. В. М. Кунцевич.

**АВТОМАТИЧЕСКОЕ ЦИФРО-ПЕЧАТАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО** — см. *Алфавитно-цифровое печатающее устройство*.

**АВТОМАТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ** — то же, что и *оператор автоматный*.

**АВТОМАТОВ АБСТРАКТНАЯ ТЕОРИЯ** — см. *Абстрактная теория автоматов*.

**АВТОМАТОВ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ** — см. *Алгебраическая теория автоматов*.

**АВТОМАТОВ АНАЛИЗ** — нахождение по заданному в том или ином виде автомату отображения «вход — выход», осуществляемого этим автоматом. Часто такое отображение можно интерпретировать как высказание предиката, и поскольку каждый предикат полностью характеризуется своим мн-вом истинности, то задача анализа автомата сводится к нахождению этого мн-ва (говорят, что это мн-во распознается автоматом). Для многих классов автоматов хорошо известны классы распознаваемых ими множеств. Напр., *Тьюринга машины* распознают все рекурсивно перечислимые мн-ва, автоматы с магазинной памятью (недетерминированные) — контекстно свободные языки, *автоматы конечные* — события регулярные. Далеко не всегда по заданным автомату и мн-ву удается определить, распознает ли автомат в точности это мн-во. В общем виде для произвольного класса автоматов или даже для произвольного конкретного автомата эта проблема является алгоритмически неразрешимой. Если наложить ограничения на способы задания автоматов и на способы задания множеств, то для многих случаев она становится разрешимой. Напр., если регулярные события задавать регулярными выражениями, а конечные автоматы — матрицами переходов и выходов, то существует общий конструктивный прием (алгоритм анализа конечных автоматов), позволяющий находить регулярные выражения для событий, представимых в произвольном конечном автомате.

*Лит.*: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469].

М. И. Кратко.

**АВТОМАТОВ ГОМОМОРФИЗМ**. Пусть даны два автомата  $A = \langle Q, X, Y, \delta, \lambda \rangle$  и  $A' = \langle Q', X', Y', \delta', \lambda' \rangle$ .

Пусть  $f$  есть отображение мн-ва  $Q$  на  $Q'$ ,  $\varphi$  — отображение мн-ва  $X$  на  $X'$  и  $\psi$  — отображение мн-ва  $Y$  на  $Y'$ . Если  $\delta(q, x) = g$ ,  $\lambda(q, x) = y$  и  $\delta'(f(q), \varphi(x)) = f(g)$ ,  $\lambda'(f(q), \varphi(x)) = \psi(y)$ , то тройка  $\langle f, \varphi, \psi \rangle$  наз. гомоморфизмом  $A$  на  $A'$ , а  $A'$  наз. гомоморфным образом  $A$ . Аналогично определяется гомоморфизм  $A$  в  $A'$  (в этом случае  $f$  — отображение  $Q$  в  $Q'$ ,  $\varphi$  —  $X$  в  $X'$  и  $\psi$  —  $Y$  в  $Y'$ ), но тогда гомоморфным образом  $A$  будет не весь автомат  $A'$ , а некоторый его подавтомат. Если автоматы заданы как унарные универсальные алгебры (см. *Автоматов способы задания*), то понятие А. г. совпадает с понятием гомоморфизма универсальных алгебр.

**АВТОМАТОВ ДЕКОМПОЗИЦИЯ** — представление конечного автомата в виде композиции нескольких автоматов (см. *Автоматов композиция*). Возникающие здесь проблемы являются типичными для структурной теории автоматов (см. *Синтез автоматов структурный*) и вместе с тем они аналогичны проблемам, возникающим в современной алгебре, когда рассматривается представление данной алгебраической системы в виде нескольких более простых систем того же вида. Примером может быть *групп теория* и ее структурная теория.

В связи с различными понятиями композиции задачу А. д. можно ставить по-разному: рассматривать представление автоматов в виде прямой суммы, произведения, параллельно-последовательного соединения и т. п. Представляет интерес прежде всего тот случай, когда автоматы, составляющие композицию, являются в некотором смысле более простыми, чем исходный автомат, напр., имеют меньшее число состояний, меньше входных каналов, если их  $\phi$ -ция переходов в некотором смысле более простая, и т. п. Следовательно, задача А. д. допускает много вариаций.

Для уточнения постановки задачи введем понятие моделирования. Привлекая аналогии из алгебры, можно определить, что автомат  $A$  моделирует автомат  $B$  в том и только том случае, когда  $B$  изоморфен некоторому подавтомату автомата  $A$  (моделирование 1-го рода). Однако такое заимствованное из алгебры понятие, где главный интерес представляют элементы алгебры и отношения между ними, является слишком сильным и не отражает специфики *автоматов теории*. В теории автоматов интересуются гл. образом поведением «вход—выход» автомата. Эквивалентными считаются два автомата, имеющие одинаковое поведение (но, возможно, различное число состояний). Тогда естественно определить, что автомат  $A$  моделирует автомат  $B$ , если его поведение, с точностью до переименования входных и выходных букв, совпадает с поведением автомата  $B$ . Или точнее, автомат  $A$  моделирует автомат  $B$  в том и только том случае, когда  $B$  является гомоморфным образом некоторого подавтомата автомата  $A$  (моделирование 2-го рода).

Осн. задача А. д. — нахождение эффективных процедур, позволяющих по заданному ав-

томату находить композицию автоматов, моделирующую исходный автомат. Эта задача аналогична задаче расчленения сложной системы на более простые и представляет большой интерес во многих практических случаях.

Более всего изучено А. д. в параллельно-последовательные соединения. Для объяснения некоторых полученных при этом результатов достаточно рассмотреть только *Мура автоматы* без выхода (аналогичные результаты имеют место и для Мили автоматов с выходом). Удобно рассматривать конечные автоматы как конечные унарные алгебры. Автомату  $A = \langle Q, X, \lambda \rangle$  соответствует алгебра  $\mathfrak{A} = \langle Q, f_1, \dots, f_n \rangle$ , где основное мн-во алгебры  $\mathfrak{A}$  — это мн-во состояний автомата  $Q$  и каждой букве входного алфавита  $X$  соответствует одна (унарная)  $\phi$ -ция из сигнатуры  $\mathfrak{A}$  так, что  $f_i(g) = \lambda(x_i, g)$ . И наоборот: каждую такую конечную алгебру можно считать конечным автоматом. Каждая алгебра имеет две тривиальные конгруэнции: «0» (каждый класс этой конгруэнции содержит точно один элемент множества  $Q$ ) и «1» (конгруэнция, имеющая единственный класс, состоящий из всего  $Q$ ). Кроме этих двух тривиальных конгруэнций, алгебра  $\mathfrak{A}$  может иметь и др. конгруэнции. Если на мн-ве всех конгруэнций данной алгебры ввести естественное отношение порядка, то это мн-во станет конечной решеткой, причем указанные тривиальные конгруэнции будут соответственно нулем и единицей решетки. Если принять понятие моделирования 1-го рода и один автомат считать проще другого, когда он имеет меньшее число внутр. состояний, то можно сформулировать следующие теоремы: 1) автомат  $A$  можно представить в виде последовательного соединения двух меньших автоматов тогда и только тогда, когда алгебра  $\mathfrak{A}$  имеет хотя бы одну нетривиальную конгруэнцию; 2) автомат  $A$  можно представить в виде параллельного соединения двух меньших автоматов тогда и только тогда, когда алгебра  $\mathfrak{A}$  имеет две нетривиальные конгруэнции  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , такие, что  $\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$  (умножение конгруэнций определяется указанным выше отношением порядка: если  $\pi_1 = \{R_1, \dots, R_k\}$ ,  $\pi_2 = \{S_1, \dots, S_p\}$ , то  $\pi_1 \cdot \pi_2$  состоит из всех непустых пересечений вида  $R_i \cap S_j$ ). Приведенные теоремы полностью решают для этого случая задачу декомпозиции. В самом деле, если  $\pi_1 < \pi_2$ , то конгруэнция  $\pi_1$  определяет некоторую конгруэнцию алгебры  $\mathfrak{A}_{\pi_1}$  и, следовательно,  $\mathfrak{A}_{\pi_1}$  можно также подвергнуть декомпозиции. Т. о., решетка конгруэнций несет осн. информацию о всех декомпозициях автомата  $A$ .

Во многом аналогичные результаты получают и при моделировании 2-го рода. Назовем квазиконгруэнцией алгебры  $\mathfrak{A} = \langle Q, f_1, \dots, f_n \rangle$  такую систему подмножеств  $\{Q_1, \dots, Q_k\}$  мн-ва  $Q$ , что: 1)  $\bigcup_i Q_i = Q$ ; 2) если  $Q_i \leq Q_j$ , то  $i = j$  и 3) для каких-либо  $i, j$  найдется такое  $s$ , что  $f_s(Q_j) = Q_i$ . Очевидно, что каждая

конгруэнция является квазиконгруэнцией. Тривиальными квазиконгруэнциями назовем те же два отношения конгруэнтности 0 и 1, которые были определены выше. Верны следующие теоремы: 1) автомат  $A$ , имеющий  $n$  состояний, можно представить в виде последовательного соединения двух меньших автоматов тогда и только тогда, когда существует нетривиальная квазиконгруэнция алгебры  $\mathcal{A}$ , имеющая меньше, чем  $n$  подмножеств  $Q_i$ ; 2) пусть  $\pi_1$  и  $\pi_2$  — квазиконгруэнции алгебры  $\mathcal{A}$ , имеющие соответственно  $k_1$  и  $k_2$  подмножеств, и  $\pi_1 \cdot \pi_2 = 0$ . Тогда автомат  $A$  можно представить в виде параллельного соединения двух автоматов, имеющих  $k_1$  и  $k_2$  состояний. Здесь разработан аппарат т. н. алгебры пар, позволяющей описывать  $A$  д.

Для формулировки дальнейших результатов требуется следующее определение: конечный автомат наз. *перестановочным*, если каждая буква его входного алфавита определяет некоторую перестановку мн-ва внутренних состояний. С каждым перестановочным автоматом связана группа перестановок, порожденная перестановками, соответствующими всем его входным буквам. Доказано следующую теорему: любой конечный автомат можно представить в виде параллельно-последовательного соединения автоматов, имеющих не более двух внутренних состояний, и перестановочных автоматов, группы перестановок которых делят группу перестановок исходного автомата. Более того, если группа перестановок исходного автомата имеет некоторый простой нормальный делитель, то в любом его разложении найдется автомат, группа перестановок которого имеет тот же простой нормальный делитель. Т. о., если простая группа «заложена» в исходном автомате  $A$ , то она должна «содержаться» в одной из компонент, которые используются для представления  $A$  в виде композиции. Здесь понятие простоты можно связать с  $\phi$ -цией переходов. Перестановочные автоматы считаются более простыми, чем не перестановочные, а из двух перестановочных  $A$  считается проще  $B$ , если группа перестановок  $A$  делит группу перестановок  $B$ . Наиболее простыми при таком подходе считаются автоматы, у которых группы перестановок — простые. Они дальше не разлагаются в параллельно-последовательные соединения.

Приведенные выше теоремы позволяют сформулировать следующий результат, относящийся также к *полноте проблемы* в теории автоматов: любой конечный автомат можно представить в виде параллельно-последовательного соединения автоматов, имеющих не более двух внутр. состояний, и перестановочных автоматов, перестановки которых порождают простые группы. Если  $\phi$ -ции алгебры логики или многозначных логик рассматривать как автоматы с одним состоянием, то определения простоты через число внутр. состояний или сложность  $\phi$ -ции переходов, как это было сделано выше, для них теряют смысл. Здесь один автомат можно считать проще другого, если он имеет меньшее число входных каналов (т. е. одна

$\phi$ -ция проще другой, если она является  $\phi$ -цией от меньшего числа аргументов). Здесь также получены многочисленные результаты. См. *Булевы функции*.

Лит.: Krohn K., Rhodes J. Algebraic theory of machines. I. Prime decomposition theorem for finite semigroups and machines. «Transactions of the American mathematical society», 1965, v. 116; Hartmanis J., Stearns R. E. Algebraic structure theory of sequential machines. Englewood Cliffs, 1966 [библиогр. с. 206—208]; Zeiger H. P. Cascade synthesis of finite-state machines. «Information and control», 1967, v. 10, № 4; Muller D. E., Puzolu G. R. Frequency of decomposability among machines with a large number of states. «Journal computer and system sciences», 1968, v. 2, № 3.

М. И. Кратко.

**АВТОМАТОВ ИГРЫ** — коллективное взаимодействие автоматов (детерминированных или вероятностных), при котором каждый автомат имитирует игрока, а платежная матрица игрокам неизвестна. Каждая партия игры состоит в выборе каждым из автоматов некоторого выходного сигнала из мн-ва выходных сигналов, имеющих у автомата. После выбора значения выходного сигнала (одноходовой чистой стратегии данного игрока) информация о выборе всех автоматов поступает на некоторое устр-во (среду, или оракул). Среда имеет информацию о матрице платежей и на основании данных о выбранных выходных сигналах автоматов формирует входные сигналы на каждый из автоматов. Этот входной сигнал имитирует величину выигрыша, полученного автоматом в данной партии. После этого начинается реализация новой партии игры.

А. и. можно классифицировать по типу автоматов, которые участвуют в игре, способу определения выигрышей автоматов и по свойствам платежной матрицы. Было показано (для простейших случаев аналитически, для более сложных — путем моделирования процесса игры на ЭВМ), что при определенных условиях автоматы, играющие в игру антагонистическую с нулевой суммой, по числу партий выходят асимптотически на оптимальные стратегии смешанные, а в играх с нулевой суммой — выходят на точку равновесия (точку Нэша).

Особенностью коллективного взаимодействия автоматов является возможность такого воздействия среды на автоматы, при котором автоматы будут исходить не из принципа достижения каждым из игроков своего «личного» благополучия, а из принципа достижения общего благополучия всего коллектива игроков. В связи с этим сов. математик М. Л. Цетлин (1924—66) сформулировал принцип общей кассы. При общей кассе среда суммирует выигрыши всех автоматов и делит полученный результат на число игроков, участвующих в игре. Т. о., в конце каждой партии игры все игроки получают одинаковые выигрыши. Было показано, что принцип общей кассы в ряде случаев приводит коллектив игроков в точку равновесия. См. также *Поведение автоматов в случайных средах*.

Лит.: Цетлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М., 1969 [библиогр. с. 306—316].

Д. А. Поспелов.

**АВТОМАТОВ ИЗОМОРФИЗМ** — это такой автоматов гомоморфизм, при котором  $f, \varphi, \psi$  являются взаимно-однозначными отображениями. Автоматы  $A$  и  $A'$  в этом случае наз. и з о м о р ф н ы м и. С точки зрения абстрактной теории автоматов изоморфные автоматы не различимы.

**АВТОМАТОВ КОМПОЗИЦИИ** — операции, используемые для порождения одних автоматов из других. Часто композицией наз. и результаты таких операций, т. е. полученные автоматы. Указанные операции носят алгебр. характер и являются основой структурных построений в алгебраической теории автоматов. Наиболее часто рассматривают следующие  $A. к.$

**П р я м а я с у м м а.** Эту операцию применяют к мн-ву автоматов  $\mathcal{U}_i = \langle A_i, X, Y, \delta_i, \lambda_i \rangle$ , такому, что входной и выходной алфавиты каждого автомата  $\mathcal{U}_i$  одинаковы, а мн-ва состояний  $A_i$  попарно не пересекаются. В результате операции получают автомат  $\mathcal{U} = \langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$  такой, что  $A = \bigcup_i A_i$  и значения  $\varphi$ -ции переходов  $\delta(a, x)$  и выходов  $\lambda(a, x)$  совпадают со значениями  $\delta_i(a, x)$  и  $\lambda_i(a, x)$  того автомата  $\mathcal{U}_i$ , который содержит состояние  $a$ .

**П р я м о е п р о и з в е д е н и е.** Эта операция, примененная к мн-ву автоматов  $\mathcal{U}_i = \langle A_i, X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i \rangle$ , дает автомат  $\mathcal{U} = \langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$  такой, что  $A$  является декартовым произведением мн-в  $A_i$  ( $A = \prod_i A_i$ ), а  $X$  и  $Y$  — соответственно мн-в  $X_i$  и  $Y_i$  ( $X = \prod_i X_i, Y = \prod_i Y_i$ ).  $\varphi$ -ции переходов и выходов задают соотношения:

$$\begin{aligned} \delta(\langle a_1, \dots, a_n \rangle, \langle x_1, \dots, x_n \rangle) &= \langle \delta_1(a_1, x_1), \dots, \delta_n(a_n, x_n) \rangle, \\ \lambda(\langle a_1, \dots, a_n \rangle, \langle x_1, \dots, x_n \rangle) &= \langle \lambda_1(a_1, x_1), \dots, \lambda_n(a_n, x_n) \rangle. \end{aligned}$$

**С к р е щ е н н о е п р о и з в е д е н и е.** Двуместная операция, применяемая к автоматам без выходов. Из автоматов  $\langle A_1, X, \delta_1 \rangle$  и  $\langle A_2, X, \delta_2 \rangle$  получают автомат  $\langle A, X, \delta \rangle$  такой, что  $A = A_1 \times A_2$  и  $\delta(\langle a_1, a_2 \rangle, x) = \langle \delta_1(a_1, \varphi(a_2, x)), \delta_2(a_2, \psi(a_1, x)) \rangle$ , где  $\varphi: A_2 \times X \rightarrow X$  и  $\psi: A_1 \times X \rightarrow X$  — однозначные  $\varphi$ -ции. Скрещенное произведение, в котором  $\psi(a, x) = x$ , наз. п о л у п р я м ы м п р о и з в е д е н и е м.

Обобщив операции прямого, скрещенного и полупрямого произведений, получают операцию п р о и з в е д е н и я а в т о м а т о в. Эта операция, примененная к мн-ву автоматов  $\mathcal{U}_i = \langle A_i, X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i \rangle$ , дает автомат  $\mathcal{U} = \langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$  такой, что  $A = \prod_i A_i$ , а  $X'$  и  $Y'$  — некоторые заданные мн-ва.  $\varphi$ -ции переходов и выходов задают с помощью двух за-

данных однозначных отображений  $\varphi: (\prod_i A_i) \times X \rightarrow \prod_i X_i$  и  $\psi: (\prod_i A_i) \times X \rightarrow Y$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta(\langle a_1, \dots, a_n \rangle, x) &= \langle \delta_1(a_1, x_1), \dots, \\ \delta_n(a_n, x_n) \rangle \text{ и } \lambda(\langle a_1, \dots, a_n \rangle, x) &= y, \end{aligned}$$

где  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \varphi(\langle a_1, \dots, a_n \rangle, x)$  и  $y = \psi(\langle a_1, \dots, a_n \rangle, x)$ .

**С у п е р п о з и ц и я.** Это двуместная операция, дающая по такой паре автоматов, что выходной алфавит первого автомата совпадает с входным алфавитом второго  $\langle A_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1 \rangle, \langle A_2, Y_1, X_2, \delta_2, \lambda_2 \rangle$ , автомат  $\langle A, X_1, Y_2, \delta, \lambda \rangle$  такой, что

$$\begin{aligned} A &= A_2 \times A_1, \delta(\langle a_2, a_1 \rangle, x) = \\ &= \langle \delta_2(a_2, \lambda_1(a_1, x)), \\ \delta_1(a_1, x) \rangle \text{ и } \lambda(\langle a_2, a_1 \rangle, x) &= \\ &= \lambda_2(a_2, \lambda_1(a_1, x)). \end{aligned}$$

Используя все приведенные выше операции, можно из данного мн-ва автоматов порождать новые автоматы. Это представляет теор. интерес для автоматов теории и, в особенности, важно для ее практических применений. В частности, алгебр. методами исследовали полноты проблему в теории автоматов, а также различного рода автоматов декомпозиции.

Лит.: Г л у ш к о в В. М. Абстрактная теория автоматов. «Успехи математических наук», 1961, т. 16, в. 5. М. И. Кратко.

**АВТОМАТОВ МИНИМИЗАЦИЯ** — см. Минимизация числа состояний автомата.

**АВТОМАТОВ ПОВЕДЕНИЕ** — см. Поведение автоматов.

**АВТОМАТОВ ПРОИЗВЕДЕНИЕ** — один из способов автоматов композиции.

**АВТОМАТОВ ПРЯМАЯ СУММА** — операция, применяемая к множеству автоматов  $\mathcal{U}_i = \langle A_i, X, Y, \delta_i, \lambda_i \rangle$ , в котором входной и выходной алфавиты каждого автомата  $\mathcal{U}_i$  одинаковы, а мн-ва состояний  $A_i$  попарно не пересекаются. Результатом операции является автомат  $\mathcal{U} = \langle A, X, Y, \delta, \lambda \rangle$ , в котором  $A = \bigcup_i A_i$  и значения  $\varphi$ -ций переходов  $\delta(a, x)$

и выходов  $\lambda(a, x)$  совпадают со значениями  $\delta_i(a, x)$  и  $\lambda_i(a, x)$  автомата  $\mathcal{U}_i$ , содержащего состояние  $a$ . См. Автоматов композиция.

**АВТОМАТОВ СИНТЕЗ** — построение автомата по заданному его поведению «вход — выход». Проблема синтеза наиболее подробно исследовалась для автоматов конечных, поскольку к этому случаю сводятся многие практические задачи, связанные с проектированием разного рода управляющих и вычисл. устройств дискретного действия. Синтез бесконечных автоматов в большинстве случаев имеет теор. интерес. Он не представляет больших трудностей, т. к. к синтезируемым автоматам, как правило, не предъявляют дополнительных требований, кроме единственного, — чтобы они реа-

лизовали требуемое отображение «вход — выход». Оно же задается так, что метод синтеза оказывается достаточно простым. Напр., по частично рекурсивной ф-ции, заданной формулой, в которой использованы только знаки операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации, нетрудно построить *Тьюринга машину*, вычисляющую эту ф-цию. Более сложная проблема возникает только в тех случаях, когда приходится синтезировать бесконечные автоматы, исходя из практических задач, напр., в случае *автоматов регистровых*. К синтезу таких автоматов обращаются при проектировании операционных устройств ЦВМ.

Трудности А. с. зависят в основном от того, как заданы условия функционирования автомата. Чем выразительнее язык, применяемый для задания условий функционирования автомата (т. е., чем удобнее он для заказчика), тем сложнее метод синтеза. Во многих случаях может оказаться, что единого метода синтеза не существует. Поэтому для ряда классов автоматов, в частности для конечных автоматов, разрабатывают спец. языки, с помощью которых удобно задавать условия функционирования автоматов и для которых существуют методы синтеза (см. *Регулярные события и выражения*, *Язык логический для задания автоматов*).

Процесс синтеза сложного конечного автомата обычно подразделяют на несколько этапов. На 1-м этапе, называемом этапом блочного синтеза, осуществляется разбиение автомата на отдельные блоки, определяются задачи, которые должны решать эти блоки, намечается общий план обмена информацией между блоками. На 2-м этапе, называемом этапом абстрактного синтеза, на основании задач, решаемых каждым отдельным блоком, определяется объем памяти, необходимый для данного блока, и устанавливаются те изменения состояний памяти под воздействием входных сигналов, которые должен реализовать данный блок для того, чтобы он мог выполнять поставленные перед ним задачи. На 3-м этапе — этапе структурного синтеза — осуществляется выбор элементов для построения схемы и устанавливаются правила соединения этих элементов. Во многих случаях элементы бывают заданы заранее, тогда схема строится на этих элементах. На 4-м этапе — этапе надежностного синтеза — преобразовывают построенные схемы с целью обеспечения надежности их функционирования. Наконец, если автомат надо построить из физ. элементов, на 5-м этапе — этапе тех. синтеза — обнаруживают искажения сигналов, возникающие вследствие неидеальности применяемых элементов, и принимают меры к устранению этих искажений. За исходные данные более высокого этапа синтеза берут, как правило, результаты, получаемые на предыдущих этапах.

Приведенное выше разделение А. с. на этапы позволяет лишь в общем ориентироваться в том, через какие стадии проходит решение задачи А. с. В ряде случаев приходится делать

те или иные отступления от приведенной выше последовательности этапов. Напр., при синтезе достаточно простых автоматов этап блочного синтеза обычно опускается. Наоборот, при синтезе особо сложных автоматов возможно многократное возвращение к этому этапу. При некоторых спец. приемах синтеза этапы абстрактного, структурного и тех. синтеза так переплетаются между собой, что не всегда удается четко разграничить их. Наконец, учет соображений надежности обычно начинается на более ранних этапах. В результате этого на последнем этапе получают окончательное решение. Проблема А. с. обратна проблеме *автоматов анализа*, но обычно сложнее проблемы анализа.

Лит.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469].

В. М. Глушков, М. И. Кратко.

**АВТОМАТОВ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ** — способы описания структуры или алгоритма функционирования автоматов. В зависимости от степени детализации и целей исследования автомат может быть задан: во-первых, автоматным отображением, т. е. соответствием между последовательностями входных и выходных сигналов (см. *Оператор автоматный*), или алгоритмом вычисления ф-ций переходов и выходов (алгоритм. описание); во-вторых, сетью известных автоматов (структурное описание). Часто используется смешанное описание, в котором автомат описывается как *сеть логическая* или *автоматов композиция*, составленная из автоматов, которые, в свою очередь, могут иметь алгоритмическое или структурное описание.

Особое значение для практики имеют *автоматы конечные*. Алгоритм функционирования конечного автомата можно задавать мн-вом регулярных выражений, таблицей переходов и выходов, графом переходов и выходов, матрицей переходов или программой спец. вида. Конечные автоматы можно задавать также как конечные унарные алгебры. В этом случае осн. мн-во алгебры — это мн-во состояний автомата, а каждой букве входного алфавита  $X$  отвечает одна унарная ф-ция сигнатуры алгебры так, что значение  $f_i(g_j)$  — это состояние, в которое переходит автомат, когда, пребывая в состоянии  $g_j$ , он получает на вход букву  $x_i$ . Каждую конечную унарную алгебру можно, в свою очередь, рассматривать как конечный автомат.

Структура конечного автомата задается сетью из элементарных автоматов. Чаще всего структура представляет собой композицию регистра состояний и *комбинационной схемы*. Соответствие между последовательностями входных и выходных сигналов иногда удобно задавать явно, выписывая для каждой входной последовательности, во что она перерабатывается. Этот способ применяют, когда автоматное отображение является частичным, с конечной областью определения. Бесконечное автоматное отображение удобно задавать с помощью конечной системы регулярных выражений. При этом каждой букве  $y$  выходного



алфавита ставится в соответствие мн-во всех тех входных последовательностей — слов, которые переводятся данным автоматным отображением в выходные слова, оканчивающиеся буквой  $y$ . Таблица переходов автомата явно задает ф-цию переходов. Если автомат имеет  $n$  состояний и  $m$  входных букв, то таблица переходов содержит соответственно  $n$  столбцов и  $m$  строк, а на пересечении  $i$ -го столбца и  $j$ -ой строки — значение ф-ции переходов для  $i$ -го состояния и  $j$ -го входного сигнала. Таблица выходов автомата явно задает ф-ции выходов. В ней, как и в табл. переходов, имеется  $n$  столбцов и  $m$  строк, а на пересечении  $i$ -го столбца и  $j$ -ой строки — значение ф-ции переходов для  $i$ -го состояния и  $j$ -го входного сигнала. *Граф* переходов и выходов представляет собой графическое задание ф-ции переходов и выходов (см. *Абстрактного автомата граф*). В нем есть  $n$  вершин, соответствующих состояниям; состояния  $i$  и  $j$  соединены направленным к  $j$  ребром, помеченным буквой  $X$  (входной сигнал), если значение ф-ции перехода для пары  $(i, X)$  равно  $j$ . Для *Мули* автомата ребра, кроме входных сигналов, помечаются еще и соответствующим значением ф-ции выходов. Для *Мура* автомата значениями ф-ции отметок помечают вершины графа. *Автомата матрица переходов* представляет собой квадратную табл.  $n \times n$ . Каждому состоянию автомата соответствует столбец и строка. На пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца в таблице выписывается мн-во таких входных сигналов  $X$ , для которых значение ф-ции переходов для пары  $(i, X)$  равно  $j$ . Программа автомата представляет собой последовательность отмеченных операторов — команд. Метки команд соответствуют состояниям автомата. Каждая команда состоит из последовательности строк. Каждая строка имеет вид:  $E(\bar{X}) F(\bar{Y}) N$ , где  $E(\bar{X})$  — некоторое условие, заданное на мн-ве входных сигналов,  $F(\bar{Y})$  — дизъюнкция выходных сигналов,  $N$  — метка команды. Каждая строка означает: если для входных сигналов автомата выполняется условие  $E(\bar{X})$ , то следует выдать выходные сигналы, входящие в  $F(\bar{Y})$ , и перейти к команде с меткой  $N$  данной программы. Во многих случаях задание автомата программой более экономно, чем другие способы задания. Особенно удобно применять его для задания не полностью определенных и недетерминированных автоматов. При синтезе управляющего автомата, который в дальнейшем служит в качестве блока ЦВМ, программу его работы часто наз. м и к р о п р о г р а м м о й. Структура автомата задается явным перечислением всех ее компонент и связей между компонентами.

Автомат может иметь алгоритмическое и структурное описание. Соответствие между ними задается табл. *кодирования состояний автомата*, входных и выходных сигналов, участвующих в алгоритм. описании, и, соответственно, состояниями, а также входными и выходными сигналами компонент, участвую-

щих в структурном описании. Если автомат задает в виде регистра состояний и комбинационной схемы, то эту композицию лучше всего задавать в виде перечисления элементов — компонент регистра, и системы ф-ций возбуждений, управляющих переключением состояний этих элементов. Бесконечные автоматы чаще всего задаются в виде композиции некоторого конечного автомата и бесконечного автомата с регулярным законом порождения состояний и выходных сигналов. См. также *Автоматов декомпозиция, Автоматов теория, Язык анкетный для задания автоматов, Язык логический для задания автоматов, Язык описания устройств ЦВМ*.

Лит.: Глушков В. М. Введение в кибернетику. К., 1964 [библиогр. с. 319—322]. Ю. В. Капитонова.

**АВТОМАТОВ СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ** — см. *Структурная теория автоматов*.

**АВТОМАТОВ СУПЕРПОЗИЦИЯ** — двуместная операция, дающая по паре автоматов  $\langle A_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1 \rangle, \langle A_2, Y_1, Y_2, \delta_2, \lambda_2 \rangle$ , где выходной алфавит первого автомата совпадает с входным алфавитом второго, автомат  $\langle A, X_1, Y_2, \delta, \lambda \rangle$ , в котором

$$\begin{aligned} A &= A_2 \times A_1, \delta(\langle a_2, a_1 \rangle, x) = \\ &= \langle \delta_2(a_2, \lambda_1(a_1, x)), \delta_1(a_1, x) \rangle \\ \text{и } \lambda(\langle a_2, a_1 \rangle, x) &= \lambda_2(a_2, \lambda_1(a_1, x)). \end{aligned}$$

См. *Автоматов композиции*.

**АВТОМАТОВ ТЕОРИЯ** — раздел теоретической кибернетики, в котором изучаются математические модели (называемые *автоматами*, *машинами*) реально существующих (технических, биологических и т. п.) или принципиально возможных устройств, перерабатывающих дискретную информацию дискретными временными тактами. А. т. возникла гл. образом под влиянием запросов техники цифровых вычислительных и управляющих машин, а также внутренней потребности теории алгоритмов и математической логики. Понятие «автомата» заметно варьирует в зависимости от характера названных устройств, от принятого уровня абстракции и целесообразной степени общности (автоматы конечные, бесконечные, растущие, вероятностные, детерминированные, автономные и т. п.).

Вопрос же о выработке такого понятия «автомат», которое обладало бы макс. степенью общности и вместе с тем могло бы служить основой для постановки и решения достаточно содержательных задач, нельзя считать еще полностью решенным. Вместе с тем его можно рассматривать как частный случай общего понятия управляющей системы.

Термин «А. т.» вошел в обиход в 50-е годы 20 ст., хотя соответствующая проблематика в значительной мере начала складываться еще в 30-е годы в рамках теории алгоритмов и теории релейных устройств. Еще тогда в *алгоритмов теории* были сформулированы достаточно общие понятия вычисл. автомата (см. *Тьюринга машина*) и (неявно) понятие *автомата конечного* (головка машины Тьюринга). Было установлено, что для осуществления



всевозможных эффективных преобразований информации вовсе не обязательно строить каждый раз специализированные автоматы; в принципе все это можно сделать на одном универсальном автомате при помощи подходящей программы и подходящего кодирования. Этот теор. результат позже получил инженерное воплощение в виде современных универсальных вычисл. машин. Однако развернутое изучение процессов, протекающих в автоматах различного рода, и общих закономерностей, которым они подчинены, началось позднее лишь в рамках А. т. Различие в постановках между задачами теории алгоритмов и А. т. можно кратко охарактеризовать как различие между вопросами о том, что могут делать автоматы и как они это делают. Поскольку привлечение др. типов автоматов (отличных от машин Тьюринга) заведомо не расширяет запаса вычислимых преобразований информации, то для теории алгоритмов такое привлечение носит лишь эпизодический характер и связано только с применяемой техникой доказательств. С другой стороны, для А. т. такое рассмотрение становится уже самоцелью. Теор. и прикладные задачи автоматики, вычисл. техники и программирования, моделирования биол. поведения и др. продолжают стимулировать проблематику А. т. Однако наряду с этим, А. т. уже вырабатывает собственную внутреннюю проблематику. В А. т. широко применяется аппарат алгебры, логики математической, комбинаторного анализа (включая графов теорию) и вероятностей теории.

В А. т. достаточно четко вырисовываются отдельные ее направления, обусловленные выбором изучаемых типов автоматов (конечных, вероятностных и т. п.), принятым уровнем абстракции (см. *Абстрактная теория автоматов*, *Структурная теория автоматов*) или спецификой применяемых матем. методов (см. *Алгебраическая теория автоматов*). Наряду с этим родственные задачи и методы интенсивно развиваются в теории релейных устройств, в теории ЦВМ и в теории программирования, поэтому зачастую трудно бывает различать сферы действия этих теорий и А. т.

**Поведение и структура.** В основе А. т. лежат точные матем. понятия, формализующие интуитивные представления о функционировании и поведении автомата, а также о его структуре (внутреннем устройстве). С точки зрения их поведения, автоматы чаще всего рассматриваются как преобразователи словарной информации, т. е. преобразователи последовательностей букв в последовательности букв. Реализуемое преобразование интерпретируется обычно как вычисление значений некоторой ф-ции (оператора) по заданным значениям аргументов или как преобразование записей условий задач некоторого типа в записи соответствующих решений. В частности, т. н. распознающие автоматы, воспринимая входную информацию, реагируют на нее так, что некоторые входные последовательности сигналов они принимают, а другие — отвергают. В этом смысле они рас-

познают или, как говорят еще, представляют мн-ва входных последовательностей. Наконец, порождающий автомат функционирует как автоматная система, не связанная со входной информацией, его поведение определяется тем, какие выходные последовательности он способен породить. Приведенная классификация в терминах преобразования, распознавания и порождения зависит от правил функционирования автомата, т. е. от программы взаимодействия его внутренних состояний со входными (поступающими из внешней среды) и выходными (вырабатываемыми во внешнюю среду) сигналами. Пусть  $Q, X, Y$  — соответственно мн-ва внутренних состояний входных и выходных сигналов автомата. Если это детерминированный автомат, его программа формализуется в терминах ф-ции переходов  $\Psi$  и ф-ции выходов  $\Phi$ , указывающих для каждого входного сигнала  $x \in X$  и каждого состояния  $q \in Q$  состояние  $\Psi(q, x)$ , в которое переходит автомат, и вырабатываемый им при этом выходной сигнал  $\Phi(q, x)$ .

Абстрактная А. т. характеризуется более высоким уровнем абстракции: в ней понятие автомата отождествляется с понятием программы автомата, т. е. с пятеркой  $\langle X, Y, Q, \Psi, \Phi \rangle$ , при полном отвлечении от его структуры. Структура автомата отражает способ его организации из более простых взаимодействующих компонент (элементарных автоматов или просто — элементов), надлежащим образом соединенных в единую систему. Напр., вычисл. машина составлена из элементарных ячеек типа триггеров, инверторов и т. п.; нервная система построена из нейронов. Структурная классификация автоматов определяется характером допускаемых соединений (соединения могут быть жесткими или же изменяться в процессе работы, подвергнуты тем или иным геом. ограничениям), а также спецификой функционирования и взаимодействия употребляемых элементов (напр., элементы могут только обмениваться информацией или же они могут порождать новые элементы, наращивая структуру). Формализация структурных понятий осуществляется в терминах различного рода схем (см. *Сеть логическая*). А. Н. Колмогоров наметил подход, приведший к формулировке весьма общего, но все еще конструктивного понятия структуры автомата (см. *Автоматы растущие*), которое, по-видимому, охватывает все известные типы структур автоматов и все те, которые можно предвидеть на современном уровне науки. Вполне очевидно, что имеется тесная связь между структурой автомата и его поведением. Однако раздельное изучение каждого из этих двух аспектов при значительном отвлечении от другого не только возможно, но зачастую и полезно при постановке и решении многих важных проблем. Такое изучение производится соответственно в абстрактной (поведенческой) и структурной теории автоматов.

**Типы автоматов.** Наиболее распространенной является классификация автоматов и соотв. разделов А. т., посвященных различным

типам автоматов, по следующим признакам.

1) **Объем памяти.** Конечные и бесконечные автоматы характеризуются соотв. конечностью и бесконечностью объема памяти (числа внутренних состояний). Конечными автоматами являются отдельные блоки современных вычисл. машин и даже машина в целом. Мозг также можно рассматривать как конечный автомат. Бесконечные автоматы представляют собой естественную матем. идеализацию, вырастающую из представления об автомате с конечным, но необозримо большим числом состояний. При этом имеется в виду лишь потенциальная бесконечность памяти, проявляющаяся в том, что память, хотя и остается конечной в каждый момент времени, может неограниченно возрастать. Такая идеализация возникла впервые в рамках теории алгоритмов в процессе уточнения интуитивного представления об алгоритме. Структурно-растущий автомат представляют в виде соединения элементов, способных к размножению и наращиванию схемы. Современные ЭВМ можно рассматривать как растущие (а вместе с тем и потенциально бесконечные) автоматы в следующем смысле: чтобы вычисления во всех случаях могли быть доведены до конца, приходится допускать возможность неограниченного наращивания внешней (ленточной) памяти.

2) **Механизм случайного выбора.** В детерминированных автоматах поведение и структура в каждый момент времени однозначно определены текущей входной информацией и состоянием автомата, сложившимся в непосредственно предшествующий момент. В вероятностных (стохастических) автоматах они зависят еще и от некоторого случайного выбора. Стохастические автоматы не следует смешивать с недетерминированными, в которых так же нарушено условие однозначности (однако без участия к.-л. механизма случайного выбора).

**Проблемы и методы.** К центр. проблемам А. т. относятся проблемы анализа, т. е. описания поведения автомата, исходя из заданной его программы или структуры, и синтеза — т. е. конструирования автоматов, поведение которых удовлетворяло бы заранее предъявляемым требованиям. С этими проблемами тесно связаны и многие др. задачи, которые интенсивно исследуются (полнота и универсальность, минимизация, языки, асимптотические оценки и др.). Более всего анализ и синтез исследованы в теории конечных детерминированных автоматов, причем они по-разному трактуются в абстрактной и в структурной теориях автоматов. Так, напр., в структурной теории под синтезом (см. *Синтез автоматов структурный*) подразумевается построение схемы из заданного ассортимента элементов, которая была бы оптим. (или близка к оптим.) в смысле некоторого выдвигаемого критерия сложности схем. Здесь преобладают комбинаторно-информационные методы и асимптотические оценки (К. Шэннон, С. В. Яблонский, О. Б. Лупанов и др.). В абстрактной теории автоматов довольствуются построением

программы функционирования автомата (см. *Синтез автоматов абстрактный*), напр., в виде ф-ций перехода и выхода для конечного автомата, которая обычно служит исходным материалом для дальнейшего развертывания структурного синтеза. Здесь используются преимущественно алгебраические (С. К. Клини, В. М. Глушков и др.), математико-логич. (Б. А. Трахтенброт, Р. Бюхи и др.) и игровые (Р. Мак-Нотоп) методы и понятия. Проблема анализа и синтеза конечных детерминированных автоматов занимает видное место и в теории релейных устройств.

В теории экспериментов с автоматами (Э. Мур) разрабатываются методы, которые позволяют по сведениям, получаемым при внешнем наблюдении за поведением автомата, восстанавливать программу его функционирования или по крайней мере некоторые ее свойства. Эти методы можно рассматривать как своеобразный прием абстрактного синтеза и расшифровки автоматов (Я. М. Барздин). Работы К. Шэннона, М. Рабина и др. послужили толчком к развитию теории вероятностных автоматов в следующих направлениях: 1) в какой мере понятия и методы теории детерминированных автоматов переносятся на стохастические автоматы; 2) какие упрощения вычисл. процесса достижимы при выходе из более узкого класса детерминированных автоматов в более широкий класс *автоматов вероятностных*. Изучение растущих автоматов сосредоточено в основном на следующих проблемах: 1) разработка моделей растущих автоматов и изучение отдельных их классов (*автоматы итеративные* — Ф. Хенни, *автоматы регистровые* — В. М. Глушков, *автоматы самовоспроизводящиеся* — Дж. фон Нейман, обобщенные растущие автоматы — А. Н. Колмогоров, Я. М. Барздин); 2) оценка вычисл. способности и сложности вычислений растущих автоматов (Я. М. Барздин, Б. А. Трахтенброт, Ю. Хартманис, Г. С. Цейтин, М. Рабин и др.).

**Связь с другими научными направлениями.** Значение теории алгоритмов и теории релейных устройств для А. т. уже было разъяснено выше. Следует указать и на обратную отдачу А. т., методы которой позволили решить ряд задач, возникших в матем. логике и теории алгоритмов (Р. Бюхи). Проблематика, складывающаяся в теории растущих автоматов (напр., *сложность вычислений*), лежит по существу на стыке теории алгоритмов и асимптотических закономерностей структурного синтеза автоматов. Сильное взаимное проникновение А. т. и *лингвистики математической*, одним из важных понятий которой является *грамматика порождающая*, — объект весьма близкий к порождающему автомату. Поэтому отдельные довольно важные положения теории грамматик могут быть в принципе отнесены к А. т. В абстрактной теории автоматов матем. вопросы обучения, а также целесообразного поведения одного индивидуума или коллектива были уточнены и исследованы в терминах *автоматов игр* (М. Л. Цетлин). Полезной

оказалась также связь теории конечных автоматов с теорией проектирования ЦВМ и теорией программирования (В. М. Глушков, А. А. Летицкий).

Лит.: Гаврилов М. А. Теория релейно-контактных схем. М.—Л., 1950 [библиогр. с. 298—299]; «Труды математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51; Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]; Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А. Введение в теорию конечных автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 399—402]; Петлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М., 1969 [библиогр. с. 306—316]; Трахтенброт Б. А., Барздин Я. М. Конечные автоматы (Поведение и синтез). М., 1970 [библиогр. с. 389—395]; Автоматы. Пер. с англ. М., 1956. Б. А. Трахтенброт.

**АВТОМАТОВ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ** — см. *Алгебраическая теория автоматов*.

**АВТОМАТЫ БЕСКОНЕЧНЫЕ** — автоматы, м-во состояний которых является бесконечным. Формально А. б.—это пятерка  $\mathcal{A} = \langle X, A, Y, \delta, \lambda \rangle$ , где  $X$  и  $Y$  — соответственно входной и выходной алфавиты (они могут быть как конечными, так и бесконечными),  $A$  — мн-во состояний автомата (бесконечное),  $\delta: X \times A \rightarrow A$  — ф-ция переходов и  $\lambda: X \times A \rightarrow Y$  — ф-ция выходов автомата. Чаще всего рассматриваются А. б. с конечными входным и выходным алфавитами и счетным мн-вом внутр. состояний. Для класса всех А. б. еще не удалось получить значительных результатов, что объясняется чрезмерной общностью понятия А. б. Такие результаты имеются для отдельных специально выделенных классов А. б. Выделение этих классов А. б. идет, в основном, по двум направлениям: а) автомат  $\mathcal{A}$  рассматривается как абстрактный автомат, т. е. пятерка  $\langle X, A, Y, \delta, \lambda \rangle$ , где мн-во  $A$  является некоторой матем. структурой (по Н. Бурбаки), напр., пространством линейным, топологическим, метрическим, группой и т. п., а ф-ции  $\delta$  и  $\lambda$  являются некоторыми естественно определяемыми в этих терминах ф-циями или операторами, напр., *операторами линейными*; б) автомат  $\mathcal{A}$  задается в структурном виде, т. е. как автомат, реализованный в той или иной *сети логической*. Структура логич. сети и ее элементы определяют структуру мн-ва  $A$  и операций  $\delta$  и  $\lambda$ . Такое выделение классов А. б. является преобладающим в исследованиях по теории А. б. А. б., заданные в структурном виде, часто наз. *абстрактными машинами* (напр., *Тьюринга машина*). Изучают их в связи с возможностью выполнения на них тех или иных классов алгоритмов. Считают, что само понятие *алгоритма* может быть уточнено только на основе понятия А. б. (см. *Автоматы растущие*). Хотя все реальные дискретные устр-ва, предназначенные для переработки информации, могут иметь только конечное число внутр. состояний, т. е. их абстрактными моделями являются *автоматы конечные*, тем не менее бывает удобно рассматривать один А. б. как модель целого класса таких устр-в. Это позволяет выявить общие закономерности, имеющие место для всех таких устр-в, и зачастую имеет большое прикладное

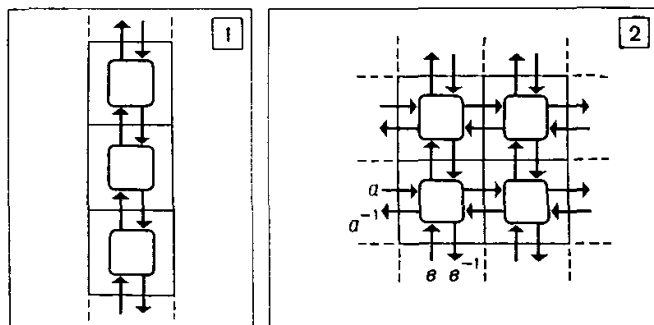
значение. Примером могут служить *автоматы регистровые*.

А. б. широко изучают в теор. кибернетике, в алгоритмов теории, лингвистике математической и др.

Лит.: Глушков В. М. Теория автоматов и вопросы проектирования структур цифровых машин. «Кибернетика», 1965, № 1; Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1965 [библиогр. с. 375—381]; Arbib M. A. Automata theory and control theory — a rapprochement. «Automatica», 1966, v. 3; Hopcroft J. E., Ullman J. D. An approach to a unified theory of automata. «The bell system technical journal», 1967, v. 46, № 8.

М. И. Кратко.

**АВТОМАТЫ ИТЕРАТИВНЫЕ** — логические сети, состоящие из одинаковых элементов — конечных автоматов, соединенных некоторым регулярным образом. Понятие А. и. можно считать обобщением понятия *Тьюринга машины*. В этой машине информация, записанная на ленте, подвергается в каждый такт работы машины локальным изменениям, т. е. меняется состояние не более чем одной ячейки ленты. Заменяя это требование локальности требованием повсеместности, параллельности вычислений в каждой ячейке, приходят к понятию одномерного А. и., если ячейку ленты рассматривать как *автомат конечный*, а буквы, записываемые в ячейку, — как состояния этого автомата. Состояние любой ячейки ленты в момент времени  $t + 1$  однозначно определяется состоянием этой ячейки и состояниями двух соседних с ней ячеек в момент  $t$  (рис. 1). Такое обобщение машины Тьюринга, включая также рассмотрение двумерных и многомерных структур, впервые предложили амер. математики Дж. фон Нейман (1903—57) и А. Черч (р. 1903). Поэтому такого рода *автоматы* часто наз. автоматами Неймана — Черча. В частности, фон Нейман, изучая вопросы самовоспроизведения в теории автоматов (см. *Автомат самовоспроизводящийся*), рассматривал плоскость, разбитую на равные квадраты (двумерную, или плоскую, «ленту»), в каждом из которых помещался экземпляр заданного конечного автомата, причем каждый такой экземпляр соединялся только с четырьмя своими



1. Схема одномерного итеративного автомата.  
2. Схема двумерного итеративного автомата.

соседями (рис. 2). Он же впервые выдвинул общее требование однородности структуры автомата, которому удовлетворяют А. и. Оно заключается в том, что все элементы автомата должны быть «равноправны», ни один из них не должен получать никакого преимущества

перед другими за счет спец. подключения. Напр., требование однородности будет соблюдено, если вместо  $n$ -мерного евклидова пространства, в котором размещены элементы А. и., рассматривать произвольные конечно-порожденные (коммутативные) группы  $G$  с выделенной конечной системой образующих  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Каждому элементу  $g$  группы  $G$  ставится в соответствие копия автомата  $A$  с  $n$  входными и  $n$  выходными каналами. Этот автомат связывается с соседними т. о., что его  $i$ -й выходной канал соединяется с  $i$ -м входным каналом автомата, поставленного в соответствие элементу  $ga_i$  группы  $G$ . Имеются и другие, более общие определения А. и.

Для А. и. ставились и решались разнообразные задачи (напр., проблема самовоспроизведения). Кроме этого, рассматривались вопросы функционирования (поведения) А. и. и вычисления на них, распознавания различных их свойств, «погружения» произвольных логич. сетей в А. и., анализа и синтеза А. и. и др. Изучались гл. о. А. и., «размещенные» в евклидовом пространстве. Наиболее изучены одномерные и двумерные («плоские») А. и. Конечные А. и., имеющие вид прямоугольника ( $n$ -мерного параллелепипеда), наз. итеративными сетями, а совокупность всех итеративных сетей, построенных из одного и того же элемента, — итеративной системой.

Рассматривались различные способы ввода внеш. информации в А. и. Так, напр., амер. математик Ф. Хенни, изучая преобразования и распознавание пространственных образов на А. и., т. е. прямоугольных массивов из нулей и единиц (или в общем случае  $n$ -мерных «параллелепипедов» — из нулей и единиц), предполагал, что каждая компонента образа поступает на соответствующую ячейку А. и. Процесс «обработки» образа происходит до наступления устойчивого состояния А. и., в котором выдается результат. При этом предполагается, что в процессе вычисления остальные ячейки А. и. находятся в состоянии покоя и в них не поступает никакой внеш. информации. Др. словами, А. и. функционирует как конечная итеративная сеть, размер которой ограничен входным образом. Хенни получил много результатов о свойствах А. и., связанных с такого рода вычислениями. Он показал алгоритм. неразрешимость многих проблем в теории А. и.; дал методы синтеза А. и., распознающих некоторые классы образов. Возможен и др. способ ввода внеш. информации, когда она поступает последовательно на специально выделенную ячейку или группу ячеек.

Дж. фон Нейман рассматривал А. и., как *автоматы растущие*, следующим образом: ячейка А. и. в числе др. внутр. состояний имеет т. н. состояние покоя  $\Lambda$ , которое характеризуется тем, что если некоторая ячейка и все ее непосредственные соседи в момент  $t$  находятся в состоянии  $\Lambda$ , то в момент  $t + 1$  данная ячейка также будет находиться в  $\Lambda$ . Находящуюся в состоянии покоя ячейку мож-

но рассматривать как несуществующую. Если в начальный момент времени конечное число ячеек находится в состояниях, отличных от  $\Lambda$  (такая совокупность ячеек с указанием состояний каждой из них наз. *конфигурацией*), а все остальные ячейки — в  $\Lambda$ , то эта конфигурация может «расти» за счет «присоединения» новых ячеек, т. е. ячеек, вышедших из состояния  $\Lambda$ . Как показал амер. математик Э. Мур, для очень широкого класса А. и. существуют такие конфигурации, называемые «райскими садами», которые не могут быть созданы никакой др. конфигурацией (т. е. такие, которые могут существовать только в начальный момент времени). Польский математик С. Улам исследовал экспериментальным путем на ЦВМ многообразие конфигураций, которые можно получить в двух- и трехмерных А. и. из достаточно простых исходных конфигураций при простых правилах функционирования А. и. Такие исследования, по мнению Улама, могут пролить свет на вопрос о том, сколько «информации» необходимо для описания структур живых организмов, имеющих по виду чрезвычайно сложное строение. А. и. обладают рядом свойств, делающих их весьма интересными с инженерной точки зрения. Прежде всего, это технологичность: достаточно спроектировать только один элемент — ячейку. Соединения элементов между собой простые, что позволяет легко наращивать сеть до нужных размеров, не перестраивая уже имеющихся в ней соединений. А это облегчает обслуживание таких сетей. На А. и. легко «распараллеливать» некоторые вычисления. Структуры, аналогичные А. и., обнаружены в живой природе (напр., сетчатка глаза, некоторые области коры головного мозга, молекулы ДНК и т. п.). Примерами применения итеративных структур в вычислительной технике могут служить *устройства памяти ЦВМ*, а также *регистры и сумматоры*. В связи с развитием технологии *интегральных схем*, где сама специфика производства такова, что там удобно строить устр-ва с итеративной структурой, интерес к теории А. и. все возрастает.

С теорией А. и. тесно связана теория т. н. *автоматов регистровых*, основы которой заложил сов. математик В. М. Глушков. Она направлена на изучение микропрограммирования ЦВМ.

*Лит.:* Глушков В. М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм. «Кибернетика», 1965, № 5; Барздин Я. М. Моделирование логических сетей на автоматах Неймана — Черча. «Проблемы кибернетики», 1966, в. 17; Мур Э. Ф. Математические модели самовоспроизведения. — Улам С. Некоторые математические проблемы, связанные с процессом роста фигур. В кн.: Математические проблемы в биологии. Пер. с англ. М., 1966; Henkle F. C. Iterative arrays of logical circuits. New York — London, 1961.

М. И. Кратко, Г. С. Плесневич.

**АВТОМАТЫ РАСТУЩИЕ** — объекты, характеризующиеся тем, что в каждый момент времени объект состоит из конечного числа элементов, которые определенным образом связаны между собой. Со временем одни элементы исчезают (отмирают) и появляются (порождаются)

другие, изменяются состояния элементов, изменяются и связи между ними (в результате могут появляться несвязанные с первоначальным объектом части, которые потом функционируют самостоятельно). Т. о., к классу А. р. относятся все биол. организмы или коллективы таких организмов, которые растут сами и создают себе потомков. Формализацией и изучением таких А. р. занимаются соответствующие естественные науки. В некотором смысле к классу А. р. можно отнести и любой вычислитель (человека, машину), который в процессе вычисления пишет цифры или др. знаки; эти знаки можно рассматривать как элементы, которые он порождает в процессе вычисления.

Рассмотрим математически точные концепции А. р. (см. *Автоматов теория*). Эти концепции являются частным случаем общего понятия управляющих систем. Они могут быть рассмотрены также и как конструктивное уточнение бесконечного автомата. По своему назначению математически точные концепции А. р. можно разделить на две группы: 1) концепции, служащие языком для описания реально существующих (технически реализуемых) автоматов, в частности, для описания алгоритм. процессов, протекающих в таких автоматах; 2) концепции, служащие языком для уточнения интуитивного понятия алгоритм. процесса. К 1-й группе А. р. можно отнести *автоматы итеративные*, «размещенные» в евклидовом пространстве (такие автоматы, в частности, рассматривал Дж. фон Нейман при изучении проблемы *автоматов самовоспроизводящихся*). Еще к этой группе можно отнести автоматы, описанные А. Берксом и Дж. Холландом. Ко 2-й группе можно отнести *Тьюринга машины*, понятия алгоритма, описанного А. Н. Колмогоровым и В. А. Успенским, А. р., описанного Я. М. Барздиным, и другие абстрактные машины, используемые для уточнения интуитивного понятия алгоритма.

При рассмотрении 2-й группы А. р. возникает проблема создания по возможности более общей концепции А. р., не противоречащей требованию, что каждый элемент в каждый дискретный момент времени выполняет лишь «действие ограниченной сложности». Рассмотрим, напр., машины Тьюринга. Они характеризуются предельной простотой допустимых средств при записи и переработке информации. В частности, информация в них записывается на одномерной ленте и рост ленты возможен только по краям. Но информация, по существу, может быть записана и в виде матрицы, графа и др., и для того, чтобы обрабатывать ее на машине Тьюринга, ее надо перекодировать. Сам процесс перекодирования может быть довольно сложным, иногда даже сложнее, чем само вычисление. Отсюда исходит идея А. Н. Колмогорова об алгоритме, перерабатывающем произвольную информацию. Этот алгоритм, в отличие от машины Тьюринга, может перерабатывать произвольные комплексы (напр., графы с фиксированным ветвле-

нием). Однако сами преобразования, как и в случае машины Тьюринга, локальны: в каждый такт может быть преобразована лишь окрестность ограниченного радиуса одного фиксированного элемента, называемого начальным.

Более общую концепцию А. р. (называемого в дальнейшем обобщенным А. р.) описал Я. М. Барздин. Она возникает из следующих интуитивных соображений. Каждый автомат состоит из элементов ограниченного числа типов (можно даже считать, из элементов одного типа). Элементы могут быть связаны между собой связями ограниченной сложности, принадлежащими также к ограниченному числу типов. Работа автомата в целом складывается из работы его элементов. Каждый элемент в каждый дискретный момент может осуществить лишь действие ограниченной сложности. Формализуя описанное интуитивное понятие А. р., приходим к понятию обобщенного А. р. Оно характеризуется тем, что информация, как и в случае алгоритма Колмогорова — Успенского, задается в виде произвольного графа с фиксированным ветвлением, но в отличие от предыдущих случаев преобразование информации протекает параллельно: каждая вершина графа представляет собой элемент, который в каждый дискретный момент времени «просматривает» свою окрестность ограниченного радиуса и в зависимости от этой окрестности (рассматриваемой с точностью до изоморфизма) изменяет свои связи с элементами этой окрестности и порождает новые элементы; при этом правило функционирования у всех элементов данного автомата одно и то же. Возникает вопрос о существовании универсального правила функционирования элементов, т. е. о существовании такого правила функционирования  $A_0$ , что любой обобщенный А. р. можно моделировать на некотором обобщенном А. р., элементы которого функционируют согласно  $A_0$ . При этом под моделированием имеется в виду блочное моделирование, когда отдельные блоки моделирующего автомата в точности воспроизводят функционирование составных элементов моделируемого автомата и каждому такту моделируемого автомата соответствует один макротакт фиксированной длины моделирующего автомата. Показано, что такое универсальное правило функционирования существует и при этом оно относительно несложное.

Большой интерес представляет моделирование А. р. на автоматах, имеющих достаточно простую тех. реализацию. Полученные результаты показывают, что существует *сеть логическая* с числом элементов порядка  $n \log_2^2 n$ , которая моделирует с растяжением порядка  $\log_2^3 n$  любой обобщенный А. р., пока он состоит не более чем из  $n$  элементов (при произвольно фиксированном правиле функционирования элементов). Интерес представляют также вопросы, связанные с построением надежных А. р. из ненадежных элементов, однако эти вопросы еще мало исследованы.

Лит.: Колмогоров А. Н., Успенский В. А. К определению алгоритма. «Успехи математических наук», 1958, т. 13, в. 4; Барздин Я. М. Проблемы универсальности в теории растущих автоматов. «Доклады АН СССР», 1964, т. 157, № 3; Офман Ю. П. Моделирование самоконструирующейся системы на универсальном автомате. «Проблемы передачи информации», 1966, т. 2, в. 1; Holland J. H. Iterative circuit computers. В кн.: Proceedings of the western joint computer conference. New York, 1960; Беркс А. У. Вычисление, поведение и структура неизменных и растущих автоматов. В кн.: Самоорганизующиеся системы. Пер. с англ. М., 1964; Нейман Дж. фон. Теория самовоспроизводящихся автоматов. Пер. с англ. М., 1971 [библиогр. с. 322—326]. Я. М. Барздин.

**АУТОНОМНОСТЬ** — независимость каждой из множества регулируемых величин в многоконтурной системе автоматического управления от всех остальных регулируемых величин или от всех задающих воздействий, кроме одного, ей соответствующего. Условие А. впервые сформулировал и применил в 1934 сов. ученый И. Н. Вознесенский (1887—1946). Он поставил и решил задачу о том, чтобы изменение одной какой-нибудь из  $n$  регулируемых величин могло происходить независимо от изменения всех других  $n - 1$ , т. е. автономно. А.-С. Боксенбом и Р. Худ (США) в 1950 также ввели понятие А.

Объект регулирования в общем случае может иметь  $m$  входов  $\Theta_i(p)$  и  $n$  выходов  $Y_i(p)$ , связанных между собой вследствие особенностей физ. процессов, происходящих в нем, таким образом, что каждое входное воздействие влияет на все или несколько регулируемых величин  $Y_i(p)$ , где  $m \geq n$ . Достичь А. каждой регулируемой величины можно отдельно с помощью соответствующим образом спроектированной системы управления.

где  $E_{ik}(p)$  — передаточная функция, связывающая  $i$ -ю выходную величину  $Y_i(p)$  с  $k$ -тым входным воздействием  $\Theta_k(p)$  в объекте. Таблица  $E_{ik}(p)$  образует матрицу передаточных ф-ций  $E$ , в нашем случае при  $m = n$  — квадратную.

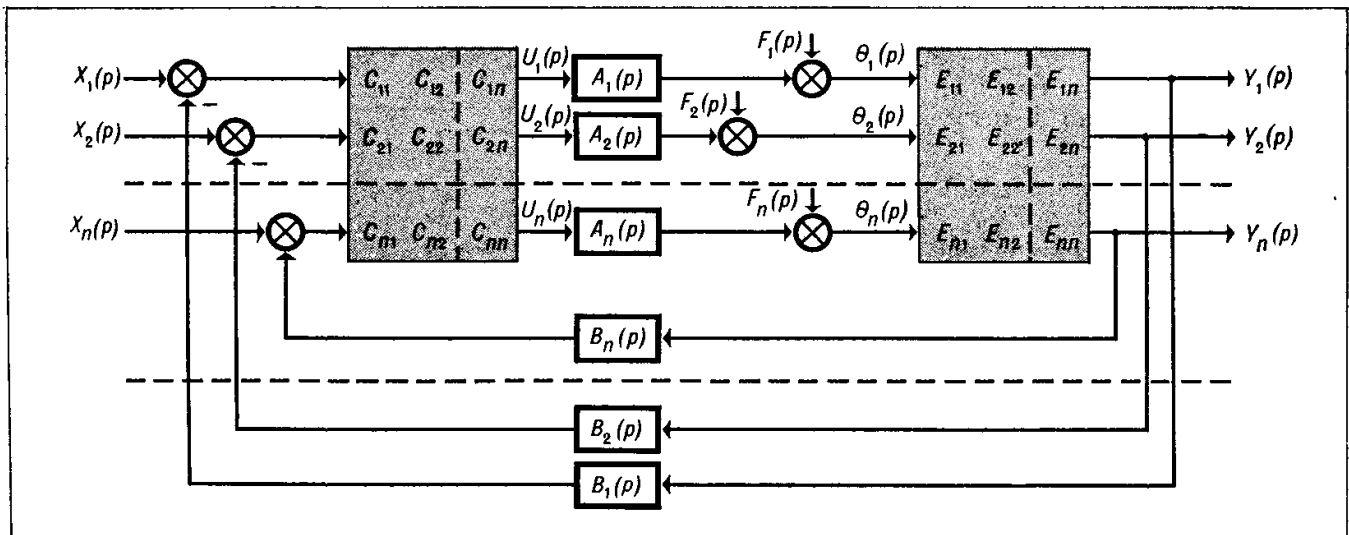
В системах со многими регулируемыми переменными, как и в обычных системах, задающее воздействие системы  $X_i(p)$  сравнивается с соответствующей ему регулируемой величиной  $Y_i(p)$  и рассогласование воспринимает регулятор, который вырабатывает сигнал  $\Theta_i(p)$ , подаваемый на  $i$ -й вход объекта регулирования. Управляющее воздействие  $U_i(p)$  и, следовательно,  $\Theta_i(p)$  (рис.) составляются как линейные формы от всех рассогласований с помощью передаточных ф-ций  $C_{ik}(p)$  регулятора, связывающих  $U_i(p)$  с рассогласованием  $[X_k(p) - B_k(p) Y_k(p)]$ :

$$U_i(p) = \sum_{k=1}^n C_{ik}(p) [X_k(p) - B_k(p) Y_k(p)]. \quad (2)$$

Таблица передаточных ф-ций  $C_{ik}(p)$  также образует в нашем случае квадратную матрицу  $C$ . Входная величина объекта

$$\Theta_i(p) = A_i(p) U_i(p) + F_i(p), \quad (3)$$

где  $A_i(p)$  — передаточная ф-ция  $i$ -го исполнительного элемента системы,  $F_i(p)$  — возмущение, действующее на  $i$ -том входе объекта. На основании анализа системы ур-ний (1—3)



Структурная схема автономной системы управления.

Рассмотрим случай, когда  $m = n$ . Зависимость между  $Y_i(p)$  и  $\Theta_i(p)$  (рис.) выражается уравнением

$$Y_i(p) = \sum_{k=1}^n E_{ik}(p) \Theta_k(p), \quad k, i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (1)$$

можно получить условия А. Любая из регулируемых величин  $Y_i(p)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , будет автономна относительно всех «чужих» задающих воздействий  $X_k(p)$ ,  $k \neq i$ , если

каждая передаточная ф-ция  $\frac{Y_i(p)}{X_k(p)}$  тожде-



ственно равна нулю для всех  $k; i = 1, 2, 3, \dots, n$ , т. е.

$$\frac{Y_i(p)}{X_k(p)} = \frac{\Delta_k(p)}{\Delta(p)} \equiv 0,$$

кроме передаточной ф-ции относительно «своего» задающего воздействия,  $k = i$ ,

$$\frac{Y_i(p)}{X_i(p)} = \frac{\Delta_i(p)}{\Delta(p)} \neq 0,$$

где  $\Delta(p)$  — главный определитель системы ур-ний (1—3),  $\Delta_k(p)$  — определитель, получаемый из  $\Delta(p)$  заменой  $i$ -го столбца столбцом коэффициентов при  $X_k(p)$ . Эти условия А., иногда наз. критерием А., выполняются, если соблюдаются следующие соотношения:

$$\frac{A_i(p) C_{ik}(p)}{A_k(p) C_{kk}(p)} = \frac{|E_{ki}(p)|}{|E_{kk}(p)|},$$

$i, k = 1, 2, 3, \dots, n,$

где  $|E_{kk}|$  и  $|E_{ki}|$  — алгебр. дополнения элементов  $E_{kk}$  и  $E_{ki}$  главного определителя  $|E|$ . В процессе работы помимо управляющих воздействий на объект действуют различного рода возмущения  $F_i(p)$ . В этих условиях А. недостаточно для осуществления высококачественного управления, а необходимо одновременно принять мер к улучшению качества переходного процесса и компенсации возмущений (см. *Инвариантность систем автоматического управления*).

А. применяется широко в сложных автомат. системах, таких, напр., как системы управления турбореактивными авиационными двигателями с форсажной камерой, системы регулирования паровых турбин, системы управления беспилотными летательными аппаратами и др.

Лит.: Вознесенский И. Н. О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров. «Автоматика и телемеханика», 1938, № 4—5; Кухтенко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. К., 1963 [библиогр. с. 364—371]; Чинаев П. И. Многомерные автоматические системы. К., 1963 [библиогр. с. 274—276]; Катковник В. Я., Полукатов Р. А. Многомерные дискретные системы управления. М., 1966 [библиогр. с. 410—413]; Цянь-Сюэ-Сэнь. Техническая кибернетика. Пер. с англ. М., 1956 [библиогр. с. 447—450].

А. Г. Шевелев.

**АВТОПИЛОТИРОВАНИЕ** — автоматическое управление полетом летательных аппаратов. Осуществляется автомат. системой — автопилотом, без участия человека. А. предполагает управление линейными (высота полета, боковое отклонение от заданного направления, пройденное расстояние) и угловыми (угол тангажа, крена, рыскания, атаки и скольжения) координатами летательных аппаратов. Для управления этими координатами прилагаются соответствующие силы и моменты, воздействующие на летательный аппарат, которые создаются либо аэродинамическими управляющими поверхностями — рулями высоты и на-

правления, элеронами, либо спец. реактивными газовыми рулями, а также изменением тяги двигателей.

Управление линейными координатами осуществляется в летательных аппаратах чаще всего через угловые. Так, для изменения высоты отклоняется руль высоты, создающий момент, который, поворачивая летательный аппарат, изменяет угол тангажа и вместе с ним угол атаки. Изменение последнего вызывает изменение подъемной силы и, следовательно, высоты полета. Из-за наличия у летательного аппарата трех степеней свободы по отношению к угловым движениям, для управления полетом система А. должна иметь не менее трех каналов управления (по крену, тангажу и курсу), связанных в общем случае в единую систему.

Основные функции системы А. по каждому из трех каналов: измерение отклонения линейных или угловых координат от заданного значения, преобразование и усиление этих отклонений, формирование управляющих сигналов, усиление их по мощности и воздействие ими на соответствующие органы управления так, чтобы полет совершался желаемым образом, т. е. по заданной траектории, с необходимой скоростью и т. д. При полете в возмущенной атмосфере на летательный аппарат действуют неупорядоченные порывы ветра, вызывающие отклонения координат от заданного значения и возбуждающие опасные колебания, которые могут привести к потере управляемости и к разрушительным перегрузкам. Автомат. управление в таких условиях может быть улучшено введением спец. дополнительного канала управления, с помощью которого осуществляется воздействие на особый орган, непосредственно управляющий подъемной силой летательного аппарата. Это

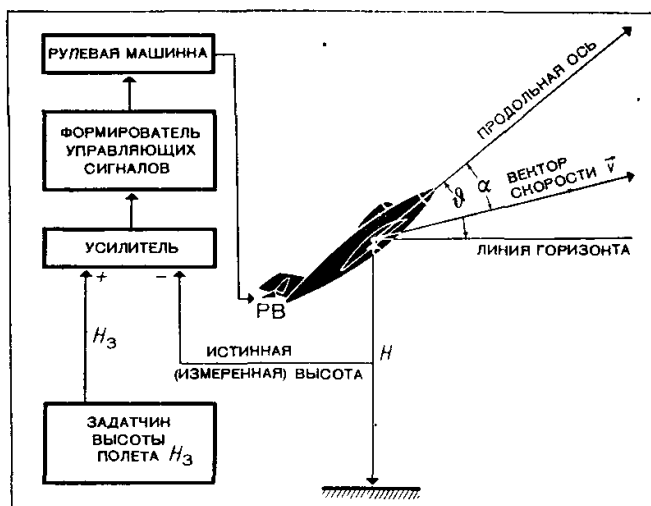


Схема автоматического управления высотой полета самолета.

позволяет эффективно уменьшить действие (парировать) возмущающее влияние атмосферы.

Для задания требуемых координат, характеризующих полет, в системе предусматриваются задатчики программных сигналов управ-



ления. Измерение линейных координат, напр., высоты полета, осуществляется барометрическим или же радиотех. высотомером, бокового отклонения — спец. радиотех. средствами. Угловые координаты измеряются с помощью гироскопических приборов.

На рисунке дана схема автомат. управления высотой полета самолета. Истинная (измеренная) высота полета  $H$ , значение которой преобразуется в соответствующее электр. напряжение, сравнивается с заданным значением высоты  $H_3$ , также представленном электр. напряжением, и разность их, пропорциональная отклонению  $H$  от  $H_3$ , предварительно усиливается. Из нее формируется управляющий сигнал, который усиливается по мощности и воздействует на рулевую машинку, отклоняющую руль высоты (РВ) так, что создается момент, поворачивающий самолет вокруг оси  $z$ , перпендикулярной плоскости рисунка, вследствие чего изменяется угол тангажа  $\theta$  и угол атаки  $\alpha$ ; изменение  $\alpha$  вызывает изменение величины подъемной силы и, следовательно, высоты полета  $H$ .

Система А. осуществляет управление летательным аппаратом на основе принципа *обратной связи*. В таких системах при определенных соотношениях между величинами аэродинамических коэфф. летательного аппарата и передаточными числами автопилота могут возникнуть нежелательные колебания. Автопилот должен быть настроен так, чтобы эти колебания не возникали. Но аэродинамические коэфф. сильно изменяются в зависимости от режима полета летательного аппарата, в связи с чем требуется перенастройка автопилота. Системы А., в которых передаточные числа автопилота автоматически настраиваются соответственно изменению аэродинамических коэфф. летательного аппарата, наз. с а м о н а с т р а и в а ю щ и м и с я. Такие системы более универсальны, чем обычные системы А. В принципе точно так же осуществляется А. другими летательными аппаратами: управляемыми ракетами, космическими аппаратами и вертолетами. Различие состоит в способах измерения положения летательного аппарата в пространстве и в координатах, характеризующих это положение, в формировании управляющих сигналов и в органах управления, с помощью которых изменяется положение летательного аппарата в пространстве.

Важнейшей практической задачей на современном этапе развития А. является разработка и внедрение систем широкого назначения, автоматически управляющих летательными аппаратами на всех этапах полета, включая взлет и посадку, при полном отсутствии видимости и в сильно возмущенной атмосфере.

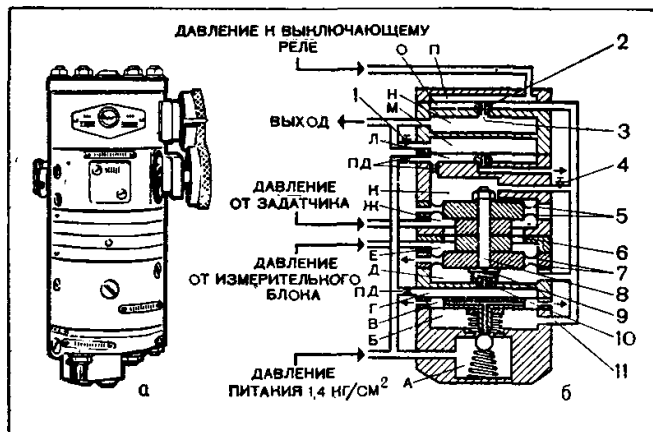
Лит.: Боднер В. А. Теория автоматического управления полетом. М., 1964 [библиогр. с. 692—698]; Колосов С. П., Стромилов В. М. Основы автоматического пилотирования. М., 1959; Кухтенко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. К., 1963 [библиогр. с. 364—371]; Боднер В. А. Системы управления летательными аппаратами. М., 1973 [библиогр. с. 499—500].

А. Г. Шевелев.

**АГРЕГАТНАЯ УНИФИЦИРОВАННАЯ СИСТЕМА (АУС)** — система пневматических средств автоматизации общепромышленного назначения, построенная по агрегатному принципу, в соответствии с которым она составляется из отдельных блоков, подбираемых по функциональному признаку. Входные и выходные параметры блоков унифицированы. Агрегатный принцип построения системы позволяет путем различного сочетания блоков в схемах, при сравнительно небольшом их количестве, создавать системы управления производственными процессами различной сложности. В зависимости от вида энергоносителя АУС может иметь три ветви: электрическую, пневматическую и гидравлическую (развития не получила). Наиболее полное развитие и широкое внедрение получила пневматическая ветвь. В комплект устройств АУС входят блоки: измерительные, регулирующие (с пропорциональным и пропорционально-интегральным *регулирования законами*), предварения (воздействия по производной), регулирования соотношения двух параметров, суммирования, умножения на коэффициент, умножения двух параметров, извлечения квадратного корня, возведения в квадрат, сигнализации, усиления по мощности, а также задатчики и приборы контроля. Для применения устройств АУС в схемах с электрическими приборами в ней предусмотрены пневмоэлектрические и электропневматические преобразователи. В качестве унифицированных входных и выходных параметров АУС принято давление сжатого воздуха, изменяющееся в диапазоне  $0,2—1$  кг/см<sup>2</sup> избыточных. Питание блоков осуществляется очищенным сжатым воздухом при давлении  $1,4$  кг/см<sup>2</sup> избыточных. Блоки унифицированы также конструктивно: они содержат стандартные узлы, детали и присоединительную арматуру. Регистрирующие и показывающие приборы контроля представляют собой сильфонные манометры с пределами измерения  $0,2—1$  кг/см<sup>2</sup>. На рис. показаны внешний вид и принципиальная схема пропорционально-интегрального регулирующего блока 4РБ—32А системы, являющегося наиболее сложным и содержащим наибольшее количество унифицированных деталей и узлов.

Работа регулирующего блока, как и большинства блоков АУС, основана на принципе компенсации усилий, возникающих на мембранах вследствие изменения давления воздуха, подводимого к пневматическим камерам блока. Регулирующий блок содержит следующие осн. узлы: усилитель мощности (камеры А, Б, В, Г), элементы сравнения (камеры Е и Ж), обратной связи (камеры Д и К), издрорма (камеры Л и М) и выключающее реле (камеры Н, О, П), служащее для перехода на ручное управление. Из линии питания воздух поступает в камеру А усилителя и далее через постоянные сопротивления ПД (представляющие собой капилляры) — в камеры Г и Л. При равенстве регулируемого параметра его заданному значению давления в камерах Е и Ж равны. Давления в камерах Д, К, Л, М

также равны друг другу. При отклонении регулируемого параметра давление в камере Е изменяется и на мембранах 5, 6, 7 возникает разбаланс сил; при этом мембраны, вместе со связывающим их штоком 8, перемещаются, и заслонка 9, укрепленная на штоке, изменяет проходное сечение сопла 10, вследствие чего изменяется давление в камере Г. Это изменение давления усиливается в усилителе, а затем поступает в канал 11 и через камеру Н выключающего реле — в выходную линию блока, связанную с исполнительным механиз-



Регулирующий блок 4РБ — 32А: а — общий вид; б — принципиальная схема.

мом. Отрицательная обратная связь осуществляется путем подачи сжатого воздуха в камеру Д. Величина коэффициента усиления регулятора (диапазона дросселирования) устанавливается дросселем 4, изменяющим поступление сжатого воздуха из канала 11 в камеру положительной обратной связи К.

Время изодрома устанавливается дросселем 1, регулирующим время заполнения глухой камеры М. Дроссели 1 и 4 представляют собой регулируемые игольчатые клапаны. При подаче воздуха питания в камеру П мембрана 2 перекрывает сопло 3 и отсоединяет выход регулятора от исполнительного механизма. Пределы настроек регулирующего блока: диапазон дросселирования —  $10 \div 250\%$ , время изодрома —  $3 \text{ сек} \div 100 \text{ мин}$ . В АУС предусмотрены задатчики трех типов: ручной — для установок постоянного по величине задания и два программных — с программой, изменяющейся во времени и в зависимости от параметра. Блоки и приборы агрегатной унифицированной системы взрыво- и пожаробезопасны, просты в обслуживании и надежны в работе, что обусловило широкое их использование для автоматизации производственных процессов во многих отраслях промышленности: нефтедобывающей, нефтеперерабатывающей, химической, пищевой, газовой и др.

Лит.: Березовец Г. Т., Малый А. Л., Наджафов Э. М. Приборы пневматической агрегатной унифицированной системы и их использование для автоматизации производственных процессов. М., 1965 [библиогр. с. 211—212]; Прусенко В. С. Пневматические регуляторы. М.—Л., 1966 [библиогр. с. 278—279]. Г. Т. Березовец.

## АГРЕГАТНО-БЛОЧНОЕ ПОСТРОЕНИЕ СРЕДСТВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ—

способ построения средств вычислительной техники путем компоновки конструктивно и функционально унифицированных блоков, соединяемых унифицированными внешними связями в агрегаты, с целью создания устройств, машин и систем для сбора, хранения, переработки и выдачи информации. Позволяет разрешить противоречия между требованиями однотипности изделий массового производства и многообразием средств вычислительной техники. Разнообразие агрегируемых устройств по назначению достигается сочетанием разнотипных, выполняющих определенные функции, блоков, включенных в состав устройств. Возможность объединения таких блоков в агрегаты обеспечивается выбором сопряжений соответствующих видов. Модифицирование устройств агрегатной системы осуществляется изменением количества или заменой отдельных блоков и узлов. Сравнительно небольшое число разновидностей элементов агрегатной системы позволяет получить большое количество модификаций устройств, построенных по агрегатно-блочному принципу. По такому принципу строят устройства, использующие для передачи сигналов и их реализации различные виды энергии, — электрические, пневматические, гидравлические и комбинированные (использующие одновременно разные виды энергии) агрегатные унифицированные системы средств автоматики и вычислительной техники.

Однотипность элементов агрегатной системы позволяет осуществить их массовое производство, сокращает сроки изготовления и стоимость аппаратуры, облегчает ее эксплуатацию и ремонт, уменьшает номенклатуру и количество запасных частей. Возможность удовлетворения разнообразных требований, возникающих при автоматизации различных процессов и объектов, с помощью сравнительно небольшого числа исходных элементов, определяет большой народнохозяйственный эффект от внедрения приборов, устройств, машин и систем, построенных по агрегатно-блочному принципу. Тенденция к созданию агрегатизированных автоматизированных информационных, управляющих и вычислительных систем, типовых рядов вычислительных и управляющих машин начала проявляться в связи с непрерывно возрастающим спросом на средства вычислительной техники для научно-тех. расчетов, оперативного управления производством и автоматизации технологических процессов. В таких условиях наиболее эффективными оказываются машины, способные совмещать решение задач управления производством в целом с автоматизацией производственных процессов. При этом возможны пути создания как отдельных машин, так и систем и семейств машин, агрегируемых из набора функциональных устройств. Предпочтителен второй путь, позволяющий снизить стоимость машин и систем за счет широкого использования унифицированных узлов и элементов, преемственности разраба-

тываемых устройств и прогрессивных технологических решений.

По агрегатному принципу построены, напр., машины и системы «Libratrol», «IBM-360», «GE-600» (США), «ARCH», «KDF-7» (Англия), система 4004 фирмы «Siemens» (ФРГ) и разработанные в СССР системы «АУС», «СОУ-1», «Днепр-2», «АЦС», «УСЭППА» и др. А. б. п. с. в. т. ярко выражено в агрегатной системе АСВТ, в агрегатной системе средств сбора и первичной переработки информации («АСПИ»), в комплексе технических средств для локальных информационно-управляющих систем («КТС ЛИУС»).

Лит.: Наумов Б. Н., Захаров В. Г., Филинов Е. Н. Основные принципы агрегатных комплексов средств вычислительной техники для систем управления. «Управляющие системы и машины», 1972, № 1. В. М. Египко.

**АДАМСА МЕТОД** — один из численных методов решения задачи Коши. См. *Коши задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений способы решения.*

**АДАПТАЦИЯ** в кибернетике — процесс накопления и использования информации в системе, направленный на достижение определенного, обычно оптимального в некотором смысле, состояния или поведения системы при начальной неопределенности и изменяющихся внешних условиях. При А. могут изменяться параметры и структура системы, алгоритм функционирования, управляющие воздействия и т. п.

А. применяется в тех случаях, когда воздействующие на систему факторы являются полностью или частично неизвестными. В процессе А. система накапливает данные об этих факторах и определяет их характеристики. Примером системы с А. является автомат, управляемый снаряд, преследующий цель, стратегия уклонения которой от встречи неизвестна. Простейшие процессы с А. осуществляются в системах автомат. регулирования, напр., А. автопилота к изменению высоты полета (см. *Автопилотирование*). А. реализуется в адаптивных системах управления, частным случаем которых являются самонастраивающиеся системы. В *распознавании образов* проблема А. связана с обучением и самообучением распознаванию сигналов. В последних случаях начальная неопределенность устраняется с помощью обучения или самообучения, а накопленная информация используется для повышения достоверности распознавания. См. также *Обучение распознаванию образов, Самообучение распознаванию образов.*

Т. К. Винцук.

**АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА** — система, которая может приспособляться к изменениям внутренних и внешних условий. См. *Система управления адаптивная.*

**АДРЕС** в программировании — цифровое или буквенно-цифровое обозначение поля (напр., отдельной физической ячейки) памяти ЦВМ. С А. ячейки связано понятие ее содержимого — находящегося в ней в данный момент *кода*, сохраняющегося в этой ячейке до помещения в нее другого кода, уничто-

жающего прежний. Используют А. в *языках машинных* и *языках машинно-ориентированных* для адресации — указаний в командах операндов. Машинные ячейки, А. которых могут быть использованы в командах, составляют адресуемую, или главную, память машины. А. операнда наз. также его прямым А., или А. 1-го ранга. Существенную роль в описании машинных *алгоритмов* играют т. н. А. высших рангов, использование которых заключается в указании в командах А., содержащего А. операнда. А., содержащим которого является А. операнда, наз. А. 2-го ранга этого операнда (другие его названия — косвенный адрес, фиксатор и ссылка — см. *Адресный язык*). Понятие ранга А. обобщается на любое целое число. Использование А. высших рангов представляет собой удобное средство для записи программ, т. к. позволяет представлять их в виде, не зависящем от места размещения этих программ в памяти машины, от места размещения обрабатываемых ими данных и др. параметров задач.

В машинных и ассемблерных языках, помимо указания операндов с помощью задания в командах их А. тех или иных рангов, используются и др. виды адресации, напр., явная (или адресация нулевого ранга), при которой в команде указывают не А. операнда, а непосредственно сам операнд; адресация посредством символьных А., представляющих собой конечные последовательности букв или цифр, обозначающих поля памяти; посредством относительных А. — А. операнда задается посредством указания положительного или отрицательного приращения к некоторому др. базовому А. В частных случаях, когда базовым А. является А. выполняемой в данный момент времени команды, относительную адресацию наз. текущей, а если в качестве базового А. используют содержимое спец. базового регистра, — базовой адресацией. В операциях, выполняемых командами ЦВМ, помимо главной памяти, могут участвовать др. хранилища, напр., регистры, обращение к которым может осуществляться без явного указания их обозначений в команде.

Е. Л. Ющенко.

**АДРЕС МАТЕМАТИЧЕСКИЙ** — адрес поля в виртуальной (математической) памяти машины. Виртуальная память в объеме, сравнимом, как правило, с объемом осн. памяти машины, формально отдается в распоряжение программисту (или системе автоматизации программирования), нумерация ячеек в ней предполагается последовательная, начиная с нуля. В действительности, *операционная система* выделяет задаче в общем случае несколько не связанных между собой участков реальной (основной или внешней) памяти; при этом соответствие между А. м. и физ. адресами, т. е. отображение виртуальной памяти на реальную память, содержится в таблицах операционной системы. Это отображение может многократно изменяться в процессе решения задачи. В случае обращения программы к некоторому А. м. операционная система, используя аппаратные и программные средства,

отыскивает реальное поле, соответствующее этому А. м., и производит требуемую операцию с находящейся в нем информацией. Являясь адресом воображаемой памяти, А. м., как и адрес реальной физ. памяти, может быть абсолютным, относительным, прямым, косвенным и т. п. (см. *Адрес* в программировании).

А. И. Никитин.

**АДРЕСНЫЙ ЯЗЫК** — алгоритмический язык, ориентированный на приложения в качестве основы для создания языков программирования. Основу А. я. составляет отношение *адреса* и *содержимого*; формализация этого отношения позволяет в простой форме описывать операции, реализуемые на ЦВМ. Разработан 1955—56 в СССР. В А. я. элементы исходной информации, результаты решения задач, а также конструктивные объекты, используемые для построения *программ* решения задач, рассматриваются как объекты некоторой системы кодов  $S$ , между которыми установлены определенные соотношения, называемые операциями над кодами. Эти соотношения позволяют по обычным правилам строить выражения, значениями которых также являются *коды*, полученные в результате выполнения указанных в них операций. При этом коды подмножества  $S_I$  ( $S_I \subset S$ ), интерпретируемого как мн-во элементов исходной информации, могут задаваться в явном виде и посредством элементов некоторого мн-ва  $A$  ( $A \subset S$ ), называемого мн-вом адресов.

Операция выделения содержимого адреса, т. н. штрих-операция, задает отображение мн-ва  $A$  в мн-во  $B$  ( $B \subset S$ ), называемое мн-вом содержимых этих адресов. Такое отображение наз. *адресным*. Штрих-операцию обозначают символом ' (штрих), напр.,  $'a = b$ , где  $a \in A$  и  $b \in B$ . Штрих-операция однозначна, т. е. каждому адресу соответствует только одно содержимое. Никаких ограничений на выбор мн-ва  $A$  в А. я. не накладывается. При каждой конкретной реализации А. я. это мн-во может определяться некоторым конструктивным образом. В простейшем случае при ориентации языка на определенную машину в качестве  $A$  может быть принято мн-во адресов ее оперативной памяти и программных регистров; в др. случаях в качестве  $A$  может рассматриваться мн-во *байтов* и т. д. В более общем случае при ориентации языка на класс машин в качестве  $A$  может быть принято объединение некоторых подмножеств полей памяти. При этом, как правило, пересечение  $A$  и  $B$  не пусто, что позволяет осуществлять многократное применение штрих-операции, приводящее к понятию ранга адреса. Пусть  $b$  является содержимым адреса  $a$ , т. е.  $'a = b$ , а  $c$  есть содержимое адреса  $b$ , т. е.  $'b = c$ ; тогда  $a$  есть адрес адреса кода  $c$ , где  $a$  наз. адресом второго ранга кода  $c$ , или фиксатором (или косвенным адресом)  ${}^2a = '('a) = 'b = c$ . Аналогично определяют адреса высших рангов:  ${}^ka = '({}^{k-1}a)$ . Адрес  $a$  наз. адресом нулевого ранга кода  $a$ , первого ранга (или просто адресом) относительно своего содержимого и т. д.

Операцию, обратную штрих-операции, наз. минус-штрих-операцией, обозначают ее «—1» вверху слева от аргумента ( ${}^{-1}b = a$ ). Эта операция не однозначна; одному содержимому  $b$  может соответствовать мн-во адресов  $A_b$  таких, что для каждого  $\alpha \in A_b$  имеем  $'\alpha = b$ .

Для определения и изменения адресного отображения вводят алгоритм. операцию засылки по адресу (соответствует операции присваивания в др. языках), которую обозначают символом  $\Rightarrow$ . Запись операции  $b \Rightarrow a$  означает, что: 1) элемент  $a$  включается в мн-во  $A$ ; 2) элемент  $b$  включается в мн-во содержимых  $B$ ; 3) устанавливается соответствие  $'a = b$ ; 4) все ранее установленные соответствия вида  $'x = y$ , где  $x \neq a$ , остаются неизменными. В операции  $b \Rightarrow a$ ,  $a$  и  $b$  могут быть некоторыми ф-циями. Тогда значение ф-ции  $b$  становится содержимым адреса, являющегося результатом вычисления значения ф-ции  $a$  ( $'a = b$ ). При конструировании ф-ций, кроме штрих-операций, могут быть использованы арифметические (+, —,  $\times$ , :), функциональные ( $\sqrt{\phantom{x}}$ ,  $\sin$ ,  $\ln$  и т. п.), логические ( $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\neg$ ), отношения ( $\neq$ ,  $=$ ,  $\leq$ ,  $>$ ,  $\geq$ ,  $<$ ) и др. операции. Такие функции наз. *адресными*. Выражение  $b \Rightarrow a$ , где  $a$  и  $b$  — адресные ф-ции, наз. *адресной формулой преобразования*, или *формулой засылки*. Процесс преобразования информации в А. я. представляют в виде адресной программы, которую задают исходным распределением адресов в  $S$  и последовательностью адресных ф-л с указанием порядка их применения. Последний задают с помощью операторов цикла, условного, безусловного и вычисляемого переходов, обращения к *подпрограммам* и т. д. В зависимости от того, какие объекты, из которых конструируется программа, могут быть представлены в ней посредством содержимых адресов, различают ступени А. я. На первой ступени с помощью адресов задают элементы исходной информации и метки; на второй — содержимыми адресов могут быть и адреса; наконец, на третьей ступени содержимыми адресов могут быть еще и символы одно- и двуместных операций.

Запись программы в А. я. состоит из двух частей: исходного адресного отображения и динамической части. *Динамическая часть* программы наз. *списком адресных строк*. Исходное адресное отображение обычно задают соотношениями вида:  $'a = c$ ; среди этих соотношений могут быть и такие, в которых  $c$  не является элементом исходной информации, а поэтому их можно записать в виде элементарных ф-л засылки вида  $c \Rightarrow a$ . Совокупность таких равенств наз. *статической частью* адресной программы. А. я. допускает свободное варьирование объемов статической и динамической частей, т. е. информация из статической части может быть перенесена в динамическую часть и наоборот. В процессе решения любой задачи обзревается относящаяся к ней информация. Говорят, что код обзревается программой, если его адрес некоторого ранга содержится в адрес-

ной программе. Применение адресов высших рангов расширяет возможности обозревания кодов программ. Программирование сводится главным образом к построению схем обозревания информации. Схемой обозревания последовательности кодов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  наз. циклическую адресную программу, на  $i$ -м из циклов которой обозревается  $i$ -й элемент последовательности. При построении схем обозревания информации для упорядочения элементов в мн-ва вводят операции следования: элементы исходной информации упорядочивают с помощью адресов, в которых они содержатся по некоторому рангу; отношение следования на мн-ве адресов чаще всего задают с помощью арифм. операций для целых чисел (машинных адресов).

На основе А. я. разработано семейство языков программирования, отличающихся один от другого выбором символики, набором операторов, уровнем алгоритмизации вводимых в них операций следования в мн-ве адресов и степенью представления объектов, из которых конструируются программы при помощи содержимых адресов. В зависимости от этого выделяют уровни, стили и ступени А. я. Уровень А. я. определяется уровнем упорядоченности адресов, уровнем алгоритмизации введенных в них операций следования. Различают три осн. уровня языка: общеалгоритмический, уровень условных адресов и уровень конкретных адресов. На общеалгоритмическом уровне принимают наиболее естественное для программируемой задачи мн-во адресов и в тех случаях, когда этого требует задача, вводят операции следования, описываемые общематем. средствами (например, с помощью индексов). На уровне условных адресов адреса упорядочивают, только исходя из требований задачи; предполагается упорядочение отдельных массивов адресов, обрабатываемых алгоритмом, взаимная же упорядоченность массивов и др. вопросы, связанные с фактическим *распределением*, не решаются. Обычно массивы представляют собой арифм. последовательности адресов, первый (или нулевой) из которых задан. Последовательности, определяемые разными начальными адресами, предполагаются не пересекающимися. Операция следования описывается, таким образом, уже алгоритмически. Напр., операция следования по индексам для элементов матрицы, расположенных по строкам, начиная с адреса  $a_0 + 1$ , имеет вид  $a_0 + (i - 1)n + j$ , где  $n$  — порядок матрицы. Уровень конкретных адресов — это выполнение данного алгоритма на конкретной машине, в связи с чем и решаются вопросы определения истинных операций следования. Предполагается, что мн-во адресов, исключая программные регистры, полностью упорядочено. В А. я. заложена возможность перехода от уровня к уровню, начиная от самого абстрактного алгоритм. языка и кончая полным распределением адресов для данной машины. Выбор определенного алфавита, набора элементарных операций и до-

пустимых ф-л языка определяет его стиль. Различают язык публикаций, входные языки конкретных трансляторов, машинные стили, запись алгоритмов в которых отличается от машинной записи только кодированием.

Возможность описания адресов как ф-ций некоторых параметров позволяет описывать на А. я. произвольные схемы обозревания информации и сложные информационно-логические и экономические алгоритмы, сложные процессы просмотра и поиска информации, организованной в цепные списки и списковые структуры; алгоритм. процессы такого рода невозможно описать с помощью алгоритм. языков типа АЛГОЛ, не привлекая дополнительные средства. В этом отношении А. я. превосходит алгоритмические языки, созданные за рубежом для списковой обработки символьных выражений (напр., ЛИСП и др.). Принципиальная особенность А. я. заключается в их естественной интерпретации в качестве языков ЦВМ внутренних. Поэтому при составлении конкретных языков машинно-ориентированных исследователю может использовать аппарат адресных алгоритмов в качестве удобной системы понятий для описания алгоритмов и элементных структур ЦВМ, а также для описания трансляторов и интерпретаторов языков программирования. Работы по адресному программированию оказали влияние на разработку структур и систем команд ряда ЭВМ (в частности, «Киев», «Днепр-2»). Средства А. я. вошли как составная часть в языки программирования, такие как АЛГЭМ и А-КОБОЛ — язык, ориентированный на описание алгоритмов трансляции. А. я. получил дальнейшее развитие в языках ПЛ-1, АЛГОЛ-68, СИМУЛА.

Лит.: Ющенко Е. Л. Адресное программирование. К., 1963 [библиогр. с. 285—286]; Бабенко Л. П. Об использовании языка типа КОБОЛ для описания трансляторов. «Кибернетика», 1965, № 5. В. П. Семик, Е. Л. Ющенко.

**АДРЕСОВ МОДИФИКАЦИЯ** — изменение адресной части команды, обеспечивающее обращение к явно не указанным в ней ячейкам. Чаще всего А. м. реализуется посредством использования индексных регистров. Для кодирования связи адресов с регистрами отводятся специальные разряды в машинных командах.

**АИКА** (International Association for Analog Computation) — см. *Международная ассоциация по аналоговым вычислениям*.

**АЛГЕБРА АЛГОРИТМОВ** — система, состоящая из двух алгебр  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , называемых соответственно алгеброй операторов и алгеброй условий. Элементы алгебры  $\mathcal{A}$  — это частичные преобразования (операторы) некоторого абстрактного мн-ва  $B$ , а элементы алгебры  $\mathcal{B}$  — частичные предикаты (условия), определенные на мн-ве  $B$ . А. а. используют для описания преобразований, выполняемых дискретными преобразователями (см. *Дискретная преобразователей теория*). В этом случае мн-во  $B$  наз. информационным мн-вом.

Осн. операция алгебры  $\mathcal{A}$  — это обычная операция умножения (суперпозиции) операторов.

Кроме этой операции, для каждого условия  $\beta$  из  $\mathfrak{B}$  в алгебре  $\mathfrak{A}$  определяются еще две операции, называемые  $\beta$ -дизъюнкцией и  $\beta$ -итерацией операторов. Результатом  $\beta$ -дизъюнкции  $(P \vee Q)$  двух операторов  $P$  и  $Q$  является оператор  $R$  такой, что для любого состояния  $b \in B$ ,  $bR = bP$ , если условие  $\beta$  истинно на состоянии  $b$ ,  $bR = bQ$ , если  $\beta(b)$  ложно и, наконец, оператор  $R$  считается неопределенным на состоянии  $b$ , если  $\beta(b)$  не определено. Результатом  $\beta$ -итерации  $\{P\}$  оператора

$P$  является оператор  $Q$  такой, что для любого  $b \in B$  имеет место  $bQ = bP^n$ , где  $n$  — наименьшее из чисел  $m = 0, 1, \dots$  таких, что  $\beta(bP^m)$  истинно ( $bP^0 = b$  для любого оператора  $P$ ).

На мн-ве  $\mathfrak{B}$  условий определены обычные булевы операции  $\vee, \wedge, \neg$ , которые распространяются и на случай, когда значения условий на некоторых элементах мн-ва  $B$  не определены. Напр., дизъюнкция  $\alpha \vee \beta$  двух условий есть новое условие  $\gamma$ . Это условие принимает значение «1» на тех элементах мн-ва  $B$ , на которых одно из условий  $\alpha$  или  $\beta$  принимает значение «1». Значение «0» оно принимает на тех элементах, на которых  $\alpha$  и  $\beta$  равны «0», и не определено, если одно из условий  $\alpha$  и  $\beta$  не определено, а другое равно «0». Кроме этих операций, определяется операция  $P \cdot \alpha$  умножения оператора на условие. Результатом выполнения этой операции является условие  $\beta$ , значение которого равно значению условия  $\alpha$  после выполнения оператора  $P$ .

Если в А. а.  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  зафиксировать систему образующих (элементарные операторы и элементарные условия), то элементы алгебры операторов и алгебры условий можно задавать в виде выражений, составленных из этих образующих и операций системы алгебр. Такие выражения наз. регулярными операторными и условными выражениями, а операторы и условия, действующие на мн-ве  $B$ , которые можно задать таким образом, наз. регулярными операторами и условиями. В приложениях теории дискретных преобразователей к проектированию вычисл. машин А. а. наз. также микропрограммными алгебрами, а регулярные операторные выражения — регулярными микропрограммами.

С каждой интерпретацией входных и выходных сигналов дискретного преобразователя на информационном мн-ве  $B$  связывают А. а.  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ , выбирая в качестве элементарных операторов операторы  $f_y$ , соответствующие символам выходного алфавита, а в качестве элементарных условий — условия вида  $\mu(b) = x$ , где  $\mu$  — функция выходов автомата операционного  $B$ , а  $x$  — символ входного алфавита.

Осн. соотношение между дискретными преобразователями и А. а. устанавливает следующая теорема о регуляризации: всякий оператор, представленный дискретным преобразователем, может быть задан в виде операторного регулярного выражения в А. а., соответствующей интерпретации входных и выходных

сигналов этого дискретного преобразователя. На этой теореме основаны применения А. а. к решению практических задач проектирования дискретных устройств и задач программирования. Изучение структуры и соотношений конкретных А. а. дает возможность выполнять глубокие эквивалентные преобразования алгоритмов, представленных в виде регулярных выражений, отыскивая такие представления, которые позволяют получить оптимальную с точки зрения того или иного критерия реализацию алгоритма в виде дискретного преобразователя.

Лит.: Глушков В. М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм. «Кибернетика», 1965, № 5. А. А. Летичевский.

**АЛГЕБРА ЛИНЕЙНАЯ** — один из самых обширных и важных разделов современной алгебры, имеющий многочисленные применения во всех областях математики, во многих областях механики и физики, а также в кибернетике. Трудно точно очертить границы А. л., так как на протяжении своего длительного истор. развития она неоднократно расширялась и видоизменялась, включая в себя все новые и новые понятия в связи с запросами теории и практики. На современном этапе развития можно, несколько условно, считать, что А. л. — это та область алгебры, которая изучает свойства векторных пространств, включая некоторые обобщения, такие, как модули и их линейные отображения. В самостоятельный раздел А. л. выделилась на рубеже 19 и 20 веков, но большинство ее проблем и методов имеют многовековую историю развития в рамках алгебры, теории чисел, геометрии и анализа. Исследования по решению этих проблем и в настоящее время составляют основное содержание А. л.; к ним за последние десятилетия присоединились новые проблемы, исходящие в первую очередь из современной вычисл. математики и кибернетики.

Старейшей проблемой А. л. является задача нахождения решений систем линейных ур-ний и изучение свойств таких решений. Практические методы решений линейных ур-ний с одним неизвестным и простейших систем с двумя неизвестными были известны уже в глубокой древности — в Египте и Вавилоне. Они изучались и в средние века арабскими математиками. Это связано с тем, что необходимость решать практические задачи на вычисление площадей и объемов, распределение рабочей силы, в торговых сделках и т. д. приводила в простейших случаях к поиску решений систем линейных ур-ний. Но в общем виде вопрос о нахождении решения определенной системы из  $n$  ур-ний с  $n$  неизвестными решился только в 17—18 вв. Г.-В. Лейбниц (1646—1716) и Г. Крамер (1704—52). Они ввели понятие определителя и обосновали соответствующее исчисление определителей. Исследование неопределенных (т. е. имеющих более одного решения) и несовместных (не имеющих решений) систем провели только в 19 в. К.-Ф. Гаусс (1777—1855) и Л. Кронекер (1823—94). Потребность в таких исследова-



ниях возникала в аналитической геометрии и в анализе при изучении ф-ций нескольких неизвестных, а также в теории линейных дифф. ур-ний. В частности, постепенно выяснилось, что главный метод для эффективного решения линейных дифф., а затем и интегр. ур-ний, возникающих в механике, физике и технике, состоит в переходе к приближенным к ним системам алгебр. линейных ур-ний и к нахождению решений этих ур-ний. Здесь наука столкнулась со следующим явлением: нахождение числовых решений больших систем линейных ур-ний, содержащих сотни и тысячи неизвестных (а именно к таким системам сводятся прикладные задачи) требует выполнения огромного количества арифм. операций.

В связи с этим в 20 ст. возникает отдельное, особенно важное для практики, направление — вычисл. методы А. л., в задачу которого входит разработка и изучение эффективных процедур, алгоритмов для быстрого и надежного отыскания решений больших систем линейных ур-ний. Существенный сдвиг в этом вопросе наметился только после того, как достаточного уровня достигла вычисл. техника, особенно после создания ЭВМ.

Другая важная тема А. л. — изучение линейных преобразований вида:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n$$

$$\dots$$

$$y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n.$$

Эта тема возникла на первых порах в аналитической геометрии в связи с преобразованиями координат: именно по указанной схеме преобразуются декартовы координаты точки при переходе от одной системы координат к другой. Исследования А. Кэли (1821—95), Ж. Сильвестра (1814—97), Ф. Клейна (1849—1925) и др. привели к далеко идущему сближению геометрии и алгебры на основе таких центральных понятий, как «линейное преобразование» (см. *Операторы линейные*), «квадратичные формы» и др., которые являются и сейчас важнейшими понятиями в современной А. л. Это сближение стало особенно плодотворным, когда в конце 19 в. была разработана и вошла в употребление удобная адекватная система обозначений и относящийся к ней язык изложения: язык числовых векторов и матриц. Само понятие вектора возникло сначала в механике (вектор-сила, вектор-скорость и т. д.). Затем оно оказалось удобным для геом. исследований, сперва в двумерном и трехмерном пространствах, а в конце 19 в. Г. Грасман (1809—77) положил векторное исчисление в основу построения и изучения  $n$ -мерного пространства. Только в 20-х гг. 19 в. векторная алгебра в рамках образовавшейся тогда А. л. получила окончательное аксиоматическое оформление в понятие «векторное пространство» (или «линейное пространство»). Одновременно в А. л. было обосновано и исчисление матриц (см. *Алгебра матриц*).

Примерно в эту же эпоху упомянутые понятия получили далеко идущие обобщения, их стали применять в новых областях, причем сразу в нескольких направлениях (напр., возникла и начала развиваться «бесконечномерная геометрия»). В трудах Д. Гильберта (1862—1943) впервые методы исследований и понятия А. л. были систематически перенесены на пространства ф-ций, рассматриваемых как бесконечномерные векторные пространства. Эта точка зрения была положена в основу изучения дифф. и интегр. ур-ний, вариационного исчисления и других областей анализа. Монография Д. Гильберта и Р. Куранта «Методы математической физики» явилась основополагающей для этого направления. Эта вновь возникшая область иногда, в отличие от А. л., наз. линейным, или функциональным анализом. Центр. понятием линейного анализа является понятие топологического векторного пространства. Другое обобщение связано с рассмотрением векторных пространств и их линейных преобразований над произвольными полями. Особый интерес представляют поля рациональных и алгебр. чисел, поля алгебр. ф-ций и, наконец, конечные поля. Векторные пространства над конечными полями, ранее хорошо известные только алгебраистам и специалистам по теории чисел, в последние годы становятся важными для ряда разделов матем. аппарата кибернетики: *дискретного анализа, логики многозначной* и для теории кодов с исправлением ошибок. Оказалось, что методы, понятия и результаты «классической» А. л., естественно, распространяются и на случай векторных пространств над произвольными полями.

Особенно плодотворным представляется перенесение на дискретный случай конечных полей техники матричного исчисления. В дискретном анализе и в многозначной логике успешно применяется хорошо разработанный аппарат А. л., а такой раздел, как линейные коды, в некотором смысле становится в последнее время просто одной из новых глав А. л. В свете задач таких разделов кибернетики, как *программирование линейное, операций исследование, игр теория* возникла и бурно развивается новая область А. л. — теория систем линейных неравенств и близко с ней связанные темы — выпуклые тела и выпуклые многогранники. Важность этой тематики стала ясной уже в 30—40-х гг. 20 ст., когда в работах по теории игр, по математическим вопросам планирования производства и другим наука вплотную столкнулась с необходимостью детального исследования решений систем линейных неравенств и соответствующего геом. аналога — выпуклых многогранников в  $n$ -мерных пространствах. Оказалось, что эта тема, интересная сама по себе с точки зрения алгебры и геометрии, была до этого представлена лишь очень небольшим числом разрозненных работ. Начиная же с 40—50-х гг., особенно когда после появления ЭЦВМ, стал проявляться интерес к алгоритмам эффективного нахождения числовых решений линейных не-



равенств, эта область сформировалась в большую самостоятельную теорию внутри А. л., систематически разрабатываемую в многочисленных работах математиков многих стран, в том числе особенно успешно сов. математиками (Л. В. Канторович, С. И. Зуховицкий, С. Н. Черников и др.).

*Лит.:* Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М., 1970; Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Пер. с нем., т. 1—2. М.—Л., 1951; Линейные неравенства и смежные вопросы. Пер. с англ. М., 1959 [библиогр. с. 421—458]; Бурбаки Н. Очерки по истории математики. Пер. с франц. М., 1963 [библиогр. с. 262—285]; Артин Э. Геометрическая алгебра. Пер. с англ. М., 1969 [библиогр. с. 280—281]. Л. А. Калужнин.

**АЛГЕБРА ЛОГИКИ** — важнейший случай *логики многозначных*, в котором изучаются свойства функций, принимающих в качестве значений, как и их аргументы, элементы из заданного двухэлементного множества, а также семейства и алгебры таких функций, содержащие в качестве операций операции суперпозиции и некоторые их аналоги. Иногда вместо термина «А. л.» употребляют термин «двухзначная логика». А. л. начала формироваться в 19 в. в трудах англ. математика Дж. Буля. А. л. создали гл. о. для решения традиционных логических задач алгебраическими методами.

С появлением *множеств теории* (70-е гг. 19 в.) и развитием *алгебры множеств*, вобравшей в себя часть первоначального предмета А. л., а также в связи с дальнейшим развитием *логики математической* предмет А. л. значительно изменился. Объектом изучения стали ф-ции А. л. и различные операции над ними. В дальнейшем класс ф-ций А. л. был расширен до класса ф-ций, аргументы которых, как и сами ф-ции, принимают в качестве значений элементы фиксированного конечного мн-ва  $E$ ; расширился также набор операций над ф-циями. Иногда под А. л. понимают как раз последнюю концепцию. Но для приложений наибольшее значение имеет тот случай, когда мощность указанного мн-ва  $E$  равна двум. Исследования в А. л. тесно связаны с другим подходом к изучению высказываний — т. н. *исчислением высказываний*. Под высказыванием понимают предложения, относительно которых можно утверждать, истинны они или ложны. Напр., «Кит — животное», «Все углы — прямые» и т. п. Первое из этих высказываний является истинным, а второе — ложным.

Употребляемые в обычной речи логические связки «и», «или», «если... то», «эквивалентно», частица «не» и т. д. позволяют из уже заданных высказываний строить новые, более «сложные» высказывания. Так, из высказываний « $x > 2$ », « $x \leq 3$ » при помощи связки «и» можно получить высказывание « $x > 2$  и « $x \leq 3$ », при помощи связки «или» — высказывание « $x > 2$  или « $x \leq 3$ » и т. д.

Истинность или ложность получаемых т. о. высказываний зависит от истинности или ложности исходных высказываний и соответствующей трактовки связок как операций над высказываниями. Для обозначения истинности

вводится символ 1 (или  $\bar{1}$ ), а для обозначения ложности — символ 0 (или  $\bar{0}$ ). Связки «и», «или», «если... то», «эквивалентно» обозначаются соответственно знаками  $\&$  (*конъюнкция*),  $\vee$  (*дизъюнкция*),  $\rightarrow$  (*импликация*),  $\sim$  (*эквивалентность*); для отрицания вводится знак  $\neg$  (черточка сверху). Наряду с индивидуальными высказываниями стали использовать также переменные высказывания, т. е. такие переменные, значениями которых могут быть любые наперед заданные индивидуальные высказывания. Понятие ф-лы, являющееся формализацией понятия «сложного» высказывания вводится индуктивно. Пусть  $a, b, c, \dots$  — индивидуальные, а  $x, y, z, \dots$  — переменные высказывания. Каждая из этих букв наз. ф-лой. Если знаком  $*$  обозначить любую из перечисленных выше связок, а  $a$  и  $b$  суть ф-лы, то  $(a * b)$  и  $\bar{a}$  также суть ф-лы. Пример ф-лы:  $((x \& y) \rightarrow \bar{z})$ . Связки и частицу «не» стали рассматривать как операции над величинами, принимающими значения «0» и «1», и результатом применения этих операций также являются числа «0» или «1» (см. *Логические операции*).

Введенные операции позволяют каждой ф-ле при заданных значениях входящих в нее высказываний приписать одно из двух значений — «0» или «1». Тем самым каждая ф-ла может одновременно рассматриваться как некоторый способ задания или реализации ф-ций А. л., т. е. таких ф-ций, которые определены на наборах из нулей и единиц и которые принимают значения тоже «0» или «1». При этом формулы  $a$  и  $b$  наз. эквивалентными (обозначение:  $a = b$ ), если они реализуют равные ф-ции. Для задания ф-ций А. л. иногда используют табл., содержащие все наборы значений переменных и значения ф-ций на этих наборах. Это т. н. табличный способ задания ф-ций. Сами же таблицы наз. *истинностными таблицами*. Так, напр., сводная таблица задающая ф-ции  $\bar{x}$ ,  $x \& y$ ,  $x \vee y$ ,  $x \rightarrow y$  и  $x \sim y$ , имеет вид:

$x$	$y$	$\bar{x}$	$x \& y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \sim y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Аналогично строятся таблицы для произвольных ф-ций А. л.

Для преобразования ф-л в равные ф-лы важную роль играют следующие равенства:

$$x \& y = y \& x, \quad x \vee y = y \vee x \quad (1)$$

(закон коммутативности);

$$(x \& y) \& z = x \& (y \& z), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \quad (2)$$

(закон ассоциативности);

$$x \& (x \vee z) = x, \quad x \vee (x \& y) = x \quad (3)$$

(закон поглощения);

$$x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z), \quad x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z) \quad (4)$$

(закон дистрибутивности);

$$x \& \bar{x} = 0 \quad (5)$$

(закон противоречия);

$$x \vee \bar{x} = 1 \quad (6)$$

(закон исключенного третьего);

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y, \quad x \sim y = (x \& y) \vee (\bar{x} \& \bar{y}). \quad (7)$$

Эти равенства, устанавливаемые, напр., с помощью истинностных таблиц, позволяют уже без помощи таблиц получать другие равенства. Методом получения последних являются т. н. тождественные преобразования, которые меняют, вообще говоря, ф-лу, но не ф-цию, реализуемую этой ф-лой. Напр., при помощи законов поглощения получают закон идемпотентности  $x \vee x = x$ . Упомянутые равенства в ряде случаев позволяют существенно упростить запись ф-лы, освободив ее от «лишних» скобок. Так, соотношения (1) и (2) дают возможность вместо ф-л  $(\dots (a_1 \& a_2) \& \dots \& a_s)$  и  $(\dots (b_1 \vee b_2) \vee \dots \vee b_s)$  использовать более компактную запись  $a_1 \& a_2 \& \dots \& a_s$  и  $b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_s$ . Первое из этих выражений наз. конъюнкцией сомножителей  $a_1, a_2, \dots, a_s$ , а второе — дизъюнкцией слагаемых  $b_1, b_2, \dots, b_s$ . Равенства (5), (6), (7) показывают также, что константы «0» и «1», импликацию и эквивалентность, рассматривая их как ф-ции, можно выразить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Более того, всякая ф-ция А. л. может быть выражена ф-лой, записываемой с помощью символов  $\&, \vee, \neg$ .

Мн-во всех ф-л, в построении которых участвуют переменные высказывания, некоторые из символов  $\&, \vee, \rightarrow, \sim, \neg$  и констант «0» и «1», наз. языком над данными символами и константами. Равенства (1) — (7) показывают, что для всякой ф-лы в языке над  $\&, \vee, \rightarrow, \sim, \neg, 0, 1$  найдется эквивалентная ей ф-ла в языке над  $\&, \vee, \neg, 0, 1$ ; напр.,  $(x \rightarrow y) \sim \sim z = ((\bar{x} \vee y) \& z) \vee ((x \vee y) \& \bar{z})$ . Особую роль в таком языке играет класс ф-л, которые могут быть записаны в виде  $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_s, 0$  или  $1$ , где  $s \geq 1$  и каждое  $a_i$  — либо переменное высказывание, либо его отрицание, либо конъюнкция таковых; при этом каждое  $a_i$  не содержит одинаковых сомножителей, не содержит сомножителей вида  $x$  и  $\bar{x}$  одновременно, и все  $a_i$  попарно не равны. Здесь скобки опускаются, так как предполагается, что операция конъюнкции связывает «сильнее», чем дизъюнкция, т. е. при вычислении по заданным значениям переменных следует сначала вычислить значения  $a_1, a_2, \dots, a_s$ . Эти выражения наз. *дизъюнктивными нормальными формами* (ДНФ). Каждую ф-лу  $\mathfrak{N}$  в языке над  $\&, \vee, \rightarrow, \sim, \neg, 0, 1$ , реализую-

щую ф-цию А. л., отличную от 0, при помощи равенств (1) — (7) можно привести к равной ей ДНФ, содержащей все переменные высказывания ф-лы  $\mathfrak{N}$  и любое число других переменных, причем каждое  $a_i$  в этой ДНФ содержит одни и те же переменные. Такая ДНФ наз. совершенной ДНФ ф-лы  $\mathfrak{N}$ ; для «0» совершенной ДНФ является сама формула 0. Возможность приведения к совершенной ДНФ лежит в основе алгоритма, устанавливающего эквивалентность или неэквивалентность двух наперед заданных ф-л. Алгоритм этот состоит в следующем: приводят исследуемые ф-лы  $\mathfrak{N}_1$  и  $\mathfrak{N}_2$  к совершенным ДНФ, содержащим все те переменные, которые есть как в  $\mathfrak{N}_1$ , так и в  $\mathfrak{N}_2$ , и смотрят, совпадают полученные выражения или нет. Если они совпадают, то  $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$ , а если нет, то  $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{N}_2$ . Важную роль в А. л. и ее приложениях играет сокращенная ДНФ. ДНФ наз. *сокращенной*, если выполнены следующие условия: во-первых, в ней нет таких пар слагаемых  $a_i$  и  $a_j$ , что всякий сомножитель из  $a_i$  имеется и в  $a_j$ ; во-вторых, для всяких двух таких слагаемых  $a_i$  и  $a_j$ , из которых один содержит сомножителем некоторую переменную, а другой — отрицание этой переменной (при условии, что другой переменной, для которой имеет место то же самое, в данной паре слагаемых нет), в этой же ДНФ имеется слагаемое  $a_k$ , равное конъюнкции остальных сомножителей этих двух слагаемых. Всякая ДНФ при помощи равенств (1) — (7) может быть приведена к равной ей сокращенной ДНФ. Напр., сокращенной ДНФ для ф-лы  $((x \sim (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \& z))$  является  $\bar{x} \& \bar{y} \vee \bar{z} \vee x \& y$ . Ф-лы  $\mathfrak{N}_1$  и  $\mathfrak{N}_2$  эквивалентны тогда и только тогда, когда их сокращенные ДНФ совпадают. Кроме ДНФ, употребляются также конъюнктивные нормальные формы — КНФ (так называют выражения, которые можно получить из ДНФ, заменив в них знаки  $\vee$  на  $\&$ , а  $\bar{x}$  — на  $\vee$  и 0 — на 1). Напр., из ДНФ  $x \& y \vee \bar{x} \& z$  получается КНФ  $(x \vee y) \& (\bar{x} \vee z)$ . Операция (или ф-ция)  $f$  наз. двойственной для операции  $\psi$ , если табл., задающая  $f$ , получается из табл., задающей  $\psi$ , путем замены в ней всюду «0» на «1», а «1» — на «0» (включая замену значений ф-ций). Напр., конъюнкция и дизъюнкция двойственны между собой, отрицание двойственно самому себе, константы «1» и «0» двойственны друг другу и т. д. Преобразование ф-л, при котором знаки всех операций в выражении заменяются на знаки двойственных им операций, константа «0» заменяется на «1», а «1» — на «0», наз. преобразованием двойственности. Если верно равенство  $a = b$  и  $a^*$  двойственно  $a$ , а  $b^*$  двойственно  $b$ , то верно и равенство  $a^* = b^*$ , называемое двойственным предыдущему. Это т. н. принцип двойственности. Примерами двойственных равенств являются пары законов (1), (2), (3); равенство (5) двойственно равенству (6), каждая КНФ двойственна некоторой ДНФ. Совершенная КНФ и сокращен-

ная КНФ определяются как такие КНФ, что двойственные им выражения являются соответственно совершенной ДНФ и сокращенной ДНФ.

Совершенные и сокращенные ДНФ и КНФ удобно использовать для решения задачи нахождения всех гипотез и следствий заданной ф-лы. Под гипотезой ф-лы  $\alpha$  понимается такая ф-ла  $b$ , что  $(b \rightarrow \alpha) = 1$ ; а под следствием ф-лы  $\alpha$  — такая ф-ла  $b$ , что  $(\alpha \rightarrow b) = 1$ . Гипотеза ф-лы  $\alpha$  наз. простой, если она есть конъюнкция переменных или их отрицаний и после отбрасывания любого из ее сомножителей перестает быть гипотезой ф-лы  $\alpha$ . Аналогично этому следствие ф-лы  $\alpha$  наз. простым, если оно есть дизъюнкция переменных или их отрицаний и после отбрасывания любого из ее слагаемых перестает быть следствием ф-лы  $\alpha$ . Решение задачи нахождения гипотез и следствий состоит в указании алгоритма, строящего все простые гипотезы и следствия для заданной ф-лы, и в получении из них при помощи законов (2) — (7) всех остальных гипотез и следствий. Алгоритм опирается на следующие факты. Если  $\alpha = b$ , то  $\alpha$  и  $b$  имеют одни и те же гипотезы и следствия соответственно. Слагаемое ДНФ является гипотезой этой ДНФ; сомножитель КНФ является следствием этой КНФ. Если  $\alpha$  — гипотеза выражения  $b$ , то  $\alpha \& c$  — тоже гипотеза для  $b$ ; если  $\alpha$  — следствие выражения  $b$ , то  $\alpha \vee c$  — также является следствием из  $b$ . Если  $\alpha$  и  $c$  — гипотезы выражения  $b$ , то  $\alpha \vee c$  также гипотеза для  $b$ ; если  $\alpha$  и  $c$  — следствия из  $\alpha$ , то  $\alpha \& c$  также следствие из  $\alpha$ . У совершенной ДНФ нет других гипотез (не содержащих букв, не входящих в эту ДНФ), кроме дизъюнкций некоторых ее слагаемых или ДНФ, равных им. У совершенной КНФ нет других следствий, кроме конъюнкций некоторых ее сомножителей или равных им выражений. Сокращенная ДНФ есть дизъюнкция всех ее простых гипотез; сокращенная КНФ есть конъюнкция всех ее простых следствий. Сокращенная ДНФ имеет важные приложения. Следует отметить прежде всего задачу минимизации ф-ций А. л., являющуюся частью задачи синтеза управляющих систем. Минимизация ф-ций А. л. состоит в построении такой ДНФ для заданной ф-ции, которая реализует ее и имеет наименьшее суммарное число сомножителей в своих слагаемых, т. е. имеет миним. сложность. Такие ДНФ наз. минимальными. Каждую минимальную ДНФ для заданной, отличной от константы, ф-ции А. л. можно получить из сокращенной ДНФ этой ф-ции путем выбрасывания некоторых слагаемых. Для отдельных ф-ций сокращенная ДНФ может совпадать с минимальной ДНФ. Это имеет место, напр., для монотонных ф-ций, т. е. таких ф-ций, которые реализуются ф-лами над  $\&$ ,  $\vee$ , 0 и 1. В языке над  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\sim$ , 0, 1,  $+$ , где знак  $+$  интерпретируется как сложение по модулю 2, устанавливаются следующие соотношения:

$$x \vee y = ((x \& y) + x) + y, \bar{x} = x + 1; \quad (8)$$

$$x \rightarrow y = \bar{x} \& y, x \sim y = (x + y) + 1; \quad (9)$$

$$x + y = (x \& \bar{y}) \vee (\bar{x} \& y), 1 = x \vee \bar{x}. \quad (10)$$

Эти ф-лы позволяют переводить ф-лы в языке над  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\sim$ ,  $\bar{\phantom{x}}$ , 0, 1 в эквивалентные им ф-лы в языке над  $\&$ ,  $+$ , 1 и наоборот. Тождественные преобразования в таком языке осуществляются при помощи равенств, установленных для конъюнкции и таких дополнительных равенств:

$$x + y = y + x; \quad (11)$$

$$(x + y) + z = x + (y + z); \quad (12)$$

$$x \& (y + z) = x \& y + x \& z; \quad (13)$$

$$x \& x = x, x + (y + y) = x, x \& 1 = x; \quad (14)$$

(здесь тоже считается, что конъюнкция связывает сильнее, чем знак  $+$ ). Этих равенств достаточно для того, чтобы из них при помощи тождественных преобразований, как и при рассмотрении языка над  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\sim$ ,  $\bar{\phantom{x}}$ , 0, 1, можно было вывести любое верное равенство в языке над  $\&$ ,  $+$ , 1. Выражение в этом языке наз. приведенным полиномом, если оно либо имеет вид  $a_1 + a_2 + \dots + a_s$ , где  $a_i$  есть «1» или переменная, или конъюнкция различных переменных без отрицаний ( $a_i \neq \bar{a}_j$  при  $i \neq j$  и  $s \geq 1$ ), либо равно  $1 + 1$ . Напр., выражение  $x \& y \& z + x \& y + 1$  является приведенным полиномом. Всякую формулу А. л. при помощи тождественных преобразований можно привести к приведенному полиному. Равенство  $\alpha = b$  имеет место тогда и только тогда, когда приведенный полином для  $\alpha$  совпадает с приведенным полиномом для  $b$ .

Кроме рассмотренных языков, существуют и другие, равносильные им (два языка наз. равносильными, если при помощи некоторых правил преобразований каждая ф-ла одного из этих языков переводится в некоторую эквивалентную ей ф-лу в другом языке и наоборот). В основу такого языка достаточно положить любую систему операций (и констант), обладающую тем свойством, что через операции (и константы) этой системы можно представить всякую ф-цию А. л. Такие системы наз. функционально полными. Примерами полных систем являются  $\{\bar{x} \vee \bar{y}\}$ ,  $\{x \vee y, \bar{x}\}$ ,  $\{x + y, 1, x \& y\}$  и т. п. Существует алгоритм, который по произвольной конечной системе ф-ций А. л. устанавливает ее полноту или неполноту.

Алгоритм основан на следующем факте. Система ф-ций А. л. является полной тогда и только тогда, когда она содержит ф-ции  $f_1(x, y, \dots, v)$  и  $f_2(x, y, \dots, v)$  такие, что  $f_1(0, 0, \dots, 0) = 1$  и  $f_2(0, 0, \dots, 0) = 0$ , а также ф-ции  $f_3, f_4, f_5$ , где  $f_3 \neq f_3^*, f_3^* — ф-ция, двойственная к  $f_3$ ,  $f_4 — не монотонная, а для  $f_5$  приведенный полином содержит слагаемое  $\alpha$ , в котором больше одного сомножителя (все эти ф-ции не обязательно должны быть разные). Рассматриваются и языки, в основе которых лежат системы операций, не являющиеся функциональ-$$

но полными. Таких языков бесконечно много. Среди них имеется бесконечное мн-во попарно не сравнимых языков (т. е. при помощи тождественных преобразований нельзя переводить с одного языка на другой). Однако для всякого языка, построенного на основе тех или иных операций А. л., существует такая конечная система равенств этого языка, что всякое равенство этого языка выводимо при помощи тождественных преобразований из равенств этой системы. Такая система наз. дедуктивно полной системой равенств данного языка. Напр., равенства (1) — (6) составляют полную систему равенств языка над  $\&$ ,  $\vee$ ,  $-$ ,  $0$ ,  $1$ .

Рассматривая тот или иной из упомянутых выше языков вместе с некоторой полной системой равенств этого языка, иногда отвлекаются от табличного задания операций, лежащих в основе этого языка, и от того, что значениями его переменных являются высказывания. Вместо этого возможны различные интерпретации языка, состоящие из той или иной совокупности объектов (служащих значениями переменных) и системы операций над объектами этого мн-ва, удовлетворяющих равенствам из полной системы равенств этого языка. Так, язык над  $\&$ ,  $\vee$ ,  $-$ ,  $0$ ,  $1$  в результате этого превращается в язык *булевой алгебры*, язык над  $\&$ ,  $+$ ,  $1$  — в язык *булевого кольца* (с единицей), язык над  $\&$ ,  $\vee$ ,  $-$  — в язык *дистрибутивной структуры* и т. п. А. л. развивается гл. о. под влиянием задач, возникающих в области ее приложений. Из них самую важную роль играют приложения А. л. в теории электр. схем. Для описания последних в некоторых случаях приходится пользоваться не только обычной двузначной А. л., а рассматривать и те или другие ее многозначные обобщения.

Лит.: Пореккий П. С. О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики. «Протоколы секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете», 1884, т. 2, в. 4; Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1959; Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. Пер. с нем. М., 1947 [библиогр. с. 297—298]; Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М., 1966 [библиогр. с. 113—115].

**АЛГЕБРА МАТРИЦ** — раздел алгебры, в котором изучаются матрицы и различные операции над ними. Матрицы — это прямоугольные или квадратные таблицы вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $a_{ik}$  — элементы какого-нибудь мн-ва  $S$ ; говорят, что  $A$  — матрица над  $S$ . Чаще всего  $S$  — некоторое числовое мн-во (мн-во всех комплексных, действительных, рациональных, целых или др. чисел), либо (в более общем случае)  $S$  — носитель какой-нибудь алгебраической структуры (кольца, поля, группы, бу-

левой алгебры и т. д.). В таких случаях операции, определенные на  $S$  естественно распространяются на совокупности матриц над  $S$  так, что она в свою очередь образует алгебр. структуру. Изучение свойств таких алгебр. структур и их применение в различных разделах математики составляет содержание теории матриц. В дальнейшем (если противное не оговорено) будем считать, что  $S$  — либо кольцо  $R$ , либо даже поле  $K$  (т. к. это исчерпывает почти полностью все случаи, встречающиеся на практике).

Последовательности  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) — строки, а последовательности  $(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk})$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) — столбцы матрицы  $A$ . Последовательность  $(a_{11}, a_{22}, \dots)$  наз. *диагональю* матрицы  $A$ . Матрица размера  $m \times n$  (коротко  $m \times n$ -матрица) — это матрица с  $m$  строками и  $n$  столбцами; при  $m = n$  ее наз. *квадратной матрицей* порядка  $n$ . Совокупность таких матриц над мн-вом  $S$  обозначим через  $M_n(S)$  (или  $M_n(R)$  или  $M_n(K)$ ). Эта совокупность с операциями сложения и умножения, которые определены дальше, наз. *матричными алгебрами* над мн-вами. Матрицы размера  $(1, n)$  и  $(m, 1)$  наз. соответственно *строчными* и *столбцовыми векторами*. В теории матриц часто встречаются матрицы следующих частных видов: *нулевая* матрица  $O_{m,n}$  размера  $m \times n$  (если все  $a_{ik} = 0$ ); *диагональная* матрица, т. е. квадратная матрица, все элементы которой вне диагонали равны нулю:

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}; \quad (2)$$

*скалярная* матрица (если в  $D$  все  $c_i = c$ ); *единичная* матрица (если все  $c = 1$ ), обозначают ее  $E$ . Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

наз. *транспонированной* к матрице  $A$ . Сумма матриц  $A$  и  $B$  одинакового размера  $m \times n$  и умножение матрицы на скаляр определяются согласно ф-лам:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}, \\
& c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}. \quad (3)
\end{aligned}$$

С этими операциями совокупность матриц размера  $m \times n$  над кольцом  $R$  образует модуль, а при  $R = K$  (где  $K$  — поле) — векторное пространство размерности  $m \times n$ . Умножение матриц  $A$  и  $B$  определяется только в том случае, если  $A$  —  $(m \times n)$ -матрица,  $B$  — матрица размера  $n \times k$ . Тогда произведение  $C = A \cdot B$  — матрица размера  $m \times k$ , причем

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \\
 & \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где  $c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj}$ .

В частности, умножение всюду определено для квадратных матриц одинакового порядка  $n$  из  $M_n(R)$ . Определение операции умножения матриц (4) связано с применением матриц для описания линейных отображений (см. *Операторы линейные*), а также преобразования координат. Пусть, напр.,  $V, W$  —

векторные пространства соответственно размерностей  $m$  и  $n$  над  $R$  и пусть  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$  и  $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_n$  — базисы этих пространств. Линейное отображение  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  ( $V$  в  $W$ ) полностью определяется образами  $\vec{e}_1 \mathcal{A}, \dots, \vec{e}_m \mathcal{A}$  базисных элементов; они выражаются в свою очередь через базис  $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_n$  следующим образом:

$$\vec{e}_i \mathcal{A} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \vec{d}_j \quad (5)$$

и матрица

$$A = (a_{ij}) \quad (6)$$

полностью определяет отображение  $\mathcal{A}$ . Если теперь  $U$  — некоторое третье векторное пространство ( $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k$  — его базис),  $\mathcal{B}$  — линейное отображение  $\mathcal{B}: W \rightarrow U$ ,  $B = (b_{ji})$  — его матрица для базисов  $\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_m$  и  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k$ , то линейному отображению  $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ , получающемуся в результате последовательного применения  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , отвечает матрица  $C$ , равная произведению  $A \cdot B$ , которое определено согласно закону (4). При  $V = W = U$  с базисом  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  в  $V$  соответствующие матрицы являются квадратными, т. к. они находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными операторами пространства  $V$ , и алгебра  $M_n(K)$  квадратных матриц  $n$ -го порядка изоморфно представляет алгебру линейных операторов  $n$ -мерного векторного пространства над полем  $K$ . Соответствие  $\mathcal{A} \rightarrow A$  зависит от выбранного базиса  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ . При переходе

к новому базису  $\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n'$  с помощью матрицы перехода  $C$  линейному оператору  $A$  соответствует матрица  $CA C^{-1}$ , где  $C^{-1}$  — т. н. о б р а т н а я матрица матрицы  $C$ , т. е.  $C \cdot C^{-1} = E$ . Матрицы  $A$  и  $CA C^{-1}$  наз. п о д о б н ы м и.

Центр. задача теории линейных операторов и матриц: среди всех матриц  $CA C^{-1}$  найти наипростейшую (это т. н. задача о приведении матриц к нормальной форме). В частных случаях — это диагональная матрица, в которой по диагонали стоят собственные значения матрицы (т. е. корни характеристического полинома  $|xE - A|$ ), так что нормальная диагональная форма однозначно определена вплоть до порядка следования диагональных элементов. В общем случае матрицы приводятся либо к т. н. нормальной форме Жордана (если  $K = C$  — поле комплексных чисел), либо к нормальной форме Фробениуса (если поле  $K$  — произвольное). Приведение матрицы к нормальной форме применяют для упрощения алгебр. действий над матрицами, при решении линейных дифф. ур-ний, в операторном исчислении и во многих задачах геометрии и механики.

Матрицы используют для описания и исследований билинейных и квадратичных форм.

При переходе к другому базису  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  с помощью матрицы перехода  $C$  матрица билинейной формы преобразуется согласно закону  $A = CAC^T$ , где  $C^T$  — транспонированная матрица. Тем самым закон преобразования матрицы билинейной формы обычно отличается от преобразования матрицы линейного оператора. Совпадение происходит только для тех матриц перехода, для которых  $C^T = C^{-1}$  — это т. н. ортогональные матрицы. Симметрическим билинейным формам отвечают симметрические матрицы, т. е. такие, для которых  $a_{ik} = a_{ki}$ . В частности, симметрические матрицы всегда приводимы к диагональному виду (к главным осям), даже если ограничиться ортогональными матрицами перехода. Приведение к главным осям — одна из центр. операций алгебры линейной и теории матриц. Ее применяют к геометрии и механике. Возможны обобщения на случай бесконечномерных пространств и «бесконечных» матриц.

Большое значение, особенно для вероятностей теории, имеют матрицы над полем действительных чисел с неотрицательными коэффициентами. Если все  $a_{ik} \geq 0$  и сумма элементов каждой строки равна 1, то матрица наз. стохастической. Такие матрицы служат для определения однородных Маркова цепей с конечным числом состояний. Коэфф.  $a_{ik}$  матрицы интерпретируются как переходные вероятности, а  $n$ -я степень матрицы описывает вероятности перехода состояний процесса за  $n$  шагов. Важным является поведение последовательности  $A, A^2, \dots, A^n$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. «предельное» поведение процесса. Тем самым алгебра и анализ стохастических матриц образуют матем. аппарат теории марковских цепей.

Линейные операторы и квадратичные формы в бесконечномерных векторных пространствах над полем действительных или комплексных чисел описывают с помощью бесконечных матриц различного вида. Рассматриваются матрицы со счетным множеством строк и столбцов. Другое обобщение — это рассмотрение как матриц действительных или комплекснозначных ф-ций  $F(x, y)$ , всюду определенных на некотором квадрате  $0 \leq x \leq a$ ;  $0 \leq y \leq a$ . В этом случае мн-ва строк и столбцов имеют мощность континуума. Для определенности осн. операций А. м. и в первую очередь операции умножения (4) и в случае бесконечных матриц возникает необходимость наложить на коэфф. таких матриц те или иные свойства сходимости. Этот вопрос относится к функциональному анализу.

Для приложений матриц в логике математической (в теории предикатов) и в абстрактной теории автоматов значительную роль играют матрицы над двуэлементной булевой алгеброй  $\mathfrak{B} = \{0, 1\}$ . Операции сложения и умножения таких матриц в ф-лах (3) и (4) понимаются

тогда как булево сложение и умножение. Иногда вместо двуэлементной булевой алгебры  $\mathfrak{B}$  в подобных случаях рассматривают матрицы над полем из двух элементов (см. Жегалкина алгебра). Сов. математик И. И. Жегалкин (1869—1947) применил этот аппарат для исследования разрешимости формул исчисления предикатов узкого. В математической экономике матрицы часто используют при составлении балансов, а также в теории систем линейных неравенств, применяемых в программировании линейном.

Лит.: Цейтлин М. Л. Применение матричного исчисления к синтезу релейно-контактных схем. «Доклады АН СССР», 1952, т. 86, № 3; Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967 [библиогр. с. 562—570]; Беллман Р. Введение в теорию матриц. Пер. с англ. М., 1969 [библиогр. с. 359—361]. Л. А. Калужнин.

**АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ** — раздел множеств теории, изучающий операции над подмножествами (частями) заданного множества и поведение этих операций при отображениях множеств. А. м. применяется в теор. кибернетике и в технике. Идеи А. м. высказал Дж. Буль в 1847 г. Одновременно он дал первую формулировку современной (символической, или математической) логики.

Пусть  $E$  — мн-во, фиксируемое при построении А. м. и называемое универсальным мн-вом. Рассмотрим все возможные подмножества  $E$ :  $A, B, C, \dots$ , включая все мн-ва  $E$  и пустое мн-во  $\emptyset$ . Если  $E$  конечно и состоит из  $n$  элементов, то число таких частей равно  $2^n$ . Для частей  $E$  вводим операции объединения:  $A \cup B$ , пересечения  $A \cap B$  и дополнения  $CA = E \setminus A$ . Тем самым мн-во  $2^E$  всех частей  $E$  превращается в алгебр. систему. Пусть  $E, F$  — два универсальных мн-ва и  $\varphi: E \rightarrow F$  — отображение. Тогда для любых  $A, B \subset E$  имеем

$$\varphi^{-1}(A \cup B) = \varphi^{-1}(A) \cup \varphi^{-1}(B), \quad \varphi^{-1}(A \cap B) = \varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(B), \quad \varphi^{-1}(CA) = C\varphi^{-1}(A).$$

В этом смысле любое отображение  $\varphi$  сохраняет структуру А. м. Соотношение  $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$  верно для всех  $A, B \subset E$ , но в общем случае лишь  $\varphi(A \cap B) \subset \varphi(A) \cap \varphi(B)$ ; если  $\varphi$  инъективно, то  $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$ . Если  $\varphi$  биективно, имеем также  $\varphi(CA) = C\varphi(A)$  ( $A \subset E$ ). Для любого семейства мн-в  $A_i$  ( $i \in I$ ) справедливы соотношения

$$\varphi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \varphi^{-1}(A_i), \quad \varphi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \varphi^{-1}(A_i),$$

а также, в случае биективности  $\varphi$ , соответствующие соотношения для  $\varphi$ . Эти соотношения можно отнести к А. м. лишь в случае конечного множества  $I$ , т. к. операции над бесконечным числом мн-в не принадлежат А. м. Однако такие операции важны в теории меры. Легко проверить, что введенные операции

обладают следующими свойствами:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C; \quad (1)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \quad (1')$$

$$A \cup B = B \cup A; \quad (2)$$

$$A \cap B = B \cap A; \quad (2')$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \quad (3)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad (3')$$

$$A \cup \emptyset = A; \quad (4)$$

$$A \cap E = A; \quad (4')$$

$$A \cup \complement A = E; \quad (5)$$

$$A \cap \complement A = \emptyset. \quad (5')$$

Проверка состоит в том, что берут произвольный элемент левой части и доказывают, что он принадлежит и правой части, и наоборот. Можно провести аналогию (неполную) между перечисленными свойствами и свойствами сложения и умножения чисел: операции  $\cup$ ,  $\cap$  аналогичны сложению и умножению, (1) и (1') суть аналоги ассоциативных, (2) и (2') — коммутативных законов сложения и умножения, (3) — аналог дистрибутивного закона;  $\emptyset$  в (4) соответствует нулю,  $E$  в (4') — единице. Не имеют аналогов операция  $\complement$  и, следовательно, (5), (5'), а также «второй дистрибутивный закон» (3'). В А. м. операции  $\cup$ ,  $\cap$  вполне равноправны (в отличие от операций в арифметике). С алгебр. стороны  $\cup$  и  $\cap$  являются бинарными операциями на мн-ве  $2^E$  всех подмножеств  $E$ . Но несмотря на указанные выше аналогии с арифметикой, мн-во  $2^E$  с любой из этих операций не составляет *группы*, поскольку  $E \cup E = E \cup \emptyset$ ,  $E \cap \emptyset = \emptyset \cap E$  и, следовательно, в А. м. не существует однозначно определенных обратных элементов для  $\cup$  и  $\cap$  (для  $\cup$  существует единичный элемент  $\emptyset$ , для  $\cap$  — единичный элемент  $E$ ). Если  $\alpha(E)$ ,  $\alpha(F)$  — А. м. над универсальными мн-вами  $E$ ,  $F$ , то любое отображение  $\varphi: E \rightarrow F$  определяет обратный гомоморфизм  $\varphi^{-1}: \alpha(F) \rightarrow \alpha(E)$ , сопоставляющий каждому подмножеству  $A \subset F$ , рассматриваемому как элемент  $\alpha(F)$ , подмножество  $\varphi^{-1}(A) \subset E$ , рассматриваемое как элемент  $\alpha(E)$ . При этом для тождественного отображения  $e_E: E \rightarrow E$  имеем  $e_E^{-1} = e_{\alpha(E)}$  (тождественный гомоморфизм  $\alpha(E)$  на себя) и  $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$  (это соотношение означает, что если  $\varphi: E \rightarrow F$ ,  $\psi: F \rightarrow G$ ,  $\chi: E \rightarrow G$ ,  $\chi = \psi \circ \varphi$ , то из  $\psi^{-1}(A) = B$ ,  $\varphi^{-1}(B) = C$  следует  $\chi^{-1}(A) = C$ ). Как и в арифметике законы (1), (2), (3) могут быть обобщены на любое число мн-в:

$$\begin{aligned} A_1 \cup (A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) &= \\ = (A_1 \cup A_2) \cup (A_3 \cup \dots \cup A_n) &= \\ = (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cup A_n \end{aligned}$$

(общий ассоциативный закон, существует аналогичный закон и для пересечения);

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup \dots \cup A_{k_n}$$

для любой перестановки  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  чисел  $1, 2, \dots, n$  (общий коммутативный закон, существует аналогичный закон и для пересечения);

$$\begin{aligned} A \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n) &= \\ = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n), \\ A \cup (B_1 \cap \dots \cap B_n) &= \\ = (A \cup B_1) \cap \dots \cap (A \cup B_n) \end{aligned}$$

(общие дистрибутивные законы).

Симметрия операций  $\cup$ ,  $\cap$  приводит к следующему принципу двойственности: пусть справедливо некоторое соотношение между подмножествами  $A, B, \dots$  записанное с помощью знаков  $\cup, \cap, \complement, \subset, \supset, =$ . Тогда справедливо и «двойственное» соотношение, полученное из данного соотношения путем замены этих знаков, соответственно, на  $\cap, \cup, \complement, \supset, \subset, =$ , символа пустого мн-ва  $\emptyset$  на  $E$  и  $E$  на  $\emptyset$ , причем символы мн-в общего вида  $A, B, \dots$  не меняются. В применении к соотношениям (1) — (5) принцип двойственности дает (1') — (5') и наоборот. Доказывают принцип по индукции, опираясь на (1) — (5), (1') — (5'), проверяемые непосредственно. Примеры двойственных соотношений:

$$(6) A \cup E = E; \quad (6') A \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$(7) \text{ Если для всех } A \quad A \cup B = A, \quad (7') \text{ Если для всех } A \quad A \cap B = A,$$

$$\text{то } B = \emptyset; \quad \text{то } B = E.$$

$$(8) \complement \emptyset = E; \quad (8') \complement E = \emptyset.$$

$$(9) A \cup A = A, \quad (9') A \cap A = A$$

(законы идемпотентности).

$$(10) A \cup (A \cap B) = A, \quad (10') A \cap (A \cup B) = A$$

(законы поглощения).

$$(11) \complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B, \quad (11') \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$

(законы де Моргана).

Законы (11), (11') обобщаются на любое число мн-в:

$$\complement\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (\complement A_i), \quad \complement\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (\complement A_i). \quad (11)_I$$

(дополнение объединения равно пересечению дополнений, и наоборот). Следующие соотношения «самодвойственны», т. е. переходят сами в себя по принципу двойственности:

$$(12) \text{ Если } A \cup B = E \text{ и } A \cap B = \emptyset, \text{ то } B = \complement A;$$

$$(13) \complement \complement A = A \text{ (закон двойного отрицания).}$$

Заметим еще, что для  $A, B \subset E$  утверждения  $A \subset B$ ;  $A \cap B = A$ ;  $A \cup B = B$  равносильны друг другу. Операция разности в А. м. сводится к основным:  $A \setminus B = A \cap \complement B$ . В некоторых случаях требуется ввести симметрическую разность (или дизъюнктивную



сумму) мн-в  $A \perp B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  (общепринятого обозначения не существует). Эта операция обладает свойствами  $A \perp B = B \perp A$  (коммутативность),  $(A \perp B) \perp C = A \perp (B \perp C)$  (ассоциативность),  $A \perp A = \emptyset$ ,  $A \perp \emptyset = A$ .

**Логическое истолкование** А. м. Об элементах  $x$  мн-ва  $E$  можно делать высказывания, истинные или ложные (см. *Исчисление высказываний*). Каждое высказывание может быть приведено к виду:  $x$  обладает свойством  $\alpha$ . Пусть  $A_\alpha$  — мн-во всех элементов  $E$ , обладающих этим свойством; тогда предыдущее высказывание равносильно высказыванию: « $x \in A_\alpha$ ». Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между высказываниями об элементах  $E$  и подмножествами  $A \subset E$ ; пусть  $Pr(A)$  — высказывание, соответствующее  $A$ . Высказывания соединяются связками  $\vee$  («или»),  $\wedge$  («и»); перед высказыванием ставят знак отрицания  $\neg$  («не»). Высказывание  $Pr(A \cup B)$  означает:  $x \in (A \cup B)$ , а это равносильно  $x \in A$  или  $x \in B$  (не исключая случая, когда  $x \in A$  и  $x \in B$ ). То же записывается в виде *дизъюнкции*  $Pr(A) \vee Pr(B)$ . Аналогично проверяют остальные тождества:

$$Pr(A \cup B) = Pr(A) \vee Pr(B),$$

$$Pr(A \cap B) = Pr(A) \wedge Pr(B),$$

$$Pr(\complement A) = \neg Pr(A).$$

Следовательно, осн. операции А. м. эквивалентным образом описывают на языке логики. Заметим еще, что  $Pr(E)$  — тождественно (для всех  $x$ ) истинное высказывание,  $Pr(\emptyset)$  — тождественно ложное, а включение  $A \subset B$  равносильно  $Pr(A) \rightarrow Pr(B)$ , где  $\rightarrow$  — связка «следует». И наоборот, исчисление высказываний исходит из некоторого мн-ва «элементарных высказываний»  $V, W, \dots$ , из которых все остальные высказывания получаются применением операций  $\vee, \wedge, \neg$ . Пусть  $x = \{v, w, \dots\}$  — набор значений соответствующих высказываний  $V, W, \dots$ , где каждое значение  $v, w, \dots$  есть или символ «истина» или символ «ложь». Такие всевозможные наборы  $x$  составляют мн-во  $E$ . Тогда любое «сложное» высказывание  $S(V, W, \dots)$ , построенное из  $V, W, \dots$ , истинно для некоторого подмножества  $A \subset E$  наборов  $x$  и, следовательно, приводится к виду:  $x \in A$ . А. м. в общем смысле состоит из некоторого семейства  $\mathfrak{A}$  (не обязательно всех) частей  $E$ , устойчивого относительно операций  $\cup, \cap, \complement$ , т. е. такого, что если  $A, B \in \mathfrak{A}$ , то  $(A \cup B) \in \mathfrak{A}$ ,  $(A \cap B) \in \mathfrak{A}$ ,  $\complement A \in \mathfrak{A}$ . Такие А. м. важны в ряде случаев, когда надо выделить подмножества или спец. вида, или обладающие «хорошими» свойствами, обеспечивающими возможность дальнейших построений. Рассмотрим, напр., на действительной оси  $R$  полуинтервалы  $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ , открытые справа. Возьмем в качестве  $E$  конечный замкнутый интервал. Тогда мн-ва вида  $\mathfrak{A} = (\bigcup_{i=1}^k [a_i, b_i)) \cap E$  (с любым  $k$ ) представ-

ляют собой объединения конечного числа непересекающихся отрезков, лежащих в  $E$  (правый из них может быть замкнут справа). Такие мн-ва образуют А. м. в общем смысле; обозначим ее  $\mathfrak{M}(E)$ . Аналогичные А. м. можно построить в евклидовых пространствах любой размерности  $R^m$  с помощью полуинтервалов  $[a, b) = \{x \mid a_i \leq x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ .

**Проблема меры и  $\sigma$ -алгебры.** Пусть  $E$  конечно и  $\mu(A)$  ( $A \subset E$ ) — число элементов  $A$ . Тогда  $\mu(A) \geq 0$  и  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$  при  $A \cap B = \emptyset$ . Мерой на А. м. наз. ф-цию с действительными значениями, определенную на мн-ве элементов алгебры и обладающую теми же свойствами. Для бесконечного  $E$  введение меры наталкивается на трудности, связанные с «патологическими» свойствами бесконечных подмножеств (наиболее важен случай, когда  $E = R^m$  или  $E$  есть мн-во в  $R^m$ ). Для преодоления этих трудностей рассматривают «суженные» А. м., например,  $\mathfrak{M}(E)$ . За  $\mu(\mathfrak{M})$  ( $\mathfrak{M} \in \mathfrak{M}(E)$ ) принимают сумму длин отрезков, составляющих  $\mathfrak{M}$ . Однако полученная А. м. с мерой для большинства целей слишком узка; ее расширя-

ют до большей А. м.  $\tilde{\mathfrak{M}}$ , не содержащей всех подмножеств  $E$ , но «достаточно богатой» множествами (напр., до алгебры всех подмножеств  $E$ , измеримых по Борелю или по Лебегу). Такие расширенные А. м. содержат уже все мн-ва, встречающиеся в анализе и др. областях математики. Они обладают и важными дополнительными свойствами: если  $A_k \in \mathfrak{A}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ),

то  $(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \in \tilde{\mathfrak{M}}$ ,  $(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \in \tilde{\mathfrak{M}}$ . А. м. с этими

свойствами наз.  $\sigma$ -алгебрами множеств. Мера, определенная на исходной А. м.  $\mathfrak{A}$ , распространяется на  $\tilde{\mathfrak{A}}$ , причем получается вполне аддитивная мера: если  $A_k \in \tilde{\mathfrak{A}}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ),

$$\text{то } \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

**Вероятностное истолкование.** Случайно выбранная точка  $x \in E$  может с некоторой вероятностью  $P(A)$  принадлежать мн-ву  $A \subset E$  (напр., на стол бросают шарик, останавливающийся в какой-то части стола или вне ее). Из теоремы сложения вероятностей следует, что при  $A \cap B = \emptyset$   $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ , т. к. события « $x \in A$ » и « $x \in B$ » в этом случае несовместимы. При этом множества  $A$  и  $B$  должны быть «достаточно хорошими», чтобы соответствующие вероятности имели смысл. В ряде случаев удается определить А. м. из частей  $E$  (даже  $\sigma = A. м.$ ), на которой  $P(A)$  обладает свойствами меры (даже вполне аддитивной). Такая вероятностная мера, кроме того, обладает свойством  $P(E) = 1$ , т. к. достоверному событию («попадание в  $E$ ») приписывается вероятность 1.

Связь с булевыми алгебрами. Если отвлечься от содержательного смысла символов мн-в и операций  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\subset$ ,  $A$ . м. представляет собой абстрактную алгебр. систему, подчиненную аксиомам (1) — (5), (1') — (5'). Такую систему наз. *булевой алгеброй*. Все соотношения  $A$ . м. могут быть формально выведены из этих аксиом (при этом ассоциативные законы (1), (1') можно удалить из списка аксиом, т. к. они следуют из остальных аксиом). Формальный вывод соотношений, без т. н. интерпретаций, имеет, напр., то преимущество, что его выполняет машина.

И. И. Жегалкин предложил модификацию булевой алгебры, в которой вместо операции объединения используется операция сложения по модулю 2 (см. *Жегалкина алгебра*). В различных приложениях встречаются и другие модификации. С развитием  $A$ . м. значительная часть комбинаторики (теории конечных множеств) стала развиваться в рамках  $A$ . м. и ее начали рассматривать в более широком смысле — как алгебру, включающую, наряду с булевыми операциями или операциями, которые могут быть выражены через булевы, новые операции над мн-вами подмножеств и над отношениями (напр., операции проектирования, декартова произведения, «среза» и др.). В связи с этим были разработаны цилиндрические и полиадические алгебры, а также алгебры отношений. Эти направления в последнее время интенсивно развиваются, удовлетворяя запросы теор. кибернетики (теория автоматов, матем. лингвистика, кодирование, дискретный анализ и др.).

Лит.: Александров П. С. Введение в теорию множеств и теорию функций, ч. 1. М.—Л., 1948; Халмош П. Р. Теория меры. Пер. с англ. М., 1953 [библиогр. с. 283—285]; Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. Пер. с англ. М., 1968. А. В. Гладкий.

**АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ** — раздел теоретической кибернетики, изучающий дискретные автоматы с абстрактно-алгебраической точки зрения. Понятие автомата, рассматриваемое в  $A$ . т. а., представляет собой абстрактную модель устр-ва, которое функционирует в дискретном (автоматном) времени, перерабатывая последовательности входных сигналов (стимулов) в последовательности выходных сигналов (реакций). В процессе функционирования автомата происходит последовательная смена его внутр. состояний. Состояние, в котором находится автомат в данный момент времени, однозначно определяет соответствие между его входными и выходными сигналами. Такого рода устр-ва представляют собой основу современной *вычислительной техники*, а также многочисленных дискретных систем автомат. контроля и управления. Попытки матем. описания информационных моделей биол. систем и их поведения также приводят (при определенной абстракции) к понятию автомата.

Строгое понятие автомата дается следующим определением. **Автоматом** наз. объект  $\mathfrak{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ , который задается тремя основными (непустыми) мн-вами  $A, X, Y$ , на-

зываемыми мн-вом состояний, входным алфавитом (состоящим из входных сигналов, или входов), выходным алфавитом (состоящим из выходных сигналов, или выходов), соответственно, и двумя ф-циями — ф-цией переходов  $\delta: A \times X \rightarrow X$  и ф-цией выходов  $\lambda: A \times X \rightarrow Y$ . Автомат наз. *конечным*, если конечны мн-ва  $A, X$  и  $Y$ .

С точки зрения общей алгебры автомат является трехосновной *алгеброй универсальной* с двумя операциями  $\delta$  и  $\lambda$ . В соответствии с этим определяются обычные для общей алгебры понятия: *автоматов изоморфизм*, *автоматов гомоморфизм*, *подавтомат*, система образующих и т. д. Часто также рассматривают класс автоматов, для которых фиксированы алфавиты  $X$  и  $Y$  (такие автоматы будем называть  $X$ - $Y$ -автоматами), и гомоморфизмы, которые действуют на эти алфавиты тождественным образом.

Каждый символ  $x \in X$  входного алфавита автомата  $\mathfrak{A}$  задает на мн-ве  $A$  его состояний монарную операцию  $a \rightarrow \delta(a, x) = ax$  и, в соответствии с этим,  $X$ - $Y$ -автомат иногда рассматривают как алгебру с мн-вом  $X$  монарных операций и ф-цией выходов  $\lambda$ . В этом случае автомат  $\mathfrak{A}$  удобно отождествить с мн-вом  $A$  его состояний, рассматривая это мн-во как алгебру, для которой, помимо системы операций  $X$ , задана ф-ция выходов  $\lambda$ . Такая точка зрения особенно уместна при рассмотрении автоматов без выходов, т. е. объектов, задаваемых только с помощью мн-ва состояний, входного алфавита и ф-ции переходов. Автоматы без выходов ( $X$ -автоматы) наз. также *акцепторами* в отличие от общего понятия автомата, который наз. *транзьюсером*, или *Мили автоматом*. Важную роль играет также частный случай Мили автомата — *Мура автомат*, который характеризуется свойством  $\lambda(a, x) = \mu(\delta(a, x))$ . Функция  $\mu$  наз. ф-цией отметок, и ее часто рассматривают вместо ф-ции выходов автомата Мура.

Точным определением преобразования информации, выполняемой автоматом, служит определение отображения, индуцируемого состоянием автомата. Для того, чтобы сформулировать это определение, рассмотрим свободные полугруппы  $F(X)$  и  $F(Y)$ , порожденные мн-вами  $X$  и  $Y$ , т. е. мн-ва слов в алфавитах  $X$  и  $Y$ . Эти полугруппы наз. *входной* и *выходной* полугруппой автомата, соответственно. Распространим ф-ции переходов и выходов на полугруппы  $F(X)$  и  $F(Y)$ , полагая  $ae = a$  ( $e$  — пустое слово),  $\delta(a, px) = \delta(\delta(a, p), x)$ , т. е.  $a(px) = (ap)x$ ,  $\lambda(a, e) = e$ ,  $\lambda(a, px) = \lambda(a, p)\lambda(ap, x)$ , где  $p \in F(X)$ ,  $a \in A$ . Отображение  $\varphi_a: F(X) \rightarrow F(Y)$ , определяемое равенством  $\varphi_a(p) = \lambda(a, p)$ , наз. *отображением* (оператором), индуцируемым состоянием  $a$  автомата  $A$ . Говорят также, что отображение  $\varphi_a$  представлено в автомате  $A$  состоянием  $a$ . В некоторых случаях в автомате фиксируют начальное состояние. Такие автоматы наз. *инициальными*, а говоря об отображении, представленном в инициальном авто-

мате, имеют в виду отображение, представленное его начальным состоянием.

Отображения, представимые в автоматах (автоматные отображения), характеризуются тем, что они сохраняют длину слов и начальные отрезки. Это значит, что отображение  $\varphi: F(X) \rightarrow F(Y)$  автоматно тогда и только тогда, если длина слова  $\varphi(p)$  равна длине слова  $p$  и  $\varphi(p)$  есть начальный отрезок слова  $\varphi(pq)$  для любых  $p, q \in F(X)$  (см. *Оператор автоматный*). Состояния  $a$  и  $b$  (одного и того же или разных автоматов с общими входным и выходным алфавитом) наз. эквивалентными, если  $\varphi_a = \varphi_b$ . Автоматы  $A$  и  $B$  эквивалентны, если каждое состояние одного из них эквивалентно некоторому состоянию другого. Автомат наз. приведенным, если все его состояния попарно не эквивалентны.

Отображения  $a \rightarrow \varphi_a$ , индуцируемые различными состояниями автомата  $A$ , связаны соотношением  $\varphi_a(x) \varphi_{ax}(p) = \varphi_a(xp)$  ( $x \in X, p \in F(X)$ ), которое однозначно определяет отображение  $\varphi_{ax}$  через отображение  $\varphi_a$  и мн-во отображений  $\{\varphi_a\}_{a \in A}$  можно превратить в автомат, определяя на этом мн-ве ф-ции переходов и выходов с помощью соотношений  $\varphi_a x = \varphi_{ax}$ ,  $\lambda(\varphi_a, x) = \varphi_a(x)$ . Этот автомат является приведенным, поскольку отображение, индуцируемое состоянием  $\varphi_a$ , совпадает с отображением  $\varphi_a$ . Отображение  $a \rightarrow \varphi_a$  есть гомоморфизм, а построенный автомат изоморфен фактор-автомату автомата  $A$  по отношению конгруэнтности, которое совпадает с отношением эквивалентности состояний. Из сказанного вытекает следующая теорема: в классе всех эквивалентных между собой  $X$ - $Y$ -автоматов существует один и, с точностью до изоморфизма, только один приведенный автомат, на который гомоморфно отображается любой автомат из этого класса. На этой теореме основаны методы минимизации автоматов конечных. Можно показать, что класс отображений, представимых в конечных автоматах Мура, совпадает с классом отображений, представимых в конечных автоматах Мили. Для класса автоматов Мура имеет место теорема, аналогичная только что приведенной.

К понятию представления отображений в автоматах близко примыкает понятие представления событий. Событием в алфавите  $X$  наз. произвольное мн-во слов полугруппы  $F(X)$ . Говорят, что событие  $S$  представлено в  $X$ - $Y$ -автомате  $A$  выходным сигналом  $y \in Y$  (мн-вом выходных сигналов  $Y^* \subset Y$ ) при начальном состоянии  $a$ , если  $\varphi_a(p) = qy$  ( $\varphi_a(p) = qy^*$ , где  $y^* \in Y^*$ ) тогда и только тогда, когда  $p \in S$ .

Система событий  $(S_y)_{y \in Y}$ , состоящих из слов  $p$ , таких, что  $\varphi(p) = qy$ , однозначно определяет отображение  $\varphi$ . Если  $\varphi = \varphi_a$ , то события  $S_y$  представлены выходными сигналами  $y \in Y$  автомата  $A$  при начальном состоянии  $a$ . Поэтому часто вместо представления отображений рассматривают представление событий. В автоматах Мура представление событий

мн-вами выходных сигналов сводится к представлению их мн-вами состояний. Событие  $S$  представлено в автомате  $A$  мн-вом состояний  $A^* \subset A$  при начальном состоянии  $a \in A$ , если  $ap \in A^*$  тогда и только тогда, когда  $p \in S$ .

Одной из важных задач А. т. а. является задача изучения отображений или событий, представимых в тех или иных классах автоматов. Обычно эта задача решается путем создания языков для описания событий, представимых в соответствующих классах автоматов. Наиболее полно с точки зрения указанной задачи изучен класс конечных автоматов. Класс событий, представимых в конечных автоматах, совпадает с классом регулярных событий (см. *Алгебры событий, Регулярные события и выражения*). Это утверждение является одной из важных теорем теории конечных автоматов, а ее доказательство дает решение проблем абстрактного анализа и синтеза конечных автоматов (см. *Синтез автоматов абстрактный*), имеющих большое прикладное значение. Среди классов бесконечных автоматов наиболее полно исследован класс автоматов магазинных. События, представимые в таких автоматах, являются контекстно-свободными языками.

Важную роль в А. т. а. играет связь автоматов с полугруппами. Каждый входной сигнал  $x \in X$  автомата  $A$  определяет преобразование  $f_x: a \rightarrow ax$  мн-ва состояний автомата  $A$ . Полугруппа  $G_A$ , порожденная всеми такими преобразованиями, наз. полугруппой автомата  $A$ . Обычно к полугруппе  $G_A$  добавляют единицу — тождественное преобразование  $e$ , рассматривая его как преобразование, индуцируемое пустым словом. Для каждого слова  $p \in F(X)$  можно определить преобразование  $f_p: a \rightarrow ap$ . Соотношение  $f_{pq} = f_p \cdot f_q$  показывает, что отображение  $\gamma: p \rightarrow f_p$  есть гомоморфизм свободной полугруппы  $F(X)$  на полугруппу  $G_A$ . Полугруппу  $G_A$  автомата  $A$  можно рассматривать как  $X$ -автомат, если считать  $f_p x = f_{px}$ . Отображение  $\xi_a: G_A \rightarrow A$ , определенное равенством  $\xi_a(p) = f_p(a) = ap$ , является гомоморфизмом автомата  $G_A$  в автомат  $A$ . И  $F(X)$  тоже можно рассматривать как  $X$ -автомат с ф-цией переходов  $\delta(p, x) = px$  (свободный автомат, порожденный состоянием  $e$ ). Тогда  $\gamma$  будет гомоморфизмом автомата  $F(X)$  на  $G_A$ . Гомоморфизмы  $\gamma$  и  $\gamma'_a = \gamma \xi_a$  индуцируют разбиения  $R$  и  $R'_a$  полугруппы  $F(X)$  на классы слов, имеющих одинаковые образы при гомоморфизмах  $\gamma$  и  $\gamma'_a$ , соответственно. Разбиение  $R'_a$  является автоматным, т. е. для любого класса  $S$  этого разбиения и любого  $x \in X$  найдется класс  $S'$  такой, что  $S_x \subset S'$ . Это разбиение определяет отношение конгруэнтности на автомате  $F(X)$ , фактор-автомат по которому изоморфен под-автомату  $A(a)$  автомата  $A$ , порожденному состоянием  $a$  (он состоит из всех состояний

вида  $ap$ , где  $p \in F(X)$ ). Разбиение  $R$  является полугрупповым, т. е. для любой пары  $S'$  и  $S''$  его классов найдется класс  $S$  такой, что  $S'S'' \subset S$ . Это разбиение определяет отношение конгруэнтности на полугруппе  $F(X)$  и фактор-полугруппа по этому отношению изоморфна полугруппе  $G_A$ . Если автомат  $A$  порождается состоянием  $a$ , т. е.  $A(a) = A$ , то  $R$  является макс. полугрупповым разбиением, вписанным в разбиение  $R'_a$ . В общем же случае  $R$  есть максимальное полугрупповое разбиение, вписанное во все разбиения  $R'_a$  ( $a \in A$ ).

Понятие полугруппы автомата можно использовать для классификации автоматов по свойствам их полугрупп. При этом полугруппа рассматривается как абстрактная полугруппа (а не полугруппа подстановок). Говорят, что автомат  $A$  принадлежит полугруппе  $G$ , если его полугруппа изоморфна  $G$ . Фиксируя некоторый класс полугрупп, можно выделить класс автоматов, принадлежащих этим полугруппам. Напр., коммутативные автоматы — это автоматы, принадлежащие коммутативным полугруппам, групповые автоматы — это автоматы, принадлежащие группам. Конечные автоматы и только они принадлежат, очевидно, конечным полугруппам. Разбиение  $R'_a$  состоит, как видно из определения, из событий, представленных различными состояниями в автомате  $A$  при начальном состоянии  $a$ . Для любой системы  $M$  событий  $\{S_\alpha\}$  в алфавите  $X$  можно построить систему  $K$  разбиений  $\{S_\alpha, F(X) \setminus S_\alpha\}$  и макс. автоматное разбиение  $R'$ , вписанное во все разбиения системы  $K$ . Оно определит (единственным образом) автомат, в котором представлены все события системы  $K$ . Будем говорить, что система  $K$  принадлежит полугруппе, которая совпадает с полугруппой построенного так автомата. Эта полугруппа определяется максимальным полугрупповым разбиением, вписанным во все разбиения системы  $K$ .

Описанная выше конструкция позволяет распространить полугрупповую классификацию на системы событий. Так, конечные системы регулярных событий и только они принадлежат конечным полугруппам. Системы коммутативных событий, т. е. событий, вместе с каждым словом содержащих и все слова, получающиеся из данного слова перестановкой букв, и только они принадлежат коммутативным полугруппам.

Важную роль в *автоматов теории* играет понятие *автомата недетерминированного*, т. е. автомата, у которого ф-ции переходов и выходов являются многозначными. Для недетерминированных автоматов применяется следующая терминология: если  $b \in \delta(a, x)$ , то говорят, что автомат  $A$  может перейти под действием входного сигнала  $x$  из состояния  $a$  в состояние  $b$ . Аналогично определяется возможность перехода под действием входного слова. Для недетерминированных автоматов

можно определить понятие представления события следующим образом. Пусть  $A$  — недетерминированный  $X$ -автомат,  $A_0 \subset A$ ,  $A^* \subset A$ . Событие, представимое в  $A$  при мн-ве  $A_0$  начальных состояний и мн-ве  $A^*$  заключительных состояний совпадает с мн-вом всех слов, под действием которых автомат может перейти из мн-ва  $A_0$  в  $A^*$ .

Для случая конечных автоматов переход к недетерминированным автоматам не дает ничего нового, поскольку событие, представимое в конечном недетерминированном автомате, представимо так же и в конечном детерминированном автомате. Иное дело — бесконечные автоматы. Так, класс событий, представимых в недетерминированных магазинных автоматах, шире, чем класс событий, представимых в детерминированных магазинных автоматах; (обычно для магазинных автоматов рассматривают случай, когда мн-ва  $A_0$  и  $A^*$  конечны). В то же время класс недетерминированных магазинных автоматов представляет особый интерес в связи с тем, что в них представимы любые контекстно-свободные языки и только они. В настоящее время, в связи с применениями их в *автоматизации программирования* и теории перевода, исследуются некоторые обобщения магазинных автоматов. Выше предполагалось, что входная и выходная полугруппы автомата являются свободными.

Переходя к произвольным полугруппам, можно получить понятие обобщенного автомата. Обобщенный автомат задается мн-вом состояний, входной полугруппой  $G$ , выходной полугруппой  $H$  и ф-циями переходов и выходов, удовлетворяющими аксиомам  $\delta(a, g_1 g_2) = \delta(\delta(a, g_1), g_2)$ ,  $\lambda(a, g_1 g_2) = \lambda(\lambda(a, g_1), g_2)$ . Для случая, когда входная и выходная полугруппы обладают левым сокращением, может быть получена теорема о приведенном автомате. Обобщенные автоматы, однако, изучались лишь в очень специальных случаях.

Автоматы, у которых входная и выходная полугруппы являются подполугруппами свободной полугруппы, применяются в теории языков и в *кодирования теории*. В том случае, когда входная полугруппа является прямым произведением нескольких свободных полугрупп, это соответствует многоленточным односторонним машинам. События, представимые в таких автоматах ( $n$ -арные отношения между словами), для случая недетерминированных автоматов могут быть охарактеризованы алгебраически как элементы алгебры отношений, аналогичной алгебре регулярных событий, т. е. алгебры с операциями объединения, полугруппового умножения и итерации, порожденной конечными отношениями.

Важную роль в А. т. а. играет изучение различных способов *автоматов композиции*, т. е. операций, с помощью которых из более простых автоматов можно строить более сложные. В структурной теории автоматов входные и выходные сигналы являются декартовыми степенями некоторого фиксированного структурного алфавита (обычно — это двоич-

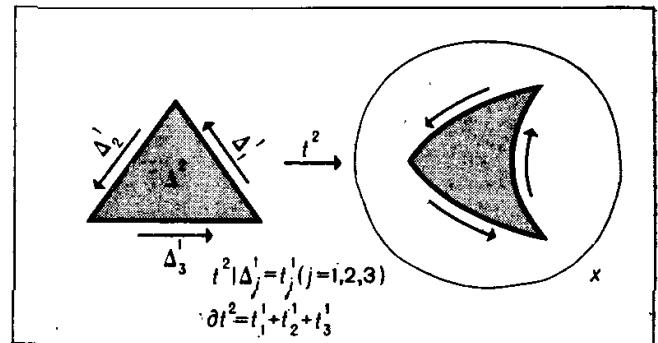
ный алфавит  $\{0, 1\}$ . Компоненты символа структурного алфавита соответствуют физ. каналам, по которым осуществляется параллельная передача сигналов. В этом случае композиция определяется путем отождествления некоторых входных и выходных каналов автоматов, которые входят в композицию. Основными задачами структурной теории автоматов являются: проблема синтеза автоматов структурного, проблема оптимизации и полноты, проблема систем автоматов. Проблема структурного синтеза состоит в отыскании представления произвольного конечного автомата (с точностью до изоморфизма или эквивалентности) в виде композиции заданного типа автоматов, входящих в заданный базис. Оптимизационные задачи структурной теории автоматов состоят в отыскании схем миним. сложности, реализующих заданный автомат. Проблема полноты состоит в распознавании того, можно ли при фиксированном способе композиции из заданных автоматов построить любой конечный автомат (с точностью до изоморфизма или эквивалентности).

В связи с применением теории автоматов к теории матем. машин важное значение имеет понятие многорегистрового автомата (см. Автомат регистровый) как бесконечного автомата специального типа, удобного при изучении операционных устройств вычисл. машин. Это понятие играет центр. роль нового направления в теории автоматов — дискретных преобразователей теории. В этой теории изучается взаимодействие двух автоматов — конечного управляющего и бесконечного операционного автомата. Автомат управляющий задает некоторое преобразование, определенное на мн-ве состояний операционного автомата. Преобразования, задаваемые таким образом, можно рассматривать как элементы спец. микропрограммной алгебры. Использование соотношений этой алгебры позволяет выполнять оптимизацию управляющего автомата. Важную роль при этом играет полугруппа операционного автомата, которая лежит в основе микропрограммной алгебры. Именно наличие соотношений в этой полугруппе и позволяет производить наиболее глубокие преобразования управляющих автоматов.

Лит.: Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов. «Успехи математических наук», 1961, т. 16, в. 5; Глушков В. М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм. «Кибернетика», 1965, № 5; Elgot C. C., Mezei J. E. On relations defined by generalized finite automata. «IBM journal of research and development», 1965, v. 9, N 1; Глушков В. М., Лetichevskii A. A. Theory of algorithms and discrete processors. В кн.: Advances in information systems science, v. 1. New York, 1969. В. М. Глушков, А. А. Летичевский.

**АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ** — общее название разделов топологии, в которых применяются алгебраические методы. А. т. разделяют на теорию гомологий, гомотопическую топологию и дифф. топологию. Пусть  $X$  — топологическое пространство. Роль «геометрических фигур» в  $X$  играют цепи, определяемые следующим образом. Нульмерная цепь  $c^0$  состоит из конечного числа точек  $t_j^0$ , снабженных цело-

численными коэфф.  $\alpha_j$ ;  $c^0$  записывается в виде формальной линейной комбинации  $\sum \alpha_j t_j^0$ . Непрерывное отображение  $t^1$  отрезка  $[0, 1]$  в  $X$  наз. одномерным симплексом пространства  $X$ ; конечные формальные суммы  $c^1 = \sum \alpha_j t_j^1$  наз. одномерными цепями (аналог системы ориентированных дуг). Аналогично из непрерывных отображений треугольника в  $X$  строятся двумерные цепи (аналог системы ориентированных поверхностей, разбитых на «красные треугольники»), из непрерывных отобра-



жений тетраэдра в  $X$  — трехмерные цепи и т. д. Для цепей естественно определяется операция сложения. Для двумерного симплекса  $t^2: \Delta^2 \rightarrow X$ , где  $\Delta^2$  — треугольник-прообраз, отображение  $t^2$  можно рассмотреть только на границе  $\Delta^2$ ; этим определяется одномерная цепь из трех симплексов  $\partial t^2$ , называемая границей  $t^2$ . Для любой двумерной цепи  $c^2 = \sum \alpha_j t_j^2$  граничный оператор  $\partial$  определяется требованием линейности:  $\partial c^2 = \sum \alpha_j \partial t_j^2$ . Аналогично оператор  $\partial$  определяется для цепей любой размерности; он переводит  $r$ -мерную цепь в  $(r-1)$ -мерную, а 0-мерную, по определению, в нуль. Наглядный смысл оператора  $\partial$  — переход от «ориентированной поверхности»  $c^2$  к «граничной кривой»  $\partial c^2$ , ориентация которой согласована с ориентацией  $c^2$  так, как это делается в теории поверхностных интегралов. Точно так же  $\partial c^3$  есть алгебр. аналог «граничной поверхности» тела  $c^3$ , взятой с надлежащей ориентацией (рис.). Т. к. граница поверхности есть замкнутая кривая, а граница тела — замкнутая поверхность, естественно ожидать, что «граница границы» равна нулю, т. е.  $\partial \partial t^2 = 0$  ( $(r-1)$ -мерная цепь «без слагаемых»). Это соотношение может быть формально доказано. Роль граничного оператора в анализе видна из теоремы Стокса, которую можно записать в виде

$$\int_{c^2} d\omega = \int_{\partial c^2} \omega, \quad (*)$$

где  $\omega$  — дифф. форма  $Pdx + Qdy + Rdz$ , а  $d\omega$  получается из  $\omega$  известным способом («дифференциал» формы  $\omega$ ). Если  $\partial c = 0$ , цепь  $c$  наз. ц и к л о м. Если  $z$  — цикл и в  $X$  существует такая цепь  $c$ , что  $\partial c = z$ , то  $z$  наз. циклом, гомологичным нулю (или просто

границей). Все цепи пространства  $X$  размерности  $r$  образуют абелеву группу  $C_r(X)$ , циклы — подгруппу  $Z_r(X) \subset C_r(X)$ , границы — подгруппу  $B_r(X) \subset Z_r(X)$ . Циклы  $z_1^r, z_2^r$  гомологичны ( $z_1^r \sim z_2^r$ ), если их разность есть граница; это — отношение эквивалентности между циклами, и классы эквивалентности суть классы смежности  $Z_r(X)$  по  $B_r(X)$ ; их наз. классами  $r$ -мерных гомологий пространства  $X$ . Роль классов гомологий видна в случае, когда в (\*)  $d\omega = 0$ , т. е.  $(P, Q, R)$  — безвихревое векторное поле; в этом случае  $\int_{z_1} \omega = \int_{z_2} \omega$ ,

если циклы  $z_1, z_2$  гомологичны в области  $X$ , где задано поле. Классы гомологий образуют группу  $Z_r(X)/B_r(X) = H_r(X)$ , называемую  $r$ -мерной группой гомологий пространства  $X$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ). Если теперь  $\varphi: X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение, то для каждого симплекса  $t^r$  пространства  $X$   $\varphi \circ t^r$  есть симплекс пространства  $Y$ , и этим задается гомоморфизм абелевых групп  $\hat{\varphi}: C_r(X) \rightarrow C_r(Y)$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ). Можно доказать, что  $\hat{\varphi}d = d\hat{\varphi}$  («образ границы есть граница образа»); отсюда  $\hat{\varphi}(Z_r(X)) \subset Z_r(Y)$ ,  $\hat{\varphi}(B_r(X)) \subset B_r(Y)$ , и каждый класс гомологий  $X$  переходит в некоторый класс  $Y$ , т. е. определен гомоморфизм  $\varphi_*: H_r(X) \rightarrow H_r(Y)$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ). При этом для тождественного отображения  $e_X$  имеем  $e_{X*} = e_{H_r(X)}$  (тождественный гомоморфизм) и для отображений  $\varphi: X \rightarrow Y$ ,  $\psi: Y \rightarrow Z$  имеем  $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ . Рассмотрим категорию  $K$  (см. *Множества теории*) всех топологических пространств и их непрерывных отображений, категорию  $L$  всех абелевых групп и их гомоморфизмов. Соответствия  $T(X) = H_r(X)$ ,  $T(\varphi) = \varphi_*$  определяют функтор, отображающий  $K$  в  $L$ . Это даст возможность сводить топологические свойства пространств и отображений к более грубым, но вместе с тем и более доступным свойствам групп и гомоморфизмов. Напр., пусть надо доказать, что не существует непрерывного отображения шара  $D$  на его же граничную сферу  $S$ , при которой точки  $S$  переходят в себя. Если  $\varphi$  — такое отображение, то рассмотрим еще  $\psi: S \rightarrow D$ , отображающее все точки  $S$  в себя: тогда  $\varphi \circ \psi = e_S$ ,  $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ ,  $\varphi_* \circ \psi_* = e_{H_r(S)}$  для всех  $r$ ; поэтому  $\varphi_*$  должен быть эпиморфизмом  $H_r(D) \rightarrow H_r(S)$ . Вычисление групп гомологий показывает, однако, что  $H_2(D) = 0$ ,  $H_2(S) \neq 0$ , и отображение  $\varphi$  не может существовать. Операция дифференцирования форм  $d$  в (\*) и обобщенный процесс «интегрирования» форм также включаются в А. т. (теория когомологий).

Гомотопией непрерывных отображений  $\varphi_0: X \rightarrow Y$ ,  $\varphi_1: X \rightarrow Y$  наз. семейство отображений  $\varphi_t: X \rightarrow Y$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), непрерывно зависящее от параметра  $t$  и такое, что

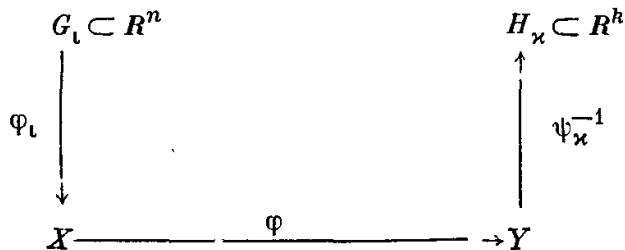
$\varphi_0, \varphi_1$  — заданные отображения. Если  $\varphi_0, \varphi_1$  связаны гомотопией (гомотопны), то можно доказать, что соответствующие гомоморфизмы абелевых групп  $\varphi_{i*}: H_r(X) \rightarrow H_r(Y)$  ( $i = 0, 1$ ) совпадают. Доказательство состоит в том, что для любого цикла  $z^r$  пространства  $X$  образы  $\varphi_t(z^r)$  «заматают»  $(r+1)$ -мерную цепь в  $Y$  («кривой цилиндр»), граница которого

есть разность «оснований», т. е.  $\hat{\varphi}_1(z^r) - \hat{\varphi}_0(z^r)$ ; т. о.  $\hat{\varphi}_1(z^r) \sim \hat{\varphi}_0(z^r)$  в  $Y$ . Отсюда видно, каким образом задачи теории гомотопий могут быть в ряде случаев сведены к теории гомологий: если в  $H_r(X)$  найдется такой класс гомологий  $\zeta$ , что  $\varphi_{0*}(\zeta) \neq \varphi_{1*}(\zeta)$ , то  $\varphi_0$  не гомотопно  $\varphi_1$ . Если же надо доказать, что два отображения гомотопны, то в простейших случаях прибегают к геом. конструкциям гомотопий, а в более сложных — существование гомотопий устанавливается с помощью алгебр. техники. В ряде случаев удается полностью перечислить «гомотопические классы» отображений  $X$  в  $Y$ , т. е. классы эквивалентности по отношению к гомотопии. Напр., существует счетное множество классов отображений  $S^2$  в  $S^2$  ( $S^2$  — «обычная» сфера в трехмерном пространстве). Пусть  $S^3$  — трехмерная сфера, т. е. множество  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$  в четырехмерном евклидовом пространстве  $R^4$  с индуцированной из  $R^4$  топологией. Тогда существует «тривиальное» отображение  $S^3 \rightarrow S^2$ , при котором все точки  $S^3$  переходят в одну точку  $S^2$ . Можно доказать, что существует отображение  $S^3 \rightarrow S^2$ , не гомотопное тривиальному. Дифференциальная топология рассматривает категорию дифференцируемых многообразий и их дифференцируемых отображений. Это — наиболее важный класс пространств и отображений, непосредственно связанных с анализом и геометрией; первоначальная постановка проблем топологии у франц. математика А. Пуанкаре (1854—1912) относилась к этому классу. В последние годы вопросы дифф. топологии стояли в центре внимания топологов.  $n$ -мерное дифференцируемое многообразие есть система, состоящая из топологического пространства  $X$  и мн-ва гомеоморфных отображений  $\varphi_i: G_i \rightarrow X$  ( $i \in I$ ), где  $G_i$  —

открытые мн-ва евклидова пространства  $R^n$ ; эти отображения должны удовлетворять условиям: 1) для каждой точки  $x \in X$  существует такое  $\varphi_i$ , что  $x \in \varphi_i(G_i)$ ; 2)  $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_k$  суть дифференцируемые отображения везде, где они определены ( $i, k \in I$ ). Дифференцируемость отображения  $G \rightarrow R^n$ , где  $G \subset R^n$  — открытое множество, означает, что в его координатной записи  $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ф-ции  $y_i$  дифференцируемы несколько раз, чаще всего — бесконечно дифференцируемы. Отображения  $\varphi_i^{-1}$  наз. картами на  $X$ . С помощью карты каждая точка  $x \in \varphi_i(G_i)$  снабжается локальными координатами.



тами — координатами ее прообраза  $\varphi_i^{-1}(x)$  в  $G_i$ . Отображение  $X \rightarrow Y$   $n$ -мерного дифференцируемого многообразия  $X$  в  $k$ -мерное дифференцируемое многообразие  $Y$  наз. дифференцируемым, если оно изображается в локальных координатах дифференцируемыми ф-циями; это значит, что для любой карты  $\varphi_i$  на  $X$  и любой карты  $\psi_\alpha$  на  $Y$  отображение  $\psi_\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \varphi_i$  должно быть дифференцируемо везде, где оно определено (см. схему):



Если  $\varphi: X \rightarrow Y$  и  $\psi: Y \rightarrow X$  — дифференцируемые отображения,  $\psi \circ \varphi = e_Y$  и  $\varphi \circ \psi = e_X$ , то дифференцируемые многообразия  $X$  и  $Y$  наз. диффеоморфными; по этому отношению дифференцируемые многообразия распадаются на классы. Приведем характерный результат дифференциальной топологии. Пусть  $S^7$  — семимерная сфера (задается в  $R^8$  уравнением  $\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 1$ ). Тогда мн-во топологиче-

ских пространств, гомеоморфных  $S^7$ , содержит ровно 28 классов диффеоморфности дифференцируемых многообразий.

Лит.: Фукс Д., Фоменко А., Гутенмахер В. Гомотопическая топология. М., 1967 [библиогр. с. 156]; Хилтон П. Дж., Уайли С. Теория гомологий. Пер. с англ. М., 1966 [библиогр. с. 442—443]; Милнор Дж. Теорема об  $h$ -кобордизме. Пер. с англ. М., 1969 [библиогр. с. 110—112].

И. А. Шведов.

**АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ** — классы алгебр универсальных, сигнатуры которых состоят из одной или двух бинарных операций и произвольного числа унарных (внешних) операций, называемых операторами (унарные операции могут и отсутствовать). Бинарные операции при этом удовлетворяют законам, похожим на те, которым удовлетворяют операции сложения и умножения в различных областях чисел (натуральных, целых, рациональных, действительных и т. д.). Такие законы либо являются тождествами (напр., ассоциативный, коммутативный, дистрибутивный законы), либо утверждают обратимость операций. Термин А. с. предложен Н. Бурбаки (псевдоним группы франц. математиков).

В ходе истор. развития математики понятие числа расширялось и обобщалось. С добавлением к натуральным числам нуля и отрицательных чисел образовалась область целых чисел; присоединение дробных чисел привело к числам рациональным. Измерения в геометрии и проблемы анализа привели к формированию понятия действительного числа. Задачи решения ур-ний высших степеней по-

требовали построения комплексных чисел. Это последовательное расширение понятия числа осуществлялось при сохранении осн. свойств фундаментальных операций сложения и умножения (т. н. принцип Ганкеля). В 19 в. широкое применение математики в механике и физике, а также внутриматем. потребности привели к созданию систем объектов различной (не обязательно числовой) природы, внутри которых естественным образом осуществлялись бинарные операции, похожие на сложение и умножение в числовых совокупностях. Сюда относятся такие разделы, как векторная и тензорная алгебры, различные системы гиперкомплексных чисел (кватернионы Гамильтона и внешняя алгебра Грассмана), матричная алгебра, исчисление подстановок и преобразований и др. В таких системах бинарные операции, соответствующие сложению и умножению, сохраняли обычно не все, а только некоторые из привычных свойств. Так, напр., при умножении матриц, а также при умножении подстановок коммутативный закон не выполняется. Утверждение, что произведение двух элементов равно нулю, только тогда, когда один из сомножителей равен нулю, может оказаться неверным, напр., при умножении матриц или ф-ций. Вместе с тем замечено, что для исчисления объектов иногда совсем различной природы имеет место далеко идущий параллелизм (напр., для рациональных операций в области целых чисел — с одной стороны и в области полиномов от одной переменной — с другой). Такой параллелизм является результатом выполнения одинаковых законов для осн. операций. Во 2-й пол. 19 в. из-за этого полностью были переосмыслены осн. задачи алгебры. С точки зрения алгебры изоморфные области не различаются, поэтому для нее важнее то, как осуществляются операции над объектами, а не то, над какими объектами они осуществляются. В общем случае эта точка зрения нашла свое отражение в понятиях универсальной алгебры и моделей теории. Но на практике алгебра чаще оперирует не с произвольными универсальными алгебрами, а с такими, которые традиционно сложились в обобщении числовых областей с бинарными операциями сложения и умножения, т. е. с А. с. Исследования самых общих универсальных алгебр и моделей частично примыкают скорее всего к области логики математической.

Если на некотором мн-ве  $M$  определена одна бинарная операция  $M(\cdot)$ , ее наз. композицией или умножением. Произведение элементов  $a, b$  обозначают тогда  $a \cdot b$ . Для так определенной универсальной алгебры могут выполняться или не выполняться следующие законы-тождества. Во-первых, ассоциативный закон:  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  (для всех  $a, b, c \in M$ ). Во-вторых, коммутативный закон:  $ab = ba$  (для  $a, b \in M$ ). Если на некотором мн-ве  $M$  определены две бинарные операции, то обычно одну из них считают сложением, другую — умножением. Обозначают их символами  $+$  и  $\cdot$ , а саму универсальную алгебру



$M$  обозначают  $M(+, \cdot)$ . Конечно, возможно выполнение ассоциативного и коммутативного законов как для сложения, так и для умножения или для одного из них.

В-третьих, сложение и умножение обычно связываются тождеством  $a(b + c) = ab + ac$  ( $(b + c)a = ba + ca$ ), называемым дистрибутивным (или распределительным) законом. В  $M(\cdot)$  может иногда существовать элемент  $e$ , такой, что  $ae = ea = a$  для всех  $a \in M$ . Такой элемент наз. **н е й т р а л ь н ы м**; в алгебрах  $M(+, \cdot)$  его наз. для сложения нулем (0), для умножения — единицей (1).

В-четвертых, существование в  $M(\cdot)$  нейтрального элемента (а в  $M(+, \cdot)$  соответственно нуля или единицы) — аксиома, которая также может выполняться в А. с. В-пятых, важным свойством бинарных операций является обратимость (или частичная обратимость). Правая обратимость: для всех  $a, b \in M$  ур-ние  $ax = b$  имеет решение (левая обратимость — разрешимость ур-ния  $xa = b$ ). Двусторонняя обратимость равносильна существованию обратного элемента  $a^{-1}$  такого, что  $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ . В-шестых, более слабое требование: из  $ax = ay$  следует  $x = y$  (соответственно: из  $xa = ya$  следует  $x = y$ ), наз. **з а к о н о м с о к р а щ е н и я**.

Выполнимость некоторых из перечисленных выше аксиом определяет различные А. с. Часть из этих А. с. особенно важна в теории и практич. применениях, в частности, в кибернетике. Они получили особые наименования, их изучение и составляет осн. содержание алгебры.

А. с. с одной всюду определенной бинарной операцией  $M(\cdot)$ , на которую не наложены никакие требования, наз. **г р у п п о и д а м и** (иногда моноидами, или мультипликативными системами). Группоиды, для которых умножение ассоциативно, наз. **полугруппами**. Внутри последних выделяют классы полугрупп с единицей, полугруппы с односторонним и двусторонним сокращением и коммутативные полугруппы. Если умножение не обязательно ассоциативно, но обратимо справа и слева, группоид наз. **к в а з и г р у п п о й**. Квазигруппы с единицей наз. **л у п а м и**. Интерес к теории квазигрупп и луп возрастает в связи с применением ее в геометрии (сети и ткани) и в *комбинаторном анализе*. Если умножение и ассоциативно и обратимо, то эта важнейшая А. с. наз. **группой** (см. *Групп теория*). Наложение дополнительно коммутативного закона выделяет в классе групп важный подкласс **к о м м у т а т и в н ы х** (или абелевых) **г р у п п**.

Важнейший класс А. с. с двумя бинарными операциями — **к о л ь ц а**. Кольцо — это алгебра  $M(+, \cdot)$ , в которой для операции сложения она — абелева группа, для умножения — группоид, а сложение и умножение в ней связаны левым и правым законами дистрибутивности. Накладывая последовательно на умножение дополнительные аксиомы, получаем классы колец все более частного вида со все

более богатой теорией: если умножение ассоциативно, то и кольцо наз. **ассоциативным**; в ассоциативных кольцах выделяются коммутативные, с коммутативным умножением. Обычно требуется, чтобы кольцо содержало единицу для умножения. Наконец, хорошо изученным классом колец являются коммутативные кольца без делителей нуля (т. е. такие, что из  $a \cdot b = 0$  следует  $a = 0$  или  $b = 0$ ), называемые областями целостности. Изучение этого класса началось в 19 в. в связи с развитием арифметики рациональных и алгебр. чисел. Областями целостности являются также кольца полиномов и различные функциональные кольца. Исследование коммутативных колец, особенно областей целостности, — важная задача алгебр. геометрии — одного из самых актуальных разделов современной алгебры. Некоммутативными кольцами являются, напр., кольца матриц; этот раздел тесно связан с *алгеброй линейной* и с *функциональным анализом*. Широко применяются и некоторые классы неассоциативных колец (в них ассоциативный закон заменяется некоторым более слабым требованием). В матем. анализе и в геометрии важное значение приобрели кольца Ли, кольца Йордана, альтернативные кольца и др. Ослабления требований к операции сложения рассматривались реже. Коммутативность сложения следует из выполнимости обоих распределительных законов при очень слабых дополнительных аксиомах (напр., существование единицы для умножения). Поэтому для получения нетривиальных обобщений колец с некоммутативной аддитивной группой нужно пожертвовать одним из распределительных законов. А. с., в которых имеет место лишь один распределительный закон (напр., левый) и операция сложения определяет некоммутативную группу, наз. **п о ч т и к о л ь ц а м и**. Эти А. с. изучают в связи с многочисленными применениями их в теории групп.

Если  $M(+, \cdot)$  — ассоциативное кольцо, в котором все элементы, кроме нуля, обладают обратным элементом (тем самым операция умножения обратима), то такая А. с. наз. **т е л о м**. Если при этом умножение коммутативно, то тело наз. **п о л е м**. Поле — одна из исторически первых и самых важных А. с. в алгебре. Напр., хорошо известны поле рациональных чисел, поле действительных чисел, поле комплексных чисел, поле алгебр. чисел, поля рациональных ф-ций, поля вычетов по простому модулю и т. д. Теория полей — один из самых обширных и разработанных разделов алгебры.

К А. с. относят и образования, которые наряду с одной или двумя операциями обладают еще и некоторым  $k$ -вом внеш. операций — операторов. Область операторов для некоторой алгебры  $M(\cdot)$  или  $M(+, \cdot)$  — это некоторое мн-во  $\Sigma = \{\sigma\}$ , называемое мн-вом операторов для  $M(\cdot)$  (или  $M(+, \cdot)$ ), такое, что для всякого  $\sigma \in \Sigma$  и  $a, b \in M$ ,  $\sigma(a) \in M$ , причем  $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$  в случае  $M(\cdot)$  и  $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$  и  $\sigma(a \cdot b) =$

$= \sigma(a) \cdot \sigma(b)$  для  $M(+, \cdot)$ . Каждый из операторов можно рассматривать как дополнительную унарную операцию на  $M$ . Обычно мн-во операторов  $\Sigma$  — это какая-то А. с. (полугруппа, группа, кольцо, поле), операции которой согласованы с операциями на  $M$ . Самыми известными и распространенными А. с. «с операторами» являются векторные пространства; в них наряду с бинарной операцией сложения определена операция умножения на скаляры, пробегающие некоторое поле. Обобщением векторных пространств являются модули; в них в качестве области скаляров берут произвольное ассоциативное кольцо  $R$  с единицей, причем  $1 \in R$  действует на аддитивной группе модуля как единичный оператор.

Сюда же относится и понятие линейной алгебры. Это ассоциативное кольцо  $A(+, \cdot)$ , для которого задано коммутативное кольцо  $R$  операторов, причем  $(\alpha \cdot \beta)a = \alpha \cdot (\beta a)$  и  $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$  для  $\alpha, \beta \in R, a \in A$ . Кроме того,  $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$  и  $\alpha(a \times b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$ . Иначе говоря, это А. с., являющаяся одновременно и модулем над  $R$  и кольцом  $A$ , в которых операции согласованы. Линейными алгебрами являются, напр., алгебры квадратных матриц с коэфф. из какого-либо поля или кольца, а также т. н. тензорные алгебры, играющие большую роль в геометрии. Бесконечномерные алгебры над полем действительных или комплексных чисел имеют большое значение для функционального анализа.

В матем. анализе обычно рассматривают не «чистые» А. с., а такие, в которых наряду с бинарными операциями и операторами определена еще и некоторая топология (т. е. определено какое-нибудь понятие «сходимости»), причем так, что все рассматриваемые операции непрерывны в этой топологии. Сюда относятся, в первую очередь, топологические векторные пространства, топологические группы, кольца, поля, алгебры. Изучение таких «топологизированных» А. с. составляет содержание т. н. топологической алгебры, нового раздела, лежащего на стыке алгебры и топологии. Такие структуры используют в матем. анализе. Нужно отметить, что к А. с. относят и такие, для которых соответствующие бинарные операции не всюду определены. К этим частичным алгебрам относятся такие важные структуры, как категории.

Большой интерес для приложений в дискретном анализе и в комбинаторике представляют конечные А. с., т. е. такие, которые определены на конечных мн-вах  $M$ . Сюда относятся конечные группы, конечные полугруппы, конечные поля и конечные векторные пространства. Такие структуры применимы и в теории конечных автоматов, в теории линейных кодов, в алгебре логики и др.

Лит.: Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М., 1962 [библиогр. с. 383—387]; Мальцев А. И. Алгебраические системы. М., 1970 [библиогр. с. 384—387]; Бурбаки Н. Элементы математики, ч. 1, кн. 2. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. Пер. с франц. М., 1962 [библиогр. с. 494—496]; Ленг С. Алгебра. Пер. с англ. М., 1968. Л. А. Калужнин.

**АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ** — класс уравнений в математике. См. Уравнений классификация.

**АЛГЕБРЫ СОБЫТИЙ** — алгебры универсальные, элементы которых представляют собой множества слов на некотором алфавите, т. е. события. Так как понятие события совпадает с понятием языка в теории языков формальных, то можно говорить и об алгебре языков. К осн. операциям А. с. относят операции объединения, умножения и итерации (см. Регулярные события и выражения). При изучении различных классов событий, напр., представимых в автоматах того или иного вида, очень часто оказывается полезным выяснить следующий вопрос: является ли данный класс событий некоторой А. с., обладающей теми или иными хорошо описываемыми свойствами. Поэтому для теории автоматов характерным является ряд теорем, устанавливающих замкнутость или незамкнутость различных классов событий относительно указанных выше, а также других операций над событиями. Одной из наиболее изученных алгебр является алгебра регулярных событий. Она обладает рядом интересных свойств: она конечно-порождаема, является макс. алгеброй, содержащей все конечные события (т. е. события, состоящие из конечного числа слов) и др. Класс контекстно-свободных языков, который играет важную роль в теории формальных языков, также является А. с. Однако свойства этой алгебры не описываются так хорошо, как свойства алгебры регулярных событий, являющейся в данном случае подалгеброй алгебры контекстно-свободных языков. В качестве дополнительных операций в алгебру регулярных событий часто вводят также операции пересечения и дополнения, относительно которых класс регулярных событий оказывается замкнутым.

Среди операций над событиями рассматривают и операцию деления события на слово, которая оказывается полезной в автоматическом синтезе, операцию коммутативного замыкания, связанную с коммутативной алгеброй регулярных событий, а также ряд других операций. Весьма общим видом операции является операция суперпозиции события  $S$  алфавита  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  и системы событий  $S_1, S_2, \dots, S_n$  некоторого алфавита  $A$ . Результат такой операции  $S(S_1, S_2, \dots, S_n)$  есть событие алфавита  $A$ , содержащее все такие слова (и только их), которые получаются в результате замены в словах, принадлежащих  $S$ , каждого вхождения символа  $s_i$  каким-либо словом из события  $S_i$ . Многие операции над событиями можно трактовать как суперпозиции с конкретным выбранным  $S$ , напр., умножение  $S_1 S_2$  — это суперпозиция события  $S$ , состоящего из одного слова  $s_1 s_2$ , и системы событий  $S_1, S_2$ .

В плане общеалгебраических проблем для А. с. изучали проблему аксиоматизации. Вопрос о конечной аксиоматизируемости алгебры регулярных событий в его классической постановке решен отрицательно: не существует

конечной системы тождеств, из которых с помощью некоторых спец. правил вывода (т. н. правил замены и подстановки) можно вывести любое тождество в алгебре регулярных событий. Однако подалгебра алгебры регулярных событий, которая состоит из всех событий, содержащих пустое слово, уже является конечно-аксиоматизируемой.

За счет определенного расширения правил вывода можно добиться конечной аксиоматизируемости алгебры регулярных событий. Так, можно ввести следующее дополнительное правило: из того, что выводимо

$$X = XS \cup R, \quad (1)$$

где  $e \in S$ , выводимо и  $X = RS^*$  и наоборот. Это правило вывода появляется не случайно; оно связано с большими возможностями, которые дает аппарат решения уравнений. Проблеме решения уравнений можно поставить для любой универсальной алгебры, но она не только в общей постановке, но и относительно отдельных классов уравнений обычно бывает весьма сложной. В произвольной алгебре уравнение имеет вид  $F(x) = G(x)$ , где  $F(x)$  и  $G(x)$  — выражения, построенные из переменной  $x$ , элементов алгебры и операций алгебры. Если уравнение имеет решение и при том единственное, то оно служит средством неявного задания некоторой, вообще говоря, новой операции для элементов алгебры. Так, уравнение (1) при  $R = e$  задает итерацию события  $S$ . Существенным является то, что уравнение (1) относится к т. н. линейным уравнениям. Рассмотрение систем линейных уравнений в А. с. дает новые средства для изучения алгебраических и теоретико-автоматных зависимостей, в частности, дает возможность осуществлять анализ конечных автоматов. Система линейных уравнений имеет вид:

$$X_i = A_{i1}X_1 \cup A_{i2}X_2 \cup \dots \cup A_{in}X_n \cup B_i, \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где коэффициенты  $A_{ij}$  — элементы данной алгебры событий.

При некоторых ограничениях на вхождение пустого слова в коэффициенты  $A_{ij}$  такая система имеет единственное решение, причем, если все  $A_{ij}$  и  $B_i$  регулярны, то и все  $X_i$  также регулярны. Существует алгоритм решения системы (2), аналогичный алгоритму Гаусса для систем обычных линейных уравнений.

Оказывается, события, представимые в автомате конечном его состояниями, связаны системой линейных уравнений. Процедура составления этой системы с последующим ее решением может служить алгоритмом анализа конечных автоматов.

Кроме систем уравнений, в А. с. изучали и системы уравнений вида

$$X_i = S_i(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где  $S_i$  — события, а выражения в правых частях понимаются как суперпозиции. Такая

система всегда имеет решения (среди ее решений одно является минимальным в смысле теоретико-множественного включения); при некоторых ограничениях, связанных с вхождением пустого слова в  $S_i$ , система (3) имеет единственное решение. Для теории формальных языков представляют интерес системы, у которых  $S_i$  — конечные события. Решением такой системы (единственным или минимальным) будет кортеж из  $n$  контекстно-свободных языков  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Системы вида (3) тесно связаны со средством описания (задания) различных формальных языков, в частности с помощью контекстно-свободных грамматик (см. *Грамматика порождающая*).

Лит.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]; Ginsburg A. Algebraic theory of automata. New York — London, 1968 [библиогр. с. 157—160].

**АЛГЕБРЫ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ.** Алгеброй универсальной  $\mathcal{U}$  наз. объект, задаваемый некоторым множеством  $A$  — носителем алгебры — и некоторым (возможно бесконечным) набором ф-ций  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , всюду определенных на  $A$  и со значениями в  $A$ , называемыми операциями алгебры  $\mathcal{U}$ . Число аргументов  $n_i$  операции  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n_i})$

наз. а р н о с т ь ю этой операции. Операции различают: унарные, бинарные, тернарные и т. д. Рассматривают также нульарные операции (под этим понимают отмеченные элементы носителя). Упорядоченный набор  $\{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$  символов операции А. у. с указанием их а р н о с т и наз. с и г н а т у р о й алгебры  $\mathcal{U}$ . А. у. — одно из осн. понятий алгебры. Почти все алгебраические структуры (полугруппы, группы, структуры, кольца и т. д.) являются А. у. в определенном выше смысле. Так, напр., кольцо целых чисел  $Z$  можно рассматривать как А. у., носителем которой является множество целых чисел, а сигнатура состоит из трех бинарных операций — сложения, вычитания и умножения. Всякую полугруппу можно считать А. у. с сигатурой, состоящей из одной бинарной операции — умножения. Группу естественно считать А. у. с тремя операциями: одной бинарной — умножение; одной унарной — взятие обратного элемента и одной нульарной (константа единица). Под понятие А. у. не подпадает такая важная алгебр. структура, как поле, если его рассматривать как множество с четырьмя бинарными операциями — сложением, вычитанием, умножением и делением. Действительно, бинарная операция деления  $x_1 : x_2$  не определена для  $x_2 = 0$ . Для охвата подобных, часто встречающихся в алгебре обстоятельств, наряду с А. у. рассматриваются и так наз. ч а с т и ч н ы е у н и в е р с а л ь н ы е а л г е б р ы (ч. у. а.), в определении которых не требуется, чтобы операции  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{n_i})$  их сигнатуры были всюду определенными ф-циями. Еще более общим является понятие алгебраической системы, введенное А. Тарским под названием «реляционная

система» (термин «алгебраическая система» предложил А. И. Мальцев), под которым понимают ч. у. а., в которых наряду с операциями на носителе  $A$  задан некоторый набор предикатов. Алгебраическими системами являются, напр., упорядоченные группы, в которых наряду с операциями умножения определен еще бинарный предикат порядка.

Понятие  $A. у.$  ввел под названием «абстрактная алгебра» в 30-х годах 20 ст. амер. алгебраист Г. Биркгоф. Ему принадлежат первые осн. результаты теории  $A. у.$  Широкое развитие этой области началось в 50-х годах. К этому времени, именно в рамках логики математической, в работах А. Тарского, А. Робинсона и особенно А. И. Мальцева был разработан язык и аппарат, оказавшийся очень приспособленным для решения ряда общих задач в теории групп, полугрупп и др. разделов алгебры. В дальнейшем выяснилось, что естественной областью применения аппарата матем. логики является теория моделей и теория алгебраических систем, в частности теория  $A. у.$  Наряду с этим теория  $A. у.$  также использует теоретико-множественный аппарат теории категорий. Теория  $A. у.$  развивается в рамках общей алгебры с широким использованием математико-логических и теоретико-категорных понятий и методов. Значительных успехов в этой области достигли сов. ученые А. И. Мальцев и его сотрудники (Новосибирск) и А. Г. Курош с сотрудниками (Москва). За рубежом эта область развивается преимущественно в США (А. Тарский, Р. Линдон), а также в Англии (П. Кон), Польше (И. Лось, Е. Марчевский) и Японии (К. Шода).

В теории  $A. у.$  в настоящее время изучаются в осн. классы  $A. у.$  с одинаковой сигнатурой, причем такие, что между операциями сигнатуры выполняются отношения, описываемые некоторым набором замкнутых формул исчисления предикатов узкого. Такие классы  $A. у.$  наз. аксиоматизируемыми классами  $A. у.$ , а соответствующие наборы замкнутых формул — системами аксиом данного класса. Аксиоматизируемыми классами являются привычные алгебр. структуры (группы, кольца, поля и т. д.), аксиомы которых записываются формулами узкого исчисления предикатов. Напр., аксиома групп теории о том, что умножение в группе допускает левое обращение, записывается так  $\forall (x) \times \times \forall (z) \exists (y)(y \cdot x = z)$ .

Одной из осн. задач теории  $A. у.$  является изучение свойств и взаимоотношений аксиоматизируемых классов  $A. у.$  Среди аксиоматизируемых классов особенно хорошо изучены те, которые могут быть заданы аксиомами, состоящими из тождеств. Такие классы наз. многообразиями  $A. у.$ , «эквивалентно определяемыми классами» или «примитивными классами». Фундаментальная теорема о многообразиях  $A. у.$ , доказанная Г. Биркгофом, утверждает, что класс  $A. у.$  является многообразием тогда и только тогда, если он замкнут относительно следующих теоретико-множественных операций: взятия под-

алгебры, перехода к гомоморфному образу и образований декартова произведения. Подобные характеристики были установлены и для других типов аксиоматизируемых классов. Изучение определимости  $A. у.$  некоторого аксиоматизируемого класса системами образующих и определяющих отношений является важной задачей теории  $A. у.$  в кибернетике. Большое значение имеет понятие свободных  $A. у.$  некоторого аксиоматизируемого класса. Свободные алгебры данного класса — это (несколько неточно) такие алгебры данного класса, из которых все остальные  $A. у.$  могут быть получены как гомоморфные образы. Свободные алгебры существуют не во всех аксиоматизируемых классах, но там, где они существуют, напр., в многообразиях, они играют значительную роль. Теория  $A. у.$  изучает строения групп автоморфизмов и полугрупп эндоморфизмов  $A. у.$ , а также решеток подалгебр и решеток конгруэнций.

В целом теория  $A. у.$  объединяет многие параллельные разделы классических ветвей общей алгебры и в то же время имеет собственную проблематику, все более расширяющуюся. Результаты теории  $A. у.$  имеют большое значение для дальнейшего развития различных отраслей кибернетики. С абстрактной точки зрения всякое автоматическое устройство дискретного действия можно рассматривать как некоторую  $A. у.$  Естественно, напр., считать множество состояний оперативной памяти ЦВМ носителем некоторой  $A. у.$ , а набор ее операций — операциями соответствующей  $A. у.$  С абстрактной точки зрения свойства так определенной  $A. у.$  отражают функциональные возможности ЦВМ. Поэтому в абстрактной теории цифровых автоматов, а также в теории программирования широко применяют те разделы алгебры, которые относятся к теории  $A. у.$  Здесь связь кибернетики с теорией  $A. у.$  прямая. Теория  $A. у.$  тесно связана с различными разделами матем. логики, теории рекурсивных функций и алгоритмов теорией. Так, напр., в матем. логике некоторые ученые (А. Линденбаум, Е. Расёва, Р. Сикорский, А. Тарский и др.) трактуют формализованные матем. теории как  $A. у.$  Носитель  $A. у.$ , сопоставленной некоторой формализованной теории, состоит при этом из совокупности правильно построенных формул данной теории, а операции соответствуют ее теоретико-высказывательным связкам и кванторам. Применение такой операции к заданным формулам состоит в образовании новой формулы, получающейся из заданных формул, как последовательность, состоящая из их записи, скобок и знака связи или знака квантора. Напр., результат операции соответствующей конъюнкции, примененной к формулам  $X$  и  $Y$ , является формулой  $(X) \& (Y)$ . Получающаяся  $A. у.$  наз. алгеброй формул данной теории. В алгебре формул вводится конгруэнция, согласно которой формулы, выводимые друг из друга по правилам вывода теории, считаются эквивалентными. Тогда формализованной теорией считается факторалгебра алгебры формул по

этой конгруэнции. Такой подход позволяет изучать формализованные матем. теории в рамках теории А. у. (см. также *Алгебра логики, Моделей теории*).

Лит.: Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М., 1962 [библиогр. с. 383—387]; Биркгоф Г. Теория структур. Пер. с англ. М., 1952 [библиогр. с. 370—398]; Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. Пер. с англ. М., 1967 [библиогр. с. 356—372]; Кон П. Универсальная алгебра. Пер. с англ. М., 1968 [библиогр. с. 329—338]; Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. Пер. с англ. М., 1972 [библиогр. 568—578]. Л. А. Калужнин.

**АЛГОЛ-60** — алгоритмический язык, ориентированный на описание алгоритмов решения задач численного анализа. А.-60 приняла в 1960 Международная конференция в Париже, в 1962 его пересмотрел тех. комитет *Международной федерации по обработке информации* (ИФИП).

А.-60 привлек к себе всеобщее внимание в силу ряда новых обобщающих идей, наиболее плодотворными из которых являются: понятия блочной структуры и области действия обозначений, позволяющие разделить работу по составлению больших программ на более обозримые части; возможность динамического памяти распределения и развитый аппарат вызова процедур. А.-60 был запроектирован не только как эффективный язык программирования, но и как средство записи алгоритмов. Значимость А.-60 определяется его широким распространением, значительным числом реализаций и библиотек, описанных в нем программ. Описание синтаксиса А.-60 в виде *Бэкуса нормальных форм* оказало существенное влияние на работы по языкам программирования и послужило толчком к дальнейшему развитию работ в области языков формальных.

Различают три уровня языка А.-60: эталонный язык, язык публикаций и конкретные представления. Эталонный язык является основой и руководством для создания трансляторов, образцом для всех конкретных представлений и основой для перевода с языка публикаций на любые частные конкретные представления. Язык публикаций допускает видоизменения эталонного языка, связанные с удобством печати или написания (напр., индексы, пробелы, показатели степени, греческие буквы), и используется для целей формулирования и обмена информацией. Символы языка могут быть различными в разных странах при наличии однозначного соответствия с эталонным представлением. Каждое конкретное представление является, как правило, некоторой модификацией эталонного языка, определяемой числом знаков в стандартном оборудовании ввода, использующей набор знаков конкретной цифровой вычислительной машины и являющейся входным языком транслятора для нее. Конкретные представления должны сопровождаться спец. совокупностью правил для перевода с языка публикаций или с эталонного языка.

Программа, записанная средствами языка А.-60, представляет собой совокупность опи-

саний величин и действий над ними. Различают следующие классы величин: простые переменные, массивы, метки, переключатели и процедуры. Для обозначения величин используются идентификаторы. Величина действует в том операторе или выражении, в котором описание идентификатора, связанного с этой величиной, имеет силу. Значениями величин (в зависимости от их класса) могут быть: число (или некоторая совокупность чисел), логическое значение (или некоторая совокупность таких значений) или метка. Значения числовых величин имеют типы: целый (*integer*) и вещественный (*real*), значения логических величин — логический (или Булевый — *Boolean*) тип.

Алфавит эталонного языка строго зафиксирован и состоит из десятичных цифр от 0 до 9, строчных и заглавных лат. букв, знаков операций, знаков препинания, круглых и квадратных скобок и некоторых спец. знаков. Из символов алфавита по определенным правилам образуются элементарные конструкции — идентификаторы, числа, строки, переменные и указатели функций, арифм., логич. и именуемое выражения, описания, операторы и примечания. С помощью меток, которыми при необходимости снабжаются операторы, задается порядок их выполнения. Идентификатор переменной — это наименование, данное некоторому отдельному значению или совокупности значений. Строка представляет собой любую последовательность символов алфавита, заключенную в строчные скобки (и), и используется в качестве параметра фактического процедуры. Арифм., логич. и именуемое выражения являются правилами для вычисления числового и логич. значений и получения метки оператора, соответственно. Описания определяют некоторые свойства величин и связывают их с идентификаторами. Описание идентификатора имеет силу в одном блоке. Описание можно снабдить дополнительным описателем *own* (собственный), что приводит к сохранению значения некоторой величины, описанной таким образом к моменту повторного входа в этот блок. В А.-60 встречаются четыре вида описаний: типа, массива, переключателя и процедуры. Описание типа указывает, что некоторые идентификаторы являются простыми переменными целого, вещественного или логич. типа. Описание массива определяется, что один или несколько идентификаторов представляют многомерные массивы переменных с индексами и задают размерность этих массивов, границы индексов и типы переменных. Описанием переключателя задается совокупность значений соответствующего указателя переключателя. Описание процедуры задает процедуру, связанную с ее идентификатором, и состоит из ее заголовка и тела. Посредством примечаний (*comment*) в программу на А.-60 можно включать любой текст, напр., для пояснения некоторого участка программы или некоторой конструкции. Оператор — это конструкция, посредством которой дается указание выполнить к.-л. дей-

ствие или совокупность действий. Оsn. операторами А.-60 являются *операторы присваивания*, перехода, пустой и процедуры. Оператор присваивания служит для присваивания значения выражения одной или нескольким переменным или идентификаторам процедур-функций. Оператор перехода позволяет изменить естественную последовательность выполнения операторов, явно определяя своего преемника по значению входящего в него именуемого выражения. Пустой оператор не выполняет никакого действия и может быть использован для помещения метки. Некоторый участок программы может быть описан в виде процедуры с некоторым набором *параметров формальных*, а вместо него в программе записан оператор этой процедуры с необходимым набором фактических параметров. Обычно в виде процедур описывают участки, часто встречающиеся в одной или различных программах. Описание процедуры содержит оператор, называемый ее телом. Процедура описывается один раз в начале блока, в котором встречается оператор с идентификатором этой процедуры. Выполнение оператора процедуры вызывает обращение к соответствующему описанию процедуры, которое заключается в выполнении ее тела после его модификации, осуществляемой предусмотренными в языке действиями. К таким действиям относятся вызов параметров по значению и по наименованию. Тело процедуры может быть написано на каком-нибудь другом алгоритм. или машинном языке. Другим способом использования понятия процедуры является описание процедур-функций, обращение к которым осуществляется посредством указателя ф-ции. Последний может быть использован в качестве операнда в арифм. или логич. выражениях. Если фактические параметры процедуры от одного обращения к другому не меняются, то и они, и соответствующие им формальные параметры процедуры могут быть опущены. Такая процедура наз. процедурой без параметров.

В А.-60 имеется совокупность стандартных ф-ций, не требующих описаний. К ним относятся  $abs(E)$  (абсолютная величина  $E$ ),

$$sign(E) = \begin{cases} 1, & \text{если } E > 0 \\ 0, & \text{если } E = 0 \\ -1, & \text{если } E < 0 \end{cases}$$

$\sin(E)$ ,  $\cos(E)$ ,  $\arctan(E)$ ,  $\text{entier}(E)$

(наибольшее целое, не превышающее  $E$ ),

$\text{sqr}(E) = \sqrt{E}$  и  $\exp(E) = e^E$ .

В 1964 Международный комитет ИФИП рекомендовал в качестве дополнения к языку А.-60 следующие стандартные процедуры обмена информацией между программой и внешними носителями информации: *inreal* — ввод числа, *outreal* — вывод числа, *inarray* — ввод массива, *outarray* — вывод массива, *insymbol* — ввод символа, *outsymbol* — вывод символа, *length* — определение длины строки. Те-

ла этих процедур записываются обычно на языке машины.

Оsn. операторы можно использовать для образования более сложных операторов: цикла, условного, составного и блока. Оператор цикла состоит из заголовка цикла и внутреннего оператора. Заголовок цикла задает число повторений внутреннего оператора. Заголовком цикла наз. конструкция вида **for** <переменная>: = <список цикла> **do**. Список цикла состоит из элементов списка цикла, которые можно разделить на три типа:  $A$  — арифм. выражения,  $A \text{ step } h \text{ until } M$  — арифм. прогрессии,  $A \text{ while } B$  — пересчета, где  $A$ ,  $h$ ,  $M$  — арифм. выражения, причем  $h$  — шаг (разность между двумя последовательными значениями переменной цикла) изменения переменной цикла, называемой параметром цикла, а  $B$  — логич. выражение. В случае элемента типа пересчета к-во выполнений внутреннего оператора определяется условием  $B$ , т. е. этот оператор выполняется, пока выражение  $B$  является истинным. Условные операторы приводят к пропуску или выполнению некоторых операторов в зависимости от текущих значений использованных в них логических выражений. Совокупность операторов, заключенная в операторные скобки **begin** и **end**, наз. **составным оператором**. Если, кроме того, за символом **begin** следовать описания, то такая конструкция наз. **блоком**. Блоки и составные операторы могут быть вложены друг в друга. Программа на А.-60 является блоком или составным оператором. Любой идентификатор, встречающийся в данном блоке, может быть описан в этом блоке. Такие идентификаторы наз. **локализованными** в данном блоке, и объект, представленный каким-нибудь из них внутри данного блока, не существует вне этого блока, а любой объект, представленный тем же идентификатором вне данного блока, не может быть использован внутри этого блока. Идентификаторы, встречающиеся внутри блока и не описанные в нем, не локализуются в блоке, т. е. представляют одни и те же объекты как внутри этого блока, так и в объемлющих блоках. Метка, встречающаяся в данном блоке, если даже она не описана в нем, действует так, как будто она описана в заголовке наименьшего блока, объемлющего помеченный этой меткой оператор.

Примеры: 1) Описание процедуры:

**procedure preobr (s);**

**for**  $i := 1 \text{ step } 1 \text{ until } k$  **do**  $M \ 1[i] :=$   
 $= M[i] \uparrow s.$

2) Описание процедуры ф-ции:

**real procedure Sum (Mas, K); array Mas;**

**begin** **real**  $S$ ;  $S := 0$ ;

**for**  $i := 1 \text{ step } 1 \text{ until } K$  **do**  $S :=$   
 $= S + Mas[i];$   
 $Sum := S$  **end.**



3) А.-программа: для данных целых чисел  $k, l, m, n$  найти:

$$z = \frac{k!n!}{l!m!}.$$

```
begin integer procedure y (j);
begin integer i, Y; Y := 1;
for i := 1 step 1 until j do Y := Y × i;
y := Y end;
integer k, l, m, n; real z;
read (k, l, m, n); z := y (k)/y (l) ×
× y (n)/y (m); print (z) end.
```

Приведенная выше А.-программа написана в конкретном представлении, где *read* — оператор чтения информации с внешнего носителя, а *print* — оператор печати. А.-программа на эталонном языке представляет собой строку символов. Пробелы во внимание не принимаются, но их можно использовать в тексте программы для обеспечения удобочитаемости. В языке публикаций допускаются: вместо индексных скобок [ и ] понижение строки, заключенной в эти скобки, и удаление их, а также поднятие показателя степени и удаление символа ↑, скобки любой формы — круглые, квадратные или фигурные, для основания степени — десять — поднятие десяти и следующего за ним целого числа и вставка подразумеваемого знака умножения.

А.-60 является базовым языком для многих других языков программирования. Рабочая группа ИФИП выработала сокращенный вариант А.-60, в котором каждая программа, записанная на нем, автоматически является также и программой на языке А.-60 и имеет одинаковую семантику в обоих языках.

Лит.: Агеев М. И. Основы алгоритмического языка АЛГОЛ-60. М., 1965 [библиогр. с. 93]; Сообщение о сокращенном АЛГОЛе-60 (ИФИП). «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1965, т. 5, № 3; Лавров С. С. Универсальный язык программирования (АЛГОЛ-60). М., 1972 [библиогр. с. 182—183]; Мак-Кракен Д. Д. Программирование на АЛГОЛе. Пер. с англ. М., 1964; Алгоритмический язык АЛГОЛ-60. Пересмотренное сообщение. Пер. с англ. М., 1965 [библиогр. с. 77].

А. И. Халилов.

**АЛГОЛ-68** — международный универсальный алгоритмический язык. Разработан в 1968 коллективом ученых под руководством рабочей группы по АЛГОЛу Международной федерации по обработке информации. В А.-68 проведено четкое различие между «внешними объектами», т. е. синтаксически определяемыми составными частями программы, и «внутренними объектами», являющимися «значениями» того или иного «вида» (целого, вещественного, логического и т. д.). Считается, что внутр. объекты сами по себе в языке не изобраимы, но внеш. объекты могут «обладать» ими. Примерами внеш. объектов могут служить «изображения». Так, изображение вещественного числа 2,87 всегда обладает внутр. объектом — вещественным значением «две целых восемьдесят семь сотых», а изображение логического истина — логич. значением «истина». Другими

примерами внеш. объектов могут служить «идентификатор», напр. *xy2*, и «описание тождества», напр. *вещ xy2 = 2.87*. После «исполнения» описания тождества *идентификатор*, стоящий в левой части, начинает обладать тем внутр. объектом, которым обладает внеш. объект, стоящий в правой части этого описания тождества. Идентификатор продолжает обладать этим значением (т. е. не меняет его) до конца выполнения того «блока» программы, в котором он был «описан» данным описанием тождества.

Для повышения точности вычислений численные значения могут иметь увеличенную «длину», напр. *длин цел x* или *длин длин длин вещь y* и т. д. Имеется в виду, что с увеличением длины повышается точность представления соответствующих величин. К числу внутр. объектов А.-68 относятся «имена», которые внешне не представимы, поскольку в языке не существует изображений, обладающих именами. Каждое имя «именует» некоторое другое значение, которое само может быть именем. Именованное можно рассматривать как аналог косвенной адресации в языках машинных (см. *Адресный язык*). Каждое имя именует значение определенного вида.

Описание тождества *цел k* (с опущенными знаком равенства и правой частью) равносильно по определению такому описанию тождества, в левой части которого стоит имя *цел k*, а правая часть вырабатывает некоторое новое имя, которым и начинает обладать *k*. Однако описания тождества *цел i = 1* и *цел j = s* в том же блоке заставляют *i* и *j* обладать соответственно единицей и текущим — к моменту исполнения описания — значением *s*, а не их именами. Это, в частности, означает, что в данном блоке могут иметь место «присваивания» *k := 10*; *k := k + 1*, которые заставят имя, обладаемое идентификатором *k*, именовать сначала число десять, а затем число одиннадцать; однако конструкции *i := 10* или *j := 2* в этом случае синтаксически недопустимы. Т. о., на уровне различий между некоторым видом и именем этого вида в А.-68 вводятся различия между константами и переменными любого вида. Прямоугольные массивы произвольной размерности сами являются значениями и носят в А.-68 название «мультизначений». Так, напр., *[1 : n, 1 : m]* *вещ* описывает матрицу  $n \times m$  с вещественными элементами, а *[4 : 13]* имя *[1 : подв]* *лит* — вектор, состоящий из десяти элементов, пронумерованных, начиная с номера 4, каждый из которых является именем мультизначения. Последние, т. е. одномерные массивы литерных с подвижной верхней границей, наз. «строковыми» значениями, и для них в А.-68 существуют изображения, напр. «это—строка». А.-68 дает возможность работать с «вырезками» из массивов, выделяя отдельные элементы мультизначения и подмассивы, которые рассматриваются как мультизначения.

В отличие от мультизначения, все элементы которого имеют один и тот же вид, «структурное значение» есть упорядоченная после-



довательность своих элементов, называемых «полями», которые могут быть различных видов. Они выбираются, в отличие от мультизначений, не по индексам, а с помощью «указателя поля», напоминающего идентификатор. Вид структурного значения включает в себя информацию о видах его полей и об их указателях. В частности, комплексные значения в А.-68 определены с помощью «описания вида» как структуры с двумя вещественными полями,

**вид компл = структ (вещ *re*, вещ *im*).**

Описание вида

**вид список = структ (вещ элемент, имя  
список следующий)**

позволяет моделировать списки в смысле, напр., языка ЛИСП. Подпрограммы А.-68, являющиеся аналогами тел процедур АЛГОЛа-60, также суть значения. Вид подпрограммы включает в себя информацию о видах всех ее параметров (если они есть), а также о том, вырабатывает ли подпрограмма значение и если вырабатывает, то какого вида. Внеш. объектами, обладающими подпрограммами, являются «изображения подпрограмм» и «идентификаторы процедур», напр., описание тождества

**проц  $p = (\text{цел } x, \text{ имя цел } y) \text{ имя цел: } y := x$**   
заставляет идентификатор процедуры  $p$  обладать подпрограммой, изображение которой стоит в правой части. Передача параметров фактически при обращении к процедурам обеспечивается описаниями тождества. Так, напр., «вызов»  $p(a, c)$  равносильно по определению, в некотором контексте, исполнению следующего блока

(1) (цел  $x = a$ , имя цел  $y = c$ ;  $y := x$ ).

Этот подход делает ненужным подчеркивание в семантике А.-68 разницы между вызовом по имени и по значению.

В А.-68 существуют также имена, которые могут именовать значения разных видов. Так, описание тождества **объ (цел, [ ] лог)  $x$**  дает возможность присвоить переменной  $x$  целое значение и мультилогич. значение. Для того, чтобы выяснить, какой текущий вид имеет значение, именуемое именем  $x$ , надо воспользоваться спец. «отношениями согласуемости». Только при их явном использовании программистом возникает необходимость в динамической проверке видов. Операторы и выражения в А.-68 носят общее название «предложений», причем между ними нет четкой границы. Любой оператор, в т. ч. блок, считается вырабатывающим то значение, которое было получено последним перед его завершением. Напр., блок (1), а следовательно и вызов процедуры  $p(a, c)$ , вырабатывает в качестве значения имя, обладаемое идентификатором  $y$  (или, что то же — идентификатором  $c$ ). Выработанное оператором значение может быть проигнорировано, а может быть и использовано, если оператор входит в более сложное выражение.

Напр.,  $m[(i := 1), (j := 1)] := 1$  присвоит единицу не только верхнему левому элементу матрицы  $m$ , но и переменным  $i$  и  $j$ , а описание тождества

**цел  $i = 1 + (\text{цел } s; s := 4; s + 5)$**

заставит идентификатор  $i$  обладать числом десять. Неявные, задаваемые не программистом, а синтаксисом языка, преобразования исходных видов значений к видам, требуемым контекстом, наз. в А.-68 «приведениями». При наличии описаний **цел  $i$ ; вещ  $x$ ; [1: подв] цел  $y$ ; объ (цел, вещ)  $z$**  присваивание  $x := 1$  потребует «обобщения» целой единицы до вещественной единицы; в  $i + 1$  с единицей складывается не имя, обладаемое идентификатором  $i$ , а значение, именуемое этим именем, т. е. подразумевается «разыменование»  $i$ ; при присваивании  $y := 2$  подразумевается «укрупнение» скаляра 2 до одноэлементного вектора; присваивание  $z := x$  включает в себя, кроме разыменования, «объединение» вещественного значения до вида, объединенного из целого и вещественного.

В А.-68 оставлены лишь операторы цикла простейшего вида. Параметр цикла может быть только целым и может изменяться только регулярным образом, причем его идентификатор считается локализованным в теле цикла. Начальное значение, шаг и конечное значение параметра должны быть целыми и не могут изменяться в ходе исполнения оператора цикла. Окончание цикла может происходить по достижении параметром конечного значения и по некоторому логич. условию. Напр., оператор цикла может быть таким:

**для  $i$  от 1 шаг 2 до  $2 \times n + 1$   
пока  $a[i] \neq 0$**

**цикл (цел  $s$ ;  $s := a[i]$ ;  $a[i] := a[i + 1]$ ;  
 $a[i + 1] := s$ ).**

В простейших случаях некоторые части заголовка могут быть опущены, напр. от 1, шаг 1, пока истина.

Порядок выполнения операций в формуле определяется их приоритетом и расстановкой скобок. Стандартные бинарные операции (+, −, ×, /, ↑, >, <, ∧, ∨ и т. д.) распределены по девяти приоритетам, а унарные операции (+, −, ↑, abs и т. д.) имеют десятый, самый высший, приоритет. Имеется возможность ввести в блоке, в частности во всей программе, новую операцию или переопределить старую. Это достигается описанием операции и (для новых бинарных операций) описанием приоритета. Описание операции вводит или переопределяет операцию только для операндов тех видов, которые специфицированы в описании. Так, описание операции

**оп — = (вещ  $x$ , вещ  $y$ ) вещ: abs ( $x + (-y)$ )**

приведет к тому, что разность вещественных чисел в соответствующем блоке всегда будет браться по модулю.

В А.-68 условные предложения позволяют выбрать для исполнения одно из двух

предложений в зависимости от текущего значения некоторого логич. выражения. Каждое из двух альтернативных предложений может, конечно, тоже быть условным. Введение спец. конечного символа «илсе» устраняет двусмысленности, возникающие в связи с условными операторами АЛГОЛа-60.

Действия, составляющие исполнение частей программы, могут происходить либо последовательно, либо «совместно». Последнее означает, что взаимный порядок этих действий не определен языком. Практически это может также допускать возможность их параллельного исполнения. Совместно, как правило, могут исполняться операнды в формулах и фактические параметры в вызовах процедуры. Кроме того, в языке предусмотрены спец. «совместные предложения». Так, в следующем описании тождества справа стоит совместное предложение, заполняющее элементы константного массива:

[ ] вещь  $z = (3,5, 1,3, (\text{вещ } s: = 0; \text{ для } i$   
до  $n$  цикл  $s: = s + a[i]; s))$ .

Совместное предложение может моделировать параллельный процесс, если перед ним ставится символ пар, а внутри используются операции  $\uparrow$  и  $\downarrow$ , обеспечивающие синхронизацию исполнения отдельных ветвей этого процесса.

Программа А.-68 состоит из «собственно программы», которую пишет программист и которая заключается между «стандартным вступлением» и «стандартным заключением». Стандартное вступление содержит, в частности, описания всех операций, допустимых языком, многих стандартных видов и «запросы к обстановке», позволяющие программе обращаться к некоторым стандартным ф-циям или константам, запрашивая их о конкретной машинной «обстановке» данной реализации, напр., о практически доступном удлинении величин, о максимальных размерах величин той или иной длины и т. д. Это позволяет писать программы, автоматически настраивающиеся на разные машины. Обмен с внеш. средой также обеспечивается в А.-68 стандартными вступлением и заключением, в которых имеются процедуры, точно описывающие различные режимы ввода и вывода информации, а также редактирования этой информации в соответствии с желаемым форматом. Внеш. среда понимается при этом как некоторая совокупность «фондов», открываемых программой на каналах обмена. Физ. свойства каналов определяются реализацией и учитываются в процедурах обмена.

Язык А.-68 определен на трех уровнях: как «строгий язык», «расширенный язык» и «язык представлений». Грамматика ван Вейнгаардена, примененная для задания синтаксиса строгого языка, предусматривает наличие двух конечных семейств порождающих правил. С помощью правил первого семейства для «метапонятий» (представленных как последовательности больших букв, напр. 'ВИД') поро-

ждаются их «терминальные порождения», составленные из одних малых букв. Напр., для метапонятия 'ВИД' терминальными порождениями оказываются 'целый', 'вещественный' и бесконечное мн-во других видов (некоторые из них упоминались выше). Правила второго семейства содержат в себе вкрапленные метапонятия. При замене в данном правиле всех вхождений каждого такого метапонятия на одно и то же его терминальное порождение получается одно из порождающих правил строгого языка. Так, из правила

'присваивание вида имя ВИДА:  
получатель вида имя ВИДА,  
символ присвоить, источник вида ВИД.'

получится бесконечное мн-во правил строгого языка, если в одном случае заменить все вхождения слова 'ВИД' на 'целый', в другом случае — на 'имя логического', в третьем — на 'мульти длинное вещественное' и т. д. Последовательность малых букв, начинающаяся с 'символ', напр. 'символ присвоить', наз. «символом», а прочие последовательности, напр. 'источник вида логический' — «понятиями».

С помощью правил строгого языка из понятия 'программа' порождаются программы строгого языка как последовательности символов. Семантика строгого языка формулируется словами в терминах операций некоторой гипотетической машины, интерпретирующей синтаксические единицы программы строгого языка. Программы расширенного языка получаются из программ строгого языка применением некоторых локальных преобразований. В частности, циклы и описания тождества без правой части отсутствуют в строгом языке и возникают в расширенном как некоторые сокращения конструкций строгого языка.

В языке представлений символы как последовательности малых букв заменяются на их «представления». Так, напр., для символа 'присвоить' рекомендуются представления «:=», «.=», «.=»; в конкретной реализации может быть выбрано одно из них или какое-то совершенно новое. Вынесение языка представлений на отдельный уровень обеспечивает независимость А.-68 от особенностей печатающих устройств конкретных реализаций.

Лит.: Алгоритмический язык АЛГОЛ-68. «Кибернетика», 1969, № 6; 1970, № 1; Васильев В. А. Язык АЛГОЛ-68. М., 1972.

А. Ф. Рар.  
АЛГОРИТМ, а л г о р и ф м — точно определенное правило действий (программа), для которого задано указание, как и в какой последовательности это правило необходимо применять к исходным данным задачи, чтобы получить ее решение. Характеристиками А. являются: детерминированность (определенность) — однозначность результата процесса при заданных исходных данных; дискретность определяемого алгоритмом процесса — расчлененность его на отдельные элементарные акты, возможность выполнения которых человеком или машиной не вызывает сомнения; массовость — исходные данные для А. можно выбирать из некоторого мн-ва данных (потен-

циально бесконечного), т. е. А. должен обеспечивать решение любой задачи из класса однотипных задач. Понятие А. — одно из осн. в математике. Нахождение А. для решения различных классов задач есть одной из целей математики. Напр., всякое алгебраическое уравнение  $k$ -й степени имеет не более  $k$  разных корней. Возникает проблема нахождения А., с помощью которого, задав коэфф. уравнения, можно было бы определить, сколько именно имеет данное ур-ние корней и какой кратности, а также такого А., который позволял бы с любой наперед заданной точностью вычислить эти корни. Такие А. были найдены в алгебре: правило Штурма для определения числа вещественных корней алгебр. ур-ния и алгоритм Лобачевского для нахождения этих корней. Для других задач, напр., для некоторых типов дифф. ур-ний, соответствующий А. не найден, хотя установлено, что для всех задач данного типа решение существует. С практической точки зрения особую ценность составляют А., приводящие к решению задачи наиболее кратким путем. До появления ЭВМ А. для осуществления которых необходимо было выполнить несколько сот тысяч элементарных операций, представляли лишь теор. интерес. С применением этих машин исследования алгоритм. разрешимости различных классов задач приобрели непосредственное практическое значение.

Рассмотренное понятие А. только в общей форме характеризует вычисл. процессы, обычно описываемые в виде словесных правил, схем, формул, программ и др. Оно не является точным матем. определением, а лишь объясняет смысл слова А., в котором это слово используется в математике, поскольку в нем не определяется, что следует понимать под «правилами действия». На протяжении длительного времени понятие А. в своей основе не изменялось (хотя и приобретало все большую и большую выразительность), поскольку оно рассматривалось только в связи с построением конкретных А. и математики удовлетворялись его содержательным пониманием. Лишь в 30-х годах 20 ст. в связи с вопросами обоснования математики и с развитием *вычислительной математики и вычислительной техники* возникла необходимость в рассмотрении общих способов формализации задач и процессов их решения, в уточнении понятия А. как объекта матем. теории (см. *Алгоритмов теория*). Процесс выполнения А. наз. **алгоритмическим процессом**. Для некоторых исходных данных он заканчивается получением искомого результата после конечного числа шагов. Однако допускаются случаи, в которых процесс выполнения А. для некоторых исходных данных безрезультативно обрывается или продолжается неограниченно. Принято считать, что к этим исходным данным А. не применим. Понятие А. тесно связано с понятием «алгоритмический язык» (на котором задан А.) и понятием «правило выполнения А.» при заданных для него исходных данных. *Алгоритмический язык* и правило

выполнения А. (которое по существу само является А. и его можно назвать «алгоритмом выполнения А.») естественным образом выделяют определенное семейство А.

Каждая детерминированная вычислительная машина является автоматом, действия которого можно описать в виде некоторого А. Такой А. является А. выполнения программы указанной вычислительной машины. Сами программы можно рассматривать как некоторый класс А. При этом алгоритмическим языком является *команд система* вычислительной машины.

Н. А. Крицкий.

**АЛГОРИТМ ЛОКАЛЬНЫЙ** — алгоритм, вычисляющий свойства (*предикаты*) отдельных элементов множества и использующий на каждом шаге только информацию об окрестности какого-либо элемента. Точное определение А. л. вводится следующим образом. Пусть задано семейство  $\{M\}$  мн-в. С каждой парой  $(U, M)$ ,  $U \in M$ , сопоставим мн-во  $S(U, M)$ , которое назовем окрестностью  $U$  в  $M$ , если выполнены следующие условия:

- 1)  $U \in S(U, M)$ ,
- 2)  $S(U, M) \subseteq M$ ,
- 3) если  $U \in M_1$ ,  $U \in M_2$ ,  $S(U, M_1) \subseteq M_2 \subseteq M_1$ , то  $S(U, M_1) = S(U, M_2)$ .

В некоторых задачах для  $(U, M)$ ,  $U \in M$  вводят счетную систему окрестностей  $S_1(U, M)$ ,  $S_2(U, M)$ , ...,  $S_k(U, M)$ , .... Пусть, напр.,  $\{M_f\}$  — семейство мн-в  $M_f$ , составленных из элементарных *конъюнкций*, входящих в сокращенную *дизъюнктивную нормальную форму* (ДНФ) ф-ции  $f$ . Окрестностью  $S_1(U, M_f)$  назовем совокупность всех конъюнкций из  $M_f$ , таких, что соответствующие им интервалы имеют непустое пересечение с интервалом  $N_U$ , соответствующим конъюнкции  $U$ .

Пусть определена окрестность  $S_{k-1}(U, M_f)$   $(k-1)$ -го порядка конъюнкции  $U$  в  $M_f$ . Окрестностью  $S_k(U, M_f)$   $k$ -го порядка  $U$  в  $M_f$  назовем совокупность всех  $U_i$  из  $M_f$ , для которых выполнено одно из двух условий: 1)  $N_{\mathcal{B}} \cap N_{U_i}$  непусто, и  $\mathcal{B} \in S_{k-1}(U, M_f)$ , 2) интервал, соответствующий  $U_i$ , содержится в сумме интервалов, каждому из которых соответствует конъюнкция из  $M_f$ , удовлетворяющая условию 1). Нетрудно ввести и окрестности  $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots$  для вершин и ребер графа. Будем считать, что на парах  $(U, M)$ ,  $U \in M$  определена система двухместных предикатов  $P_1(U, M), \dots, P_l(U, M)$ , которая разбита на два непересекающихся подмножества  $\langle P_1, \dots, P_r \rangle$ ,  $\langle P_{r+1}, \dots, P_l \rangle$ . Элементы первого подмножества назовем основными предикатами, второго — вспомогательными предикатами.

Вектор  $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l)$  наз. *информационным*, если  $\alpha_i \in \{0, 1, \Delta\}$ ,  $i=1, 2, \dots, l$ . Вектор  $\alpha$  наз. *допустимым* для  $U$  в  $M$ , если для всех

$\alpha_i \neq \Delta$  выполнено равенство  $\alpha_i = P_i(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ . Мн-во  $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$  всех информационных векторов, допустимых для  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{M}$ , наз. информационным мн-вом  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{M}$ .

Пусть  $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_t\}$ ,  $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}) = \{(\alpha_{i1} \dots \alpha_{il})\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ . Мн-ва  $\mathfrak{M}^* = \{\mathfrak{A}_1^{\alpha_{i1}} \dots \alpha_{il}, \dots, \mathfrak{A}_t^{\alpha_{i1}} \dots \alpha_{il}\}$  назовем допустимыми для  $\mathfrak{M}$ . Класс  $M^* = I(\mathfrak{M})$  всех допустимых для  $\mathfrak{M}$  мн-в  $\mathfrak{M}^*$  назовем информационным классом мн-ва  $\mathfrak{M}$  по системе предикатов  $P_1, \dots, P_l$ .

Очевидно, окрестность  $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$  определяет окрестность  $S(\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l, \mathfrak{M}^*)$ . Введем систему ф-ций  $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ ;  $\varphi_i(\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l, S(\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l, \mathfrak{M}^*)) = (\beta_1 \dots \beta_l)$ .

Ф-ции  $\varphi_i$  определены на всех парах  $(\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l, S(\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l, \mathfrak{M}^*))$  таких, что  $\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l \in \mathfrak{M}^*$ ,  $\mathfrak{M}^* \in I(\mathfrak{M})$  и удовлетворяют следующим условиям:

1)  $\alpha_j = \beta_j$ , если  $j \neq i$ , 2) мн-во  $\tilde{\mathfrak{M}}$ , которое получается из  $\mathfrak{M}^*$  заменой элемента  $\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l$  на  $\mathfrak{A}^{\beta_1} \dots \beta_l$ , допустимо для  $\mathfrak{M}$  ( $\tilde{\mathfrak{M}} \in I(\mathfrak{M})$ ). Для краткости пары  $(\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l, S(\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l, \mathfrak{M}^*))$  будем обозначать  $(\mathfrak{A}, \alpha_1 \dots \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*)$ .

Введем частичную упорядоченность в некоторых мн-вах (см. Частично упорядоченное множество):

- 1)  $M_1 = \{0, 1, \Delta\}$ ,  $\Delta < 0$ ,  $\Delta < 1$ .
- 2)  $M_2$  — мн-во информационных векторов длины  $l$ :  $(\alpha_1 \dots \alpha_l) \leq (\beta_1 \dots \beta_l)$ , если  $\alpha_i \leq \beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ .
- 3) Мн-во элементов с отметками:  $\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l \leq \mathfrak{A}^{\beta_1} \dots \beta_l$  если  $(\alpha_1 \dots \alpha_l) \leq (\beta_1 \dots \beta_l)$ .
- 4) Мн-во  $M = \bigcup_{\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{M}\}} I(\mathfrak{M})$ :  $\mathfrak{M}_1 \leq \mathfrak{M}_2$ , если

ли, во-первых,  $\mathfrak{M}_1$  и  $\mathfrak{M}_2$  принадлежат одному информационному классу  $I(\mathfrak{M})$ , и, во-вторых, если  $\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l \in \mathfrak{M}_1$ ,  $\mathfrak{A}^{\beta_1} \dots \beta_l \in \mathfrak{M}_2$ , то  $(\alpha_1 \dots \alpha_l) \leq (\beta_1 \dots \beta_l)$ .

- 5) Мн-во окрестностей  $S(\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l, \mathfrak{M}^*)$ :  $S_1 = S(\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l, \mathfrak{M}_1^*) \leq S_2 = S(\mathfrak{A}^{\beta_1} \dots \beta_l, \mathfrak{M}_2^*)$ , если  $S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_1) = S(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}_2)$ , а из условий  $\mathfrak{B}^{\gamma_1} \dots \gamma_l \in S_1$ ,  $\mathfrak{B}^{\delta_1} \dots \delta_l \in S_2$  следует, что  $(\gamma_1 \dots \gamma_l) \leq (\delta_1 \dots \delta_l)$ .

Пусть  $A$  и  $B$  — элементы одного из мн-в 1) — 5).

Если  $A \leq B$  и  $B \leq A$ , то элементы  $A$  и  $B$  назовем равными по информации и обозначим  $A \approx B$ . Ф-цию  $\varphi_i(\mathfrak{A}, \alpha_1 \dots \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*)$  назовем монотонной, если из соотношения  $S_1 \leq S_2$  следует, что  $\varphi_i(\mathfrak{A}, \alpha_1 \dots \alpha_l, S_1, \mathfrak{M}_1^*) \leq \varphi_i(\mathfrak{A}, \beta_1 \dots \beta_l, S_2, \mathfrak{M}_2^*)$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ .

Для определения А. л. необходимо также ввести алгоритм упорядочивания  $A_\pi$  и  $\Delta$  — оператор по системе предикатов. Пусть  $M$  — произвольное мн-во, составленное из элементов с информационными векторами  $N = \{1,$

$2, \dots, l\}$ . Рассмотрим мн-во  $M \tilde{\times} N$  всех пар  $(\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l, j)$  таких, что  $\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l \in M$ ,  $j \in N$ ,  $\alpha_j = \Delta$ . Алгоритм  $A_\pi$  упорядочивает

мн-во  $M \tilde{\times} N$ .  $\Delta$  — оператор по системе  $i_1, \dots, i_r$  над  $\mathfrak{M}^*$  заменяет в информационных векторах всех элементов из  $\mathfrak{M}^*$  значения всех координат, кроме координат с номерами  $i_1, \dots, i_r$  на  $\Delta$ . Обозначают его  $\Delta_{i_1 \dots i_r}(\mathfrak{M}^*)$ .

Алгоритм  $A$  полностью определяется системой предикатов  $P_1, \dots, P_l$ , разбиением этой системы на основные  $P_1, \dots, P_r$  и вспомогательные  $P_{r+1}, \dots, P_l$  предикаты, системой монотонных ф-ций  $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ ,  $\varphi_i = \varphi_i(\mathfrak{A}, \alpha_1, \dots, \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*)$  и алгоритмом  $A_\pi$ .

Пусть  $\mathfrak{M}^* = \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{A}_i^{\alpha_{i1}} \dots \alpha_{il}$ ,  $\mathfrak{M}^* \in I(\mathfrak{M})$ .

Опишем первый шаг алгоритма. К мн-ву  $M \tilde{\times} N$  применим алгоритм  $A_\pi(M = \mathfrak{M}^*)$ .

Выделяем первую по порядку пару  $(\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l, j)$ , вычисляем  $\varphi_j(\mathfrak{A}, \alpha_1 \dots \alpha_l, S, \mathfrak{M}^*) = (\beta_1 \dots \beta_l)$ , элемент  $\mathfrak{A}^{\alpha_1} \dots \alpha_l$  заменяем на  $\mathfrak{A}^{\beta_1} \dots \beta_l$ . Если  $(\alpha_1 \dots \alpha_l) = (\beta_1 \dots \beta_l)$ , берем вторую по порядку пару и т. д. Если для всех элементов  $(\mathfrak{B}^{\gamma_1} \dots \gamma_l, j)$  выполнено равенство  $\varphi_j(\mathfrak{B}, \gamma_1 \dots \gamma_l, S, \mathfrak{M}^*) = (\gamma_1 \dots \gamma_l)$ , алгоритм  $A$  заканчивается после

просмотра всех пар из  $M \tilde{\times} N$ . В противном случае, после замены вектора  $(\alpha_1 \dots \alpha_l)$  на новый вектор  $(\beta_1 \dots \beta_l)$  происходит проверка — остались ли еще элементы, у которых на первых  $r$  местах в информационных векторах имеется хотя бы один символ  $\Delta$ . Если таких элементов нет, алгоритм  $A$  заканчивается. Если они есть — заканчивается первый шаг алгоритма.

Пусть выполнено  $n$  шагов алгоритма  $A$ . Описание  $(n + 1)$ -го шага в точности повторяет описание первого шага, если вместо мн-ва  $\mathfrak{M}^*$  рассматривать мн-во  $\mathfrak{M}_n^*$ , в которое перешло  $\mathfrak{M}^*$  после первых  $n$  шагов алгоритма  $A$ . В силу монотонности  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$  алгоритм закончится после конечного числа шагов.

Исходными теоремами теории А. л. являются теорема единственности и теорема существования наилучшего алгоритма. Первая теорема утверждает, что результат вычислений осн. предикатов А. л. не зависит от алгоритма  $A_\pi$  (порядка прохода элементов мн-ва  $\mathfrak{M}^*$ ). Вторая теорема утверждает существование в весьма общих предположениях наилучшего А. л., т. е. алгоритма, который по заданной фиксированной системе окрестностей вычисляет заданные осн. предикаты при фиксированных, вспомогательных предикатах всегда, когда это делает любой другой алгоритм. Эта теорема носит характер теоремы существования, т. е. прямое построение наилучшего алгоритма с использованием доказательства затруднено. Естественно поэтому попытаться по-

лучить наилучший алгоритм в явной форме. Эта задача решена лишь для отдельных случаев. Примером может быть задача построения миним. покрытий мн-ва  $M$  системой мн-в  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_r$ . Если в качестве основных предикатов рассмотреть  $P_1(\mathcal{U}, \mathcal{U}_1 \dots \mathcal{U}_r, M) - \mathcal{U}$  не входит ни в одно миним. покрытие  $M$  мн-вами из числа  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_r$ ,  $P_2(\mathcal{U}, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_r, M) - \mathcal{U}$  входит во все миним. покрытия  $M$  мн-вами из числа  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_r$ , то при пустом мн-ве вспомогательных предикатов удастся построить А. л. вычисления  $P_1, P_2$ . Решена задача вычисления свойства ребра графа входить или не входить в какой-либо тупиковый путь между двумя полюсами: построен наилучший А. л. Построены также А. л. для задач упрощения ДНФ. Эти алгоритмы вычисляют свойство элементарной конъюнкции входить или не входить в дизъюнктивную нормальную форму минимальную по окрестностям первого, второго или третьего порядка. Доказана невычислимость в классе А. л. свойства элементарной конъюнкции входить в минимальную ДНФ булевой функции. Точнее, если число предикатов, участвующих в определении А. л., равно  $l$ , а порядок (индекс) окрестности равен  $k$ , то при  $k \cdot l < \text{const} \cdot 2^n$  существует булева функция  $f(x_1 \dots x_n)$ , для которой о всякой элементарной конъюнкции, входящей в сокращенную ДНФ, алгоритм с параметрами  $k, l$  «не узнает», входит она в минимальную ДНФ или нет. При этом накладываются довольно нежесткие ограничения на вид предикатов  $P_1, \dots, P_r$ . Исследована вычислимость всех предикатов, связанных с задачей минимизации булевых функций.

Лит.: Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики. «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8; Журавлев Ю. И. Оценки сложности алгоритмов построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики. «Дискретный анализ», 1964, в. 3; Журавлев Ю. И. Локальные алгоритмы вычисления информации. «Кибернетика», 1965, № 1; 1966, № 2; Андон Ф. И. Алгоритм упрощения д. н. ф. булевых функций. «Кибернетика», 1966, № 6; Евдокимов А. А. О максимальной длине цепи в единичном  $n$ -мерном кубе. «Математические заметки», 1969, т. 6, в. 3; Хуторянская И. В. Некоторые вопросы теории локальных алгоритмов на графах. «Кибернетика», 1971, № 1. Ю. И. Журавлев.

**АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ** — конечная система правил, позволяющая по результатам измерений определенных признаков объектов распознавания определить, к какому из возможных классов объектов принадлежит каждый данный объект. См. *Решающее правило* в распознавании образов.

**АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ** — составление математического описания (модели математической) производственного процесса. Источником исходной информации для А. п. п. служат теоретические и экспериментальные данные, а также эвристические, неформальные сведения об изучаемом процессе. Эта информация может быть получена заранее (априорные данные) и непосредственно в процессе исследования (апостериорные данные). Как пра-

вило, для сложных промышленных систем характерны большие объемы и априорных, и апостериорных данных и значительная доля эвристической информации. Поэтому при А. п. п. стремятся максимально использовать средства *вычислительной техники* для обработки больших массивов экспериментальной и теоретической информации. Однако в общем процессе изучения сложных производств существенную роль продолжает играть человек — специалист в данной области А. п. п., функции которого пока трудно передать вычислительной машине. По этим же причинам А. п. п. часто протекает по индивидуальной схеме, наиболее рациональной для данного сложного объекта и конкретных условий данного исследования. Наиболее распространенная схема А. п. п. содержит следующие типичные этапы: 1) предварительный анализ задачи алгоритмизации и объекта исследования; 2) структурное описание исследуемого производственного процесса; 3) теоретический анализ уравнений связи между параметрами процесса; 4) экспериментальное определение статических и динамических характеристик процесса; 5) моделирование процесса и проверка адекватности (соответствия) математического описания реальному производству; 6) анализ полученной математической модели и выработка рекомендаций по улучшению производственного процесса; 7) формирование оптимальных алгоритмов на основании рекомендаций предыдущего этапа; 8) проверку и корректировку алгоритмического обеспечения системы управления производственным процессом в условиях эксплуатации системы.

На стадии предварительного анализа выясняются цели и основные этапы исследования, оценивается ожидаемая экономическая эффективность и целесообразность принятой схемы изучения объекта и результатов его алгоритмического анализа и др. общие вопросы. При этом в условиях значительной неполноты информации особенно важно использовать имеющиеся эвристические сведения и опыт исследователей. Здесь эффективно применяются методы, связанные с системным подходом к изучению сложных систем, с теорией их организации. В частности, используется метод последовательной формализации описаний производственного процесса, при котором по мере накопления информации о процессе осуществляется переход к новому уровню формализации и детализации математической модели. Этап структурного описания и анализа связан с применением методов сетевых представлений (блок-схемы, *графы*) для отображения связей, существующих между параметрами и элементами производственного процесса. На 3-м и 4-м этапах применяются методы идентификации динамических и статических характеристик, связанные, в частности, с теорией *статистических оценок*, регрессионным и факторным анализом. При этом используются накопленные данные по описанию физикотехнических закономерностей в данной области производственных процессов. В анализе и

оптимизации моделей применяются индивидуальные приемы решения, зависящие от конкретной задачи, и методы исследования операций, в частности теория статистических решений, *программирование линейное и программирование динамическое*. Часто эти этапы являются завершающими, т. к. многие производственные процессы дают наибольший эффект сразу после однократной оптимизации режима или реорганизации производства, ликвидирующей узкие места. Последние этапы (7—8) выполняются в том случае, когда обоснована целесообразность применения управляющей и вычислительной техники для автоматизации исследуемого производственного процесса.

*Лит.:* Алгоритмизация производственных процессов, [в. 1—15]. К., 1963—69; Ордынцев В. М. Математическое описание объектов автоматизации. М., 1965 [библиогр. с. 355—357]; Иванов В. В., Кулик В. Т. Состояние и развитие работ по алгоритмизации производственных процессов. «Механизация и автоматизация управления», 1967, № 6; Кулик В. Т. Алгоритмизация объектов управления. Справочник. К., 1968 [библиогр. с. 335—343].

В. Т. Кулик.

**АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ТВОРЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ** — составление алгоритмов и программ для реализации на электронных вычислительных машинах процессов, относимых в психологии мышления к продуктивным (творческим). В более узком смысле — под А. т. п. понимают моделирование на ЦВМ процессов, имитирующих сочинение лит., музыкальных, художественных и др. произведений, относимых к сфере искусства. В широком смысле к А. т. п. относят моделирование целесообразного поведения, решение задач *распознавания образов*, решение задач по принятию решений и т. п.

Основой А. т. п. является *программирование эвристическое*, состоящее в построении алгоритмов и программ на основе анализа деятельности человека при решении аналогичных задач. Этот анализ носит внеш. характер и не затрагивает сути процессов, происходящих в мозгу человека при решении задач. Основой творческого мышления человека является наличие в мозгу модели проблемной ситуации, над которой он может производить необходимые операции (обобщение, абстрагирование, индуктивные построения, рассуждения по аналогии и т. д.). В современных ЭВМ пока нет средств отображения информации, которые обеспечивали бы построение в памяти машины модели проблемной ситуации или модели внеш. мира. Поэтому сама машина может выступать при имитации творческих актов лишь как исполнитель того алгоритма, который закладывает в нее программист. Однако помощь машины может оказаться полезной при организации перебора, позволяющего находить различные варианты решения творческой задачи. Напр., заложив в машину правила гармонии Палестрины, можно с их помощью получать различные музыкальные произведения, гетерируя последовательность нот с помощью датчика случайных чисел и отбирая из этой случайной последовательности лишь те сочетания, которые удовлетворяют прави-

лам построения муз. фразы. Аналогично, заложив в память машины определенные ритмические правила и правила рифмовки, можно получать на машине различные стихотворные произведения, генерируя слова с помощью того же датчика случайных чисел (конечно, при этом нет никакой надежды получить семантически значимое стихотворение). Для того, чтобы А. т. п. была эффективной, необходимо тщательно изучить алгоритмизируемый процесс и выявить все осн. приемы, использование которых может привести к цели. Если удастся выявить всю совокупность этих приемов, то процесс полностью формализуется и перестает быть продуктивным. Примером такого превращения творческого процесса в репродуктивный, машинный процесс, может служить программа Ван Хао для доказательства теорем *исчисления высказываний*. Полная формализация привела к тому, что ЦВМ в процессе своей работы может доказать все предложения, мыслимые в исчислении высказываний с выбранной системой аксиом и правил вывода. Другим примером подобного типа может служить программа Стретчи для игры в шашки. В соответствии с ней машина может играть в шашки без ошибок, т. к. все варианты развития партий в ней уже заложены. Однако путь полной формализации задачи, к сожалению, не всегда возможен и зачастую вреден. При большом разнообразии ситуаций, складывающихся в процессе решения творческой задачи, при большом числе возможностей продолжения процесса поиска результата и при нечетких критериях оценки качества полученного решения формализация может стать бесполезной, и тогда более эффективным является наличие некоторой неопределенности и недетерминированности при решении задачи. При А. т. п. возможно появление участков, которые пока не поддаются алгоритмизации. Поэтому современные программы, имитирующие творческий процесс, как правило, реализуются в *диалоге режиме* в человеко-машинных системах переработки информации. См. также *Взаимодействие человека с вычислительной машиной*.

*Лит.:* Пушкин В. Н. Эвристика — наука о творческом мышлении. М., 1957; Гутчин И. Б. Кибернетические модели творчества. М., 1969 [библиогр. с. 61—62]; Зарипов Р. Х. Кибернетика и музыка. М., 1971 [библиогр. с. 226—231]; Ледли Р. С. Программирование и использование цифровых вычислительных машин. Пер. с англ. М., 1966 [библиогр. с. 628—630].

Д. А. Поспелов.

**АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ЦВМ** — система функциональных средств и принципов, на которых базируется процесс переработки информации в ЦВМ на уровнях операций над словами и над более крупными единицами информации. *Алгоритмы*, относящиеся к компонентам А. с. ЦВМ, в отличие от вводимых алгоритмов (программ), выполнением которых они управляют, фиксируются в машине структурным способом, т. е. входят в состав *математического обеспечения ЦВМ внутреннего*.

А. с. ЦВМ может быть описана с различной степенью детализации. Наиболее детальному описанию соответствует схема машины, состав-



ленная из блоков, выполняющих операции над отд. словами, т. е. блоков типа *регистров*, *счетчиков*, *сумматоров*, *дешифраторов*, а также управляющих автоматов, в виде простых композиций этих блоков. Наименее детализируемым уровнем, связанным с системой организации вычисл. процесса в ЦВМ, является т. н. архитектура машины. Эта архитектура определяется осн. принципами переработки информации на уровне операций над *массивами* и задачами в целом (типа «ввести массив», «решить задачу» и т. п.). К структурным единицам архитектуры (применительно к машине высокого класса) относятся: центральный *процессор*, предназначенный для задаваемой обработки информации, система *запоминающих устройств*, системы устройств ввода и вывода, включая выносные пульта и вспомогательные процессоры для управления, обменом информации, первичной обработки вводимой информации и надлежащего оформления выводимых результатов.

Вспомогательные процессоры иногда конструктивно вписываются в состав центр. процессора либо вообще отсутствуют, т. е. указанные функции центр. процессор выполняет в разрывах процесса заданной обработки информации. С др. стороны, в состав центр. процессора может входить ряд одновременно работающих устройств переработки информации, возможно, с различным функциональным назначением (такой процессор наз. иногда мультипроцессором).

Осн. понятия, которыми характеризуют А. с. ЦВМ, делят на две группы: 1) представление задач; 2) организация вычисл. процесса. 1-я группа составляет программный уровень внутреннего языка машины, на котором выражены выполняемые ею задания, а 2-я группа определяет, каким образом в машине будут реализованы задания, формулируемые пользователем.

К 1-й группе относятся следующие характеристики: структура *машинных слов*, *система счисления*, способ учета порядка, система операций, структура командных слов, структура программного уровня внутр. языка, способ представления рабочей (интерпретируемой и исполняемой) *программы*; 2-я группа объединяет следующие характеристики: способ трансляции исходной программы, методику выполнения машинных операций, систему структурной интерпретации (включая управление операциями), структуру *памяти ЦВМ* и систему размещения информации, систему контроля, систему ввода и вывода информации, систему совмещения процессов обработки информации, систему обслуживания пользователей (взаимодействия машины с операторами), систему общего управления вычислительным процессом.

Существует ряд значений характеристик А. с. ЦВМ. Машинные слова по их структуре делят на два класса: не разделенные на символы и разделенные на символы. Коды символов имеют значения букв либо не двоичных цифр и состоят из двоичных раз-

рядов. Разделение на символы ведут непосредственным доступом к каждому из них. Система счисления обычно применяется двух видов — двоичная и двоично-десятичная с тем или иным способом кодирования десятичных цифр. Второй вид системы счисления сочетается с символьной структурой машинных слов. Среди различных способов учета порядков четко выделяются два главных — с «плавающей» запятой (т. е. с указанием ее места) и с запятой, фиксированной перед первым, старшим разрядом, причем первый способ преобладает в универсальных, а второй — в специализированных машинах.

Система операций охватывает класс арифметических и логических операций над словами, а также и операций над строками, символами и разрядами, либо и более сложные операции типа встроенных стандартных процедур, состоящих из перечисленных базисных операций (элементарные функции, операции над кодами с повышенной разрядностью, над комплексными числами, матрично-векторные операции и т. п.). Существенное отличие всех стандартных процедур — запоминание в процессе их выполнения ряда результатов базисных операций (в качестве промежуточных), а для матрично-векторных операций, кроме того, многокомпонентность исходных данных. Помимо осн. операций по переработке информации, обусловленной методами решения задач, в системе операций предусматриваются и вспомогательные операции, которые готовят для основных операций исходные данные, определяют дальнейшие действия по программе и др. (например, вычисления адресов операндов).

Структура командных слов определяется в первую очередь к-вом адресов в слове, т. н. адресностью команды, и способом указания следующей команды. Кроме того, различаются жесткие операционно-адресные и гибкие (предусматривающие различные классы командных слов) типы этих структур в языках *ЦВМ внутренних*, близких к языкам программирования.

Структура программного уровня внутр. языка определяется его общей ориентацией либо на пользователя, записывающего программу на языке программирования, либо на исполнительную часть машины, которой требуется конкретизированная запись необходимых действий, предусмотренных алгоритмом задачи, в последовательности их выполнения. Последний тип соответствует традиционным внутр. языкам, первый тип — внутр. языкам, развитым в направлении сближения их с языками программирования. В данном случае структура внутр. языка обуславливается степенью его приближения к этим языкам. Общие свойства внутр. языков при большой степени их приближения к языкам программирования следующие: естественная запись выражений, зависимость содержания операционных знаков от контекста, условная адресация с помощью



символьного обозначения величин, развитая система машинных операций, охватывающая широкий класс стандартных процедур.

Способов представления рабочей программы существует несколько. Главные из них: представление в виде машинных кодов в памяти машины и в виде набора соединений на спец. коммутационной панели. Первый — доминирующий, второй встречается лишь в настольных, а также в некоторых специализированных машинах.

Различают два главных способа трансляции исходной программы — программный и структурный способы, причем второй характерен для машин с развитыми внутр. языками и микропрограммным управлением, ориентированным на применяемые языки программирования, а первый способ — для машин без такой ориентации. В одной и той же машине для различных языков программирования могут быть использованы различные способы трансляции.

Методика выполнения операций определяется в зависимости от требований к машине по быстротедействию и аппаратным затратам с учетом затрат времени на интерпретацию программы. Различают три осн. класса методов — последовательные, последовательно-параллельные и параллельные методы. В современных универсальных ЦВМ обычно применяются методы 2-го класса.

Система структурной интерпретации зависит от программного уровня внутр. языка машин и, в свою очередь, обуславливает его промежуточные микропрограммные уровни. В соответствии с этим выделяют развитые системы структурной интерпретации, которые, кроме подсистемы управления операциями, характеризуются наличием анализирующей части. Различают простые и многоступенчатые микропрограммные системы управления операциями. По способу действия они бывают системами централизованного, централизованно-автономного и автономного управления операциями с синхронным либо асинхронным временными циклами работы. Для больших и средних универсальных машин, как правило, характерны два последних способа с преимущественным использованием асинхронных циклов.

Структура памяти и система размещения информации определяется к-вом, назначением и взаимодействием запоминающих устройств в машине, способами обращения к ним, способами распределения памяти и адресации величин. Автомат. способы выполнения последних двух функций делятся на два класса — статическая реализация, т. е. заранее планируемая реализация этих функций, и динамическая — в ходе решения задач. Кроме того, различают типы программной и структурной систем размещения информации. Статические способы, как правило, связываются с программной реализацией в процессе трансляции, динамические — со структурной реализацией в процессе интерпретации.

Система контроля (текущего и диагностич.) определяется способами обнаружения неисправностей и разовых отказов в процессе решения задач, возможностью и способами автомат. коррекции ошибок, методикой диагностирования их причин и проведения контроля в процессе профилактики.

Система ввода и вывода информации определяется способами физ. перекодирования информации, к-вом и назначением вводных и выводных устр-в, структурой их связей с ЗУ и центр. процессором.

Система совмещения процессов обработки информации, свойственная высокопроизводительным машинам, определяется возможностями и способами совмещения во времени процессов решения задач, ввода исходных данных и вывода результатов вычислений. Перечисленное обеспечивается с учетом *приоритета* задач и эффективности загрузки устр-в машины. Наиболее развитые системы совмещения обеспечивают возможность распараллеливания каждого из указанных процессов за счет реализации соответствующих процессоров в виде агрегатов автономных одновременно работающих устройств. Мультипрограммный и мультипроцессорный способы обработки информации являются характерными видами совмещения процессов в больших ЦВМ, причем второй из них, как правило, включает и первый.

Система обслуживания пользователей определяется выбранной «технологией» работы с машиной. Различают два вида матем. эксплуатации машин — режим работы машины по полным крупным заданиям и режим «диалога» пользователя с машиной (либо режим их совместной работы как «интенсивного диалога»). Применительно к машинам с мультипрограммной обработкой информации, первый вид матем. эксплуатации машин связан с режимом *пакетной обработки информации*, а второй вид — с режимом *разделения времени* между пользователями. Возможно также совмещение этих двух осн. режимов. Организация связи пользователей с машиной и всего процесса ее работы выполняется *операционными системами*, различные виды которых соответствуют назначению машин и «технологии» их эксплуатации.

Система общего управления вычислительным процессом представляет собой принципы реализации операционной системы в машине. Различают программные, программно-структурные и структурные системы общего управления. У первых программы операционной системы выполняются на общем оборудовании, у остальных это обеспечивается частично или полностью спец. оборудованием. Последние два вида в большей степени соответствуют общей тенденции развития структур ЦВМ.

Набор значений (содержание) указанных характеристик определяет А. с. ЦВМ. На основе целесообразного сочетания типовых значений характеристик могут быть образованы типовые А. с. ЦВМ.

Лит.: Лебедев С. А., Мельников В. А. Общее описание БЭСМ и методика выполнения операций. М., 1959; Майоров С. А., Новиков Г. И. Структура цифровых вычислительных машин. Л., 1970; Анисимов Б. В., Четвериков В. Н. Основы теории и проектирования цифровых вычислительных машин. М., 1965 [библиогр. с. 480]; Каган Б. М., Каневский М. М. Цифровые вычислительные машины и системы. М., 1973 [библиогр. с. 666—672]; Папернов А. А. Логические основы цифровых машин и программирования. М., 1968 [библиогр. с. 583—585]; Глушков В. М. [и др.]. Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации. К., 1970 [библиогр. с. 254—257]; Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]; Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [библиогр. с. 299—301].

З. Л. Рабинович.

**АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЦВМ** — описание на формальном языке функционирования *цифровых вычислительных машин* и определение основных характеристик будущих машин. А. с. ЦВМ представляет собой второй этап в проектировании вычислительных машин. На первом этапе определяется архитектура машины, набор операций, реализуемых ею, декомпозиция будущей структуры машины на крупные блоки (устр-ва), скорости работы устр-в и т. п. На этапе А. с. ЦВМ функционирование каждого устр-ва и взаимодействие между ними описывается на специализированном языке *формальном*. Это описание служит исходным данным для последующего этапа — синтеза ЦВМ — *блочного синтеза ЦВМ*. Известно несколько формальных языков, пригодных для этапа А. с. ЦВМ: ЛОТИС, ЛОКС, АЛОС и др. Общим для всех этих языков является принцип *блочности*. Описание каждого блока (устр-ва, узла) происходит независимо от остальных. Связь между блоками осуществляется при помощи общих переменных, сопоставляемых с наборами значений сигналов на входных и выходных каналах блока. В описании каждого блока имеется описание внутр. переменных блока, операторов, реализуемых блоком, и некоторых временных соотношений (последнее имеется не во всех языках). Значения внеш. каналов блока соответствуют значениям внеш. переменных в описании, а значения внутр. переменных блока — значениям, фиксируемым на некоторых условных *регистрах*, имеющих в данном блоке. Описание, получаемое на этапе А. с. ЦВМ, должно быть полным и непротиворечивым. Проблема проверки полноты и непротиворечивости формального описания является весьма трудной и не получила еще решения. Совокупность описания устр-в на формальном языке и описания связей между ними определяет *алгоритмическую структуру ЦВМ*. Последняя служит исходным объектом для моделирования проектируемой ЦВМ на другой реально существующей ЦВМ при реальном потоке программ с интерпретацией функционирования системы команд и структуры проектируемой машины средствами машины, на которой происходит моделирование структур цифровой вычислительной машины. Выполнение этапа А. с. ЦВМ сводится не только к описанию и моделированию алгоритмов, но требует разработки алго-

ритмов функционирования устр-в вычисл. машин и решения таких задач, как, напр., выбор состава микроопераций, определение состава регистров и их назначения, решение оптимизационных задач, в частности, повышение быстродействия устр-ва в результате параллельного выполнения операций и т. д. См. также *Автоматизация проектирования ЦВМ*.

Д. А. Поспелов.

**АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ ЯЗЫК** — формальный язык, предназначенный для записи *алгоритмов*. Использование А. я. основано на возможности формального задания правил конструирования алгоритмов. При формальном описании алгоритмов существенная роль принадлежит выбору способа записи (кодирования) перерабатываемой информации и задания алгоритм. предписаний — элементарных шагов алгоритма, из которых он конструируется. А. я. определяется заданием алфавита (или словаря исходных символов), точным описанием его синтаксиса (грамматики) и семантики. Некоторый непустой подалфавит А. я. используется для кодирования исходной (перерабатываемой) информации. Известно, что даже двухбуквенный алфавит достаточен для кодирования любой информации. Однако указанный алфавит обычно расширяется для возможности более удобного и экономного кодирования. Правила преобразования информации в различных алгоритмах весьма разнообразны и качественно различны. Однако все конкретные алгоритмы могут быть составлены из весьма небольшого числа элементарных предписаний. Наборы предписаний, из которых могут быть построены любые мыслимые алгоритмы, наз. *алгоритмически полными*. А. я. наз. *универсальным*, если в нем может быть описан алгоритмически полный набор предписаний (а тем самым любой алгоритм). Задание универсального А. я. равносильно заданию алгоритм. системы, т. е. общего способа записи алгоритмов.

Специфика А. я. выражается, гл. о., в его семантике и заключается в том, что предложения языка должны быть алгоритмами, т. е. последовательностями предписаний, при помощи которых осуществляется переработка информации (реализуется алфавитное отображение). В каждом А. я. должны быть средства для задания *операторов*, осуществляющих переработку информации, и операторов перехода (распознавателей), определяющих порядок выполнения этих операторов. Операторы, в свою очередь, могут обозначать последовательности др. более элементарных операций. Напр., оператор умножения многозначных чисел обозначает последовательность некоторых действий над однозначными числами.

Языки, с помощью которых строятся классические алгоритм. системы (*нормальные алгорифмы* Маркова, *рекурсивные функции*, *Тьюринга машины*, *Поста машины* и др.), несмотря на их универсальность, оказались практически неприемлемыми для описания алгоритмов решения задач при их реализации

на ЦВМ. Данное обстоятельство является результатом того, что все эти системы ориентированы на рассмотрение фундаментальных теоретических вопросов *алгоритмов теории* и уже запись одного сколько-нибудь сложного алгоритма в любой из этих систем представляет собой самостоятельную трудную задачу. В связи с этим решение практических задач с помощью ЦВМ вызвало появление большого числа работ, посвященных созданию т. н. *языков программирования*, для которых А. я. служат теор. основой.

Е. Л. Ющенко.

**АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦВМ** — один из этапов проектирования ЦВМ. См. *Автоматизация проектирования ЦВМ*.

**АЛГОРИТМОВ ГРАФ-СХЕМЫ**, *граф-схемы алгоритмов* — способы задания классов алгоритмов, фиксирующие в своем определении те или иные структурные свойства алгоритмов, абстрагируясь от остальных свойств, определяющих индивидуальность данного алгоритма. Конкретные алгоритмы получаются из А. г.-с. той или иной интерпретацией компонент схемы. Структурные свойства алгоритмов задаются в виде отношения порядка на мн-ве операторов — порядка их выполнения. Это отношение порядка можно представить в виде *графа*, каждой вершине которого поставлен в соответствие оператор, а стрелки между вершинами интерпретируются как утверждение о возможности выполнения одного оператора непосредственно после другого. Этот граф такой, что каждая вершина его имеет не более двух преемников. Одна из вершин выделена как начальная и одна как конечная. При интерпретации А. г.-с. вершине с одним преемником, называемой преобразователем, ставится в соответствие оператор преобразования информации, а вершине с двумя преемниками, называемой распознавателем, — предикат распознавания свойства информации.

Первые понятия и проблемы, относящиеся к А. г.-с., связанные с их формальными преобразованиями для целей программирования, ввели в 1956 сов. математики А. А. Ляпунов и Ю. И. Янов и в 1959 Л. А. Калужнин. Первым классом, подвергнутым систематическому изучению, был подкласс А. г.-с., в которых распознавателями являются *булевы функции* переменных  $p_1, \dots, p_n$ , а для каждого преобразователя указывается, какие из  $p_1, \dots, p_n$  он может изменять. В качестве инварианта рассматривалось мн-во путей в графе переходов, в которых учитываются только преобразователи и значения переменных  $p_1, \dots, p_n$ . При этом определении эквивалентности была построена полная система преобразований в условиях линейной записи. А. г.-с., предложенные Ю. И. Яновым, легли в основу многих исследований. Они касались усовершенствования системы преобразований, доказательства независимости отдельных преобразований и распространения теории на случаи, когда между операторами схемы и их композициями допускаются отношения тождества, описывае-

мые некоторой полугруппой над мн-вом операторов. Понятие А. г.-с. явилось источником различных обобщений и модификаций, приспособленных для целей теоретического программирования, привело к формулировке таких важных понятий, как *операторные схемы* и *алгоритмов схемы*.

Лит.: К а л у ж н и н Л. А. Об алгоритмизации математических задач. «Проблемы кибернетики», 1959, в. 2; Е р ш о в А. П., Л я п у н о в А. А. О формализации понятия программы. «Кибернетика», 1967, № 5.

А. П. Ершов.

**АЛГОРИТМОВ РАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ** — формальные преобразования, позволяющие преобразовать заданный алгоритм в алгоритм, эквивалентный в расширенном смысле заданному. При этом под эквивалентностью в расширенном смысле понимают свойство *алгоритмов* перерабатывать эквивалентные исходные данные в эквивалентные результаты. Сущность эквивалентности исходных данных и, соответственно, результатов определяется конкретно для каждого класса алгоритмов. Обычно исходные данные (результаты) двух алгоритмов считаются эквивалентными, если с помощью некоторого достаточного простого приема эти данные можно преобразовать друг в друга. Графическое тождество исходных данных является частным случаем их эквивалентности, а *алгоритмов эквивалентность* — частным случаем равносильности алгоритмов. При А. р. п. каждый преобразуемый алгоритм рассматривают в совокупности с областью его задания, которая может составлять лишь часть области его применимости (т. е. в совокупности с допустимыми исходными данными задачи). Это приводит к тому, что равносильные алгоритмы (эквивалентные в расширенном смысле), исходные данные и результаты которых соответственно совпадают, могут все же не быть эквивалентными (напр., в случае несовпадения области их применимости).

А. р. п. являются наиболее важным приемом, используемым при программировании и осуществляемым, как правило, на содержательном уровне, а не формальным путем. Существуют три этапа в работе по программированию: описание, получение и преобразование алгоритма. Этап описания задачи на входном языке программирования не формализован и производится составителем программы на основе его опыта и интуиции. Следующим этапом является внесение улучшений в полученный алгоритм в рамках избранного входного языка (на практике эти этапы обычно перемежаются). Третьим, последним, этапом являются равносильные преобразования полученного алгоритма в программу (т. е. в алгоритм на языке машинном), что осуществляется формально самой ЭВМ с помощью спец. программы, наз. *транслятором*. Таким образом, при программировании используются А. р. п., связанные с изменением языков и производимые без изменения языков (в дальнейшем, говоря об А. р. п., имеют в виду только преобразования, производимые без изменения языков).

Первые исследования в области А. р. п. производились применительно к алгоритмам, заданным на языке логических схем (ЯЛС), который, собственно, и возник как язык описания дискретных процессов (в частности, как входной язык программирования), удобный для А. р. п. Затем изучались А. р. п. при использовании *адресного языка* программирования. Отдельные вопросы А. р. п. разрабатывались при создании трансляторов. При создании программ *информационно-поисковых систем* были разработаны некоторые приемы А. р. п., позволившие предусматривать автоматические равносильные преобразования отдельных частей программ для ускорения процесса поиска информации. Целесообразность такого приема обусловлена тем обстоятельством, что наилучший вид программ поиска не всегда можно определить заранее, из-за изменчивости *массива* информации, в котором производится поиск.

Точное определение понятия А. р. п. зависит от языков, на которых формально описываются алгоритмы, исходные данные к ним и их результаты, т. е. лежащие в основе понятия эквивалентности исходных данных (результатов) простые приемы их преобразования друг в друга связаны с особенностями этих языков. При А. р. п. в случае ЯЛС, исходными данными и результатами являются т. н. состояния памяти, которые записываются в виде последовательностей равенств вида  $x_i = \xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  — число ячеек памяти, занятых информацией,  $x_i$  — названия ячеек,  $\xi_i$  — их состояния (содержащаяся в ячейках информация), а знак равенства употребляется в смысле «имеет значение». Для такой формы исходных данных и результатов вполне естественно весьма простыми считать следующие приемы: переименование ячеек (в частности, тождественное переименование, т. е. сохранение их названий); включение в исходные данные ячеек, не используемых в преобразуемом алгоритме; удаление из исходных данных таких фиктивных ячеек; совмещение ячеек, если заранее известно, что в любом варианте исходных данных (результатов) состояния этих ячеек тождественны между собой; включение в исходные данные или результаты ячеек, состояния которых при любом варианте тождественны с состояниями уже имеющихся ячеек. В ЯЛС *эквивалентные преобразования* входят в понятие А. р. п. Расширение понятия эквивалентности алгоритмов, связанное с описанным выше пониманием эквивалентности исходных данных (и результатов), а также с тем, что рассматриваются не области применимости, а более узкие области задания алгоритмов, значительно расширяет возможности А. р. п. по сравнению с возможностями их эквивалентных преобразований.

Алгоритмы, заданные на ЯЛС, обычно подвергаются А. р. п. с целью экономии расхода времени на их выполнение (а, следовательно, и машинного времени) или экономии необходимых объемов *запоминающих устройств*.

В первом случае при А. р. п. добиваются уменьшения числа операций, необходимых для получения искомого результата, во втором — уменьшения общего числа ячеек, используемых при выполнении алгоритма (иногда вместо этого минимизируют общее число ячеек, т. е. их названий, фигурирующих в записи алгоритма).

Алгоритм на ЯЛС задают в виде конечной строки, образованной из операторов (описывающих действия) и знаков перехода (позволяющих при выполнении алгоритма определить порядок выполнения операторов). А. р. п. в случае применения ЯЛС делят на следующие группы: 1) равносильные преобразования отдельных операторов; 2) А. р. п., не вызывающие внутренних изменений операторов (преобразования логических схем алгоритмов); 3) А. р. п., связанные с преобразованиями логических операторов; 4) А. р. п., связанные с преобразованиями нелогических операторов; 5) перестановка операторов; 6) А. р. п., учитывающие подчиненность операторов условиям (оператор подчинен некоторому условию, если его выполнение возможно тогда, когда утверждение, содержащееся в условии, является истинным).

Описанная система А. р. п. полная для прямых или спрямляемых алгоритмов в том смысле, что коль скоро два такие алгоритма эквивалентны в расширенном смысле, то с помощью конечного числа А. р. п. любой из них можно преобразовать в другой. При этом алгоритмы, заданные на ЯЛС, наз. *спрямляемыми*, если с помощью конечного числа преобразований их можно свести к прямым, т. е. к алгоритмам, при выполнении которых после работы к.-л. оператора не может работать ни один оператор, расположенный в строке левее от него. Вопрос о полноте системы А. р. п. для любых алгоритмов, заданных на ЯЛС, не решен. Проблема определения равносильности (эквивалентности в расширенном смысле) алгоритмов, заданных на ЯЛС, эквивалентна широко известной проблеме тождества и, следовательно, относится к *неразрешимым алгоритмическим проблемам*.

В адресном языке программирования, как и в ЯЛС, исходными данными и результатами являются состояния памяти (*коды*, на множестве которых задана штрих-функция и которые представляют собой названия ячеек ЯЛС, а значения штрих-функции соответствуют состояниям ячеек). Отличие адресного языка от ЯЛС (кроме некоторых синтаксических различий) заключается в том, что в качестве состояний ячеек могут выступать, кроме объектов (величин), также названия ячеек (т. е. «ячейки» могут содержать в себе названия ячеек). Понятие эквивалентности исходных данных (результатов) для алгоритмов, заданных на адресном языке и на ЯЛС, является общим. Однако *операторы элементарные* (из которых образуются все другие операторы) на ЯЛС являются частными случаями элементарных операторов адресного языка (в ЯЛС элементарный оператор задается в виде записи  $x_i :=$

$= f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которая эквивалентна записи на адресном языке  $f('x_1, 'x_2, \dots, 'x_n) \Rightarrow \Rightarrow x_i$ , являющейся частным случаем записи элементарного оператора  $\Phi \Rightarrow F$ ). Последнее обстоятельство приводит к тому, что систему А. р. п., разработанную для алгоритмов, заданных на ЯЛС, непосредственно нельзя переносить на алгоритмы адресного языка, так что разработка А. р. п. для адресного языка явилась самостоятельной проблемой.

Область приложений А. р. п. не ограничивается программированием. А. р. п. являются ценным аппаратом при практической алгоритмизации, напр., творческих процессов (см. *Алгоритмизация творческих процессов*). В ряде случаев в результате анализа реальных процессов (напр., процессов управления) их удается описать в виде сложных алгоритмов, выполнить которые практически невозможно. Только после А. р. п. удается получить из них алгоритмы, пригодные для использования. На практике приходится иметь дело с направленными А. р. п., преследующими цель оптимизации алгоритма по к.-л. заданному критерию. Разработка алгоритмов направленного применения А. р. п. представляет группу важнейших математических проблем кибернетики. Результаты, полученные в этой области, еще незначительны (напр., к ним относится направленное применение А. р. п. при поиске информации, выполняемое самой ЭВМ, и некоторые др.). Однако и там, где алгоритмы направленных преобразований еще не найдены, направленные А. р. п. можно производить, правда не самими ЭВМ в автомат. режиме, а с участием людей. Поиск необходимой последовательности А. р. п. можно осуществлять эвристическими методами (по интуиции, догадкам и пробам) с помощью ЭВМ, которая по спец. программам и приказам, вводимым в нее математиком, должна производить трудоемкие преобразования введенного в ее память алгоритма и выдавать информацию о полученных результатах.

Лит.: Поршнева В. Н. Об эквивалентных преобразованиях адресных комплексов. В кн.: Цифровая вычислительная техника и программирование, в. 2. М., 1967; Крицкий Н. А. Равносильные преобразования алгоритмов и программирование. М., 1970.

Н. А. Крицкий.

**АЛГОРИТМОВ СЛОЖНОСТЬ** — величина, характеризующая сложность (длину) описания данного алгоритма (в отличие от сигнализирующей ф-ции, которая характеризует сложность процесса вычисления, осуществляемого по данному алгоритму). Это понятие сложности, в зависимости от точной концепции алгоритма, может быть различными способами уточнено. Единого, устоявшегося уточнения к настоящему моменту не существует. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи.

Под сложностью нормального алгоритма обычно понимают длину его изображения, т. е. длину записи всех его формул подстановок в одну строку (между формулами проставляется спец. разделительная буква). Под сложностью Тью-

ринга машины обычно понимают число ее внутр. состояний. Иногда для характеристики сложности машины Тьюринга используют число команд данной машины.

Предложено также и аксиоматическое определение А. с. Рассмотрим это определение применительно к машинам Тьюринга. Пусть  $M_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) — допустимая геделевская нумерация машин Тьюринга. Эту нумерацию можно представить себе такой, при которой по номеру машины можно эффективно восстановить машину (т. е. ее программу), а по машине (т. е. по программе) — ее номер. Общерекурсивная ф-ция  $s$  наз. мерой сложности машин тогда и только тогда, когда для любого  $u$  существует не более чем конечное число машин, которые имеют сложность  $u$ , и когда существует эффективная процедура, которая для любого  $u$  позволяет определить все те машины, которые имеют сложность  $u$ .

Пусть  $s$  — произвольная мера сложности машины Тьюринга. Легко доказать, напр., следующее утверждение. Если  $U$  — произвольный эффективно перечислимый класс машин Тьюринга, то существует машина  $T$ , принадлежащая  $U$ , и существует машина  $T'$  (не обязательно из  $U$ ) такая, что  $T'$  и  $T$  вычисляют одну и ту же ф-цию и сложность  $T'$  меньше, чем сложность  $T$ . Сформулируем еще некоторые результаты. Пусть под сложностью нормальных алгоритмов и машин Тьюринга понимается соответственно длина изображения и число внутр. состояний. Тогда любую ф-цию алгебры логики от  $N$  переменных можно реализовать нормальным алгоритмом в  $m$ -

буквенном алфавите со сложностью  $\sim \frac{2^N}{\log_2 m}$  и машиной Тьюринга с  $m$ -буквенным внеш. ал-

фавитом со сложностью  $\sim \frac{2^N}{N(m-1)}$ .

Изучаются сложности алгоритмов, решающих конечные куски неразрешимых алгоритмических проблем. Сов. математик А. А. Марков рассмотрел следующую задачу: для любой ф-ции алгебры логики от  $N$  переменных построить изображение нормального алгоритма в алфавите  $\Phi = \{0, 1, a, b, c\}$ , вычисляющего данную ф-цию и имеющего минимальную сложность. Показано, что сложность нормального алгоритма, решающего эту задачу, имеет порядок  $2^N$ . Изучен вопрос о А. с., решающих для первых  $n$  натуральных чисел проблему вхождения в рекурсивно перечислимое мн-во (сложность  $n$ -кусов рекурсивно перечислимых мн-в). В случае нормальных алгоритмов эта сложность по порядку не превосходит  $\log_2 n$  и в общем случае эта оценка не может быть понижена. В то же время легко показать, что существуют мн-ва, задаваемые с помощью достаточно простых логич. средств, которые имеют сложность  $n$ -кусов порядка  $n$ . Показано также, что при общерекурсивном ограничении времени работы А. с.  $n$ -кусов рекурсивно перечислимых мн-в может возра-

стать экспоненциально и по порядку достичь величины  $n$ .

Как видно из приведенных примеров, понятие А. с. в основном используется при уточнении вопроса о том, какова миним. сложность алгоритма, описывающего тот или иной конечный объект. Эту миним. сложность часто наз. сложностью данного конечного объекта. А. Н. Колмогоров предложил другой подход к определению понятия сложности конечного объекта, не зависящий от выбранной концепции алгоритма. Согласно идее Колмогорова, под сложностью объекта  $x$  следует понимать минимальную длину «программы»  $p$ , которая позволяет восстановить  $x$ . Точное определение этого понятия зависит от того, какой класс объектов рассматривают и что понимают под «методом программирования». Рассмотрим, напр., класс  $N$  двоичных слов. Длину слова  $p$  обозначим через  $l(p)$ . Пусть  $\varphi(p)$  — частично рекурсивная ф-ция из  $N$  в  $N$ . Тогда сложность слова  $x$  по  $\varphi$  есть

$$K_{\varphi}(x) = \begin{cases} \min l(p), \text{ где } \min \text{ берется по всем} \\ p \text{ таким, что } \varphi(p) = x, \\ \infty, \text{ если не существует } p \text{ такого,} \\ \text{что } \varphi(p) = x. \end{cases}$$

Такое определение сложности сильно зависит от вида  $\varphi$ . Однако имеет место следующая теорема: существует частично рекурсивная ф-ция  $F(p)$  (называемая оптимальной) такая, что для любой другой частично рекурсивной ф-ции  $\varphi(p)$  выполняется неравенство  $K_F(x) \leq K_{\varphi}(x) + C_{\varphi}$ , где  $C_{\varphi}$  не зависит от  $x$ . Оптим. ф-ция  $F$  раз и навсегда фиксируется и под сложностью  $K(x)$  слова  $x$  понимают величину  $K_F(x)$ . Аналогично можно определить и сложность других объектов, напр., сложность частично рекурсивных ф-ций. Оказывается, что между введенной выше сложностью  $K(x)$ , сложностью  $M_m(x)$  этих же объектов и сложностью  $T_M(x)$  существует следующая взаимосвязь:

$$M_m(x) \sim \frac{K(x)}{\log_2 m};$$

$$T_M(x) \sim \frac{K(x)}{(m-1) \log_2 K(x)},$$

где  $K(x)$  — сложность по Колмогорову,  $M_m(x)$  — сложность, выражаемая через длину изображения нормального алгорифма в  $m$ -буквенном алфавите,  $T_M(x)$  — сложность, выражаемая числом внутр. состояний машины Тьюринга с  $m$ -буквенным внеш. алфавитом.

Используя введенное выше понятие сложности, А. Н. Колмогоров развил алгоритм. подход к определению понятия «количество информации». Затем этот же подход применили к определению понятия случайной последовательности. Идея этого определения состоит в том, что бесконечная последовательность объявляется случайной, если она имеет бес-

конечно много начальных кусков, в некотором смысле достаточно сложных. Такие последовательности обладают конструктивно описываемыми свойствами, которые согласно *вероятностей теории* имеют место с вероятностью единицы (напр., они удовлетворяют закон больших чисел, закон повторного логарифма и т. д.).

Лит.: Кузьмин В. А. Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгорифмами и машинами Тьюринга. «Проблемы кибернетики», 1965, в. 13; Марков А. А. О нормальных алгорифмах, связанных с вычислением булевых функций. «Известия АН СССР. Серия математическая», 1967, т. 31, № 1; Звонкин А. К., Левин Л. А. Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов. «Успехи математических наук», 1970, т. 25, в. 6; Блюм М. Об объеме машин. В кн.: Проблемы математической логики. М., 1970. Я. М. Барздинь.

**АЛГОРИТМОВ СХЕМА** — формальное описание основной идеи построения некоторых совокупностей алгоритмов. В А. с. некоторые элементы описания (условные обозначения) можно рассматривать как переменные, изменяющиеся на множестве слов в *алгоритмическом языке*. Если подходящим образом заменить эти «переменные» объектами из областей их значений, то получим *алгоритм*, записанный в указанном языке. Таким образом, А. с. описывает множество алгоритмов, каждый из которых получается из данной А. с. при подходящем выборе заменяющих объектов, являющихся значениями элементов схемы. Примерами А. с. являются *операторные схемы* алгоритмов, *алгоритмов граф-схемы*, логические схемы алгоритмов. А. с. полезны при изучении свойств классов алгоритмов. Для практических задач реализации алгоритмов полезно осуществлять их равносильные преобразования. На каждом уровне абстракции описания алгоритмов могут быть построены системы равносильных преобразований, позволяющие решать конкретные задачи улучшения их качества в каком-либо смысле.

При определении А. с. обычно исходят из некоторого набора основных символов, используя которые строят элементарные выражения, называемые *термами*. А. с. определяются (формально) как выражения, построенные из термов и удовлетворяющие некоторым условиям. Вводится обычно процедура выполнения А. с., которая для каждой последовательности наборов значений логич. переменных однозначно определяет значение схемы. Вводятся также различные определения равносильности (или эквивалентности) А. с., которыми описывают отношения равносильности (соответственно эквивалентности) алгоритмов. А именно: если А. с.  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  равносильны, а  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  — алгоритмы, описываемые этими схемами и полученные из них при подходящей замене термов операторами и метками (одинаковым образом для обеих схем), то  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  — равносильные алгоритмы. При рассмотрении логич. А. с., граф-схем алгоритмов и операторных схем явно выступает лишь логич. структура схемы. Порядок работы операторов рассматривается в зависимости от значений входящих в А. с. логич. условий.



Свойства алгоритма, определяемые природой операторов (в т. ч. операторов условного перехода), на этом уровне абстракции не могут быть изучены. При определении А. с. частично учитывают внутреннее содержание операторов и логич. условий. Следующий (более низкий) уровень абстракции при изучении алгоритмов предполагает, что структура операторов частично или полностью известна.

Лит. см. к ст. *Операторная схема*. В. Н. Поршнева.

**АЛГОРИТМОВ ТЕОРИЯ** — раздел математики, в котором изучаются теоретические возможности эффективных процедур вычисления (алгоритмов) и их приложения. Осн. понятие теории — понятие алгоритма — в интуитивном понимании существует в математике довольно давно. Под *алгоритмом* понимают точное предписание для совершения некоторой последовательности элементарных действий над исходными данными любой задачи из некоторого класса (вообще бесконечного) однотипных задач, в результате выполнения которой получится решение этой задачи. Примером алгоритма может служить правило нахождения наибольшего общего делителя двух чисел (алгоритм Евклида). Формула для нахождения корней квадратного уравнения также является своеобразной формой записи алгоритма. Она указывает, какие арифм. действия и в какой последовательности нужно производить над коэфф. квадратного уравнения, чтобы получить корни этого уравнения. А. т. является в настоящее время важным и быстро развивающимся разделом *логики математической*. Интерес к ней объясняется, с одной стороны, внутр. интересами самой математики (вопросы оснований математики, конструктивное и интуиционистское направления в математике, алгоритм. проблемы алгебры и т. п.), а, с другой, — бурным развитием электронной *вычислительной техники* и теор. кибернетики. Практические и теор. вопросы реализации алгоритмов на современных вычислительных машинах являются содержанием такого важного раздела теор. кибернетики, как программирование.

Точные матем. понятия, которые в том или ином смысле формализовали интуитивное понятие алгоритма, предложены только в середине 30-х гг. 20 в. То, что было предложено несколько различных уточнений, объясняется в какой-то мере разнообразием тех (конструктивных) объектов, над которыми осмыслено понятие эффективного (алгоритмического) преобразования. Такими объектами могут быть натуральные числа, конечные последовательности натуральных чисел (кортежи), слова в некотором конечном алфавите, матрицы, конечные графы и т. п.

Исторически первые из предложенных понятий можно разделить на два вида.

1. Описывается некоторый класс арифм. ф-ций (вообще говоря, частичных), т. е. функций от конечного числа натуральных аргументов с натуральными значениями. Эти ф-ции обладают некоторыми эффективными процедурами нахождения значения ф-ции (если оно суще-

ствует) по заданным значениям аргументов. Ф-ции из этого класса наз. *частично рекурсивными* (ч. р. ф.), а в случае, если ч. р. ф. всюду определены, их наз. *общерекурсивными* (о. р. ф.). Класс ч. р. ф. определили Ж. Эрбран, К. Гедель и С.-К. Клини, исходя из исследований формализованной арифметики с помощью подходящих функциональных исчислений. Независимое определение этого класса ф-ций дал А. Черч с помощью т. н. исчисления  $\lambda$ -конверсий. Класс всех ч. р. ф. и предлагается в качестве определения для класса всех арифметических алгоритмически вычислимых ф-ций (см. *Черча тезис*).

2. Описываются точные матем. понятия машины и вычислимости на машине. Такие понятия машины и вычислимости на машине предложили независимо один от другого Э. Пост и А. Тьюринг. Эти «теоретические вычислительные машины» обычно наз. *Тьюринга машинами*. Оказалось, что класс арифм. ф-ций, для которых существует машина Тьюринга, вычисляющая по значениям аргументов значение ф-ций (если оно существует), совпадает с классом всех ч. р. ф. и наоборот, каждая ч. р. ф. вычислима на подходящей машине Тьюринга. В общих чертах различие между двумя рассмотренными выше видами определений можно сформулировать так: в первом дается точное описание класса вычислимых арифм. ф-ций, во втором — точное описание некоторого класса алгоритм. преобразований (вычислений на машине Тьюринга). Позднее были предложены и другие понятия, уточняющие понятие алгоритма, — канонические исчисления Э. Поста, *нормальные алгоритмы* А. А. Маркова, алгоритмы А. Н. Колмогорова и т. д. Для всех этих уточнений оказалось, что вычислимыми арифм. ф-циями являются ч. р. ф. Таким образом, понятие эффективно вычислимой арифм. ф-ции можно считать вполне определенным. Однако еще не дано наиболее общее определение понятия алгоритм. вычислимости. Характерной особенностью почти всех уточнений понятия алгоритма является представление соответствующих понятий в виде тех или иных исчислений. Поэтому А. т. можно считать разделом матем. логики, где понятие исчисления — одно из основных.

Исследования по А. т. так же, как и приведенные выше определения, можно, естественно, разделить на два направления.

I. Исследования, в которых *класс всех ч. р. ф.* является либо осн. объектом исследования, либо осн. орудием исследования. Рассмотрим более подробно некоторые из разделов этого направления. 1) Исследование класса всех ч. р. ф. (о. р. ф.): а) изучение подклассов этого класса — примитивно рекурсивных ф-ций, элементарных функций и т. п.; б) классификация ч. р. ф. с помощью иерархий; в) алгебр. изучение класса ч. р. ф. и о. р. ф. (см. *Рекурсивные функции*). 2) Введение с помощью ч. р. ф. новых естественных понятий и их изучение: а) определение (в терминах ч. р. ф.), изучение и классификация рекурсивных и рекурсивно перечислимых мн-в. По-



нения рекурсивного и рекурсивно перечислимого мн-в являются одними из осн. в современной А. т. Первое из них уточняет интуитивное понятие разрешимого мн-ва (т. е. мн-ва, для которого существует алгоритм, позволяющий по любому элементу определять, принадлежит он к этому мн-ву или нет), а второе — понятие мн-ва, для которого существует алгоритм последовательного перечисления всех его элементов; б) сравнение и классификация алгоритм. природы произвольных подмножеств мн-ва натуральных чисел. Основой для такого сравнения служит понятие сводимости ( $m$ -сводимость,  $tt$ -сводимость, тьюрингова сводимость и др.) и соответствующее каждому понятию сводимости понятие степени сводимости. Понятия сводимости и ряд других понятий позволяют своеобразно классифицировать, располагать в иерархии большой класс подмножеств мн-ва натуральных чисел. 3) Обобщения и расширения понятий. Уже при определении некоторых сводимостей, напр., понятия тьюринговой сводимости, появляются относительные понятия, такие, как  $\phi$ -ция, частично рекурсивная относительно мн-ва  $A$ , мн-во, рекурсивно перечислимое относительно  $A$ , и многие др. Понятия сводимости определяют уже не только для множеств, но и для классов множеств (и функций). Таким понятием является, напр., понятие массовой проблемы по Ю. Т. Медведю. Для введения понятия сводимости массовых проблем используют понятие эффективного оператора. Предприняты попытки уточнить понятия вычислимости и для не конструктивных объектов, напр., определить понятие вычислимого функционала конечного типа, определенного на несчетном мн-ве функционалов низшего типа. Возможность использования результатов теории рекурсивных  $\phi$ -ций для произвольных, не более чем счетных, множеств реализуется *нумераций теорией*. В теории нумераций естественным образом находят уточнение многие алгоритм. проблемы алгебры и других разделов математики.

II. Исследования, в которых осн. упор делается на механизм вычисления. Существует ряд наиболее важных разделов А. т. этого направления исследований. 1) Теория конечных автоматов. *Автоматы конечные* являются наиболее изученным классом вычисл. устройств. Эта теория применяется, напр., при проектировании электронных вычислительных машин (ЭВМ). 2) Машины Тьюринга. Проводятся исследования возможностей таких машин в организации вычислений с теми или иными ограничениями, сравнивается работа машины с разным числом лент, изучаются возможности вычисления в реальное время и многое др. 3) *Автоматы растущие*. Это понятие возникло в основном в связи с попыткой дать наиболее общее определение алгоритм. вычисления, а также в связи с исследованиями Дж. фон Неймана по самовоспроизводящимся машинам. 4) Изучаются многие спец. виды других машин, связанные часто

с обобщениями понятия вычислимости, напр., машины с «оракулом» и др.

Следует особо отметить проблему поиска понятия *алгоритмов сложности*, т. е. понятия, интуитивно достаточно хорошо воспринимаемого. Предложено несколько таких понятий. 1) Сложность алгоритма оценивается по тем или иным параметрам работы алгоритма (см. *Сигнализирующая функция*). Этот подход связан в основном со 2-м направлением исследований в А. т., т. е. эти понятия определяются в терминах работы конкретных вычисл. устройств (напр., машин Тьюринга). 2) Сложность алгоритма определяется через сложность его программы, записи (А. Н. Колмогоров, А. А. Марков). В определении используется введенное А. Н. Колмогоровым понятие сложности конечных слов. 3) Понятие сложности вводится не для отдельных алгоритмов, а для класса алгоритмов. Такое понятие сложности классов можно ввести с помощью понятий теории нумераций.

Результаты А. т. находят различные применения, начиная с использования результатов теории конечных автоматов в практике проектирования ЭВМ и кончая использованием рекурсивных функций в конструктивной математике. Существует и ряд других важнейших применений А. т. Первыми результатами А. т., имеющими большое принципиальное значение для всей математики, были *Геделя теоремы о неполноте* формализованной арифметики и теорема Черча об алгоритм. неразрешимости (о невозможности алгоритма) для проблемы разрешения узкого исчисления предикатов. *Исчисление предикатов узкое* является осн. исчислением современной матем. логики. Проблема разрешения для него состоит в том, чтобы построить алгоритм, позволяющий по любой формуле узкого исчисления предикатов эффективно определить, является ли эта формула доказуемой. Аналогичные проблемы разрешения возникают и для конкретных формализованных теорий (напр., теории групп, колец, арифметики и т. п.). Раздел матем. логики, который занимается изучением таких проблем разрешения, имеет название *элементарные теории*. Алгоритм. проблемы возникают и в алгебре (напр., проблема тождества слов для полугрупп и групп). Принципиальные результаты в этом направлении получили сов. математики (неразрешимость проблемы тождества слов для полугрупп доказал А. А. Марков, а неразрешимость проблемы тождества для групп — П. С. Новиков).

Лит.: Марков А. А. Теория алгоритмов. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1954, т. 42 [библиогр. с. 373—374]; Успенский В. А. Лекции о вычислимых функциях. М., 1960 [библиогр. с. 476—481]; Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1965 [библиогр. с. 375—381]; Клини С. К. Математическая логика. Пер. с англ. М., 1973 [библиогр. с. 451—465]; Davis M. Computability and unsolvability. New York — Toronto — London, 1958; Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Пер. с англ. М., 1972 [библиогр. с. 587—599]; Захаров Д. А. Рекурсивные функции. Новосибирск, 1970 [библиогр. с. 201—204].

Ю. Л. Ершов.

**АЛГОРИТМОВ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ** — свойство алгоритмов при каждом исходном данном, к которому применим хотя бы один из них, приводить к получению одинаковых результатов. А. э. является одним из видов *эквивалентности отношения* в классе алгоритмов. Расширением понятия А. э. является эквивалентность относительно класса исходных данных, в которой находятся те и лишь те алгоритмы, которые ведут к одинаковым результатам при исходных данных из указанного класса и не подчинены никаким ограничениям при др. исходных данных. Еще большим расширением понятия А. э. является равносильность алгоритмов (см. *Алгоритмов равносильные преобразования*). Проблема распознавания А. э. в классе всех алгоритмов в приведенных случаях алгоритмически неразрешима. Понятие А. э. в классических теориях алгоритмов используется для формулировки т. н. осн. тезиса (гипотезы, принимаемой на основе векового опыта человечества), согласно которому для любого предписания, интуитивно воспринимаемого как алгоритм, существует эквивалентный алгоритм в семействе стандартных алгоритмов. С помощью осн. тезиса выявляют алгоритмически неразрешимые проблемы.

Н. А. Криницкий.

**АЛГЭК** — язык программирования для описания экономических задач. Разработан в 1964 как расширение универсального алгоритмического языка *АЛГОЛ-60* средствами языка *КОБОЛ*. А. имеет аппарат для описания составных единиц информации (документов и их массивов), текстовых величин и процессов их обработки с доступом ко всем элементам. Задание форматов величин позволяет иметь разветвленную систему процедур ввода и вывода. *Транслятор* с А. разработан для машины «Минск-22».

М. А. Королев.

**АЛГЭМ** — язык программирования для описания экономических и вычислительных задач, построенный на базе *АЛГОЛ-60* и *КОБОЛ*а. Разработан в 1964—66. По сравнению с *АЛГОЛ*-ом А. содержит дополнительно: строчные (текстовые) переменные и выражения, используемые при операциях над символьной информацией, составные переменные и массивы, позволяющие представлять в машине различные формы экономических документов, указания видов переменных, позволяющие задавать для значений переменных состав и расположения различных типов символов (буквы, цифры и т. д.), что важно для редактирования значений при выдаче на печать. *Транслятор* с языка А. реализован на ЦВМ «Минск-22».

А. И. Кутлов.

**АЛМО** — язык машинно-ориентированный. Разработан в 1965—66 как промежуточный и базовый язык универсальной системы программирования. А. представляет собой входной язык абстрактной выч. машины, которая также наз. А. Машина А. наделена типичными особенностями, свойственными наиболее распространенным современным ЭВМ. Она имеет несколько уровней памяти, набор операций, близких к системам команд современных ма-

шин, и т. д. В машине А. предусмотрено 4 вида памяти: регистры-модификаторы (*М*-память), рабочие регистры (*Р*-память), оперативная память (*В*-память), внешняя память (*ЕХ*-память). Все эти виды памяти служат для хранения значений, вводимых, выводимых и перерабатываемых в процессе выполнения программ. Ячейки, из которых состоит каждая память, наз. *с л о в а м и*. Размер слов, отведенных для хранения тех или иных значений, вообще говоря, неопределен, но в языке существуют средства, позволяющие ограничить этот размер снизу. Для хранения упорядоченного мн-ва значений (*массивов*) в *В*-памяти и в *ЕХ*-памяти отводится упорядоченное мн-во слов одинаковой длины — *массивы слов*. При моделировании машины А. на конкретной машине, т. е. при выполнении на этой машине *программы*, написанной на языке А., те части всех четырех видов памяти, которые использованы в этой программе, отображаются на подходящие ЗУ машины.

*В*-память предназначена для хранения осн. массы значений, обрабатываемых в каждый момент выполнения программы. В каждой программе точно указывается, сколько слов и какого размера (размер ограничивается только снизу) должно быть отведено в *В*-памяти и как эти слова будут наз. в программе. Эти указания даются описаниями в каждом блоке и имеют силу внутри данного блока (Программа в языке А. имеет блочную структуру аналогично программе в языке *АЛГОЛ-60*). В описаниях могут содержаться также сведения о частоте обращения к описываемым словам, что позволяет более эффективно отобразить *В*-память в тех машинах, в которых оперативная память состоит из уровней различного быстродействия. *М*-память служит для хранения значений, употребляемых в индексных выражениях для указания порядкового номера элемента в массиве; эти значения наз. *м о д и ф и к а т о р а м и*. *Р*-память служит для хранения промежуточных результатов, возникающих в процессе выполнения программы. Значения, хранящиеся в *ЕХ*-памяти, недоступны для непосредственной обработки. Они могут быть только скопированы в *В*-память или обратно. При моделировании *ЕХ*-память отображается на вспомогательные виды памяти (барабаны, ленты и т. п.) конкретной машины (часть *ЕХ*-памяти может быть отображена на оперативную память конкретной машины, которая осталась свободной после отображения *В*-памяти машины А.). Массивы слов *ЕХ*-памяти (внешние массивы), необходимые каждому блоку, должны быть описаны в этом блоке. В описаниях могут быть даны также сведения о характере обращения программы к внеш. массивам, которые позволяют наиболее эффективно разместить эти массивы во вспомогательной памяти конкретной машины. С этой целью *ЕХ*-память машины А. представляется как совокупность носителей, каждый из которых характеризуется определенными свойствами: частотой обращения, способом копирования (произвольными или

постоянными зонами), а также именной спецификацией, позволяющей индивидуализировать носитель.

В машине А. предусмотрена обработка таких типов значений: чисел, последовательностей *битов*, модификаторов и ссылок. Числа могут быть представлены в нормализованной форме, с фиксированной запятой и как целые. Для перехода от одной формы представления к другой в А. определены спец. функции преобразования. Спец. указатели размера позволяют ограничить снизу размер слова, отводимого для хранения значений. При этом размер определяется через значение, т. е. указатель размера требует, чтобы было отведено слово, в котором можно разместить значение данного типа с данным к-вом знаков. При моделировании машины А. слово может отображаться на ячейку (часть ячейки или несколько ячеек) конкретной машины, такую, с которой удобно было бы проводить операции и которая позволяет разместить значения, заданные указателем. При отсутствии в алгоритме строгого ограничения на точность представления значений можно пользоваться стандартными понятиями: полуслово, *слово* и двойное слово.

Набор операций и операторов А. соответствует наборам операций современных выч. машин. В него включены арифм. и логич. операции, операторы передачи управления, организации цикла, обмена между различными видами памяти, ввода и вывода. Формулы записываются в виде правой польской записи, что полностью задает порядок действий и в то же время не предопределяет адресности машины. Операнды определены т. о., чтобы на каждой конкретной машине любому операнду в конечном счете соответствовал некоторый *адрес*, снабженный, быть может, признаком модификации при помощи одного из регистров-модификаторов. Операндом служит непосредственное изображение значения (константа), название переменной, название оператора (метка), ссылка на название слова или оператора. Любая из переменных может быть снабжена индексом. Переменные с индексом обозначают слова, которые являются элементами одномерных массивов слов. Значение индексного выражения должно иметь форму представления модификатора. В языке А. предусмотрены средства, позволяющие указывать, что некоторые процессы могут выполняться параллельно. Это используется при моделировании машины А. на машинах с несколькими процессорами или с другими возможностями совмещенного выполнения. Кроме того, имеется возможность задавать указания для осуществления автомат. программы сегментации. Компиляторы с языка А. созданы для ряда универсальных и специализированных выч. машин. На базе языка А., как языка промежуточного, разработана универсальная система программирования, включающая трансляторы с АЛГОЛа и ФОРТРАНа. Лит.: Камынин С. С., Любимский Э. З. Алгоритмический машинно-ориентированный язык — АЛМО. «Алгоритмы и алгоритмические языки», 1967, в. 1 [библиогр. с. 59—61]. Э. З. Любимский.

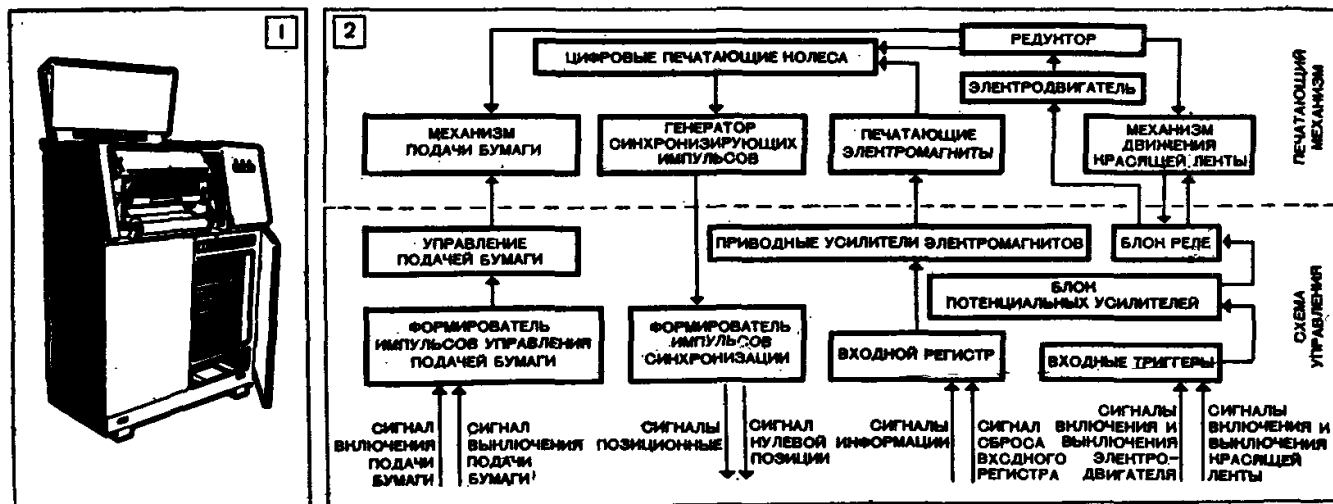
**АЛФАВИТНО-ЦИФРОВОЕ ПЕЧАТАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО (АЦПУ)** — устройство, осуществляющее автоматическое печатание на бумаге информации в виде букв, цифр, разделительных знаков, некоторых математических и других специальных символов. АЦПУ применяется гл. обр. в составе *внешних устройств* цифровых вычислительных машин (ЦВМ) для вывода результатов расчетов, программ и информационно-справочных материалов в произвольной, определяемой программой форме (текст, таблицы, графики, фигуры). Ранее в качестве АЦПУ приспособляли имевшиеся портативные печатающие устройства (напр., обычную пишущую машинку) посредством оснащения их электромагнитными приводами. АЦПУ, специально разрабатываемые для ЦВМ, можно разделить на две группы: с немех. и мех. способом регистрации. Из первой группы некоторое распространение получили АЦПУ, основанные на электрохимическом, ксерографическом и магнитографическом принципах действия. В электрохимическом АЦПУ изображаемый знак формируется из точек, появляющихся на специальной, пропитанной электролитом (т. н. электрохимической) бумаге при прохождении через нее тока в местах контакта с электродами. В магнитографическом АЦПУ на поверхности вращающегося барабана из магнитного материала при помощи импульсного магнитного поля, создаваемого спец. магнитными головками, формируется скрытое изображение знака из выбранных для данного знака точек прямоугольного раstra. Изображение проявляется нанесением магнитного красящего порошка, переносится с барабана на бумагу посредством ее прижима и закрепляется нагревом, после чего соответствующая зона барабана размагничивается и очищается от порошка. Точечнорастровый способ формирования символа без участия инерционных деталей позволяет достичь в таких АЦПУ скорости печатания порядка сотни строк в секунду. Однако из-за эксплуатационных неудобств они не получили широкого распространения. Действие ксерографических АЦПУ основано на способности наэлектризованных участков бумаги притягивать красящий порошок. Спец. головками этим участкам (имеющим конфигурацию символов) сообщаются электростат. заряды.

В АЦПУ, основанных на мех. способе регистрации, знак печатается посредством оттилка соответствующей литеры через красящую ленту. Конструкции их различаются, в основном, по способу подвода литеры нужного символа на соответствующее место в строке. В ротационных АЦПУ литеры рельефно выступают на ободе печатающего колеса. Колеса в количестве, равном требуемому количеству знаков в строке, насажены на непрерывно вращающийся вал. Оттиск знака, нужного на данном месте строки, производится ударом пуансона по бумаге в момент прохождения середины литеры этого знака через осевую линию пуансона. Строка печатается за

один оборот вала. В АЦПУ с печатающей головкой литеры размещены на головке, имеющей форму вытянутого эллипса вращения, в несколько рядов по окружностям. Нужная литера выбирается соответствующим наклонением и поворотом головки. Оттиск достигается ударом самой головки по бумаге (красящей ленте). Знаки в строке здесь печатаются последовательно. Широко применяются также АЦПУ, сконструированные на базе *телетайпа* или электрифицированной пишущей машинки.

щий 96 позиционных импульсов (по количеству литер на колесе) и один нулевой импульс (соответствующий началу оборота барабана). Схема управления обеспечивает хранение принятой от ЦВМ информации, подлежащей печати в текущей строке, и формирование управляющих сигналов, поступающих от ЦВМ и направляемых в цифровую вычислительную машину.

Лит.: Анисимов Б. В., Четвериков В. Н. Основы теории и проектирования цифровых вычислительных машин. М., 1965 [библиогр. с. 480]. И. Т. Пархоменко.



1. Алфавитно-цифровое печатающее устройство типа АЦПУ-128.

2. Блок-схема алфавитно-цифрового печатающего устройства типа АЦПУ-128.

Наибольшее распространение в СССР получило ротационное А.ц. п. у. типа АЦПУ-128, осн. тех. данные которого следующие: скорость печатания —  $420 \pm 20$  строк в минуту, количество знаков в строке — 128, количество знаков на печатающем колесе — 96. В набор символов входят русский и лат. алфавиты, разделительные знаки, цифры, символы арифметических действий и логики математической. Устройство сконструировано в виде высокого стола (рис. 1), в верхней части которого расположен собственно печатающий механизм, а в нижней — электронная схема управления. Из блок-схемы АЦПУ-128 (рис. 2) видна структура этого устройства, связи между блоками и между устройством и ЦВМ. 128 печатающих колес, набранных на валу вплотную, образуют сплошной печатающий барабан. С валом печатающих колес связан привод красящей ленты и привод бумаги. Интервальный механизм обеспечивает прерывисто-поступательное продвижение бумаги в промежутки времени между печатанием строк. Против каждого печатающего колеса в направляющих установлен пуансон с эластичным (капроновым) наконечником, приводимый в движение электромагнитом. Восприняв удар от рычага электромагнита, пуансон движется по инерции и бьет по бумаге. Возврат пуансона в исходное положение производится пластинчатой пружиной. Для согласования работы печатающего механизма с ЦВМ служит индукционный генератор синхронизирующих импульсов, выдаю-

**АЛФАВИТНЫЙ ОПЕРАТОР** — соответствие, отображающее слова в некотором алфавите в слова в том же самом или в другом фиксированном алфавите; первый алфавит наз. входным, а второй — выходным алфавитом данного оператора. Совокупность всех слов, на которых оператор определен, наз. его областью определения. В случае, когда область определения А. о. конечна, оператор может быть задан таблицей соответствия, что принципиально невозможно сделать в случае бесконечной области определения. К понятию А. о. могут быть в некотором смысле сведены любые процессы преобразования информации.

С. С. Гороховский.

**АЛЬГИБР** — модификация *альфа-системы*, предназначенная для трансляции программ, записанных на *альфа-языке*, в машинные программы для ЭЦВМ «БЭСМ-6». Транслятор системы А. работает на ЭЦВМ типа «М-20» и выдает на перфокарты программу в коде команд «БЭСМ-6», либо записывает ее на *ленту магнитную* для последующей передачи непосредственно в машину по спец. каналу. Использование *альфа-языка* для А. допускает включение в текст программы машинных команд и экстракодов «БЭСМ-6» в символической форме. Существуют аналогичные *альфа-системе* средства отладки и методика объединения отдельно транслируемых программ в единый комплекс. Выполнение транслированной А. программы производится под управлением операционной системы «БЭСМ-6». А. П. Еришов.

**АЛЬФА-СИСТЕМА** — система программирования на альфа-языке для ЭВМ типа «М-20». Разработан в 60-х гг. Составными частями А.-с. являются *транслятор* — программа, транслирующая программы с *альфа-языка* на язык машины, и система отладки. Отличительной особенностью А.-с. является применение двухфазной трансляции с использованием внутреннего языка и наличие спец. алгоритмов оптимизации транслируемой программы на базе смешанной стратегии программирования и формальных преобразований программы. Транслятор состоит из 24 последовательно работающих блоков общим объемом в 50 тыс. команд. Средняя скорость трансляции — прилб. 150 команд рабочей программы на 1 мин работы транслятора.

Первая фаза трансляции состоит в переводе программ с альфа-языка на внутренний язык, который представляет собой машинно-независимый язык с простой структурой операторов и с фиксированным форматом переменных. Осн. символами внутр. языка являются 15-разрядные двоичные *коды*, изображающие *идентификаторы*, знаки операций и операторов и различные разделители. Часть разрядов кода — идентифицирующая, а часть — признаковая, содержащая классификацию основных символов и информацию о некоторых свойствах идентификаторов. Каждый оператор имеет ограниченное к-во операндов, каковыми могут быть только идентификаторы. Осн. типы операторов: пересылки, присваивание результата выполнения арифм. или логич. операции, передачи управления (условные, безусловные и с возвратом), формирование и засылка адресов и обращения к *подпрограммам стандартным* и системе динамического распределения памяти. В индексах переменных оставлены только линейные зависимости от параметров операторов цикла; остальные вычисления из индексов выносятся.

При переводе на внутр. язык ведут программирование выражений, процедур и действий над комплексными и многомерными величинами. Информация о переменных из описаний переносится в таблицы и признаковые разряды идентификаторов. В конструировании таблиц применяется *списковая структура* размещения информации. Перевод идентификаторов в 15-разрядный код производится с помощью функции расстановки. Выражения программируются за два просмотра: при 1-м просмотре производится декомпозиция выражений на простые операторы и вводятся символы промежуточных величин, при 2-м — определяют тип и порядки по измерениям промежуточных величин и массивов.

При программировании процедур применяется смешанная стратегия: в трансляторе предусмотрено 8 способов программирования операторов и описаний процедур — от универсального до простейшего, отличающихся друг от друга сложностью реализации и степенью общности. На основе анализа характера вхождений формальных параметров в тело процедуры и степени сложности фактических пара-

метров для каждой процедуры выбирается самый простой способ, обеспечивающий правдивость ее применения. Программирование действий над многомерными величинами состоит во введении в программу циклов выполнения покомпонентных действий. При этом производится оптимизация, заключающаяся в объединении нескольких возникающих циклов в один, где это возможно, и в сокращении к-ва промежуточных *массивов*. Операции над комплексными величинами реализуются в основном открытой вставкой *подпрограмм* выполнения отдельных действий.

На уровне внутреннего языка транслятор выполняет оптимизирующие формальные преобразования транслируемой программы: чистку циклов и экономию совпадающих выражений. При чистке циклов в участке программы, составляющем цикл, находят операторы, вычисляющие при повторениях данного цикла одно и то же значение (такие операторы выносятся из цикла и помещаются перед ним). Экономия выражений производится в пределах квазилинейных участков программ, состоящих из операторов, выполняющихся строго подряд и допускающих разветвления, вызванные только условными выражениями в исходной программе. Из нескольких совпадающих операторов, вычисляющих одно и то же значение в участке экономии, остается только один и помещается в такое место, где его результат доступен для использования. При отождествлении операторов также применяется ф-ция расстановки. В индексах производится преобразование линейных форм зависимостей от параметров циклов (приведение подобных, выделение свободного члена), направленные на их упрощение.

Вторая фаза трансляции заключается в переводе программ с внутреннего языка на машинный. После построения машинных *команд*, реализующих основные вычисл. и логич. операторы внутр. языка, производится программирование циклов. Здесь также применяется смешанная стратегия, суть которой заключается в выборе для каждого заголовка цикла наиболее простого из доступных способа организации пересчета параметра, контроле числа повторений цикла, переадресации и восстановлении переменных команд. Использование индекс-регистра организуется таким способом, чтобы сократить к-во команд сохранения и восстановления индекс-регистра. В конце второй фазы производится глобальная экономия памяти, отводимой для хранения скалярных переменных и массивов заранее известной длины. Сначала по программе строится ее *операторная схема*. В качестве одного оператора берется квазилинейный участок программы. Для каждого оператора определяются: номера операторов, переменные, являющиеся аргументами и результатами оператора, а также внутренние величины, т. е. переменные, значения которых возникают и используются только в пределах оператора. Для всех внутр. величин отводится общее поле, а для каждой пары остальных переменных на основе анализа опе-

раторной схемы определяется, может ли данная пара располагаться на одном участке памяти. Затем на основе этой информации о попарной совместимости производится экономное *памяти распределение*. Алгоритмы, применяемые при этом, тесно связаны с алгоритмами раскраски вершин графов (см. *Граф раскрашенный*). В заключение производится локальная оптимизация полученной программы, использующая машинные команды с совмещением операций, а сама программа после компоновки и присвоения истинных адресов ставится в рабочее положение для немедленного выполнения или выдается на перфокартах.

Система отладки обладает способностью формировать *отладочные программы* путем модификации исходной программы на альфа-языке, состоящей в изменении параметров программы (задание значения переменных, применение упрощенных процедур и т. п.) и во внесении в текст программы отладочных команд (печатающие промежуточные значения, проследивание переходов и подсчет фактического числа повторений циклов). Модификация осуществляется «нулевым» блоком транслятора. На базе А.-с. создан ряд систем программирования для разных ЭВМ, в т. ч. система *Альгитр* для ЭЦВМ «БЭСМ-6».

*Лит.:* Альфа-система автоматизации программирования. Новосибирск, 1967; Ершов А. П., Кожухин Г. И., Поттосин И. В. Руководство к пользованию системой Альфа. Новосибирск, 1968.

А. П. Ершов.

**АЛЬФА-ЯЗЫК** — язык программирования, представляющий собой расширение языка *АЛГОЛ-60* в части переменных, операций и выражений, а также описаний. Разработан в 1960. В разделе переменных добавлен новый тип — комплексный. Каждой величине или переменной с индексами может быть приписано некоторое число измерений и порядок по каждому измерению. Многомерная величина в А.-я. обозначает мн-во скалярных компонент, образующих прямоугольный многомерный массив, аналогичный массивам *АЛГОЛА-60*. Примеры соответствующих описаний: комплексный  $z$ -массив; вещественный  $A$ -массив  $n \times n$ ; логический массив  $B[1:10, 1:20]$  — массив  $P$ . В последнем случае компонентами матрицы  $B$  являются векторы длины  $P$ . Для переменных с индексами в А.-я. допустимо использование пустых индексных позиций, означающее одновременное взятие всех компонент, соответствующих полному диапазону изменения данного индекса.

В области операций и выражений в А.-я. все обычные операции распространены на многомерные величины как покомпонентные действия, а также введены стандартные операции над векторами и матрицами. Запись  $y[\ ] := |a, v \uparrow 2, t, t, +1|$  является примером употребления «геометрической» операции формирования из последовательности значений указанных выражений 5-мерного вектора, присваиваемого векторной переменной  $y[\ ]$ . Другой геом. операцией

является компоновка, позволяющая срастить вдоль указываемого в скобках измерения серию подобных массивов: запись  $|(1)| (2) A, B|, |(2) C, D|$  означает клеточную матрицу вида

$$\left\| \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right\|.$$

Логические выражения в А.-я. могут иметь вид цепочек неравенств вида  $a \leq x \leq b$ . Всюду, где употребляются списки выражений (кроме переключательных списков и списков параметров в процедурах), допускаются перечисления выражений по некоторому натуральному индексу с использованием многоточия: напр.,

$$\|a[1, 1], \dots, a[1, n]|, \dots, \\ |a[10, 1], \dots, a[10, n]\|$$

означает формирование матрицы порядка  $10 \times n$ . В А.-я. допустимы конструкции вида

$$\text{для } i := 1, \dots, P \text{ цикл } a[i, 1] := \dots := \\ = a[i, 10] := 1$$

или вида

если  $b[k] < \dots < b[k+n]$ , то на  $M \cdot N \cdot P$ .

В последнем примере использован оператор перехода по составной метке, позволяющей передать управление внутрь блока: в блоке с меткой  $M$  находят блок с меткой  $N$ , в котором происходит передача управления на оператор с меткой  $P$ .

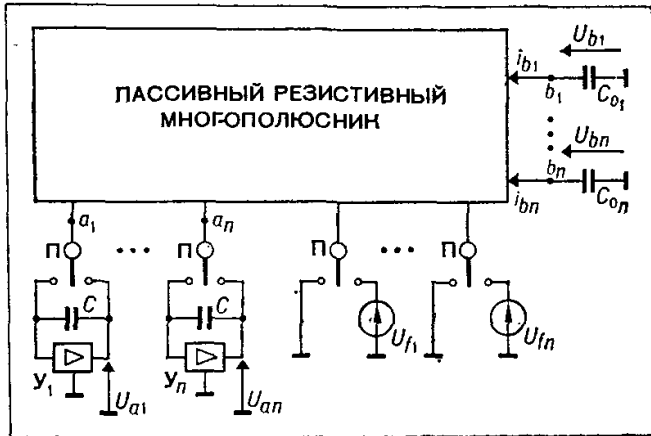
В части описаний добавлены описания, вводящие явные обозначения компонент многомерных и комплексных величин: напр.,  $A = \|A[i, j]\|$  и  $z = a + ib$ . Имеются описания, задающие начальные значения переменных, напр.,  $pi = 3.141592$ . Есть сокращенная форма описания ф-ций, способ вычисления которых задается выражением, напр., вещественная ф-ция ОБЪЕМ  $(R) = 3/2 \times pi \times R \uparrow 3$ . Любой переменной спец. описанием может быть приписан верхний индекс, позволяющий записывать рекуррентные соотношения между последовательными значениями такой переменной.

А.-я. содержит средства, позволяющие описывать вид памяти (барабан, лента, перфокарты), на котором хранятся массивы или блоки программы, включать в программу машинные команды с символическими адресами, использовать библиотеку стандартных подпрограмм и объединять в один комплекс отдельно транслируемые программы. В А.-я. англ. служебные слова заменены русскими, а алфавит идентификаторов расширен до строчных и заглавных букв рус., лат. и греч. алфавитов. Для перфорации программ, записанных на А.-я., используются специально разработанные клавишные устройства с клавиатурой на 256 знаков и модифицированные рулонные телетайпы, содержащие символ подчеркивания. См. также *Альфа-система*.



Лит.: Ершов А. П., Кожухин Г. И., Волошин Ю. М. Вводный язык системы автоматического программирования. М., 1961 [библиогр. с. 173—174]; Ершов А. П., Кожухин Г. И., Поттосин И. В. Руководство к пользованию системой Альфа. Новосибирск, 1968. А. П. Ершов.

**АМПЛИТУДНО-ИМПУЛЬСНАЯ МОДЕЛЬ** — разновидность квазианалоговой модели, главным образом, алгебраических объектов; обеспечивает неизбежную сходимость процесса уравнивания для линейных алгебраических объектов произвольного вида. На структурной схеме А.-и. м. (рис.) в правом поло-



Структурная схема амплитудно-импульсной модели.

жении ключей П, которые переключаются синхронно и циклически, конденсаторы  $C_0$  заряжаются за счет действия напряжений источников  $U_{fi}$  и выходных напряжений  $U_{ai}$  запоминающих усилителей  $Y_i$ . В левом положении ключей эти конденсаторы разряжаются через пассивный резистивный многополюсник на конденсаторы  $C$ , изменяя их заряд. При достаточно малом отношении  $C_0/C$  подобный процесс изменения напряжений сходится неизбежно при произвольной структуре резистивного многополюсника, причем напряжения  $U_{bi}$  становятся пренебрежимо малыми, и вектор напряжений  $U_a^{(k)}$  определяется выражением

$$g_{ba}U_a^{(k)} + i_{bf} = 0,$$

где  $g_{ba}$  — матрица взаимных проводимостей цепи между узлами  $b_i$  и  $a_i$ ;  $i_{bf}$  — составляющая вектора токов  $i_b$ , определяемая действием вектора напряжений  $U_f$  при  $U_b = U_a = 0$  и закороченных конденсаторах  $C_0$ ;  $k$  — номер цикла переключения ключей П. Полагая  $U_a = \gamma_x x$ ,  $g_{ba} = \gamma_a A$ ,  $i_{bf} = \gamma_f f$ , где  $\gamma_x$ ,  $\gamma_a$ ,  $\gamma_f$  — переходные масштабы, связанные соотношением  $\gamma_a \cdot \gamma_x = \gamma_f$ , можно заключить, что схема может рассматриваться как электронная модель системы уравнений  $Ax + f = 0$ , где матрица  $A$  может быть произвольной неособенной матрицей. Достоинством А.-и. м. является возможность построения простых устойчивых моделей линейных алгебраических объектов. К недостаткам А.-и. м. следует отнести низ-

кую чувствительность схемы к отклонениям вектора  $U_b$  от нулевого, вызванную затуханием сигналов при двукратном прохождении через многополюсник. На основе описанной структурной схемы можно строить амплитудно-импульсные инверторы, сумматоры, преобразователи и др. решающие элементы и модели обратимого и необратимого типов.

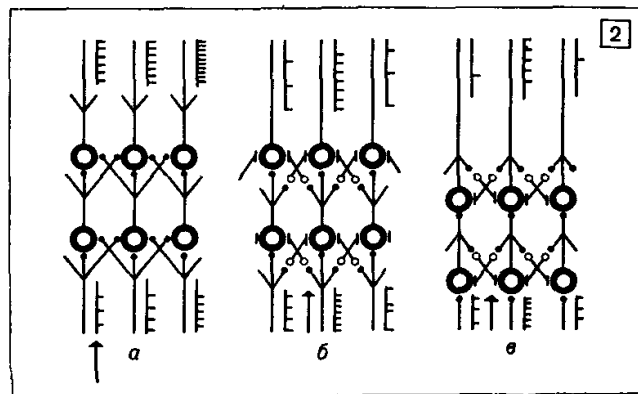
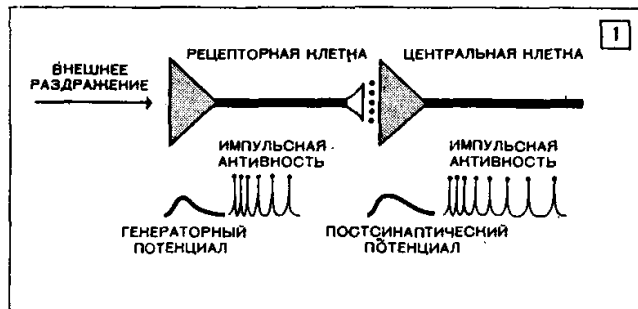
Лит.: Пухов Г. Е. Методы синтеза амплитудно-импульсных электронных моделей алгебраических объектов. В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи, в. 2. К., 1964; Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. К., 1967 [библиогр. с. 560—564].

В. В. Васильев.

**АНАЛИЗАТОРНЫЕ СИСТЕМЫ** — сложные нервные структуры, начинающиеся периферическими воспринимающими образованиями (рецепторами) и заканчивающиеся нервными центрами, расположенными в высших отделах мозга и обеспечивающими анализ воспринятых раздражений и выработку на этой основе сигналов для построения ответной деятельности организма.

Рецепторы и высшие отделы анализаторов соединены между собой проводящими путями, которые всегда включают в себя ряд промежуточных нервных центров, обеспечивающих передачу и промежуточную обработку информации, поступающей от рецепторных структур в высшие отделы анализатора. Ф-цией рецепторов является трансформация энергии внеш. раздражителя в процесс возбуждения. Этот процесс обладает способностью к самораспространению по отросткам нервных клеток — нервным волокнам и поэтому может быть носителем информации о внеш. воздействии, передаваемой в высшие анализаторные центры. Рецепторные клетки являются специализированными, приспособленными к восприятию определенных видов энергии, поступающей от раздражителя. Специализация рецепторов достигается наличием у них особых механизмов, позволяющих реагировать на самые ничтожные количества энергии и превращающих ее (энергию) в изменения электрической поляризации поверхностной мембраны рецепторных клеток. Такие изменения наз. генераторными или рецепторными потенциалами. Эти потенциалы в свою очередь являются непосредственной причиной появления в соединенных с рецепторами нервных волокнах процессов возбуждения (см. *Возбуждения клетки теория*). Нервные импульсы в волокнах существенно не отличаются между собой (рис. 1); поэтому для передачи информации о раздражении различных рецепторных клеток обязательным условием является существование различных волокон, соединяющих эти клетки с высшими анализаторными центрами. Следовательно, информация о качестве раздражения кодируется в А. с. пространственным распределением активности в нервных волокнах. Генераторные потенциалы в каждой рецепторной клетке по своей длительности отражают длительность попадающего на рецептор раздражения (амплитуда этого потенциала обычно находится в логарифмической зависимости от силы

внешнего, раздражения). Создаваемые генераторным потенциалом распространяющиеся импульсы являются дискретными и кратковременными (несколько тысячных долей *сек*) процессами. Частота их возникновения пропорциональна амплитуде генераторного потенциала и, следовательно, несет информацию о силе раздражения. Однако эта пропорциональность сохраняется лишь до определенного предела. Наличие после каждого импульса периода абс. и относительной рефрактерности (невозбудимости) ограничивает верхний пре-



1. Схема периферической части анализаторной системы, иллюстрирующая соотношение между внешним раздражением, генераторным потенциалом и импульсной активностью.

2. Схема предполагаемой структуры передаточных звеньев анализаторных систем (по Фессару, 1961): а — схема, в которой между передаточными нейронами существуют только возбуждающие связи; б — схема, в которой между передаточными нейронами существуют тормозящие боковые связи; в — схема, в которой между передаточными нейронами существуют возвратные тормозящие связи.

На входе и выходе каждого волокна показаны разряды импульсов условной частоты.

дел частоты импульсации от рецептора несколькими сотнями импульсов в *сек*. При длительном постоянном раздражении рецептора частота импульсации снижается, а это отражает снижение чувствительности анализатора к раздражению (*адаптация*). Это свойство в неодинаковой степени выражено в различных А. с. Оно служит основой подразделения на динамическую и статическую чувствительность.

Возникшая в рецепторах импульсация распространяется по волокнам без ослабления с большой скоростью (несколько десятков *м/сек*), зависящей от диаметра соответствующих волокон — чем толще волокно, тем меньшая скорость проведения импульсов. Как про-

межуточные, так и высшие нервные центры, через которые проходят эти импульсы, построены по типу экранных структур. С каждой нервной клеткой нервного центра связаны чувствительные волокна определенных рецепторных клеток, так что вся чувствительная поверхность оказывается как бы проецированной на клетки этого центра; такая же проекция сохраняется в следующем центре вплоть до самого высшего. Описанная организация позволяет передавать через последующие центры информацию о качестве раздражителей, воздействующих на различные рецепторные клетки. Проекция импульсов от клетки к клетке не является особенно строгой — импульсация по разветвлениям волокон захватывает отчасти и соседние клетки (рис. 2а). Характерной чертой деятельности всех промежуточных центров является наличие в них наряду с возбуждающими также и тормозящих процессов. Импульсы, поступающие от рецептора по определенной группе волокон, наряду с возбуждением соответствующих клеток через особые вставочные нейроны вызывают тормозящие процессы в клетках, связанных с соседними волокнами (рис. 2б, в). Т. о., поток импульсации от рецепторов, несмотря на наличие структурных возможностей для потери специфичности передачи, оказывается функционально ограниченным. Это функциональное ограничение находится под динамическим контролем со стороны высших центров. Поступающая из них по нисходящим волокнам импульсация способна создавать тормозящие процессы, ограничивая передачу импульсации, поступающей со стороны рецепторных структур.

Основными А. с. являются световая, звуковая, хим. (дистантная — обоняние и контактная — вкус), гравитационная, температурная и механическая. У некоторых животных существуют А. с., воспринимающие внеш. электр. поле. Наряду с А. с., воспринимающими внеш. раздражения, существует сложная система анализаторов, воспринимающих раздражения, возникающие внутри организма (хим., мех. и осмотические изменения в кровеносном русле, пищеварительном аппарате, двигательном аппарате и т. д.). Высшие отделы А. с. у высших животных расположены в коре больших полушарий головного мозга. Механизм их деятельности наименее изучен. Для ряда основных систем (световой, звуковой и механической) при помощи электрофизиологических методов и методов прямого раздражения получены подробные карты локализации участков анализа различных качеств раздражителей. Для других систем (хим. и температурной) такие сведения отсутствуют. См. также *Нейрон*.

П. Г. Костюк.

**АНАЛИТИК** — язык программирования, ориентированный на описание инженерных и научно-исследовательских задач и включающий средства для выполнения аналитических преобразований, а также средства общения с машиной в диалога режиме. Разработан в 1968 в Ин-те кибернетики АН УССР. В качестве подмножества А. содержит язык машины

«МИР». А. непосредственно интерпретируется в машине «МИР-2» (см. «МИР»).

Средства А. позволяют в удобной и компактной форме описывать как в числовом, так и в аналитическом виде алгоритмы решений задач линейной алгебры, линейных и нелинейных уравнений, нахождения экстрем. точек с применением дифференцирования выражений, нахождения приближенных решений дифф. уравнений и уравнений матем. физики методом разложения в ряды и др.

Особенностью языка А. является широкое использование общепринятой матем. символики. Помимо арифм. операций, операций отношений и элементарных функций, в А. используются операции дифференцирования, интегрирования, суммирования и др. (обозначаемые соответственно  $d$ ,  $\int$ ,  $\Sigma$ ), константы  $e$ ,  $\pi$  и др.; кроме целых и десятичных чисел, допускаются рациональные дроби, записываемые в виде  $a/b$ , где  $a$  и  $b$  — числа, напр.,  $4/17$ . Тип числа определяется видом его записи. Возникающая неоднозначность ( $4/17$ , с одной стороны, представляет собой дробь, а с другой — арифм. выражение, для вычисления которого необходимо 4 разделить на 17 и получить десятичный результат) устраняется введением указаний ДРОБИ ДЕСЯТИЧНЫЕ и ДРОБИ НЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ.

Осн. видом преобразуемой информации в языке А. является выражение. В отличие от других языков, в т. ч. и от языка машины «МИР-1», где значениями переменных могут быть только числа, в А. областью значения переменных является множество математических выражений.

Пример записи выражения в языке А.:

$$K \times d/dX (Y) + \int (Y \uparrow 2) dX + \\ + \Sigma (I = 1, N, A [I] \times \cos (X [I])),$$

что в общепринятой записи означает  $k \frac{dy}{dx} + \int y^2 dx + \sum_{i=1}^n a_i \cos x_i$ . Выражения можно

приводить к некоторым каноническим формам, в которых автоматически производятся упрощения типа  $P + 0 = P$ ,  $P \times 0 = 0$ , приводятся подобные члены, сокращаются дроби и пр. Приведение выражений к той или иной канонической форме осуществляется либо автоматически при выполнении некоторых операторов, либо оператором ПРИВЕСТИ, в котором указывается тип формы. Кроме выражений, осн. единицами информации в А. являются равенства. Равенство имеет вид:  $P_1 = P_2$ , где  $P_1$  и  $P_2$  — выражения. Над равенством можно выполнять некоторые операции, однако осн. роль равенств состоит в указании правил преобразования выражений, осуществляемых оператором ПРИМЕНИТЬ. Применить равенство  $P_1 = P_2$  к выражению  $P$  — значит найти в выражении  $P$  подвыражение  $P_1$  и заменить его выражением  $P_2$ . Напр., если равенство  $\sin (\pi/2) = 1$  применить к выражению  $A \times$

$\times \sin (\pi/2) + B \times (\sin (X)) \uparrow 2$ , то в результате получится выражение  $A \times 1 + B \times (\sin (X)) \uparrow 2$ .

В равенствах некоторые переменные могут играть роль параметров — переменных, вместо которых в процессе применения равенства можно подставлять любые выражения. Напр., применение равенства  $(A + B) \times (A - B) = A \uparrow 2 - B \uparrow 2$ , где  $A$  и  $B$  — параметры, к выражению  $(e \uparrow X + e \uparrow (-X)) \times (e \uparrow X - e \uparrow (-X))$  дает выражение  $(e \uparrow X) \uparrow 2 - (e \uparrow (-X)) \uparrow 2$ . При этом параметры  $A$  и  $B$  в процессе сравнения получают значения  $A = e \uparrow X$ ,  $B = e \uparrow (-X)$ . Выражение с параметрами, называемое также образом или образцом, используется для распознавания структуры выражений. В А. распознавание структуры выражений осуществляется с помощью оператора СРАВНИТЬ. Напр., сравнение образа  $A \times X \uparrow 2 + B \times X + C$ , где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — параметры с некоторым выражением  $E$ , позволит определить, является ли  $E$  квадратным трехчленом; при этом значениями  $A$ ,  $B$ ,  $C$  станут коэфф. этого трехчлена (если  $E$  — трехчлен). Так, для случая  $E = (P + 5) \times X \uparrow 2 + X$  параметры получают значения:  $A = P + 5$ ,  $B = 1$ ,  $C = 0$ .

Операторы СРАВНИТЬ и ПРИМЕНИТЬ позволяют осуществлять произвольные аналитические преобразования, однако для наиболее типичных действий — дифференцирования и интегрирования выражений — имеются соответствующие операторы ДИФФЕРЕНЦИРОВАТЬ и ИНТЕГРИРОВАТЬ (ИНТЕГРИРОВАТЬ охватывает интегрирование широкого класса функций, в т. ч. большинства интегралов, содержащихся в известных справочниках).

Для нахождения значений выражений имеются операторы, результатом действия которых может быть не только число, но и выражение. Напр., пусть имеются описания выражений  $A = 2 \times X \uparrow 2 + B - 1$  и  $B = 3 \times X \uparrow 2 + X + 2$ ; тогда результатом работы оператора ВЫЧИСЛИТЬ  $A$  будет выражение  $5 \times X \uparrow 2 + X + 1$ , которое присваивается в качестве значения переменной  $A$ .

Для удобства проведения аналитических преобразований в А. вводится понятие рабочей зоны (РЗ), которая соответствует рабочему листу бумаги, где математик выполняет аналитические выкладки, пробуя те или др. методы, ошибаясь, исправляя ошибки и т. д. Для помещения выражения в РЗ имеется оператор обращения ВЗЯТЬ  $A$ , где  $A$  — название выражения. Для названия информации, содержащейся в РЗ, имеется оператор НАЗВАТЬ  $A$ . РЗ представляет часть памяти ЦВМ, которую можно постоянно обозревать с помощью устр-ва отображения — экрана. Экран позволяет осуществлять не только обратную связь (вывод выражений и графиков), но и прямую (с помощью светового карандаша на экране можно подчеркивать подвыражения и в дальнейшем обрабатывать не все выражение, а лишь его подчеркнутую часть; из подчеркнутых частей можно компоновать новое выражение, сти-

рать ненужную информацию и др.). Экран удобен при работе в диалога режиме.

Режим диалога между человеком и машиной, реализованный в машинах серии «МИР», имеет особенно большое значение при проведении аналитических выкладок, когда предварительное планирование работы с учетом всех возможных ситуаций затруднительно. Диалог осуществляется путем поочередного обмена порциями информации. Для человека такой порцией является предложение (последовательность описаний и операторов). На каждое предложение машина может отвечать всеми имеющимися средствами вывода информации. Имеется широкий набор операторов вывода, а также операторов управления последовательностью действий программы (условный оператор, оператор перехода, операторы цикла, процедуры и др.).

Лит.: Глушков В. М. [и др.]. АНАЛИТИК (алгоритмический язык для описания вычислительных процессов с использованием аналитических преобразований). «Кибернетика», 1971, № 3.

Т. А. Гринченко.

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ.** Обычно аналитическими преобразованиями называют преобразования символьной информации, записанной на языке математического анализа. Такие преобразования используются для решения задач математического анализа и включают дифференцирование, интегрирование, различные упрощения и т. д. Использование вычислительных машин для аналитических преобразований началось после появления достаточно совершенных машин и развитых алгоритмических языков. При создании большинства имеющихся в настоящее время программ аналитических преобразований использовался язык ЛИСП. Языком публикаций является также формульный АЛГОЛ. Эти языки получили распространение главным образом в США.

Применение машин для таких преобразований позволяет применять в малодоступных для человека масштабах аналитические методы решения таких задач, как задачи линейной алгебры, решение дифф. уравнений, интегр. уравнений и др. Наиболее развитыми языками, используемыми для этих целей, являются язык FORMAC, созданный в Массачусетском технол. ин-те (США), и специально ориентированный на применение аналитических методов язык АНАЛИТИК, созданный в Ин-те кибернетики АН УССР. Отличительной особенностью языка АНАЛИТИК является то, что его разрабатывали как входной язык, непосредственно применяемый в машине для инженерных расчетов «МИР-2». Ориентация структуры машины «МИР-2» на реализацию языка позволила сделать эту реализацию эффективной. В то же время использование других языков для аналитических преобразований на ЭВМ требует создания специальных трансформирующих систем на уже существующих машинах.

Для преобразования аналитических выражений применяются следующие осн. опера-

ции. 1) Операция формирования новых выражений по правилам, описываемым тоже выражениями. В этой операции используется рекурсивная процедура подстановки в выражение, вместо переменных, именуемых ими выражений. 2) Операции, основанные на применении к преобразуемым выражениям равенств форм вида:

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Здесь  $F_1, F_2$  — формы,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — переменные, которые в процессе применения принимают соответствующие значения. 3) Операции, приводящие преобразуемые выражения к различным каноническим формам. Их ф-ции удобно описывать с помощью соответствующих соотношений. Из-за массового характера этих преобразований требуется большая скорость их выполнения. Эти требования могут быть удовлетворены при схемно-программной реализации операции. К операциям, приводящим выражения к каноническим формам, относятся:

$$a) P + 0 = P, P \times 0 = 0, P \times 1 = P, P^0 = 1, P^1 = P, 1^P = 1;$$

$$b) \alpha \times P + \beta \times P = (\alpha + \beta) P, P^{P_1} \times P^{P_2} = P^{P_1 + P_2};$$

$$в) (P_1 + P_2) \times P_3 = P_1 \times P_3 + P_2 \times P_3 \text{ и др. операции.}$$

Здесь  $P, P_1, P_2, P_3$  — выражения,  $\alpha, \beta$  — числа. Использование канонических форм делает разрешимой процедуру установления эквивалентности выражений для многих податтебр матем. анализа. К осн. операциям, которые используются при решении задач аналитическими методами, относятся также дифференцирование символьное и интегрирование символьное.

Осн. отличиями машинных аналитических методов от «ручных» является, во-первых, то, что при их разработке для современных ЭВМ проблема минимизации памяти играет большую роль, чем проблема минимизации к-ва выполняемых операций, а, во-вторых, для реализации алгоритмов со сложной логич. структурой требуется достаточно развитый аппарат распознавания, с помощью которого проверялась бы эквивалентность выражений, степень подобия их структуры, а также различные функциональные свойства. Из-за трудностей, связанных с созданием такой системы распознавания, часто при решении практических задач требуется работа в режиме диалога «человек — машина», когда ф-ции распознавания передаются человеку. Вместе с тем в плане работ по моделированию человеческого мышления, созданию искусственного интеллекта и решению ряда практически важных задач было создано значительное к-во автомат. работающих программ. К ним относятся программы доказательства теорем, ряд эвристических программ символьного интегрирования и др.

Наличие в языке АНАЛИТИК операторов, обеспечивающих выполнение осн. аналитических преобразований и позволяющих для ши-

рокого класса выражений распознавать эквивалентность, степень подобия и функциональную зависимость выражений от заданной переменной, позволяет описывать на этом языке достаточно сложные алгоритмы, рассчитанные на работу в автоматическом режиме.

Лит.: Глушков В. М. [и др.]. АНАЛИТИК (алгоритмический язык для описания вычислительных процессов с использованием аналитических преобразований). «Кибернетика», 1971, № 3; Bond E. [и др.]. FORMAC — an experimental FORMula MANipulation Compiler. В кн.: Proceedings of the 19-th National conference Association for Computing Machinery. New York, 1964.

В. П. Клименко, Ю. С. Фишман.

**АНАЛОГ ЦИФРОВОЙ**, цифровая модель — разновидность моделирующего устройства, в котором органически сочетаются цифровой способ представления информации с аналоговым способом переработки информации. Основу А. ц. образуют вычисл. элементы для выполнения арифметических и логических операций (сумматоры, инверторы, умножители, функциональные преобразователи, интеграторы, индикаторы экстремальных сигналов и т. п.). Эти элементы соединяются между собой при решении задач так, чтобы выполнялись требуемые матем. зависимости между переменными моделируемого объекта. Для представления информации в А. ц. наиболее часто используются непозиционные способы кодирования, напр., в виде потока импульсов или систем счисления в остаточных классах.

Имея А. ц. осн. элементов электр. цепей: сопротивлений, индуктивностей емкостей, источников энергии и др., можно построить А. ц. электр. цепей и широкого класса объектов, для которых известны аналоговые и квазианалоговые модели в виде электр. цепей. Типичным примером А. ц. являются цифровые дифференциальные анализаторы (см. *Цифровая интегрирующая машина*) для исследования систем автомат. управления. А. ц. применяют в системах программного управления станками и производственными процессами, в системах управления подвижными объектами. В последнее время наметился прогресс в создании А. ц. для решения экстремальных задач *программирования математического*.

А. ц. обеспечивает высокую точность решения задач, наглядность и оперативность получения этого решения и высокую степень автоматизации процессов ввода и вывода информации; но его быстродействие ниже, чем у АВМ.

Лит.: Воронов А. А. [и др.]. Цифровые аналоги для систем автоматического управления. М.—Л., 1960 [библиогр. с. 191—194]; Калыев А. В. Введение в теорию цифровых интеграторов. К., 1964 [библиогр. с. 286—288]; Корн Г., Корн Т. Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины. Пер. с англ., ч. 2. М., 1968.

В. В. Васильев.

**АНАЛОГИИ** (греч. в ед. ч. — *ἀναλογία* — соответствие, сходство) — наличие в двух и более объектах общих условий (напр., свойств, отношений), позволяющих переносить информацию об одном объекте (модели) на другой (прототип). Логические структуры выводов при этом могут быть разными. Когда переносимая информация связывается со свойствами,

а основанием для переноса ее является общность признаков, тип А. наз. *парадигмой*. Термин «А.» древнегреч. философы и математики применяли к отождествлению отношений. Этот подход к А. получил дальнейшее развитие в современной науке, напр., в понятии изоморфизма.

Выводы по А. можно классифицировать прежде всего по характеру посылок и заключений. Над этой классификацией в свою очередь надстраивается классификация по типам оснований. В выводе по А. посылка описывает модель, а заключение — прототип. Различают два осн. типа выводов по А.: А. по свойствам и А. по отношениям.

А. по свойствам имеет подразделения. Перенос с модели на образец какого-то вполне определенного свойства наз. А. по константам, если же переносится вообще любое свойство, — это А. по переменным. При этом константы могут быть логического характера, напр., непротиворечивость, и не логического, напр., существование. А. по переменным можно подразделить на два подкласса: подкласс позитивных А., когда на прототип переносится свойство, найденное в модели, и подкласс негативных А., когда на прототип переносится фактор отсутствия некоторого свойства.

А. по отношениям охватывает наиболее существенные в практике науч. исследований типы выводов. Формы этих А. более многообразны, чем формы А. свойств. В современной науке широко применяют различные виды А. Так, в *кибернетике* исследуют широкий класс А., в которых модели и прототип берут из разных областей природы, общества и мышления. В функциональной А. на основе тождества ф-ций сравниваемых систем делают вывод о тождестве структур этих систем. В кибернетике широко используют и вывод, обратный функциональной А., и перенос ф-ции с модели на образец на основании тождества структур. Этот вид А. можно назвать структурной А. Такие А. помогают использовать знания о строении тех или иных органов живых существ для создания искусственных устр-в, функционирующих аналогичным образом (см. *Бионика*).

Большую роль в кибернетике играют А. типа изоморфизмов. Отождествляя логические и числовые соотношения, используют ЭВМ для решения логических задач. Соответствие между состояниями элементов ЦВМ и состояниями *нейронов* дает основание использовать ЦВМ как модель нервной системы и наоборот. А. типа изоморфизма нашли применение в процессе формулирования понятия об *информации количестве*.

В вопросах, напр., о соотношении машины и мышления используется каузальная А.: причины одинаковых явлений должны быть одинаковыми. Иногда при этом каузальная А. дополняется другими формами. Так, англ. логик А. Тьюринг (1912—54) обосновывает положение о тождественности функции человека

и машины с помощью мысленного эксперимента замены человека машиной, т. е. применяет А. функциональной заменимости — имитацию. Это вызывает критику, сомнение в правомерности такой А. и даже приводило философов к отрицанию кибернетики.

В общем случае вывод по А. лишь вероятен. Определение правил вывода по А. в общем случае является трудной проблемой в области логики науки. Однако применительно к отдельным формам и частным случаям форм вывода по А. можно считать, что существуют условия правомерности вывода. Касаясь, например, вывода от общности одних свойств к общности других, можно сказать, что такой вывод будет тем более правомерным, чем больше общих свойств установлено у модели и прототипа. При этом важно, чтобы свойства подбирались «без предвзятости». Если общность признаков дана посылками, то признаки должны максимально отличаться друг от друга. Вместе с тем переносимое свойство должно быть такого же типа, как и те, общность которых установлена в посылках. Так, если общность между моделью и прототипом установлена по свойствам мех. характера, то переносимое свойство также должно иметь мех. характер.

Большое теор. и практ. значение имеет А. между нервной системой и вычисл. машинами, конструирование которых является одной из осн. проблем кибернетики. А., проводимая между вычисл. машиной и нервной системой, используется для улучшения конструкции машин и для лучшего понимания функционирования нервной системы (см. *Нейронные сети*). Вычисл. машины типа *цифровых дифференциальных анализаторов* работают по принципу А. Часто создают физ. систему, описываемую тем ур-нием, которое нужно решить, а затем получают нужный результат путем измерения. Так, распределение тока в электр. цепях определенного вида подчиняется тем же ур-ниям, что и распределение т-ры в доменной печи, давление в струях воздуха, обтекающих самолет и пр. *Аналоговая вычислительная машина* дает численное решение таких ур-ний в виде определенных значений тока на выходе машины. Во всех этих случаях соблюдаются принципы, напр., электро-механической аналогии или, более общо, динамической аналогии. И хотя *цифровые вычислительные машины*, в которых информация представляется в форме цифровых кодов, универсальны и могут решать ур-ния с высокой степенью точности, однако и они не могут претендовать на полное отображение реальных мыслительных процессов, осуществляемых в мозге. В деятельности мозга важную роль играют и аналоговые процессы, причем информация, по-видимому, многократно меняет свою форму из дискретной в непрерывную и наоборот. Если ЦВМ многие операции выполняет последовательно, что требует исключительной точности, то огромные способности мозга, высокая точность и надежность его работы достигаются не посредством быстро-

действия, точности и надежности выполнения каждой операции, а через механизм параллельной обработки информации и какие-то своеобразные формы представления ее, лишь отдаленно отображаемые в цифровых и аналоговых машинах.

Ряд сложных задач, например, решение в цифровой форме экстремальных задач, автомат. классификация и обучение сложным формам поведения приводит к невыполнимым требованиям по числу операций и объему памяти. В то же время подобные задачи нередко легко решаются простейшими физ. системами, например, луч света отыскивает кратчайший путь в оптически неоднородной среде или газ в сосуде переходит из неравновесного состояния к равновесию, отыскивая максимум *энтропии*. В решении последней задачи молекулы газа как бы играют роль параллельно работающих «вычислительных элементов».

Создание тех. устр-в по А. с реально работающим мозгом относится к числу важнейших задач кибернетики. Решение этой задачи будет идти либо по пути *комплексирования машин* или создания *гибридных вычислительных машин*, либо по пути создания моделей на совершенно новых принципах, более адекватно отображающих сущность мышления.

*Лит.:* Материалистическая диалектика и методы естественных наук. М., 1969; У е м о в А. И. Аналогия в практике научного исследования. М., 1970; О л ь с о н Г. Ф. Динамические аналогии. Пер. с англ. М., 1947 [библиогр. с. 213—214].

А. И. Уемов, В. И. Богданович.

**АНАЛОГОВАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА** (АВМ) — вычислительная машина, которая обрабатывает информацию, представленную в аналоговой (непрерывной) форме. В общем случае АВМ — некоторая специально сконструированная материальная система (модель), предназначенная для воспроизведения (моделирования) определенных, характерных для данного класса задач, соотношений между непрерывно изменяющимися физическими величинами (*машинными переменными*) — аналогами соответствующих исходных матем. переменных решаемой задачи. В зависимости от физ. процесса, положенного в основу *модели математической*, различают электрические (электронные), электромех., мех., гидравлические, пневматические и др. АВМ, переходные процессы и статические состояния в которых характеризуются соотношениями машинных переменных. В качестве таких переменных используют электр. напряжения и токи, угловые и линейные перемещения, давление в жидкой и газовой среде и т. п. Напр., в электронных АВМ в качестве машинных переменных обычно используют электр. напряжения.

Принципы аналоговых вычислений использовались еще на заре истории. В 3800 г. до н. э. на землях, на которых позднее возникла Вавилония, аналоговые расчеты использовались при землемерных работах и для составления карт. Около 80 г. до н. э. греки построили планетарий, с помощью которого они определяли положение Солнца и планет, используя



птолемееву (геоцентрическую) модель солнечной системы. В начале 15 в. в Самарканде узб. математик ал-Каши построил механизм для определения момента времени, когда две планеты находятся в одной меридиональной плоскости. Позже было построено еще одно вычисл. устр-во, с помощью которого определяли положение Солнца, Луны и пяти известных в то время ближайших планет в заданный момент времени. В 1620 создана первая счетная линейка, в которой использовано понятие логарифма. Около 1814 нем. инженер Герман

Современные АВМ делятся на две группы: машины, построенные по принципу простой аналогии, и машины, построенные по принципу сложной аналогии. В машинах 1-й группы связь между машинными переменными и переменными исходных решаемых ур-ний осуществляется посредством постоянных коэфф. В машинах, построенных по принципу сложной аналогии, эта связь не выступает в явном виде, а носит более сложный характер. К машинам 2-й группы относятся, напр., машины, построенные по принципу нелинейного подо-

Механическая и электрические системы аналогий

Таблица 1

Механическая система	Аналогичная электрическая система	
	1-я система	2-я система
Масса $m$ Перемещение $x$ Скорость $v$ Сила $Q = m \frac{dv}{dt}$ Коэффициент скоростного трения $s = \frac{Q}{v}$ Коэффициент упругости $\frac{Q}{x}$	$L$ — индуктивность $q$ — заряд $I$ — ток $L \frac{dI}{dt} = E$ — эдс $\frac{E}{I} = R$ — сопротивление $\frac{1}{C}$	$C$ — емкость $\psi$ — потокосцепление $U$ — напряжение $C \frac{dU}{dt} = I$ — ток $\frac{I}{U} = \gamma$ — проводимость $\frac{1}{L}$

сконструировал первый планиметр, который измерял на плане площадь, ограниченную произвольной кривой. Непосредственным предшественником современных АВМ явился механический интегратор, изобретенный в 1876 англ. физиком Дж.-Дж. Томсоном. Англ. физик У. Томсон (Кельвин) высказал идею соединения нескольких таких интеграторов для решения дифф. ур-ний. Принцип аналоговых расчетов, предложенный Кельвином, применяется и поныне. В 1904—11 отечественный ученый А. Н. Крылов, по-видимому, не знакомый с работами Кельвина, разработал теорию подобных устр-в и построил АВМ с четырьмя интеграторами.

В начале 20 в. было много сделано в области создания аналоговых устр-в для нахождения корней многочленов и для вычисления коэфф. Фурье. В 1931 в США была создана АВМ механическая. Но из-за громоздкости, высокой цены и малого быстродействия эти АВМ не получили широкого применения. В конце 30-х — начале 40-х годов 20 ст. в СССР, США и др. странах были созданы АВМ электро-механические, а в середине 40-х — электронные. Так, уже в 1945 под руководством сов. электротехника Л. И. Гутенмахера была создана электронная аналоговая машина с периодизацией решений, тогда же под руководством С. А. Лебедева (р. 1902) создана АВМ для решения систем обыкновенных дифф. ур-ний. АВМ, основанные на усилителях операционных, были созданы в нашей стране в 1949. В 40—50 годах 20 ст. были разработаны и усовершенствованы многие осн. элементы и узлы современных АВМ. Это позволило уменьшить размеры машин и повысить точность их работы.

бия, и квазианалоговые машины (см. *Квазианалоговая модель*). Т. о., АВМ простой аналогии предназначены для изучения некоторого материального объекта посредством использования объекта другой физ. природы. Это возможно только в том случае, когда оба объекта описываются аналогичными по форме ур-ниями. В табл. 1, напр., приведена аналогия между мех. системой и двумя типами электр. систем.

В качестве другого примера можно указать на аналогию между электростатическим, постоянным магнитным и стационарным электр. полями (см. табл. в ст. *Моделирование на сплошных средах*). Подобная аналогия может быть получена для гидравлических, пневматических, электродинамических и других систем.

Одно из ведущих мест среди машин простой аналогии занимают сеточные АВМ (см. *Электрические моделирующие сетки*), принцип действия которых заключается в приближенной реализации дифф. ур-ний в частных производных, представленных в конечных разностях посредством сеток, состоящих из  $R$ ,  $L$ ,  $C$ -элементов. При этом вся область, в которой находят решение, разбивается на ряд элементарных объемов и для каждого из них строится электр. схема замещения. Большое распространение в науке и технике получили структурные АВМ простой аналогии, представляющие собой набор решающих элементов, предназначенных для реализации элементарных матем. операций или их совокупности. При решении задач эти элементы соединяются друг с другом в соответствии с видом заданных ур-ний.

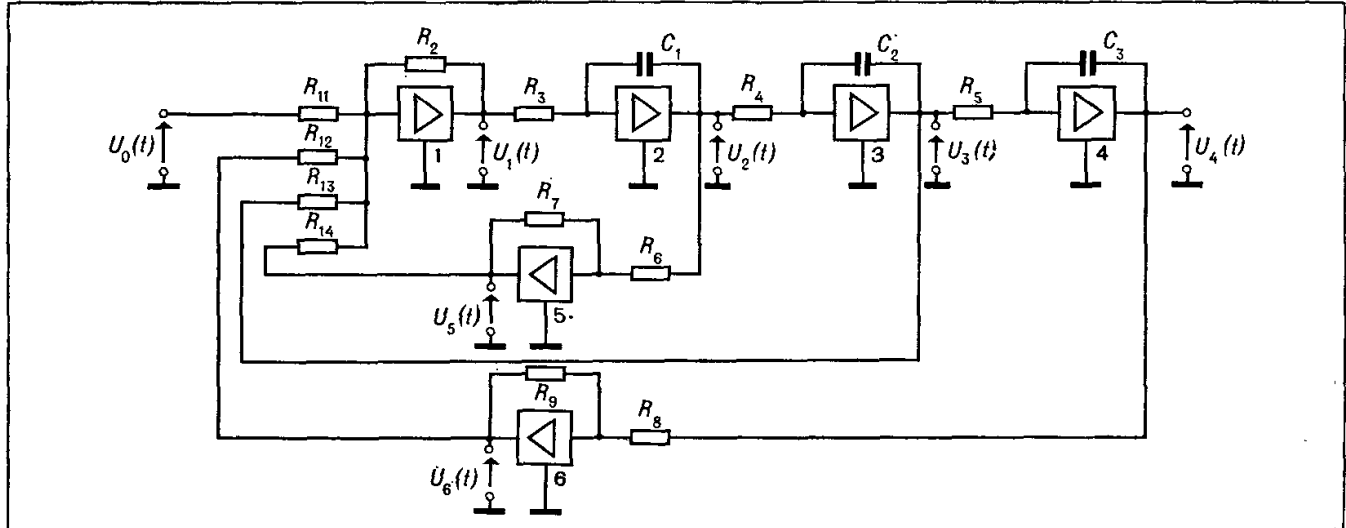
Общий порядок решения задач на АВМ заключается в следующем. 1) На основании заданной системы ур-ний составляется *структурная схема модели*, представляющая собой блок-схему соединения *решающих устройств* АВМ, строго соответствующую структуре ур-ний. 2) По заданным макс. значениям переменных исходных ур-ний рассчитывают масштабные коэффициенты, представляющие собой отношение переменных исходного ур-ния к соответствующим машинным переменным (см. *Программирование АВМ*). 3) По коэфф.

$$U_2(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \cdot \frac{1}{M_2};$$

$$U_3(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \frac{1}{M_3};$$

$$U_4(t) = \frac{x(t)}{M_x}; \quad U_0(t) = \frac{y(t)}{M_y},$$

где  $M_1, M_2, M_3, M_x, M_y$  — масштабные коэфф. Рассчитывают их, исходя из максимально воз-



Структурная схема модели для решения линейных дифференциальных уравнений 3-го порядка.

исходных ур-ний и рассчитанным масштабным коэфф. вычисляют значения параметров схемы (величины сопротивлений и емкостей, параметры нелинейных решающих элементов и вариаоров коэфф.). 4) Решаемая задача набирается на АВМ с помощью *наборного поля*. Набор задачи на АВМ представляет собой соединение решающих элементов в соответствии с выбранной структурной схемой и установку необходимых параметров схемы. 5) Схему настраивают и решают задачу. Решение задачи в виде ф-ций времени записывается с помощью самописца, либо осциллографа, в отдельных случаях бывает достаточно просмотреть решение на электроннолучевой трубке осциллографа (см. *Устройства записи аналоговой информации*).

На рис. приведена структурная схема для решения линейного дифф. ур-ния 3-го порядка

$$a_0 \frac{d^3x(t)}{dt^3} + a_1 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_2 \frac{dx(t)}{dt} + a_3 x(t) = y(t),$$

построенная методом понижения порядка производной. Здесь

$$U_1(t) = \frac{d^3x(t)}{dt^3} \cdot \frac{1}{M_1};$$

возможной величины напряжения (машинной переменной)  $U_{\max}$  на выходе решающего элемента. При этом обязательно должны быть заданы макс. значения переменных исходного решаемого ур-ния, тогда

$$M_1 = \frac{\left( \frac{d^3x(t)}{dt^3} \right)_{\max}}{U_{\max}};$$

$$M_2 = \frac{\left( \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right)_{\max}}{U_{\max}};$$

$$M_3 = \frac{\left( \frac{dx(t)}{dt} \right)_{\max}}{U_{\max}};$$

$$M_x = \frac{x_{\max}}{U_{\max}}; \quad M_y = \frac{y_{\max}}{U_{\max}}.$$

Однако не всегда заранее известны макс. значения переменных решаемого ур-ния. В этих случаях масштабные коэфф. задаются ориентировочно, а в процессе настройки схемы, когда напряжения на выходах решающих элементов начинают превышать  $U_{\max}$ , они эмпирическим путем пересчитываются до нужных значений. В тех случаях, когда заданы макс. значения всех переменных, параметры схемы рассчитываются путем использования системы

Краткие технические характеристики АВМ простой аналогии

Таблица 2

Тип АВМ	Вид уравнений	Максимальный порядок решаемых дифференциальных уравнений	Допустимая длительность интегрирования, сек	Габариты, см или занимаемая площадь, м <sup>2</sup>	Потребляемая мощность, кВа	
					26 в	220 в
«ИПТ-5»	Линейные	9	150	20×40	0,5	2
«МПТ-9»	»	16	200	700×80×120	1,3	5
«ЛМУ-1»	Нелинейные	9	200—400	622×476×1320	—	2,1
«ЭМУ-3»	Линейные	6	150	120×41×70	0,06	0,85
«МН-7»	Нелинейные	6	150	0,5	—	0,74
«МН-8»	»	32	1800	60	—	25
«ЭМУ-5»	»	6	200	68×50×100	0,07	0,76
«ЭМУ-6»	»	6	2000	68×50×54	0,07	0,35
«МН-10»	»	6	200	0,3	0,07	0,130
«ЭМУ-8»	»	Набор из стандартных блоков	2000	35×30×30	—	0,06
«ННБ»	Набор нелинейных блоков	—	Не ограничена	43,8×45,8×33,6	—	0,7
«ЭДА»	Нелинейные	19	150	250×50×175	—	—
«МН-14»	»	30	10 000	40	—	15
«ЭМУ-10»	»	24	1000	20	—	2
«МН-11»	»	9	Частота повторений решения — 100 рещ/сек	15	—	10
«МН-10М»	»	10	100	0,2	—	0,25
«Электрон»	»	55	1000	—	—	25
«МН-18»	»	50	1000	171,4×108,6×53	—	0,1
«МН-17М»	»	60	100	7520×1042×2390	—	15

Краткие технические характеристики некоторых специализированных аналоговых и квазианалоговых вычислительных машин, выпускаемых в СССР

Таблица 3

Тип машины	Назначение машины	Количественные характеристики решаемых задач	Габариты, см или занимаемая площадь, м <sup>2</sup>	Потребляемая мощность, кВа
«ЭМСС-7М»	Для расчетов статически неопределенных систем типа балок и рам; может применяться для решения систем линейных алгебраических уравнений	Количество схем-аналогов стержней — 75	133,4×83,6×138	0,4
«Альфа» (ЭМСС-8)	Для расчетов рамных систем строительной механики	Количество схем-аналогов стержней — 85	4	3,5
«Итератор»	Совместно с АВМ для решения систем линейных дифференциальных уравнений с линейными граничными условиями	Максимальный порядок решаемой системы уравнений — 8. Максимальное число точек в интервале интегрирования, входящих в краевые условия, — 3	30×128×68	1
«Аркус»	Для решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с линейными и нелинейными краевыми условиями	Максимальный порядок решаемых уравнений — 8		1,8
«Оптимум-2»	Для решения транспортной задачи линейного программирования	Максимальное количество пунктов производства — 20, пунктов потребления — 60	2,5	2,2
«АСОР-1» (Ритм)	Для автоматизации расчетов укрупненных задач сетевого планирования и управления	Максимальное число работ в графике — 200, событий в графике — 140	190×220×200	2
«УСМ-1»	Для решения дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического и параболического типов	Сетка имеет 1458×2 точек	80	30

ур-ний, связывающей входные и выходные величины каждого из решающих элементов.

В настоящее время АВМ широко применяют при решении практических задач. В частности, АВМ простой аналогии используют для решения дифф. ур-ний в частных производных, описывающих поля различной физ. природы (тепловые, электр., магнитные и др.), процессы тепло- и массообмена, мех. свойства физ. систем и т. д. Осн. применение структурных АВМ простой аналогии — решение линейных и нелинейных обыкновенных дифф. ур-ний с заданными начальными условиями (задача Коши). Однако непрерывное совершенствование решающих элементов и методов решения задач приводит к тому, что эти машины используются для решения краевых задач обыкновенных дифф. ур-ний, линейных и нелинейных алгебр., трансцендентных и интегр. ур-ний и некоторых типов ур-ний в частных производных. АВМ простой аналогии используются также как управляющие устр-ва в различных системах управления и как измерит. устр-ва в системах сбора и обработки информации. Такие АВМ эффективно применяют и для исследования нелинейных систем автомат. регулирования и управления. В связи с этим возникает целый ряд задач: анализ динамики систем; определение оптимальных, с точки зрения некоторых критериев, параметров, структуры, и внешних возмущений систем при случайных воздействиях. Осн. достоинствами АВМ при решении перечисленных задач являются большое быстродействие по сравнению с ЦВМ, сравнительно невысокая стоимость, возможность решения задач в *реальном масштабе времени* и простота общения оператора с машиной. Недостаток АВМ — сравнительно высокая погрешность решения, однако, в большинстве практических задач исходная информация задается с погрешностью, соизмеримой с погрешностью АВМ, поэтому указанный недостаток далеко не всегда играет существенную роль.

Дальнейшее совершенствование АВМ осуществляется в технологическом (перевод элементов на *интегральные схемы* или гибридные) и в конструктивном отношении (уменьшение погрешности элементов, автоматизация процесса подготовки задач к решению и решения их). Весьма перспективным является совместное использование аналоговых и цифровых вычисл. машин (см. *Гибридная вычислительная машина, Комплексирование машин*), позволяющее за счет объединения достоинств машин обоих типов получать новый качественный эффект.

В табл. 2 приведены краткие тех. характеристики отечественных АВМ простой аналогии, в табл. 3 — тех. характеристики специализированных аналоговых и квазианалоговых машин.

Лит.: Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М., 1959 [библиогр. с. 318—319]; Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. М., 1963 [библиогр. с. 494—505]; Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. К., 1964; Пухов Г. Е.

Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. К., 1967 [библиогр. с. 560—564]; Грубов В. И., Кирдан В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. Справочник. К., 1969 [библиогр. с. 179—181]; Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. Пер. с англ. М., 1962; Вычислительная техника. Справочник. Пер. с англ., т. 1. Аналоговые вычислительные устройства. М.—Л., 1964; Корн Г., Корн Т. Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины. Пер. с англ., ч. 1—2. М., 1967—68 [библиогр. ч. 1, с. 453—456]. Г. Е. Пухов.

**АНАЛОГОВАЯ МОДЕЛЬ** — вспомогательная по отношению к исследуемой системе (объекту) система (квазиобъект), которая имеет физическую природу, отличную от природы исследуемой системы, и может на определенных этапах познания замещать эту систему, давая исследователю полезные сведения. А. м. может быть материальной искусственной (когда ее выполняют в виде установки, устройства, схемы, предназначенной для исследования какой-либо группы явлений) и материальной естественной, когда характеристиками одного (физ., социального, эконом. и др.) явления пользуются для получения характеристик явления др. природы. А. м. может быть мысленной, т. е. являться некоторым условным образом, дающим информацию об исследуемой системе. Матем. аппарат аналогового моделирования базируется на выводах *подобия теории*.

Материальная искусственная А. м. может быть единым устройством, дающим непосредственно прямую аналогию и воспроизводящим все течение изучаемого процесса каким-либо другим процессом, имеющим др. физ. природу. К таким моделям, называемым иногда математическими — аналоговыми, относится, напр., мех. маятник, рассматриваемый как модель для изучения электромех. колебаний синхронного электр. генератора. Наиболее часто А. м. выполняются как электр. модели, весьма удобные в эксперименте. В этих моделях токи, напряжения и иногда мощности служат аналогами величин др. физ. природы. К электр. моделям прямой аналогии относятся такие разновидности А. м., как модели со сплошной средой, с проводящей пластиной (проводящей бумагой), электролитические ванны и различные сеточные модели полей (см. *Моделирование на сплошных средах*).

В отличие от А. м., построенных по принципу прямой аналогии, существуют *квазианалоговые модели*, реализованные на основе принципа эквивалентности. А. м. может быть структурной моделью, которая воспроизводит на основе ур-ний отдельные этапы процесса по звеньям моделируемой системы и после соединения их воспроизводит весь процесс. Пример структурной А. м. — универсальная *аналоговая вычислительная машина* (см. «МН», «ЭМУ»).

Специализированные А. м., предусматривающие, в отличие от универсальных, решение только узкой группы задач, иногда выполняются только частично как структурные. Напр., в расчетном столе электр. сетей, предназначенном для исследований устойчивости

и переходных процессов в электр. системах, реализуются электромех. аналогии при дискретном (по интервалам времени) представлении движения генератора и моделирование физического распределения токов, напряжений и мощностей в сети.

Лит.: Веников В. А. Теория подобия и моделирование применительно к задачам электроэнергетики. М., 1966 [библиогр. с. 478—482]; Шлейко А. В. Основы аналоговой вычислительной техники. М., 1967; Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. К., 1967 [библиогр. с. 560—564]. В. А. Веников.

**АНАЛОГО-ЦИФРОВАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА** — см. Гибридная вычислительная машина.

**АНАЛОГО-ЦИФРОВАЯ СИСТЕМА** — см. Комплексирование машин.

**АНАЛОГО-ЦИФРОВОЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ**, преобразователь аналогокод — устройство, осуществляющее автоматическое преобразование (измерение и кодирование) непрерывно изменяющихся во времени аналоговых величин в эквивалентные значения числовых кодов. Количественная связь между аналоговой величиной  $A(t_i)$  и соответствующей ей цифровой величиной  $N_{ti}$  для любого момента времени  $t_i$  определяется соотношением

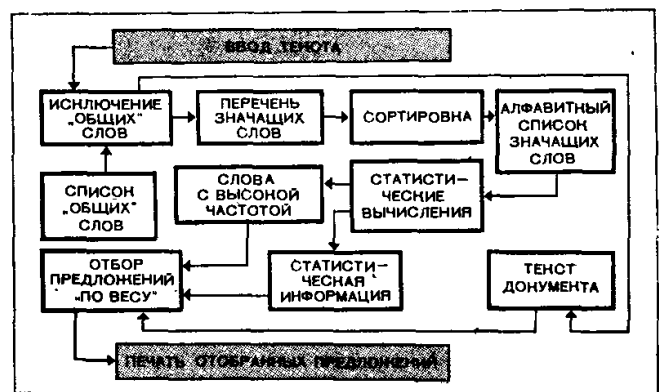
$$N_{ti} = \frac{A(t_i)}{\Delta A} \pm |\delta N_{ti}|,$$

где  $\Delta A$  — шаг квантования, т. е. аналоговый эквивалент единицы младшего разряда кода;  $\delta N_{ti}$  — погрешность преобразования на данном шаге. В качестве входных аналоговых величин  $A(t)$  чаще всего используются временные интервалы, углы поворота, электр. напряжения (токи), частота колебаний и фазовые сдвиги. Выходные коды  $N_i$  представляют чаще всего в двоичной, двоично-десятичной или десятичной системах счисления. Различают преобразователи с непосредственным отсчетом, преобразователи последовательного счета, преобразователи с поразрядным кодированием и преобразователи комбинированные. К А.-ц. п. предъявляется некоторая совокупность тех., метрологических и эксплуатационных требований. Их осн. характеристики: быстродействие (определяется макс. числом однократных преобразований в сек), точность (характеризуется максимальной суммарной или среднеквадратичной погрешностью преобразований, которая, в свою очередь, складывается из статической и динамической погрешностей), чувствительность и к-во каналов. Статическая погрешность, в свою очередь, состоит из погрешности дискретности (обусловленной квантованием сигнала по уровню) и инструментальных погрешностей (источники которых для разных типов преобразователей различны); динамическая возникает вследствие переходных процессов в цепях сравнения и эталонных источниках и из-за непостоянства аналоговой величины в процессе кодирования. Вследствие квантования сигнала по времени

при воспроизведении его по дискретным отсчетам появляется также погрешность аппроксимации. Чувствительность характеризуется минимальным значением аналогового сигнала, который преобразователь надежно различает как единицу кода. Количество каналов определяет максимальное число датчиков аналоговых величин, которые могут быть одновременно подключены к преобразователю.

Лит.: Гитис Э. И. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств. М.—Л., 1961 [библиогр. с. 366—373]; Дроздов Е. А., Пятибратов А. П. Автоматическое преобразование и кодирование информации. М., 1964 [библиогр. с. 539—541]; Кондалев А. И. Преобразователи формы информации. К., 1965 [библиогр. с. 174—175]; Полупроводниковые кодирующие и декодирующие преобразователи напряжения. Л., 1967 [библиогр. с. 308—310]. А. И. Кондалев.

**АННОТИРОВАНИЕ АВТОМАТИЧЕСКОЕ** — процесс составления краткого содержания (аннотации) документа с помощью вычислительной машины. Существует два подхода к решению проблемы А. а.: 1) логико-грамматический, опирающийся на полный синтаксический и логический анализ обрабатываемого документа; 2) статистико-вероятностный, основанный на использовании корреляций между частотой элементов текста и их значением. Необходимое условие реализации логико-грамматического подхода — предварительный синтаксический анализ текста, в результате которого каждому слову приписываются сведения о его связях с др. словами. При этом подходе наиболее употребителен метод А. а., состоящий в приведении предложений к стандартному виду: субъект—предикат — группы зависящих от них слов. Из стандартных предложений выделяются структуры типа субъект—группа зависящих от него слов. Предполагается, что повторение этих структур свидетельствует о их смысловой ценности. При сравнении повторяющихся структур они стандартизируются с помощью списков синонимов. Набор



Блок-схема системы автоматического аннотирования, основанной на статистическом методе.

именных словосочетаний, повторяющихся в тексте, составляет каркас аннотаций. Статистико-вероятностные методы А. а. основаны на двух гипотезах: 1) самые частые слова текста наиболее значимы; 2) отрезки текста, содержащие наибольшее к-во частых слов, наиболее значимы (рис.). Логико-грамматические

методы А. а. далеки от практической реализации в связи с трудностью полной автоматизации синтаксического анализа. Статистико-вероятностные методы А. а. легко реализуемы. При использовании их в результате А. а. получается не связный текст, а набор разрозненных слов и словосочетаний (см. *Индексирование*). Для их соединения в связные предложения разрабатываются спец. алгоритмы. В информационной практике используются системы А. а., основанные на статистико-вероятностных методах. См. также *Реферирование автоматическое*.

В. А. Москович.

**АНСАМБЛЬ СООБЩЕНИЙ** — совокупность сообщений, вырабатываемых источником сообщений с заданными статистическими свойствами.

**АНТИГРАДИЕНТ** функции — вектор, компоненты которого по абсолютной величине совпадают с компонентами градиента функции, но имеют противоположный знак.

**APL** — язык программирования системы APL\360, работающей в режиме разделения времени и предназначенной для решения инженерных задач. Осн. единицами информации в APL являются скаляры и массивы. Массив трактуется как единая величина, но с помощью индексов можно обращаться к его элементам. Вектор (одномерный массив) записывается в виде последовательности чисел, разделенных пробелами. При задании многомерных массивов используется спец. символ  $\rho$ . Напр., оператор

$$\mu \leftarrow 2\ 3\ \rho\ 4\ 6\ 12\ 4\ 2\ 8$$

присваивает идентификатору  $\mu$  значение — матрицу из трех столбцов и двух строк

$$\begin{array}{ccc} 4 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 8 \end{array}$$

В APL используется ряд примитивных одно-местных и двуместных функций (операций), определенных для скаляров и для массивов. Так, сложение

$$2\ 3\ 4 + 1 - 6\ 2$$

дает в результате вектор 3 —3 6. Кроме примитивных, имеется широкий набор сложных функций, напр., функция выбора первых (или последних)  $n$  компонент из массива, умножение матриц и т. д. Функции используются при построении выражений.

Программа на языке APL представляет собой последовательность отмененных операторов. Осн. из них являются операторы присваивания, условного и безусловного переходов. Имеются средства редактирования программ после ввода и непосредственно при вводе. Богатый набор системных команд позволяет следить за процессом решения задачи, а также получать всевозможные сведения о состоянии ресурсов машины.

Лит.: APL\360 reference manual. Chicago, 1968.

Т. А. Гринченко.

**АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ** — нахождение для заданной функции такой другой функции из некоторого класса, для которой среднеквадратичное

отклонение от данной функции минимально. Среднеквадратичным отклонением наз. усреднение с некоторым весом по заданному мн-ву точек квадрата разности заданной и аппроксимирующей функций. Среднеквадратичные приближения, или приближения по методу наименьших квадратов, удобны с практической точки зрения. Очень часто значения приближаемой функции берутся из экспериментов и, следовательно, имеют случайные погрешности, поэтому не целесообразно было бы требовать, чтобы приближаемая и приближающая функции в заданных точках совпадали точно.

Пусть дана функция  $f(x)$  из некоторого класса  $E$ . Рассмотрим задачу о приближении этой функции функциями  $\varphi(x)$  из некоторого более узкого класса  $E_1$ . В качестве мер близости функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  можно взять величину  $\varepsilon$ , которая выражается формулой

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^n p(x_i) [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2} \quad (1)$$

или

$$\varepsilon = \sqrt{\int_a^b p(x) [f(x) - \varphi(x)]^2 dx}, \quad (2)$$

где  $p(x)$  — некоторая неотрицательная функция, называемая весом. Если функцию  $\varphi(x) \in E_1$  выбирать так, чтобы величины (1) или (2) принимали наименьшие значения, то приближения наз. соответственно точечным и интегральным среднеквадратичным.

Для упрощения дальнейшего изложения целесообразно использовать абстрактное гильбертово пространство  $H$  (см. *Пространство абстрактное* в функциональном анализе), в котором задано скалярное произведение. Скалярным произведением двух элементов  $x, y \in H$  наз. комплексное число  $(x, y)$ , удовлетворяющее условиям: а)  $(y, x) = \overline{(x, y)}$ ; б)  $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda (x, z) + \mu (y, z)$  ( $\lambda, \mu$  — комплексные числа); в)  $(x, x) \geq 0$ ; при этом  $(x, x) = 0$  только в случае  $x = 0$ . Норму  $\|x\|$  элемента  $x \in H$  определяют равенством  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ . Примерами гильбертовых пространств являются пространство  $l_2$  и  $L_2$ . Пространство  $l_2$  — это пространство числовых последовательностей, в котором скалярное произведение элементов  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  и  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$  определяется по формуле

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i, \quad (3)$$

а пространство  $L_2$  — это пространство интегрируемых с квадратом функций со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \bar{g}(x) dx. \quad (4)$$

Более общими, чем  $l_2$  и  $L_2$ , являются пространства  $l_2$  и  $L_2$  с весом, в которых скалярные произведе-



дения определяются соответственно  $\phi$ -лами

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot x_i \cdot \bar{y}_i \quad (3')$$

и

$$(f, g) = \int_a^b p(x) \cdot f(x) \cdot \bar{g}(x) dx. \quad (4')$$

Элементы  $x$  и  $y$  наз. ортогональными, если  $(x, y) = 0$ . В задаче приближения элементов гильбертова протр. важным является понятие линейной зависимости и независимости системы элементов. Элементы  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  наз. линейно независимыми, если из равенства

$$c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 + \dots + c_n \phi_n = 0 \quad (5)$$

вытекает, что  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ . В противном случае элементы наз. линейно зависимыми. Выражение  $s_n = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i$  наз. линейной комбинацией элементов.

Рассмотрим задачу о наилучшем приближении элемента  $x \in H$  линейной комбинацией  $s_n$  линейно независимых элементов  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ . Эта задача состоит в определении констант  $c_i$  из условия минимума величины  $\varepsilon = \left\| x - \sum_{i=1}^n c_i \phi_i \right\|$ . Задача сводится к нахождению минимума  $\phi$ -ции  $\varepsilon = \varepsilon(c_1, c_2, \dots, c_n)$   $n$  переменных. Используя необходимое условие существования экстремума  $\phi$ -ции многих переменных, т. е. условие

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

для определения  $c_i$  получим систему линейных алгебр. ур-ний (см. *Уравнений классификация*)  $n$ -го порядка:

$$\sum_{j=1}^n c_j (\phi_j, \phi_i) = (x, \phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Т. к. определитель системы (7) есть определитель Грамма, который для системы независимых элементов отличен от нуля, то система (7) имеет единственное решение, т. е. наилучшее приближение  $s_n$  существует и определяется однозначно. В случае, когда система  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  ортонормирована, т. е.  $(\phi_i, \phi_j) = 0$  при  $i \neq j$ , а  $(\phi_i, \phi_i) = 1$ , система (7) упрощается и приобретает вид

$$c_i = (x, \phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

В этом случае  $s_n = \sum_{i=1}^n (x, \phi_i) \phi_i$ , т. е. наилучшее приближение есть отрезок ряда Фурье

элемента  $x$  по системе  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ , а  $c_i$  — коэфф. Фурье. Величина  $\varepsilon$  определяется  $\phi$ -лой

$$\varepsilon = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |c_i|^2}. \quad (9)$$

Если ортонормированная система  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$  является полной, т. е. такой, что из равенства  $(g, \phi_i) = 0$  ( $g \in H, i = 1, 2, \dots$ ) следует  $g = 0$ , то  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Примером полной ортонормированной системы в протр.  $L_2$  является система

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \{1, 0, 0, \dots\}, \quad \phi_2 = \{0, 1, 0, \dots\}, \\ \phi_3 &= \{0, 0, 1, \dots\}, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

В протр.  $L_2$  полными ортонормированными системами являются, напр., система тригонометрических  $\phi$ -ций

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , система многочленов Лежандра

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \times \\ &\times \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \end{aligned} \quad (12)$$

на отрезке  $[-1, 1]$ .

Рассмотрим более подробно задачу о точном среднеквадратичном приближении  $\phi$ -ций. Пусть  $\phi$ -ция  $f(x)$  задана на некотором мн-ве точек  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  отрезка  $[a, b]$ . Допустим, что  $\phi$ -ции  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_m(x)$ , определенные на  $[a, b]$ , линейно независимы на мн-ве  $X$ , т. е. из равенств  $c_1 \phi_1(x_i) + c_2 \phi_2(x_i) + \dots + c_m \phi_m(x_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$  следует, что  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ . Задача о наилучшем приближении  $\phi$ -ции  $f(x)$  линейной комбинацией  $s_m(x) =$

$\sum_{i=1}^m c_i \phi_i(x)$  сводится к нахождению констант  $c_i$ , которые минимизируют функционал

$$\sum_{i=1}^n p_i \left[ f(x_i) - \sum_{j=1}^m c_j \phi_j(x_i) \right]^2, \quad (13)$$

где  $p_i > 0$  — известные постоянные.

Введем скалярное произведение элементов  $f(x)$  и  $g(x)$  по  $\phi$ -ле

$$(f, g) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot f(x_i) \cdot g(x_i). \quad (14)$$

Тогда систему (7) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^m c_j \sum_{k=1}^n p_k \cdot \varphi_j(x_k) \cdot \varphi_i(x_k) = \sum_{k=1}^n p_k \cdot f(x_k) \cdot \varphi_i(x_k), \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Рассмотрим частные случаи ф-ций  $\varphi_i(x)$ , которые чаще всего встречаются на практике. Пусть  $\varphi_i(x) = x^{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Тогда имеем  $s_m(x) = c_1 + c_2 x + \dots + c_m x^{m-1}$  и система (15) для определения  $c_i$  имеет вид

$$\sum_{j=1}^m c_j \sum_{k=1}^n p_k x_k^{j-1} x_k^{i-1} = \sum_{k=1}^n p_k \cdot f(x_k) x_k^{i-1}, \quad (16)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

В качестве ф-ций  $\varphi_i(x)$  часто берут ортогональные на мн-ве равноотстоящих точек  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (с шагом  $h$ ) многочлены Чебышева

$$P_{i,n}(t) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{j}{i} \binom{j}{i+j} \frac{t^{[j]}}{n^{[j]}}, \quad (17)$$

$$i = 0, 1, \dots, m,$$

где  $t = \frac{x-x_0}{h}$ ,  $t^{[j]} = t(t-1) \dots (t-j+1)$ ,  $n^{[j]} = n(n-1) \dots (n-j+1)$ . В этом случае константы  $c_i$  определяют по ф-ле

$$c_i = \frac{(2i+1)n^{[i]}}{(n+i+1)^{[i+1]}} \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot P_{i,n}(j), \quad (18)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Во многих случаях наилучшее приближение целесообразно искать в виде тригонометрического многочлена

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (19)$$

Если  $p_i = 1$  и равноотстоящие точки  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , ( $N \geq 2n+1$ ) берут на отрезке  $[0, 2\pi]$ , то коэфф. определяются по ф-лам

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \cdot \cos kx_i, \quad (20)$$

$$k = 0, 1, \dots, n,$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \cdot \sin kx_i,$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

В задаче наилучшего интегрального среднеквадратичного приближения на отрезке  $[a, b]$  задана некоторая ф-ция  $f(x)$  и система линейно

независимых ф-ций  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ . Будем считать, что эти ф-ции принадлежат гильбертову простр.  $L_2$  с весом, для которого

скалярное произведение  $(f, g) = \int_a^b p(x) f(x) \times \times g(x) dx$ , где  $p(x)$  — некоторая неотрицательная ф-ция. Если наилучшее приближение

искать в виде  $s_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x)$ , то для определения  $s_i$  получим систему

$$\sum_{i=0}^n c_i \int_a^b p(x) \varphi_j(x) \cdot \bar{\varphi}_i(x) dx = \int_a^b p(x) f(x) \bar{\varphi}_i(x) dx, \quad (21)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Как и в случае точечного приближения, рассмотрим некоторые наиболее распространенные классы ф-ций  $\varphi_i(x)$ . Одним из таких классов является система  $\varphi_i(x) = x^i$ . В этом случае система (21) имеет вид

$$\sum_{j=0}^n a_{i+j} c_j = b_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (22)$$

где  $a_k = \int_a^b p(x) x^k dx$ ,  $b_k = \int_a^b p(x) f(x) x^k dx$ .

Т. к. система  $\{x^i\}$  полна, то произвольную ф-цию  $f(x) \in L_2$  с весом можно приближать алгебр. многочленом сколь угодно точно.

Широкий класс алгебр. многочленов, которыми часто приближают заданные ф-ции, составляют многочлены (многочлены Якоби), которые для отрезка  $[-1, 1]$  с весовой функцией  $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$  ( $\alpha, \beta > -1$ ) образуют ортогональную систему и имеют вид

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]. \quad (23)$$

Если  $\alpha = \beta = 0$ , имеем многочлены Лежандра. Если  $\alpha = \beta = -1/2$ , т. е. при  $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ , имеем многочлены Чебышева 1-го рода

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

а в случае  $\alpha = \beta = 1/2$ , т. е. при  $p(x) = (1-x^2)^{1/2}$  — многочлены Чебышева 2-го рода

$$V_n(x) = (1-x^2)^{-1/2} \sin[(n+1) \arccos x], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Для периодических  $\phi$ -ций наилучшее приближение естественно искать в виде тригонометрического многочлена (19). При этом коэфф.  $a_k$  и  $b_k$  определяются по  $\phi$ -лам

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Если  $f(x)$  — четная  $\phi$ -ция, то  $b_k = 0$ , если же  $f(x)$  — нечетная, то  $a_k = 0$ . С помощью тригонометрических многочленов заданную  $\phi$ -цию  $f(x) \in L_2$  также можно приблизить с произвольной степенью точности.

Рассмотрим один вычислительный алгоритм среднеквадратичной аппроксимации функции многих переменных  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $\phi$ -ция известна своими прибр. значениями  $y_j = f(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  в  $N$  точках) в виде

$y = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k(X)$ ,  $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Оценим также погр. найденного решения. Условие

$$y_j = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k(x_j), \quad (27)$$

$$j = 1, 2, \dots, N, \quad m < N,$$

будем считать верным с абс. погр., не превосходящей  $\eta$ . Эта погр. возникает в результате неточности представления условия (27), а также неточности величин  $\Phi_k(x_j)$ . Предположим, что вместо  $y_j$  известны величины  $z_j = y_j + \xi_j$ , где  $\xi_j$  независимы и имеют нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_j^2$ , причем  $\sigma_j = \sigma/p_j$ . Веса  $p_j$  считаются известными, а  $\sigma$  — неизвестной. На основании наблюдений  $z(z_1, z_2, \dots, z_N)$  оценим  $c_k$  и  $\sigma$ . Неизвестные коэфф.  $c_k$  будем находить по наименьшим квадратов методу (н. к. м.), минимизируя по  $c_k$   $\phi$ -цию

$$I = \sum_{j=1}^N p_j \left[ z_j - \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k(x_j) \right]^2. \quad (28)$$

Исходя из принципа максимума правдоподобия, н. к. м. можно дать вероятностное истолкование. Для этого составляют  $\phi$ -цию правдоподобия выборки  $z_1, z_2, \dots, z_N$  независимых измерений

$$\begin{aligned} Z(z_1, z_2, \dots, z_N) &= (p_1, p_2, \dots, p_N)^{1/2} \times \\ &\times (2\pi)^{-N/2} \cdot (\sigma^2)^{-N/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^N p_j \left[ z_j - \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k(x_j) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда видно, что при произвольном  $\sigma^2$   $\phi$ -ция  $Z$  принимает наибольшее значение только тогда, когда  $\sum_{j=1}^N p_j \left[ z_j - \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k(x_j) \right]^2$  принимает наименьшее значение, т. е. при выборе  $c_k$  из условия (28).

Решение задачи (28) сводится к решению нормальной системы линейных алгебр. ур-ний

$$\sum_{k=1}^m (\Phi_i(X), \Phi_k(X)) c_k = (\Phi_i(X), z), \quad (30)$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

или в матричной форме

$$Ac = b, \quad A = \{a_{ik}\}, \quad c = \{c_k\}, \quad b = \{b_i\}, \quad (30')$$

где

$$\begin{aligned} a_{ik} &= (\Phi_i(X), \Phi_k(X)) = \\ &= \sum_{j=1}^N p_j \Phi_i(X_j) \cdot \Phi_k(X_j), \end{aligned}$$

$$b_i = (\Phi_i(x_j), z) = \sum_{j=1}^N p_j \Phi_i(X_j) \cdot z_j. \quad (31)$$

При непосредственном решении полученной системы следует иметь в виду, что применение прямых методов целесообразно тогда, когда порядок системы сравнительно невысок. Если же нарушаются допустимые ограничения по объему памяти ЭВМ или становится значительной погр. округлений, целесообразно пользоваться итерационными методами. Т. к. системы (30), как правило, плохо обусловлены, вместо них решают систему

$$(A + \alpha E) c = b, \quad (32)$$

где  $E$  — единичная матрица,  $\alpha > 0$  — некоторый параметр. В результате решения получаем прибр. значения  $\tilde{c}_k$  искомых коэфф.  $c_k$  вместе с доверительными интервалами

$$[\tilde{c}_k - \gamma \sqrt{\{A^{-1}\}_{kk}} \sigma, \quad \tilde{c}_k + \gamma \sqrt{\{A^{-1}\}_{kk}} \sigma], \quad (33)$$

накрывающими  $c_k$  с заданной вероятностью  $P$ ;  $\{A^{-1}\}_{kk}$  — диагональный элемент обратной матрицы системы (30), а  $\sigma$  лежит в интервале  $[\gamma_1 \cdot I/N - m, \gamma_2 \cdot I/N - m]$  ( $\gamma_1, \gamma_2$  и  $\gamma$  при заданных  $P$  и  $N - m$  находятся по спец. табл.).

Смешанная статистико-детерминированная оценка неустранимой погр. А.  $\phi$ . с. имеет вид:

$$\begin{aligned} |c_k - \tilde{c}_k| &\leq \frac{\sqrt{e}}{\det A} \cdot \frac{\eta}{\min_j |\Phi_k(x_j)|} + \\ &+ \gamma \sqrt{\{A^{-1}\}_{kk}} \left( \sigma + \frac{\eta}{\sqrt{N - m}} \sqrt{\sum_{j=1}^N p_j} \right), \end{aligned}$$

$$\left| y_j - \sum_{k=1}^m \tilde{c}_k \varphi_k(x_j) \right| \leq \eta + \gamma_1 \sqrt{\frac{m}{p_j}} \left( \sigma + \frac{\eta}{\sqrt{N-m}} \sqrt{\sum_{j=1}^N p_j} \right) + \frac{m \cdot \eta \cdot \sqrt{e}}{\det A} \cdot \frac{\max_{k,j} |\varphi_k(x_j)|}{\min_{k,j} |\varphi_k(x_j)|}. \quad (34)$$

Для вычисления погр. округлений необходимо фиксировать конкретный метод решения системы (30). Так, напр., для относительной погр. округлений решения  $c_\tau$ , найденного методом квадратного корня, исследованы мажорантные

$$\frac{\|c - c_\tau\|}{\|c_\tau\|} \leq 2^{-\tau} m \|A^{-1}\|,$$

$$\frac{\|c - c_\tau\|}{\|c_\tau\|} \leq 2^{-\tau} \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

и вероятностные

$$\left( M \frac{\|c - c_\tau\|^2}{\|c_\tau\|^2} \right)^{1/2} \leq 2^{-\tau} m (M \|A^{-1}\|^2)^{1/2},$$

$$\left( M \frac{\|c - c_\tau\|^2}{\|c_\tau\|^2} \right)^{1/2} \leq 2^{-\tau} (M \|A^{-1}\|^2 \|A\|^2)^{1/2}$$

оценки, соответственно для вычислений в режиме с фиксированной и плавающей запятой (здесь  $\tau$  — разрядность данной ЭВМ, знак  $M$  означает матем. ожидание, знак  $\| \cdot \|$  — евклидову норму).

Лит.: Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М., 1962 [библиогр. с. 341—343]; Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1. М., 1966; Воеводин В. В. Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры. М., 1969 [библиогр. с. 148—153]; Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. М., 1967.

Н. С. Курпель, А. Ю. Лука, В. С. Остапчук.

**АПРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ** — замещение различных функций «близкими» к ним, более удобными в пользовании функциями, принадлежащими к некоторому заданному семейству функций. В простейшем и основном по своему значению одномерном случае А. ф. речь идет о приближенном представлении заданной ф-ции  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , с помощью выражения некоторого вида  $\Psi(x; K) \equiv \Psi(x; k_0, \dots, k_n)$ , где компоненты параметрического вектора  $K$   $k_0, \dots, k_n$  определяются из условия возможной малости отклонения  $\Psi(x; K)$  от  $f(x)$  при  $a \leq x \leq b$  или, как еще говорят, «расстояния»  $\mu(f, \Psi)$  между ф-циями  $f$  и  $\Psi$ , которые здесь предполагаются непрерывными на  $[a, b]$ . Это требование получает определенный смысл при отождествлении  $\mu(f, \Psi)$  с нормой разности:  $\|f - \Psi\| = \|f - \Psi\|_{[a, b]}$ , или, в более общем виде, взвешенной разности:  $\|w(f - \Psi)\|$ , где вес  $w = w(x)$  положителен при

$a \leq x \leq b$ . В употребительных постановках задачи А. ф., а именно — при аппроксимации (а.) равномерной («чебышевской», или «предельно-степенной») и а. средней степенной за меру отклонения  $\mu(f, \Psi) \equiv \mu[K] \equiv \|f(x) - \Psi(x; K)\|$  при  $w(x) \equiv 1$  принимают соответственно (норма равномерная либо средняя степенная):

$$\mu_\infty(f, \Psi) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \Psi(x; K)| \equiv L(K), \quad (1)$$

$$\mu_q(f, \Psi) = \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x) - \Psi(x; K)|^q dx \right\}^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty. \quad (2)$$

Положив в ф-ле (2)  $q = 2$  или  $q = 1$ , получим важнейшие случаи среднего квадратичного отклонения и «отклонения в среднем». Определив (если это возможно) значения  $k_i = k_i^*$ ,  $i = 0, \dots, n$ , из условия минимума  $L(K)$  или величины интеграла в ф-ле (2), получим аппроксимирующую ф-цию  $\Psi(x; K^*)$ , дающую теснейшее приближение (п.) по соответствующей норме —  $\mu$ -приближение ( $\mu$ -п.) к  $f(x)$  при  $a \leq x \leq b$  в классе ф-ций вида  $\Psi(x; K)$ , т. е. решение соответствующей задачи а. Слово «теснейшее» перед  $\mu$ -п. чаще всего опускают, а под решением задачи а. по данной норме (задачи  $\mu$ -а.) нередко понимают не само получаемое  $\mu_\infty$ -п. или  $\mu_q$ -п.  $\Psi(x; K)$ , а определяющий его набор (параметрический вектор)  $K^*$  — точнее,  $K_\infty^*$  либо  $K_q^*$  соответственно.

С целью упрощения трактовки либо по причине ограниченности информации, рассматривают также дискретизованные видоизменения указанных задач  $\mu_\infty$ -а. и  $\mu_q$ -а., в которых непрерывная область  $[a, b]$  замещается некоторой  $N$  точечной сеткой  $B_N \subset [a, b]$ , а интеграл в (2) — соответственной суммой.

Чаще всего на практике применяют задачи а. с линейно входящими параметрами:

$$\Psi(x; K) = k_0 \varphi_0(x) + k_1 \varphi_1(x) + \dots + k_n \varphi_n(x), \quad (3)$$

где  $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$  — ф-ции, линейно независимые на  $[a, b]$ . В этом случае (а. полиномиальной при  $\varphi_i(x) = x^i$  и квазиполиномиальной при ином выборе  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, n$ ) всегда обеспечено существование решений  $K_\infty^*, K_q^*$ , реализующих точный минимум соответствующего отклонения. При нелинейном же вхождении параметров  $k_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  это не всегда имеет место. Заметим, что, в частности, при  $\mu_\infty$ -а., независимо от существования или несуществования точного решения  $\Psi(x; K_\infty^*)$ , остаются принципиально применимыми итеративные методы (см. Аппроксимация функций равномерная) для

последовательного снижения, насколько практически возможно, величины  $\mu_\infty > \inf_K \mu_\infty(f, K)$ .

$\Psi(x; K)$ ). Вопрос линейного или нелинейного вхождения параметров  $k_i$  в  $\Psi(x; K)$  не следует смешивать с вопросом о линейной или нелинейной зависимости  $K^*$  от заданной ф-ции  $f(x)$ . Если  $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ , то, даже при а. типа (3) в общем случае  $K^*[f] \neq c_1 K^*[f_1] + c_2 K^*[f_2]$ , за исключением случая  $\mu_2$ -п. С этим связана сравнительная простота прямого (без необходимости итераций) вычисл. построения  $\mu_2$ -п. типа (3) (см. *Аппроксимация функции среднеквадратичная*).

То, что должно существовать хотя бы одно решение  $K^*$  при  $\Psi(x; K)$  вида (3), остается в силе и для многомерного варианта случая (3), когда вместо скалярного аргумента  $x \in [a, b] \equiv G_1$  имеем точку  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , пробегающую некоторую ограниченную замкнутую область  $G = G_m$  в  $m$ -мерном евклидовом пространстве  $R_m$ . При многозначности (неединственности) решения  $K^*$  мн-во  $\{K^*\}$  является, во всяком случае, выпуклым, ограниченным и замкнутым. В случае нормы  $\mu_q$  при  $q > 1$ ,  $m \geq 1$ , решение  $K^*$  всегда единственно, что обеспечивается «строгой выпуклостью» нормы  $\mu_q$ ,  $1 < q < \infty$ . При  $\mu = \mu_\infty$  или  $\mu_1$  может иметь место единственность или множественность  $\mu$ -п., что зависит от конкретного случая, т. е. при фиксированном виде  $\Psi(x; K)$  и фиксированной  $G_m$ ,  $m \geq 1$ , и, существенным образом, от взятой  $f(x)$ . При  $m = 1$  единственность решения  $K_\infty^*$  или  $K_1^*$  оказывается обеспеченной для произвольно взятой (непрерывной)  $f(x)$ , когда система  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  является «Т-системой», т. е. удовлетворяет на  $[a, b]$  известному из теории равномерной А. ф. условию Хаара (в частности, случаи а. многочленами  $\sum k_i x^i$ , классическими тригонометрическими суммами или экспоненциальными суммами  $\sum k_i e^{\gamma_i x}$  с заданными наперед множителями  $\gamma_i$ ).

Переходя к вопросам характеристики (т. е. критериям распознавания)  $\mu$ -п. вида (3), для  $\mu = \mu_q$ ,  $q = 2, 4, 6, \dots$  при  $m \geq 1$  вопрос единообразно разрешается, в алгебраической относительно  $k_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  форме, с помощью условия ортогональности  $(f - \Psi^*)^{q-1}$  на  $G_m$  к  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ . Отметим, что в терминах ортогональности формулируется еще при  $m = 1$  характеристика п. в среднем  $\Psi(x; K_1^*)$ , когда последнее совпадает с  $f(x)$  не более как в конечном числе точек  $x \in [a, b]$ ; только здесь речь идет об ортогональности сигнум-функции  $\text{sign}(f - \Psi^*)$  к  $\varphi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Существенно по-иному формулируют теоремы характеристики для  $\mu_\infty$ -п., а именно: в терминах чебышевского альтернанса для случая Т-систем  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  и квазиальтернанса для

случая нехааровских систем. Следует отметить, что в трактовке задач  $\mu_\infty$ -п. с теоремами характеристики тесно связаны критерии оценки прибр. решений  $K = \check{K}$ , дающие строгую верхнюю границу для  $L(\check{K}) - L(K_\infty^*)$ .

К задачам А. ф. с нелинейно входящими параметрами относятся классическая задача д р о б н о - р а ц и о н а л ь н о й а. вида

$$\Psi = R_{l,n-l}(x) = \frac{k_0 + k_1 x + \dots + k_l x^l}{k_{l+1} + k_{l+2} x + \dots + k_{n+1} x^{n-l}}. \quad (4)$$

общая задача экспоненциальной а.:  $\Psi(x; K, S) = \sum k_i e^{s_i x}$  при нефиксируемых наперед  $s_i$  и др. К виду (4) довольно близко примыкает а. посредством частного двух квазиполиномов, регулярно аналитических на  $[a, b]$ .

На практике в каждом конкретном случае постановки задачи а. для данной ф-ции  $f(x)$  приходится решать прежде всего вопрос о целесообразном выборе самого способа а., т. е. нормы  $\mu$  и вида  $\Psi(x; K)$ . Когда необходимо обеспечить достаточную малость отклонений  $|f - \Psi|$  во всех  $x \in G$ , предпочтение отдают норме  $\mu_\infty$  (в указанном смысле  $\mu_\infty$ -п. наз. также, несколько условно, наилучшими). Если же интересует малость  $|f - \Psi|$  «в суммарной оценке», тогда подойдет норма  $\mu_1$  или  $\mu_2$ . Норма  $\mu_2$  имеет принципиальное преимущество перед другими, когда значения самой ф-ции  $f(x)$  заданы с погрешностями, имеющими случайный характер. Учитывают также сравнительную простоту построения линейных  $\mu_2$ -п., которая, впрочем, утрачивается при нелинейном вхождении параметров в  $\Psi(x; K)$ . Выбор нормы  $\mu_\infty$  имеет особое преимущество при а. ф-ции  $f(x)$ ,  $x \in G_m$ , заданной неявно в качестве решения краевой задачи ур-ния в частных производных эллиптического или параболического типа, при учете имеющей место теоремы о максимуме модуля.

Что касается выбора вида  $\Psi(x; K)$ , то он должен быть пригодным для возможно точного воспроизведения поведения данной ф-ции  $f(x)$  при  $x \in G$  и удобным в пользовании для вычисления при подстановке индивидуальных значений  $x$  либо для выполнения аналитических операций. Последним требованиям хорошо удовлетворяют многочлены  $P_n(x)$ . Но для вычисл. применений (в частности, при составлении стандартных подпрограмм для ввода ф-ций в ЭЦВМ) не менее важны рациональные дроби (4), обладающие большей гибкостью приспособления к  $f(x)$  в случаях, напр., аналитической  $f(x)$ , имеющей полюс вблизи отрезка  $[a, b]$ , или непрерывной  $f(x)$  с графиком, включающим при  $a \leq x \leq b$ , скажем, угловую точку либо точку с вертикальной касательной, и др. Той же цели увеличения гибкости а. может подчас служить, при сохранении полиномиальной формы а., использова-

ние замены переменного, с введением, напр.,

$$z = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \text{ вместо } x.$$

Лит.: Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.—Л., 1949 [библиогр. с. 679—686]; Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М., 1954 [библиогр. с. 321—325]; Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.—Л., 1964 [библиогр. с. 425—434]; Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965 [библиогр. с. 397—403]; Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. К., 1969 [библиогр. с. 612—623]; Cheney E. W. Introduction to approximation theory. New York, 1966; Meinardus G. Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung. Berlin, 1967; Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. Пер. с нем. М., 1969 [библиогр. с. 422—431]. Е. Я. Ремез, В. Т. Гаврилюк.

**АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ РАВНОМЕРНАЯ** (чебышевская) — аппроксимация функций под условием минимизации равномерной нормы отклонения. В отличие от аппроксимации функции среднеквадратичной, задача А. ф. р. допускает точное прямое (без итераций) решение лишь в немногих замечательных, но сугубо частных случаях, известных со времени работ рус. математика П. Л. Чебышева (1821—94) и его ближайших последователей. В более общей постановке она требует привлечения итеративных численных методов А. ф. р.; разработка таких методов приобрела определенную значимость в связи с развитием совр. вычисл. техники (ЭЦВМ).

Одна из важнейших задач А. ф. р. заключается в нахождении набора  $K = (k_0, \dots, k_n)$  коэфф. многочлена  $P_n(x) = P_n(x; K) = k_0 + k_1x + \dots + k_nx^n$ , удовлетворяющего требованию минимакса:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x; K)| \equiv L(K) = \min_K (\min_K L(K): = \rho \equiv E_n[f]). \quad (1)$$

где  $f(x)$  — непрерывная ф-ция, заданная на отрезке  $a \leq x \leq b$ .

Согласно теореме Чебышева, переформулированной по Кирхбергеру и Валле Пуссену, единственное решение  $K = K^*$  задачи (1) совпадает с решением  $K = K_X^*$  формулируемой аналогично (1) некоторой (дискретной — интерполяционной в обобщенном понимании) «элементарной» задачи А. ф. р. вида

$$\max_{x \in X} |f(x) - P_n(x; K)| \equiv L_X(K) = \min_K (\min_K L_X(K): = \rho_X), \quad (2)$$

где  $X = \{x_0, \dots, x_{n+1}\} \subset [a, b]$  означает такое  $(n+2)$ -точечное подмн-во  $X = \hat{X}$ , для которого величина  $\rho_X$  (зависящая от выбора  $X$ ) имеет наибольшее возможное значение, точно совпадающее с  $\rho = \rho_{[a, b]}$ . Построение многочлена  $P_n = P_n(x; K_X^*)$  — решения задачи (2) при данном выборе  $X$ , выполняется с использованием ньютонова обыкновенного интерполя-

ционного аппарата разделенных разностей, по данным:

$$P_n(x_i) = f(x_i) - (-1)^i \nu \rho_X, \quad (3)$$

$$|v| = 1; \quad i = 0, \dots, n+1;$$

$$\nu \rho_X = \frac{f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})}{\chi(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})}, \quad (3')$$

$$\chi(x_i) \equiv (-1)^i.$$

Из  $n+2$  условий (3) ((3) — (3')), всегда совместных, одно служит для контроля вычислений.

Осн. метод последовательных чебышевских интерполяций (ПЧИ) для А. ф. р. в применении к общей задаче (1) заключается в целесообразно организованном процессе последовательного построения (по схеме (3) — (3')) решений задач типа (2) с  $X = X^{(v)}$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\rho_{X^{(v+1)}} > \rho_{X^{(v)}}$  («метод повышающего действия»), причем имеет место равномерная сходимость процесса  $(K_{X^{(v)}}^* \rightarrow K^* = K_X^*)$  с достаточно быстрой реализацией, при  $v \rightarrow \infty$ , двух осн. предельных соотношений:

$$\rho - \rho_{X^{(v)}} \rightarrow 0 \text{ и } L(K_{X^{(v)}}^*) - \rho \rightarrow 0. \quad (4)$$

При этом набор  $X^{(v+1)}$  составляется из точек знакопередающихся экстремумов отклонения  $\Delta_{(v)}(x) = f(x) - P_n(x; K_{X^{(v)}}^*)$ . Рекомендуемый состав исходного набора:

$$X^{(0)} = \left\{ \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(n+1-i)\pi}{n+1} \right\}_{i=0, \dots, n+1}. \quad (5)$$

Аналогично формулируется этот метод и при возможной дискретизации самой задачи (1), с заменой отрезка  $[a, b]$  некоторой заданной на нем  $N$ -точечной сеткой  $B_N$  ( $N > n+2$ ), причем для упрощения программы числ. реализации решения на ЭЦВМ переход от  $X^{(v)}$  к  $X^{(v+1)}$  иногда обуславливается требованием замены лишь одной из  $n+2$  точек, с включением в  $X^{(v+1)}$  точки абсолютного максимума по  $x \in [a, b]$  функции  $|\Delta_{(v)}(x)|$ . В любом варианте метода ПЧИ на каждом шаге получается попутно оценка достигнутой степени точности на основе установления верхней границы для  $L - \rho$ .

Разработанный для той же задачи (1) также сходящийся, но менее стандартизованный метод (метод понижающего действия), явно основан на принципе монотонности:  $L(K^{(v+1)}) < L(K^{(v)})$ . Сходные методы одного и другого принципа действия применимы и при замене алгебр. многочленов  $P_n(x)$  тригонометрическими или, более общо, квазиполиномами  $F_n(x) =$



$$= \sum_{s=0}^n k_s \varphi_s(x) \text{ к.-н. «Т-системы» } \hat{f}\text{-ций } \varphi_s(x),$$

$s = 0, 1, \dots, n$ , т. е. системы линейно независимых и непрерывных  $\hat{f}$ -ций  $\varphi_s$ , удовлетворяющих следующему условию Хаара: определитель  $(n+1)$ -го порядка  $|\varphi_s(x_i)|$ ,  $0 \leq i, s \leq n$  не должен обращаться в нуль ни для какого набора различных между собой  $n+1$  точек  $x_0, \dots, x_n$  на  $[a, b]$ . В случае же нехааровских систем  $\{\varphi_s\}$  и, в частности, многомерных  $\{\varphi_s(x, y, \dots, v)\}$  при возможной многозначности решения задачи А.  $\hat{f}$ . р. вопрос обычно заключается в нахождении одного из искоемых наборов  $K^* \in \{K^*\}$ , где мн-во  $\{K^*\}$  заведомо выпукло. Непрерывную область аппроксимации  $B$  здесь приходится, вообще, замещать подмн-вом точек некоторой сетки  $B_N$ , а применимые к дискретизированной т. о. задаче равномерной А.  $\hat{f}$ . р. (равносильной задаче А.  $\hat{f}$ . р. для системы несовместных линейных ур-ний) употребительные методы повышающего и понижающего действия оказываются сводимыми к двум взаимно двойственным вариантам симплекс-метода для программирования линейного (ПЛ).

Выше были рассмотрены задачи А.  $\hat{f}$ . р. с линейно входящими параметрами (аппроксимации многочленами  $P_n$  либо квазимногочленами  $F_n$ ). Для этих задач в наибольшей мере разработаны вычисл. методы построения решений, а также критерии характеристики точных решений и оценки прил. решений. В случае А.  $\hat{f}$ . р. многочленами Т-систем для точных решений имеет место классический критерий чебышевского альтернанса: разность  $f(x) -$

$$- F_n(x; K^*) = f(x) - \sum_{s=0}^n k_s^* \varphi_s(x) \text{ должна в}$$

к.-н.  $n+2$  точках  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  отрезка  $[a, b]$  принимать наибольшие по абс. величине значения  $\pm L(K^*)$  с чередованием знаков. В случае же систем  $\varphi_i(x)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) нехааровских ( $x \equiv x$  в одномерных задачах,  $x \equiv (x, y, \dots, v)$  в задачах многомерных) имеет место не столь непосредственно наглядное, но сохраняющее эффективный характер обобщение в форме критерия квазиальтернанса. Этот критерий связан со следующим нехааровским аналогом теоремы Чебышева, который в своем существенном содержании в точности сохраняет силу и для многомерных задач А.  $\hat{f}$ . р., но для большей простоты его можно сформулировать здесь для случая одномерного ( $x \equiv x$ ): всякое решение  $K = K^*$  задачи А.  $\hat{f}$ . р. формального типа (1), но с заменой  $P_n(x; K)$  на квазиполином  $F_n(x; K)$  нехааровской системы  $\varphi_s(x)$ ,  $s = 0, 1, \dots, n$ , является также решением аналогичной «элементарной» задачи А.  $\hat{f}$ . р., получаемой при замене отрезка  $[a, b]$  некоторым его (заранее неизвестным) минимальным по своему составу  $r$ -точечным подмн-вом  $\hat{X} = \{\hat{x}^{(1)}, \dots, \hat{x}^{(r)}\}$ , где  $r \leq n+2$ ,

$r \geq 1$ . При этом, для  $i = 1, \dots, r$ ,  $|f(\hat{x}^{(i)}) - F_n(\hat{x}^{(i)}; K^*)| = L(K^*)$ , а знаки указанных  $r$  отклонений  $f - F_n^*$  совпадают со знаками (не обязательно чередующимися, в ином случае — даже одинаковыми между собой) коэфф. «элементарной» линейной зависимости между

$r$  выражениями  $k_0 \varphi_0(\hat{x}^{(i)}) + \dots + k_n \varphi_n(\hat{x}^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, r$ , рассматриваемыми как линейные формы от  $k_0, k_1, \dots, k_n$ . Применение этого критерия квазиальтернанса существенно эффективизируется при дискретизации задачи А.  $\hat{f}$ . р. (с использованием сетки  $B_N \subset [a, b]$ ).

С теоремой о чебышевском альтернансе и ее обобщением близко связан восходящий (в полиномиальном одномерном случае) к Валле Пуссену (1910) вопрос установления нижней границы для минимаксного уклонения  $\rho$ ,

а, значит, и верхней границы для  $L(\check{K}) - \rho$ , что непосредственно доставляет критерий стро-

гой оценки точности прил. реализации ( $\check{K}$ ) решения рассматриваемых задач А.  $\hat{f}$ . р.

Для задач А.  $\hat{f}$ . р. посредством выражений  $\Psi(x; K)$  с нелинейно входящими параметрами  $k_s$ ,  $s = 0, 1, \dots, n$  отметим, что в случае важной задачи А.  $\hat{f}$ . р. для  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  посредством рациональной дроби  $R_{l,n-l}(x) = P_l(x; K') / P_{n-l}(x; K'')$  осн. употребительный подход заключается в распространении метода ПЧИ. Метод сохраняет свою эффективность, хотя здесь приходится особо учитывать случай сократимости искомой дроби и, кроме того, возможность «осечек» при неблагоприятном выборе интерполяционных подмн-в  $X \subset [a, b]$ . К обобщающе-близкой, но более деликатной по своей природе задаче А.  $\hat{f}$ . р. посредством частного двух квазиполиномов, при замещении области аппроксимации  $B$  (возможно и многомерной) сеткой  $B_N$ , можно применять сравнительно трудоемкий, но безотказно действующий метод линейных неравенств — метод проб для взятия  $\rho_{B_N}$  в узкую вилку (с использованием аппаратов ПЛ). В более общих случаях нелинейных задач А.  $\hat{f}$ . р. находят применение опять таки при сеточной дискретизации области аппроксимации различные приемы последовательной дифференциальной линеаризации по параметрам  $\{k_s\}$ .

При А.  $\hat{f}$ . р. большое значение имеет выбор вида аппроксимирующего выражения  $\Psi(x; K)$ . При конкретизации вида  $\Psi(x; K)$  должны учитываться в надлежащих случаях функциональные соотношения, которым удовлетворяет  $f(x)$  (четность, нечетность и т. п.), а в случае бесконечного интервала — асимптотическое поведение  $f(x)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Напр., аппроксимируя при  $x \in [a, b] = [-h, h]$   $\hat{f}$ -цию  $f(x) = e^x$  в классе дробей  $R_{3,3}(x)$  и учитывая функциональное соотношение  $f(-x) \equiv [f(x)]^{-1}$ , естественно, вместо общего вида

указанной дроби, исходить из

$$\Psi = \frac{1 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3}{1 - k_1 x + k_2 x^2 - k_3 x^3} \quad (6)$$

$$(\Psi(-x) \equiv [\Psi(x)]^{-1})$$

с сокращением более чем вдвое числа требуемых параметров.

При А. ф. р. в общей форме, такой, как  $P_n(x)$  или  $R_{l,n-l}(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , одним из существенных параметров является само число  $n$ , желательное значение которого  $n = n_\eta$  должно соответствовать возможно более экономному выполнению требования вида  $\rho^{(n)}: \equiv E_n[f] \leq \eta$  либо  $\rho^{(n)} = E_{l,n-l}[f] \leq \eta$  при заданном  $\eta > 0$ . В случае формы  $R_{l,n-l}(x)$  предварительное взятие в вилку значения  $n = n_\eta$  можно выполнять зондированием посредством проб, использующим аппараты ПЛ с заменой отрезка  $[a, b]$  сеткой  $B_N \subset [a, b]$ . В случае формы  $P_n(x)$ , предполагая для большей простоты формулировок  $[a, b] = [-1, 1]$ , для прилб. определения  $n_\eta$  можно использовать последовательность  $\{A_\nu\}$  коэфф. разложения  $f(x)$  в ряд по многочленам Чебышева  $T_\nu(x)$  (условие  $|A_{n_\eta+1}| + |A_{n_\eta+2}| + \dots < \eta + \varepsilon$ ) или, что то же, коэфф. разложения  $f(\cos \Theta)$ ,  $0 \leq \Theta \leq \pi$  в тригонометрический косинус — ряд. При регулярной аналитичности  $f(x)$  эквивалентные результаты быстрее получаются некоторым способом последовательного «сворачивания» степенного разложения  $f(x)$ . Заметим, что подобные, применяемые для предварительного определения  $n_\eta$ , способы зондажа сами по себе могут доставлять приближения п.  $\Psi(x; K)$  соответствующего типа, для которых отклонение  $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \Psi(x; K)| = L(K)$  оказывается (по критериям строгой оценки) подчас довольно близким к искомому чебышевскому минимаксу; такие «околоминимаксные» п.  $\Psi(x; K)$  иногда используются в спорадическом программировании для ЭЦВМ, взамен более трудоемкого итеративного построения чебышевских  $\Psi(x; K^*)$ .

При полиномиальной аппроксимации ф-ции  $f(x)$  более или менее регулярной структуры, для облегчения ориентировочной прикидки близкого к  $n_\eta$  значения  $n$  можно использовать и априорные оценки верхних границ значений  $\rho^{(n)} \equiv E_n[f]$  типа известных оценок (1912) Бернштейна и Джексона.

Приведем примеры такого рода оценочных теорем.

1. Если существует внутри  $[a, b]$  ( $b - a = 2h$ ) ограниченная  $(n+1)$ -я производная  $f^{(n+1)}(x)$ , причем  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ , тогда

$$E_n[f] \leq \frac{2M}{(n+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}. \quad (7)$$

2. Если существует на  $[a, b] \equiv [a, a + 2h]$  непрерывная  $f^{(r)}(x)$  с  $\max |f^{(r)}(x)| = M_r$ , то для каждого  $n \geq r$

$$E_n[f] \leq \left(\frac{\pi}{2} h\right)^r \frac{M_r}{(n+1)n \dots (n-r+2)} < C_r \frac{M_r}{(n+1)^r}, \quad (8)$$

где

$$C_r = \left(\frac{\pi}{2} h\right)^r \frac{r^r}{r!}. \quad (8')$$

2г. Оценочной ф-ле (8) — (8') соответствует сходного типа более точная и изящная в случае аппроксимации посредством  $t_n(x) =$

$$= \sum_{v=0}^n (k_v \cos vx + l_v \sin vx) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad 2\pi -$$

периодической  $f(x)$  с непрерывной  $f^{(r)}(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,

$\max |f^{(r)}(x)| = M_r$ :

$$E_n^T[f] \leq c_r \frac{M_r}{(n+1)^r}, \quad 1 < c_r < \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

Входящий в (9) коэфф.  $c_r$ , явное выражение которого (несколько сложного вида) было найдено в 1937, является, для заданного  $r$ , наилучшим возможным.

3. Если аналитическая ф-ция  $f(z)$ , регулярная внутри эллипса комплексной плоскости с фокусами в точках  $z = -1, 1$  и с полусуммой осей  $R$ , непрерывна и на контуре этого эллипса, то для ф-ции действительного переменного  $f(x)$  на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$  при любом натуральном  $n$ ,

$$E_n[f] \leq \frac{2M}{R-1} \left(\frac{1}{R}\right)^n, \quad (10)$$

где  $M = \max |f(z)|$  на контуре эллипса.

В случае использования А. ф. р. вида  $P_n(x)$  или  $R_{l,n-l}(x)$ , при составлении библиотеки стандартных подпрограмм ввода ф-ций  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  в ЭЦВМ, необходимо иметь в виду целесообразное в некоторых случаях видоизменение постановки вопроса, с подразделением  $[a, b]$  на несколько частных интервалов  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, s$ ;  $\xi_0 = a$ ,  $\xi_{s+1} = b$  и с реализацией А. ф. р. указанного типа отдельно для каждого  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ . Стыки  $\xi_1, \dots, \xi_s$  надо при этом выбирать под условием приблизительного равенства частных минимаксных отклонений на  $[\xi_0, \xi_1], \dots, [\xi_s, \xi_{s+1}]$ . Хотя применение таких кусочных п. потребует хранения в памяти машины несколько большего к-ва коэфф., но требуемую точность п. можно обеспечить при меньших значениях  $n$  — с ощутимой подчас экономией машинного времени при использовании подпрограммы.

Наряду с подобными кусочно-полиномиальными п. в последние годы предметом многочис-

ленных исследований стали (допускающие различные обобщения) п. сращенно-полиномиальные («сплайн»-п.) вида

$$S_n(x) = P_n(x) + \sum_{i=1}^s c_i (x - \xi_i)_+^n,$$

где символ  $z_+^n$  означает  $z^n$  при  $z \geq 0$  и 0 при  $z < 0$ . Эти  $S_n$ -п. (нехааровские в общем случае) в качестве инструмента А. ф. р. по своей точности занимают промежуточное положение между соответствующими п. полиномиальными и кусочно-полиномиальными (ближе к первым), но, помимо сжатости аналитического выражения, они обнаруживают (при нечетности  $n = 2p - 1$  и при  $p \leq s$ ) еще замечательные интерполяционные свойства с интересными приложениями к аппроксимации линейных функционалов. Если специализировать вышесказанное при  $n = 1$ , получится кусочно-линейная и, соотв., полигональная аппроксимация, нередко применяемая в инженерно-тех. практике. При  $f''(x) \neq 0$  ( $a \leq x \leq b$ ) наилучшая, в указанном выше смысле, кусочно-линейная аппроксимация оказывается точно совпадающей с наилучшей сплайн-аппроксимацией  $S_1$ .

Лит.: А х и е з е р Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965 [библиогр. с. 397—403]; Р е м е з Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. К., 1969 [библиогр. с. 613—623]; Р е м е з Е. Я. К вопросу построения чебышевских приближений дробно-рационального и некоторых родственных типов. «Украинский математический журнал», 1963, т. 15, № 4; Р е м е з Е. Я. Некоторые вопросы численного построения решений задач чебышевского приближения. В кн.: Труды четвертого всесоюзного математического съезда, т. 2. Л., 1964; О л е к с а н д р е н к о В. Л., П о р х а н о в а А. О. Побудова чебышевського поліноміального наближення функції однієї змінної за методом підвищої дії. «Автоматика», 1967, № 4; C h e n e y E. W. Introduction to approximation theory. New York, 1966; R a l s t o n A. Rational Chebyshev approximations. В кн.: Mathematical methods for digital computers, v. 2. New York, 1967; W e r n e r H., S t o e r J., B o m m a s W. Rational Chebyshev approximation. «Numerische Mathematik», 1967, Bd. 10, № 4; M e i n a r d u s G. Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung. Berlin, 1967; H a r t J. F. [и др.]. Computer approximations. New York, 1968.

В. Т. Гаврилюк, Е. Я. Ремез.

**АРИФМЕТИЗАЦИЯ МЕТАМАТЕМАТИКИ** — метод, разработанный австр. математиком К. Гёделем (р. 1906) в связи с изучением дедуктивных возможностей формальных систем. С помощью А. м. можно воспроизвести в рамках элементарной арифметики различные матем. рассуждения об объектах произвольной формальной системы (т. е. о формулах, доказательствах и т. п.). Все такие объекты можно рассматривать как слова определенного вида в подходящем конечном алфавите, который должен содержать логич. и матем. символы, обозначения для переменных, а также некоторые вспомогательные буквы. Пусть выбрана какая-нибудь нумерация всех слов в алфавите данной формальной системы  $\Sigma$ . Тогда метаматем. отношениям, определенным для объектов системы  $\Sigma$ , соответствуют числовые предикаты, заданные на номерах этих объектов. Т. о., изучение свойств системы  $\Sigma$  становится частью

арифметики. Приведем примеры предикатов, рассматриваемых в связи с описанием данной формальной системы.

$V(Y)$ : « $Y$  есть переменная».

$Fm(X)$ : « $X$  есть формула».

$Fv(X, Y)$ : «Переменная  $Y$  входит свободно в формулу  $X$ ».

$Neg(Z, X)$ : «Формула  $Z$  есть отрицание формулы  $X$ ».

$Dis(Z, X_1, X_2)$ : «Формула  $Z$  есть дизъюнкция формул  $X_1, X_2$ ».

$\forall(Z, X, Y)$ : «Формула  $Z$  получается из формулы  $X$  навешиванием квантора общности на переменную  $Y$ ».

$Ax_\Sigma(X)$ : « $X$  есть аксиома  $\Sigma$ ».

$Mr(Z, X_1, X_2)$ : «Формула  $Z$  выводится из формул  $X_1, X_2$  по правилу *modus ponens*».

$Prf_\Sigma(X, Y)$ : « $Y$  есть доказательство формулы  $X$  в системе  $\Sigma$ ».

Упомянутую выше нумерацию объектов системы  $\Sigma$  можно выбрать так, чтобы перечисленные предикаты (а также другие отношения подобного рода, представляющие интерес для метаматематики) отобразились в результате этой нумерации в примитивно-рекурсивные числовые предикаты. Все примитивно-рекурсивные предикаты выразимы в языке элементарной арифметики (см. *Арифметика формальная*). Поэтому каждому из перечисленных выше метаматем. предикатов можно поставить в соответствие арифм. формулу, описывающую этот предикат (в терминах выбранной нумерации объектов системы  $\Sigma$ ). Напр., можно построить следующие формулы:

$Fm(x)$ : « $x$  есть номер некоторой формулы».

$Neg(z, x)$ : « $x$  есть номер формулы, а  $z$  — номер ее отрицания».

$Prf_\Sigma(x, y)$ : « $y$  есть номер доказательства формулы с номером  $x$  в системе  $\Sigma$ » и т. п.

Отсюда следует, что в языке элементарной арифметики можно записывать разнообразные утверждения о системе  $\Sigma$ . Важными примерами таких утверждений являются:

$$Pr_\Sigma(x) \Leftrightarrow \exists y Prf_\Sigma(x, y);$$

$$con_\Sigma \Leftrightarrow \forall x \forall z (Fm(x) \& Fm(z) \&$$

$$\& Neg(z, x) \rightarrow \neg (Pr_\Sigma(x) \& Pr_\Sigma(z))).$$

Первая из этих формул выражает предикат: « $x$  есть номер формулы, доказуемой в  $\Sigma$ », вторая формула утверждает, что система  $\Sigma$  непротиворечива.

Допустим теперь, что зафиксирована какая-нибудь достаточно сильная формальная система  $A$  для элементарной арифметики. Тогда некоторые формулы, описывающие метаматематику рассматриваемой системы  $\Sigma$ , могут быть доказаны в  $A$ . Т. о., в рамках системы  $A$  можно доказывать теоремы о свойствах самой системы  $A$ , а также более сильных систем. Обычно в качестве  $A$  берется система, основанная на аксиоматике Пеано. От выбора системы  $A$

зависит то, насколько широким будет класс доказуемых метаматем. утверждений. Итак, А. м. заключается в следующем: формулировки метаматем. теорем переводятся на язык арифметики; доказательства этих теорем осуществляются средствами заданной формальной системы А.

Учитывая аналогию между формальными системами и вычисл. машинами, заметим, что имеется определенное сходство между А. м. и такими процедурами, как автомат. программирование или *машинный перевод* с одного языка на другой. В обоих случаях происходит кодирование входной информации в языке данной формальной системы (или машины), а затем эти коды перерабатываются в соответствии с правилами функционирования рассматриваемой системы (или машины).

При использовании метода арифметизации необходимо иметь в виду, что класс метаматем. теорем, коды которых (т. е. соответствующие арифметические формулы) доказуемы в системе А, зависит не только от выбора этой системы А, но и от способа кодирования. Дело в том, что упомянутые выше формулы, выражающие на арифм. языке осн. метаматем. предикаты (формулы  $F_m(x)$ ,  $Pg f_\Sigma(x, y)$  и т. д.), были определены неоднозначно. От них требовалось только, чтобы они в самом деле описывали соответствующие предикаты (так что, например, любая формула  $a(x)$ , область истинности которой совпадает с мн-вом номеров формул системы  $\Sigma$ , могла бы быть выбрана в качестве  $F_m(x)$ ). Между тем, две содержательно равносильные формулы могут не быть дедуктивно эквивалентными относительно данной системы А. В связи с этим обычно выдвигается дополнительное требование, чтобы арифметизация была, в некотором смысле, естественной. Это требование можно уточнить так: примитивно-рекурсивные описания осн. метаматем. предикатов должны копировать определения этих предикатов, даваемые при содержательном изложении метаматематики, а формулы, выражающие эти предикаты, должны иметь ту же структуру, что и соответствующие примитивно-рекурсивные описания. Последнее условие заведомо выполняется, если для построения нужных формул используют т. н. процедуру Гёделя. С помощью арифметизации были получены фундаментальные результаты по основаниям математики. В частности, было показано, что ни в какой формальной системе нельзя вывести все истинные формулы арифм. языка (см. *Гёделя теоремы о неполноте*). Вместе с тем, метод арифметизации показывает, что возможности формальных систем весьма широки. Укажем здесь один характерный пример, иллюстрирующий эти возможности. Пусть, как и выше, А есть достаточно сильная арифм. формальная система. Тогда для некоторой формулы  $\varphi$  может оказаться, что в А выводим:

$$\neg \text{Pr}_A(\bar{\varphi}) \ \& \ \forall z (\text{Neg}(z, \bar{\varphi}) \rightarrow \neg \text{Pr}_A(z)),$$

где  $\bar{\varphi}$  — номер формулы  $\varphi$  в заданной нумерации объектов системы А. Это значит, что  $\varphi$  не-

зависима от аксиом А. Если присоединить  $\varphi$  к А в качестве новой аксиомы, то получится более сильная формальная система. Существенным моментом здесь является то, что независимость  $\varphi$  была установлена самой системой А. Очевидно, что этот путь ведет к рассмотрению «самосовершенствующихся» формальных систем. Подобные рассуждения представляют значительный интерес как для оснований математики, так и для *автоматов теории*.

Лит.: Клини С. К. Математическая логика. Пер. с англ. М., 1973 [библиогр. с. 451—465]; Feferman S. Arithetization of metamathematics in a general setting. «Fundamenta mathematica», 1960, v. 49.

Н. В. Белякин.

**АРИФМЕТИКА С ПЛАВАЮЩЕЙ ЗАПЯТОЙ** — способ выполнения арифм. операций над числами, представленными в виде мантиссы и порядка. В ЭЦВМ А. с п. з. реализуется либо структурно, либо программно. Выполнить операцию — это значит вычислить порядок и мантиссу результата. Порядком суммы и разности является больший из порядков операндов, порядком произведения — алгебр. сумма порядков сомножителей, порядком частного — разность порядков делимого и делителя. Для вычисления мантиссы суммы (разности) производится сложение (вычитание) выравненных мантисс операндов по правилам сложения (вычитания) чисел с фиксированной запятой; при этом выравнивание мантисс производится путем сдвига мантиссы того операнда, у которого порядок меньше, на число разрядов, равное разности порядков операндов. Мантисса произведения (частного) есть произведение (частное) мантисс операндов, найденное по правилам, описанным для чисел с фиксированной запятой. Если результат получается ненормализованный, то обычно при выполнении операций А. с п. з. он автоматически нормализуется в машине. См. также *Арифметические операции ЦВМ*. С. Н. Берестовая.

**АРИФМЕТИКА С ФИКСИРОВАННОЙ ЗАПЯТОЙ** — способ выполнения арифм. операций над числами, положение запятой в которых строго определено и не меняется в процессе выполнения операций. Такое представление чисел позволяет упростить выполнение операций машинных и увеличить их скорость, но сужает диапазон допустимых чисел по сравнению с представлением чисел в арифметике с плавающей запятой. Если в результате вычислений перед запятой число цифр больше, чем допустимое в данной машине, то вырабатывается сигнал переполнения. В машинах, не имеющих плавающей формы представления чисел, во избежание переполнения при вычислениях, необходимо вводить масштабные множители. Напр., если в некоторой машине не допустимы числа, большие чем 1, а предполагается, что будет получена сумма порядка 10, то каждое из слагаемых необходимо умножить на 0.01 и учитывать этот множитель при дальнейших вычислениях. С. Н. Берестовая.

**АРИФМЕТИКА ФОРМАЛЬНАЯ** — общее название класса формальных систем, описывающих с большей или меньшей полнотой т. н.

элементарную теорию чисел (в отличие, напр., от аналитической теории чисел). Среди них особое место занимает система, связанная с аксиоматикой Дж. Пеано. Эта формальная система (система  $P$ ) является отправным пунктом многих современных логико-матем. исследований. Язык системы  $P$  содержит символы 0 и 1 и знаки арифм. операций сложения и умножения. Выражения вида  $1 + 1 + \dots + 1$  служат для обозначения натуральных чисел; они наз. цифрами (0 и 1 тоже включаются в число цифр). Кроме того, язык системы  $P$  содержит потенциально бесконечное число символов для переменных:  $a, b, x, y, \dots$ . Выражения, которые можно построить из символов 0, 1 и переменных с помощью сложения и умножения, наз. т е р м а м и (цифры — это частный случай термов). Выражения вида  $t_1 = t_2$ , где  $t_1, t_2$  — термы, суть элементарные формулы. Остальные формулы арифметики строятся из элементарных согласно обычным правилам логики предикатов, т. е. с помощью логич. связок и кванторов. Различают свободные и связанные переменные. Формула, не имеющая свободных переменных, представляет собой некоторое высказывание о натуральных числах (истинное или ложное). Формула, зависящая от  $n$  свободных переменных, задает некоторый  $n$ -местный теоретико-числовой предикат.

Дедуктивный аппарат системы  $P$  устроен следующим образом. Помимо аксиом и правил вывода классического исчисления предикатов с равенством, имеются еще арифм. аксиомы, описывающие некоторые характерные свойства натуральных чисел:

$$\begin{aligned} & \neg (a + 1 = 0), \\ & (a + 1 = b + 1) \rightarrow (a = b), \\ & a + 0 = a, \\ & a + (b + 1) = (a + b) + 1, \\ & a \cdot 0 = 0, \\ & a \cdot (b + 1) = (a \cdot b) + a. \end{aligned}$$

Кроме того, имеется схема аксиом матем. индукции:

$$[\mathcal{A}(0) \wedge \forall x (\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{A}(x + 1))] \rightarrow \forall x \mathcal{A}(x).$$

где  $\mathcal{A}(x)$  — любая арифм. формула. Используя указанные аксиомы и правила вывода, определяют понятие доказуемости. В рамках системы  $P$  можно построить значительную часть арифметики. С помощью схемы индукции доказываются осн. законы сложения и умножения (переместительный, сочетательный, распределительный). Отношение  $a < b$  выражается формулой  $\exists c (a + (c + 1) = b)$ , при этом доказуемыми оказываются осн. свойства неравенств. Аналогично в языке системы  $P$  выражается ряд отношений, связанных с делимостью. Напр., утверждение о том, что при делении  $a$  на  $b$  получают частное  $q$  и остаток  $r$ , записывается так:

$$(a = b \cdot q + r) \wedge (r < b).$$

Таким путем формализуется теория делимости (включая теоремы о наибольшем общем дели-

теле, элементарные свойства простых чисел и т. п.). Приведенные факты показывают, что система  $P$  достаточно сильна. Опираясь на указанные возможности данной формальной системы, в ее рамках можно моделировать любые вычисления и провести т. о. далеко идущую аналогию между системой  $P$  и вычисл. машиной.

Механизм такого моделирования разработал австр. математик К. Гёдель 1931. Он показал, что для каждой примитивно рекурсивной ф-ции  $f(x_1, \dots, x_n)$  можно построить арифм. формулу  $\mathcal{A}_f(x_1, \dots, x_n, y)$ , выражающую отношение  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ . Построение этой формулы проводится индукцией по длине примитивно-рекурсивного описания ф-ции  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Так, напр., если  $f(x)$  является суперпозицией примитивно рекурсивных ф-ций  $g(x)$  и  $h(x)$  и если соответствующие формулы  $\mathcal{A}_g$  и  $\mathcal{A}_h$  уже построены, то формула  $\mathcal{A}_f(x, y)$  определяется так:

$$\exists z (\mathcal{A}_h(x, z) \wedge \mathcal{A}_g(z, y)).$$

Аналогично, если ф-ция  $f(x, y)$  получена по схеме примитивной рекурсии из более простых ф-ций  $g(x)$  и  $h(x, y, z)$ , то формула  $\mathcal{A}_f$  строится как некоторая стандартная комбинация соответствующих формул  $\mathcal{A}_g$  и  $\mathcal{A}_h$ . Выражаясь современным языком, можно сказать, что процедура построения формул вида  $\mathcal{A}_f$  (процедура Гёделя) представляет собой *транслятор* с языка примитивно-рекурсивных программ на язык А. ф. Благодаря гёделевской процедуре, в  $P$  можно доказывать различные свойства примитивно-рекурсивных ф-ций. Напр., исходя из примитивно-рекурсивного описания показательной ф-ции  $a^x$ , легко доказать по индукции тождество  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ . Гёделевская процедура позволяет сформулировать и доказать это тождество в системе  $P$ , несмотря на то, что в последней отсутствует знак для операции возведения в степень. Вообще имеет место следующее утверждение. Пусть к языку системы  $P$  присоединены добавочные символы, обозначающие какие-либо примитивно-рекурсивные ф-ции. Добавим в качестве новых аксиом определяющие равенства для этих ф-ций. Тогда полученная таким способом расширенная система  $P'$  оказывается по существу эквивалентной исходной системе  $P$ . Каждая формула, выводимая в  $P'$ , после некоторой перекодировки переходит в формулу, выводимую в  $P$  (перекодировка нужна для устранения избыточных символов, осуществляется она с помощью гёделевской процедуры и, конечно, не меняет смысла формулы). Разобранное свойство обеспечивает системе  $P$  значительную гибкость и делает удобным ее использование в различных метаматем. исследованиях (см. *Арифметизация метаматематики*).

Важным проявлением описанного эффекта, достигаемого процедурой Гёделя, является возможность моделировать в системе  $P$  произвольные вычисления. Известно, что работу

любого алгоритма в любое заданное число шагов можно описать посредством подходящей примитивно-рекурсивной ф-ции. Но для каждой такой ф-ции  $f(x_1, \dots, x_k)$  имеет место следующее утверждение. Пусть  $f(n_1, \dots, n_k) = m$ . Тогда в  $P$  доказуема формула  $\mathcal{U}_f(n_1, \dots, n_k, m)$  и для любого  $l \neq m$  доказуема формула  $\neg \mathcal{U}_f(n_1, \dots, n_k, l)$ . Отсюда следует, напр., что для любой *Тьюринга машины* и для любого набора исходных данных можно построить вывод, который воспроизводит шаг за шагом процесс работы данной машины. Поэтому, если машина применима к исходным данным и вычисляет некоторый результат, то этот факт может быть установлен в системе  $P$ .

Несмотря на богатство выразительных и дедуктивных средств, система  $P$  неполна, т. е. в ней нельзя вывести все истинные арифм. утверждения (см. *Гёделя теоремы о неполноте*). Можно строить более сильные формальные системы, присоединяя к системе  $P$  какие-нибудь истинные, но не выводимые в ней утверждения в качестве новых аксиом. Требуется лишь, чтобы множество аксиом полученной системы можно было перечислить посредством подходящего алгоритма. Всякая такая система тоже неполна. Однако можно построить трансфинитную последовательность формальных систем возрастающей силы, которые в совокупности исчерпывают все истинные утверждения о натуральных числах, выражимые в арифм. языке. В этом направлении ведутся интенсивные исследования.

Лит.: Клини С. К. Математическая логика. Пер. с англ. М., 1973 [библиогр. с. 451—465]; Гудстейн Р. Л. Математическая логика. Пер. с англ. М., 1961; Feferman S. Transfinite recursive progressions of axiomatic theories. «The Journal of symbolic logic», 1962, в. 27, № 3. Н. В. Белякин.

**АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ИЕРАРХИИ** — два способа классификации числовых множеств, в основу которых положены языки арифметики соответственно 1-й и 2-й ступени.

**Арифметическая иерархия** охватывает мн-ва, выражимые в языке элементарной арифметики (см. *Арифметика формальная*). Эти мн-ва, как мн-ва истинности, можно получить, навешивая кванторы на рекурсивные предикаты числовых переменных. Их классифицируют по числу перемен кванторов и по виду первого квантора. Так, рекурсивно перечислимые мн-ва можно выразить в виде  $\exists y R(x, y)$  с общерекурсивным  $R$ ; они, по определению, составляют класс  $\Sigma_1$  в арифм. иерархии. Дополнения к рекурсивно перечислимым мн-вам, представимые в виде  $\forall y R(x, y)$ , объединяются в класс  $\Pi_1$ . Вообще  $\Sigma_n$  состоит из мн-в, полученных навешиванием на рекурсивные предикаты  $n$  чередующихся кванторов, первый из которых — квантор существования. Аналогично определяется класс  $\Pi_n$ . Построенные таким образом классы  $\Sigma_n, \Pi_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ , причем  $\Sigma_0 = \Pi_0$  равны классу всех рекурсивных мн-в) характеризуются посредством некоторой канонической формы кванторных приставок. С помощью простых тождественных

преобразований можно любое арифм. мн-во привести к каноническому виду.

**Аналитическая иерархия** охватывает более широкий класс мн-в, представимых в языке т. н. арифметики 2-й ступени. Этот язык отличается от языка элементарной арифметики наличием функциональных переменных, пробегающих мн-во всех бесконечных числовых последовательностей, и наличием кванторов, связывающих эти переменные. Посредством тождественных преобразований ф-лы этого языка можно привести к такому виду, что все функциональные кванторы окажутся вынесенными в начало формулы. Классификация идет по числу чередований функциональных кванторов. Напр.,  $\Pi_1^1$  есть совокупность мн-в, которые представимы ф-лами (в приведенной форме) с одним функциональным квантором общности. Аналитическая иерархия содержит очень неэффективные средства порождения множеств (функциональные кванторы). Поэтому внутри нее выделяют рекурсивные иерархии, использующие более конструктивные принципы. Эти принципы приблизительно состоят в допущении некоторых простых видов счетного перебора, проитерированного по достаточно обозримым трансфинитным отрезкам. Важным примером такого рода служит **гиперарифметическая иерархия**, являющаяся довольно естественным продолжением арифметической. Эта иерархия исчерпывает класс мн-в, которые попадают в  $\Pi_1^1$  вместе со своими дополнениями. Ведутся исследования по построению и изучению естественных классов еще более длинных иерархий.

Лит.: Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная рекурсивность. Пер. с англ. М., 1972 [библиогр. с. 587—599]. Н. В. Белякин.

**АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ ЦВМ** — совокупность операций типа сложения, умножения, извлечения квадратного корня и т. п., получивших широкое распространение в цифровых вычислительных машинах при выполнении алгебраических операций над числами. Методы выполнения А. о. в значительной степени определяют структуру арифметических устройств ЦВМ.

**АРИФМЕТИЧЕСКОЕ УСТРОЙСТВО (АУ)** — один из основных блоков электронной цифровой вычислительной машины (ЭЦВМ), предназначенный для выполнения арифметических и логических операций. Классическое А. у. (рис. 1) состоит из сумматора  $\Sigma_m$  (осн. узел АУ), двух регистров ( $P_1$  и  $P_2$ ) с соответствующими логическими схемами и устройства управления блоком А. у. (УУ АУ). Заштрихованные части регистров соответствуют логическим схемам, относящимся к определенным регистрам. Сумматор предназначен для суммирования чисел, регистры  $P_1$  и  $P_2$  — для хранения слагаемых, или уменьшаемого и вычитаемого, сомножителей, или делимого и делителя — в зависимости от выполняемой операции. УУ АУ управляет последовательностью действий, выполняемых А. у. и координирует его работу. Внешние связи А. у. с др. устройствами ЦВМ



даны на рис. 1: с запоминающим устройством А. у. связано кодовыми шинами чтения (КШЧ) и записи (КШЗ), по которым в А. у. вводятся исходные данные и выводятся результаты вычислений, с устройством управления процессора — управляющими шинами, по которым в него поступают синхронизирующие импульсы из УУ, а из А. у. в УУ подаются импульсы, сигнализирующие об окончании вычислений, и др. управляющие импульсы.

АУ работает по следующему принципу: код арифм. или логической операции из УУ процессора поступает в УУ АУ, где дешифрируется и формируется сигнал, соответствующий этому коду операции; затем по КШЧ выбирается из ЗУ первый операнд по адресу, указанному в команде. Первый операнд проходит через  $P_2$  и См и устанавливается на  $P_1$ . Вторым операнд, выбранный из ЗУ по второму адресу, указанному в команде, поступает также по КШЧ на  $P_2$ . После приема обоих операндов начинается выполнение операции; на См формируется результат операции (операции умножения и деления также сводятся в А. у. к операциям сложения и вычитания). С окончанием формирования результата вырабатывается признак конца операции, по которому результат операции записывается через КШЗ по адресу, указанному в коде команды. На этом заканчивается выполнение логич. или арифм. операции; при этом, кроме формирования результата, в А. у. могут вырабатываться различные признаки результата, напр.,  $\omega$  — признак отрицательного результата,  $\phi$  — признак переполненного результата и т. д. Эти признаки поступают в УУ вычислительной машины и влияют на дальнейший ход вычислительного процесса.

Осн. характеристики и структура А. у. зависят от принятой системы счисления, способа реализации вычислительного процесса, формы представления чисел, способа представления отрицательных чисел, разрядности чисел, типа применяемых схем, состава операций, принятой методики вычислений и требуемого быстродействия.

В зависимости от принятой системы счисления различают А. у. с двоичной, десятичной и двоично-десятичной арифметикой. Чаще используют двоичную систему счисления, т. к. ее реализовать технически проще остальных (а вообще можно построить А. у. с любым основанием системы счисления), иногда применяются также двоично-десятичные А. у. (напр., у машин семейства «МИР»).

В зависимости от способа реализации вычисл. процесса АУ бывают последовательно-параллельного и параллельно-последовательного действия. В арифметическом устройстве последовательного действия каждый операнд вводится последовательно разряд за разрядом, начиная со знака операнда, и операции над операндами производятся также последовательно, поразрядно; числа здесь представляются в виде временной последовательности сигналов и имеют один общий выход, причем каждому разряду отводится определен-

ная временная позиция относительно заданного начала отсчета. Такое А. у. преобразовывает временные последовательности, изображающие оба слагаемые, во временную последовательность, изображающую сумму, выдаваемую по спец. цепи, начиная от младших разрядов и кончая старшими разрядами и знаком. Эту функцию обычно выполняет двоичный сумматор одноразрядный. Если последний дополнить схемой хранения переносов (рис. 2), то он может быть последовательным сумматором в А. у. последовательного действия. Такое А. у. содержит меньше оборудования, чем А. у. параллельного действия, но и обладает меньшим быстродействием. В А. у. параллельного действия (рис. 3) все разряды каждого операнда поступают одновременно по  $n$  каналам ( $n$  — разрядность числа); действия над числами производятся также одновременно во всех разрядах. Логически такое А. у. можно представить, если соединить  $n$  одноразрядных сумматоров таким образом, что выход  $z_1$  предыдущего одноразрядного сумматора ( $OC_1$ ) является входом последующего одноразрядного сумматора ( $OC_2$ ).

Арифметическое устройство параллельно-последовательного действия занимает промежуточное положение между первыми двумя А. у.: все разряды обрабатываемого числа расчленяются на группы, разряды, относящиеся к одной группе, обрабатываются одновременно (параллельно), а группы обрабатываются последовательно.

В зависимости от формы представления чисел различают А. у., оперирующие с числами с фиксированной запятой (см. *Арифметика с фиксированной запятой*), с плавающей запятой (см. *Арифметика с плавающей запятой*) и с целыми числами. Имеются А. у., выполняющие операции над числами с фиксированной запятой, плавающей запятой и целыми числами (напр., «Днепр-2»). При обработке чисел с плавающей запятой возможны два способа выполнения операций: а) последовательный, при котором вычисляется порядок результата, а затем его мантисса, последовательно на одном и том же оборудовании; б) параллельный — порядок и мантисса результата вычисляются одновременно на различном оборудовании. Преимущество А. у. первого типа — малые аппаратные затраты (практически может быть использовано А. у., представленное на рис. 1, с некоторыми незначительными добавлениями). Недостаток — малое быстродействие. С целью увеличения скорости обработки чисел с плавающей запятой А. у., изображенное на рис. 1, дополняют суммирующим устройством для обработки порядков и счетчиком циклов для подсчета числа сдвигов при выравнивании порядков. В А. у. с плавающей запятой имеется больший диапазон представления чисел, чем в А. у. с фиксированной запятой при одинаковой разрядности. В А. у. с фиксированной запятой аппаратные затраты меньше, чем в А. у. с плавающей запятой одной и той же разрядности, но диапазон представленных чисел меньше и программирование (в связи

с необходимостью введения масштабирования) затруднено.

В зависимости от способа представления отрицательных чисел в ЦВМ (обратным либо дополнительным кодом) сумматоры в А. у. строятся с циклическим переносом или без него.

С разрядностью А. у. связана точность и скорость вычислений: чем выше разрядность, тем больше точность вычислений, но тем меньше быстродействие. Оптимальная длина числа равна или кратна стандартной порции информации, обрабатываемой А. у. Она изменяется

в зависимости от области применения ЦВМ. Так разрядность слова малых ЦВМ обычно составляет 8, 12, 16, 18 и 24 двоичных разрядов (бит), в то время как большие машины имеют 24, 32, 36, 48 или 64 бит.

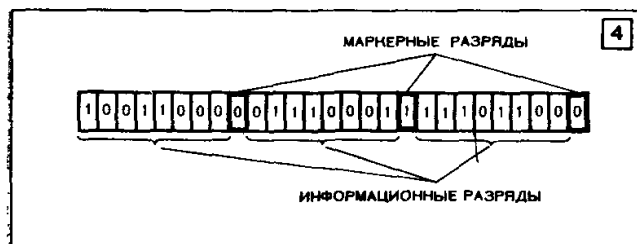
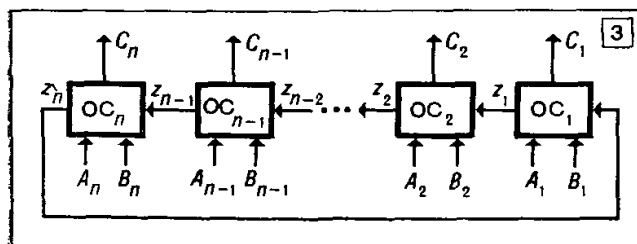
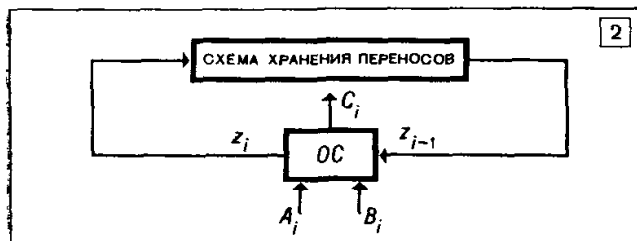
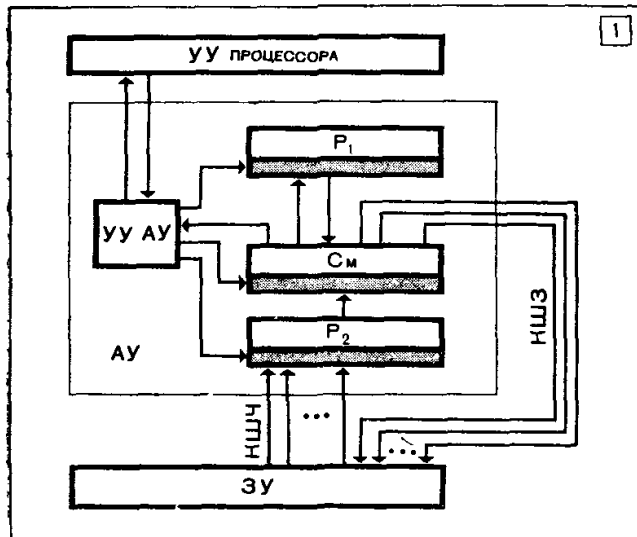
Разрядность А. у. может быть постоянной и переменной. А. у. первых вычисл. машин, как правило, имели постоянную, фиксированную разрядность. При этом, если использовалась разноразрядная информация, то уменьшалась производительность А. у. и нерационально использовалась память. Все больше отечественных («Днепр-2», «МИР» и др.) и зарубежных машин («Nova-1200», «Supernova», «Datamate-16» и др.) имеют переменную разрядность. Дискретность переменного слова может быть различной. Но обычно для отдельной ЭЦВМ устанавливают определенную дискретность длины операнда, равной некоторому заданному числу разрядов  $\mu$ . Число длиной  $\mu$  разрядов называют символом. Максимально

возможная длина числа тогда равна  $\frac{n}{\mu} = k$  символов (где  $n$  — разрядность числа). Для экономной записи алфавитной информации целесообразно выбирать  $\mu = 6$ , а для экономной записи двоично-десятичной информации  $\mu$  удобно установить кратным четырем ( $\mu = 4$ ,  $\mu = 8$ ). Распространено представление информации 8-разрядными символами  $\mu = 8$  (которые наз. байтами).

Существует два способа указания переменной длины числа: а) длина поля указывается в команде и задается как число разрядов в поле и может изменяться от одного разряда (при  $\mu = 1$ ) до некоторого заданного максимума (этот способ подходит для любой дискретности единиц информации); б) в памяти отводятся спец. разряды, в которые полезная информация не записывается и они служат только для указания длины поля (т. н. «маркерные» разряды). «1» в маркерном разряде указывает на то, что данный символ является последним в числе и что следующий символ принадлежит другому числу (рис. 4).

При обработке информации переменной длины в А. у. возникают новые функции: возможность работы с разнодлинными операндами; определение длины результата; округление по длине результата; очистка символов, оказавшихся за границей слова; выработка признаков по длине результата. Для их осуществления А. у. должно иметь оборудование для приема информации о длине операндов, для хранения ее во время операции и для формирования длины результата. А. у. по определенной длине результата производит округление, вырабатывает признаки результата и устанавливает в «0» те разряды  $C_m$ , которые оказались за границей маркера справа.

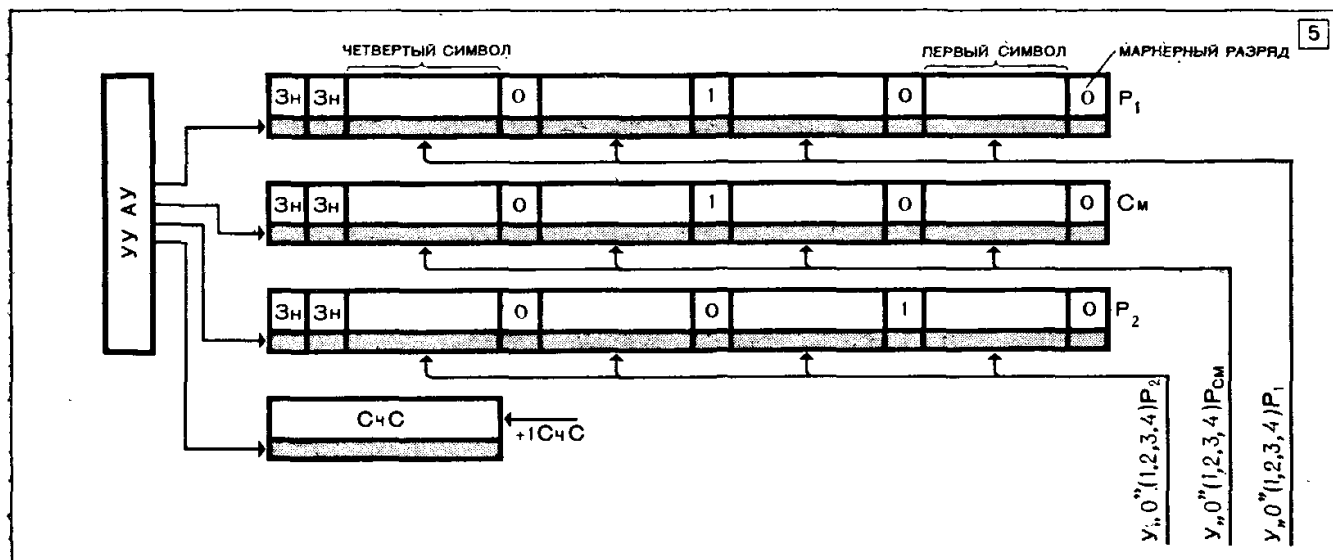
В общем случае для всех операций увеличение количества разрядов в символе ведет к уменьшению необходимого оборудования и увеличению быстродействия. Однако при выборе слишком большого  $\mu$  ( $\mu > 8$ ) незначительное увеличение точности вычислений приводит к значительному увеличению числа разрядов



1. Блок-схема арифметического устройства и его связей с другими устройствами ЦВМ.
2. Блок-схема арифметического устройства последовательного действия.
3. Блок-схема арифметического устройства параллельного действия.
4. Способ изображения маркерных разрядов.

в слове. Учитывая новые функции А. у., которые возникают при обработке информации переменной длины, можно построить А. у., реализующее эти функции (рис. 5). На рис. 5 изображено простейшее четырехсимвольное А. у. и введены в него требуемые дополнения: разряды для запоминания маркеров; счетчик для подсчета числа символов в первом операнде (СчС); посимвольная установка в «0» в регистрах  $P_1$ ,  $P_2$  и С<sub>м</sub>. Маркерные разряды необходимы для указания границ слова: в  $P_1$  — конец 1-го операнда, в  $P_2$  — конец 2-го операнда, в С<sub>м</sub> — конец результата.

в необходимой последовательности. К микрооперациям относятся: установка в нуль регистров, сумматоров или отдельных разрядов А. у.; прием кода каким-либо блоком А. у.; выдача кода; инвертирование кода; сдвиг кода влево вместе со знаком (в сторону старших разрядов); сдвиг кода влево без знакового разряда; сдвиг кода вправо вместе со знаком (в сторону младших разрядов); сдвиг кода вправо без знакового разряда; обмен кодами между различными блоками А. у.; сложение кодов. Время выполнения элементарной операции сложения (вычитания) является осн. показа-



5. Блок-схема простейшего четырехсимвольного арифметического устройства (с указанием маркерных разрядов: У — установка, Зн — знак).

Длина результата (в символах) определяется обычно длиной 1-го операнда, число символов в котором подсчитывается СчС. Посимвольная установка в «0» необходима для очистки отдельных символов, которые остаются за маркером справа, так как при любом количестве символов в операндах (1, 2, 3 или 4 символа) в операции участвуют все четыре символа.

В зависимости от типа применяемых схем А. у. разделяются на комбинационные и накапливающие. В комбинационных А. у. (см. *Сумматор комбинационный*) результат на выходе появляется только одновременно с входными сигналами; с исчезновением входных сигналов результат также пропадает, т. к. в таких А. у. не содержатся накапливающие элементы. Комбинационные схемы имеют обычно потенциальные связи между элементами. В накапливающих А. у. (см. *Сумматор накапливающий*) операнды поступают последовательно один за другим, результат операции остается на сумматоре после исчезновения входных сигналов. Схемы накапливающих А. у. обычно имеют импульсные и импульсно-потенциальные связи между элементами.

Структура и сложность А. у. зависят от состава операций (набора микропрограмм), выполняемых машиной. Любая арифметическая операция расчленяется на ряд элементарных операций или микроопераций, выполняемых

телом быстродействия А. у. Операция вычитания (или микропрограмма операции «вычитания») в А. у. накапливающего типа 3-адресной машины с фиксированной запятой состоит из следующих микроопераций: установка в нуль всех блоков А. у.; прием 1-го операнда на приемный регистр; передача 1-го операнда на сумматор и прием 2-го операнда на приемный регистр; инвертирование 2-го операнда; суммирование, получение результата на сумматоре; выдача результата по 3-му адресу.

Структура А. у. зависит также от принятой методики вычислений в ЦВМ (см. *Операции машинные*), т. е. от выбора алгоритмов операций. Особенно влияет на полную логическую схему А. у. принятая методика выполнения умножения и деления. В любом случае для выполнения умножений А. у. должно содержать по меньшей мере три регистра: множимого, множителя и сумм частичных произведений. Умножение двоичных чисел в А. у. может быть сведено к последовательности сложений и сдвигов. Наибольший практический интерес представляет следующий алгоритм умножения: умножение начинается с младших разрядов множителя, множитель сдвигается вправо, сумма частичных произведений также сдвигается вправо, множимое неподвижно. Этот алгоритм умножения может быть расчленен на следующие этапы: 1) в начале операции все

регистры устанавливаются в нулевое состояние ( $P_1$ ,  $P_2$  и  $См$ ), после этого множимое располагается на  $P_1$ , множитель — на  $P_2$ , сумма частичных произведений — на  $См$ ; 2) анализируется младший разряд множителя (на  $P_1$ ); если он имеет значение 1, то к сумме частичных произведений прибавляется множимое, расположенное на  $P_2$ , если он имеет значение «0», то выполняется действие 3; 3) производится сдвиг множителя и суммы частичных произведений на один разряд вправо, младшие разряды частичного произведения попадают в освобожденные старшие разряды  $P_1$  (регистра множителя); 4) действие 2 и 3 повторяются  $n$  раз ( $n$  — разрядность множителей); 5) знак сомножителя в процессе умножения не участвует, с сомножителями оперируют как с положительными числами; знак результата формируется при сложении знаков операндов по mod 2.

Данный алгоритм реализуется на А. у., структурная схема которого приведена на рис. 1. Этих же регистров достаточно для выполнения операции деления, она также реализуется в А. у. с помощью  $n$  операций сдвига и суммирования (вычитания), поэтому время выполнения умножения и деления значительно больше времени сложения. При выполнении логических операций используются обычно те же цепи, что и для арифметических операций. Последовательность выполнения микроопераций, передачу информации между от-

но расширяется и превращается в операционное устройство (ОУ): напр., ОУ состоит из нескольких (больше трех) операционных регистров, определенным образом соединенных между собой (ОУ с гнездовой памятью); ОУ состоит из нескольких сумматоров (многосумматорные ОУ) и др. типы ОУ.

Осн. пути усовершенствования ОУ — повышение быстродействия за счет логич. и тех. возможностей (к логич. возможностям относят разработку новых методов выполнения операций, более совершенных методов ускорения операций, совмещение выполнения нескольких операций во времени, к тех. — использование новых, более надежных и быстродействующих элементов, введение в машину нескольких АУ). Лит.: Акушский И. Я., Юдицкий Д. И. Машинная арифметика в остаточных классах. М., 1968 [библиогр. с. 430—433]; Карцев М. А. Арифметика цифровых машин. М., 1969 [библиогр. с. 559—575]; Каган Б. М., Каневский М. М. Цифровые вычислительные машины и системы. М., 1973 [библиогр. с. 666—672].

Т. Ф. Слободянюк.

**АРИФМЕТИЧЕСКОЕ УСТРОЙСТВО ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДЕЙСТВИЯ** — арифметическое устройство, в котором все разряды каждого операнда поступают одновременно по  $n$  каналам. Операции над числами и нем производятся одновременно по всем разрядам. См. также Сумматор параллельный.

**АРИФМЕТИЧЕСКОЕ УСТРОЙСТВО ПАРАЛЛЕЛЬНО-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ДЕЙСТВИЯ** — арифметическое устройство (АУ),

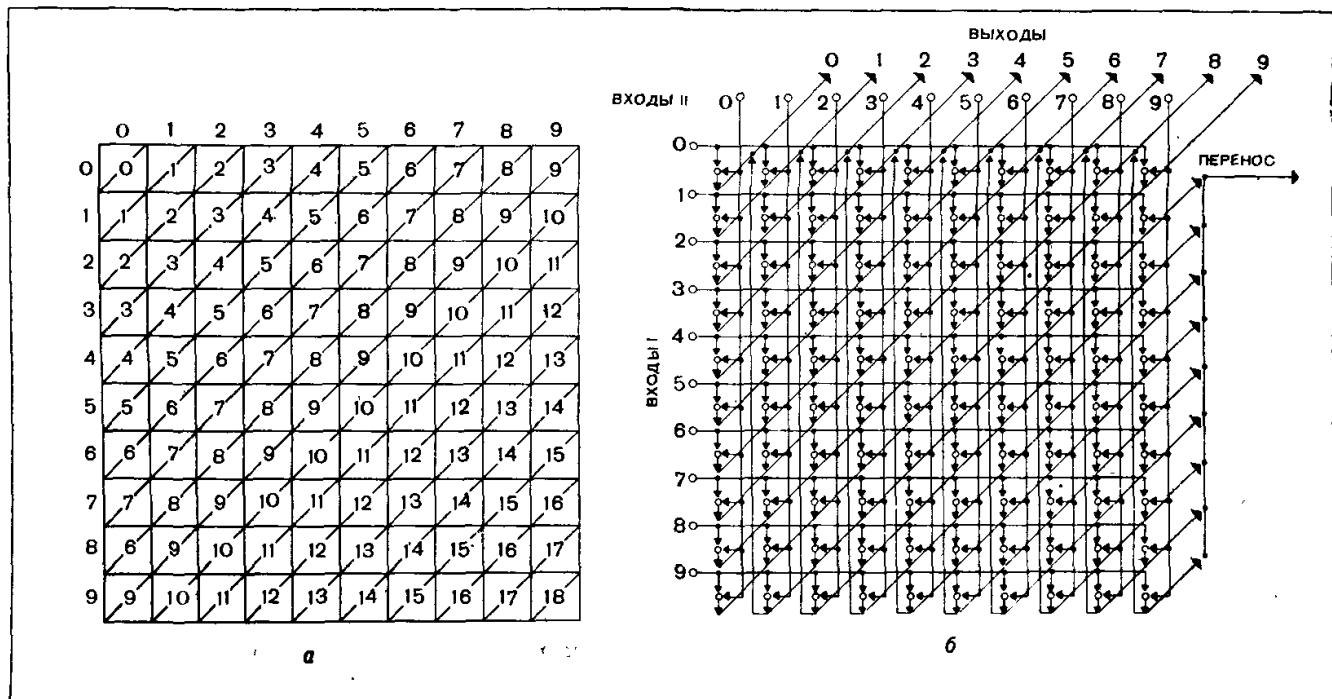


Таблица сложения десятичных цифр (а) и матрица (б) арифметического устройства параллельно-последовательного действия.

дельными блоками внутри А. у. и связь его с др. частями машины осуществляет схема управления А. у. (УУ АУ). С возрастанием применения ЦВМ наблюдается тенденция к увеличению и усложнению функций, выполняемых А. у., вследствие чего А. у. значитель-

в котором разряды числа разбиваются на группы и разряды каждой группы обрабатываются одновременно (параллельно), а группы разрядов — последовательно. Такой метод обработки информации используют, как правило, в тех случаях, когда разряды, входящие в одну

группу, имеют самостоятельное значение, напр., тетрады (двоичные эквиваленты десятичных цифр) разрядов при представлении чисел в двоично-десятичной системе счисления. Поэтому в ЦВМ, где в качестве осн. системы счисления используется двоично-десятичная и не требуется высокого быстродействия, применяют А. у. п.-п. д. Структура АУ таких ЦВМ отличается от арифметического устройства последовательного действия только тем, что сдвигаются и суммируются не двоичные цифры, а тетрады.

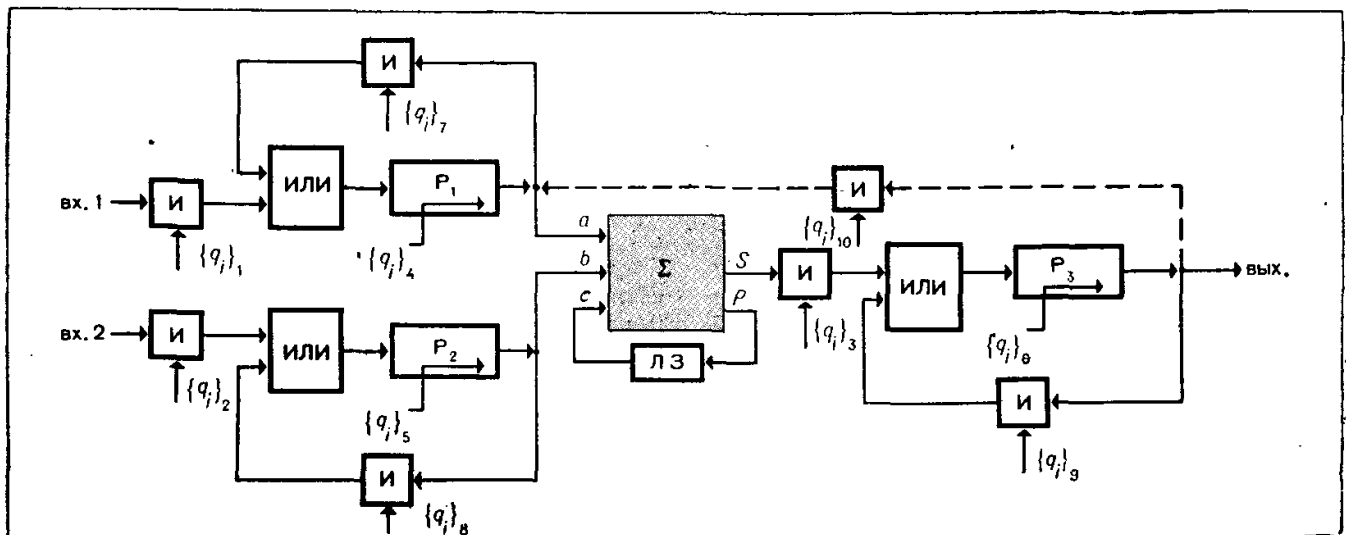
Осн. элементом А. у. п.-п. д. является четырехразрядный двоичный сумматор параллельного действия, обеспечивающий потетрадное сложение чисел. После сложения пары тетрад результат переписывается на выходной регистр и определяется перенос в старшую тетраду. В следующем такте на очищенный сумматор поступают очередные тетрады и импульсы переноса, полученные в предыдущем такте. При сложении двоичных тетрад на обычном двоичном сумматоре необходимо вводить дополнительные схемы для формирования единицы переноса при получении суммы, большей девяти (в четырехразрядном двоичном сумматоре перенос формируется, если сумма больше пятнадцати) и для получения тетрад суммы, соответствующих десятичным цифрам. Для упрощения схемы А. у. п.-п. д. применяют кодирование чисел не в обычном базисе 8421, а в базисе 8421 с избытком 3, в базисе 2421 и т. д. Более простая схема А. у. п.-п. д. получается при использовании вместо сумматора десятичного счетчика. Каждая десятичная цифра числа представляется последовательностью импульсов, количество которых равно

няку в виде матрицы, реализующей таблицу сложения десятичных цифр (рис., а). Матрица представляет собой прямоугольную решетку проводников, в узлах которой расположены двухвходовые схемы совпадения (рис., б). Диагональное расположение в таблице результатов сложения двух десятичных разрядов позволяет объединить общей шиной выходы схем совпадения, лежащих на одной диагонали матрицы. Кроме того, можно объединить все диагонали с одинаковыми суммами по модулю 10. Переносы в следующий разряд получаются путем объединения диагоналей, расположенных в таблице сложения ниже диагонали «9». Табличный метод сложения используют, напр., в ЦВМ «МИР».

Лит.: Прангишвили И. В. [и др.]. Микроэлектроника и однородные структуры для построения логических и вычислительных устройств. М., 1967 [библиогр. с. 224—226]; Ричардс Р. К. Арифметические операции на цифровых вычислительных машинах. Пер. с англ. М., 1957 [библиогр. с. 412—419].

Ю. А. Бузунюв, Е. Н. Вавилов.

**АРИФМЕТИЧЕСКОЕ УСТРОЙСТВО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ДЕЙСТВИЯ** — арифметическое устройство, в котором операции над числами выполняются поразрядно. В А. у. п. д. число представляется в виде временной последовательности импульсов, в которой каждому разряду числа отводится определенная временная позиция; все число передается по одной шине. Передача информации последовательным кодом и ее преобразование выполняется с помощью спец. синхронизирующих импульсов, период следования которых определяет частоту передачи разрядов чисел. В ЦВМ, имеющих А. у. п. д., числа представляются, как правило, в форме с фиксированной запятой.



Функциональная схема арифметического устройства последовательного действия.

значению цифры. При сложении двух чисел в счетчик последовательно заносятся цифры одноименных разрядов слагаемых. В некоторых ЦВМ, использующих двоично-десятичную систему счисления, для повышения быстродействия применяют табличный метод сложения чисел. В этом случае сумматор выпол-

Осн. узлами А. у. п. д. являются сдвигающие регистры с цепями рециркуляции и сумматор одноразрядный (рис.). Прием операндов на входные регистры  $P_1$  и  $P_2$  осуществляется с помощью серий управляющих сигналов  $\{q_i\}_1$ ,  $\{q_i\}_4$  и  $\{q_i\}_2$ ,  $\{q_i\}_5$ . На входные регистры

операнды подаются, начиная с младших разрядов. При выполнении операции сложения разряды операндов передаются на входы одноразрядного сумматора  $\Sigma$  с помощью сдвигающих сигналов  $\{q_i\}_4$  и  $\{q_i\}_5$ . Сумматор на выходе  $S$  формирует значения текущих разрядов суммы операндов, которые с помощью серий управляющих сигналов  $\{q_i\}_3$  и  $\{q_i\}_6$  записываются в регистр  $R_3$ . На выходе  $P$  одноразрядного сумматора формируется сигнал переноса в старший разряд, который задерживается на период следования управляющих импульсов  $\{q_i\}$  и суммируется в следующем такте с очередной парой разрядов операндов.

При сложении чисел в обратном коде для реализации циклического переноса содержимое  $R_3$  пропускается через сумматор (на рис. эта цепь циклической передачи показана пунктиром). При этом время сложения двух  $n$ -разрядных чисел равно

$$T_{\text{сл}} = 2(n+1)\tau,$$

где  $\tau$  — период следования управляющих импульсов  $q_i$ . В процессе сложения операндов регистры  $R_1$  и  $R_2$  постепенно освобождаются. В связи с этим А. у. п. д. можно выполнить на двух регистрах: ф-ции регистра суммы ( $R_3$ ) может выполнять один из регистров ( $R_1$  или  $R_2$ ) операндов. Цепь рециркуляции регистра (рис.) обеспечивает поразрядную перезапись содержимого регистра в процессе его сдвига. Необходимость восстановления информации в регистре возникает при выполнении операций умножения и деления. Выполнение этих операций в А. у. п. д. можно осуществить с помощью схемы, приведенной на рис., дополнив ее некоторыми вспомогательными элементами. Время выполнения умножения в А. у. п. д. определяется соотношением

$$T_{\text{умн}} = n(n+1)\tau.$$

Время выполнения операций в А. у. п. д. велико: время выполнения сложения и вычитания пропорционально разрядности ( $n$ ), а умножения и деления — квадрату разрядности ( $n^2$ ) операндов. Достоинством А. у. п. д. является его простота и экономичность.

Лит.: Чугаев Ю. Г., Плиско В. А. Электронные вычислительные машины. М., 1962 [библиогр. с. 402]; Ричардс Р. К. Арифметические операции на цифровых вычислительных машинах. Пер. с англ. М., 1957 [библиогр. с. 412—419].

Ю. А. Бузунов, Е. Н. Вавилов.

«АРКУС» — специализированная электронная гибридная вычислительная машина, предназначенная для решения нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} + \Phi(X) = 0, \quad (1)$$

$$\Gamma(X_0, X_i, X_k) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $X = X(t)$  — вектор искомых ф-ций  $X_0 = X(t_0)$ ,  $X_i = X(t_i)$ ,  $X_k = X(t_k)$ . Решение отыскивается в интервале  $[t_0, t_k]$ ,  $t_i$  — внутр. точка интервала,  $\Phi$  и  $\Gamma$  — заданные

ф-ции многих переменных, порядок дифф. ур-ний  $n \leq 8$ . «А.» разработан в 1968 в Ин-те кибернетики АН УССР. Состоит из аналоговой и дискретной частей. В аналоговой части неалгоритм. путем вычисляются функции нескольких переменных, решается система обыкновенных дифф. ур-ний с задаваемыми начальными условиями и системы линейных алгебр. ур-ний. Параметры последней операции заранее неизвестны и находят их при решении задачи. Дискретная часть вырабатывает команды, предписывающие выполнение соответствующих матем. операций: решение системы ур-ний (1) с задаваемыми начальными условиями; вычисление значения функции  $\Gamma$  в ур-нии (2) по полученному после выполнения предыдущей операции вектору  $X(t)$ ; по результатам двух предыдущих операций находят параметры системы линейных алгебр. ур-ний, равные элементам матрицы первой производной ф-ции  $\Gamma$  по  $X_0$ ; отыскивается приращение вектора начальных условий по ф-лам методов скорейшего спуска (ск. сп.) или обратного оператора (о. оп.). Операции в аналоговой части реализуются одновременно, что дает возможность выполнять их при помощи одного переключаемого блока *усилителей обрабатывающих*, остальные блоки аналоговой части содержат только наборы *обратных связей*, используемые для выполнения соответствующих операций при подключении к ним обрабатывающих усилителей. В блоке уравнивания, служащем для отыскания приращения вектора начальных условий, в режиме самонастройки (с.) автоматически устанавливаются найденные элементы матрицы первых производных. При отыскании приращения по *обратным операторам методом* образуется модель системы линейных алгебр. ур-ний, при отыскании приращения по методу ск. сп. — модель для отыскания продвижения по антиградиенту. Дискретная часть самостоятельно задает следующую очередность режимов работы блока уравнивания:

с. → ск. сп. → с. → о. оп. → если а, то 4, если не а, то 3,

где а — уменьшение длины невязки в ур-нии (2), оператор имеет возможность изменить эту программу по своему усмотрению. Кроме краевых задач на «А.» можно решать задачи Коши для обыкновенных дифф. ур-ний до 8-го порядка и системы до 4 нелинейных алгебр. или трансцендентных ур-ний.

«А.» состоит из *усилителей операционных* (32 шт.), нелинейностей в системе (1) (8 шт.), в системе (2) (6 шт.), универсальных *преобразователей функциональных* БНП-1 (8 шт.), блоков перемножения УБП-1 (8 шт.), потребляемая мощность машины — 1,3 *кка.* «А.» можно использовать в проектных орг-циях, науч.-исслед. ин-тах, вычисл. центрах, вузах. Лит.: Грездов Г. И. О структуре электронной модели с расширенным кругом задач. В кн.: Вопросы теории и применения математического моделирования. М., 1965; Пухов Г. Е. [и др.]. Электронная самонастраивающаяся математическая машина «Аркус». «Механизация и автоматизация управления», 1968, № 3. Г. И. Грездов.



**АРХИВ** в автоматизированных системах управления или системах обработки данных — функционально-организационная компонента, обеспечивающая хранение и постоянную доступность всей информации, необходимой для нормального функционирования системы, и состоящая из совокупности массивов или файлов. Файлы А. обычно содержат информацию следующих типов: 1) данные, организованные применительно к решаемым задачам и, или потребностям пользователей (см., напр., *База данных*), 2) рабочие программы или алгоритмы на входном языке, 3) каталоги и 4) описания состава и организации информации, хранящейся в А.

А. физически может располагаться на различных уровнях ЗУ системы, однако обращение к файлам и данным из А. должно осуществляться так, как если бы весь А. находился в запоминающих устройствах с непосредственным доступом. Это обеспечивается с помощью системы каталогов и справочных таблиц, а также системой внутренней и внешней идентификации файлов и их частей посредством имен. В современных системах А. имеет сложную иерархическую структуру относительно файлов. Узлами такой структуры являются либо каталоги, либо файлы с информацией. Обращение к А. может осуществляться *операционной системой*, если пользователь или его программа открыли соответствующие файлы.

Для организации и эксплуатации А. необходимо, чтобы операционная система базовой ЦВМ или автоматизированной системы располагала средствами для автоматической организации файлов различного типа (последовательных, индексно-последовательных и т. д.), автоматического учета состояния информации и файлов, находящихся в А. на данный момент, защиты целостности хранимой информации и ее секретности, а также массовой выдачи информации из А. и восстановления информации в А.

Операционные системы 3-го поколения включают указанные средства. В других случаях, а также в АСУ с расширенными требованиями к А., необходимые средства А. расширяются спец. матем. обеспечением.

В. Н. Афанасьев.

**АСВТ**, агрегатная система средств вычислительной техники — систематизированный набор агрегатных устройств с унифицированными внешними связями для обеспечения сбора, хранения, переработки и выдачи информации; позволяет компоновать различные вычислительные системы с заданными техническими параметрами.

В АСВТ реализован принцип *агрегатно-блочного построения средств вычислительной техники*. Состоит АСВТ из отдельных конструктивно и функционально обособленных устройств. Ряд устройств комплектуется из блоков (конструктивно законченная часть устройства), меняя типы и количество которых можно изменять техн. характеристики устройства. Структура АСВТ обеспечивает возможность постепенной модернизации и разви-

тия тех. средств. Это достигается путем унификации конструктивно-технологической базы на каждом этапе разработки, а также единства организации внутрисистемной связи, построения математического обеспечения по принципу модульности.

По функциональному назначению все агрегатные устройства АСВТ делятся на группы: 1) центральные устройства управления и переработки информации — процессоры (специализированные и универсальные); 2) устройства хранения информации — внутренние и внешние запоминающие устройства (ЗУ); 3) *устройства связи с объектом*; 4) устройства связи с оперативным персоналом; 5) устройства ввода с носителей информации и вывода на них; 6) устройства выхода на внешние системные линии связи; 7) устройства внутрисистемной связи. Специализированные процессоры (СПР) предназначены для решения отдельных задач или набора простых задач, напр., задач первичной переработки информации. В зависимости от этого СПР могут разрабатываться с жесткой либо гибкой программой. Универсальные процессоры обрабатывают информацию при решении сложных задач управления, в том числе задач оптимальной организации производства, технико-экономич. и оперативно-производственного планирования и т. п. Они способны выполнять программы, составленные в основной системе команд, независимо от состава дополнительных устройств (внутренних ЗУ, переработки информации в режиме с плавающей запятой, переработки символично-десятичной информации).

Номенклатура АСВТ по группе внутренних ЗУ рассчитана на обеспечение возможности широкого варьирования тех. параметров вычислительных комплексов по емкости и типу используемых ЗУ: оперативные (ОЗУ), постоянные (ПЗУ) и полупостоянные (ППЗУ). Устройства связи с объектом (УСО) предназначены для ввода информации в вычислительную машину от датчиков и выдачи управляющих воздействий на исполнительные механизмы и регуляторы. Группа устройств связи с объектом включает аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи, преобразователи кодов и вспомогательное оборудование. Устройства связи с оперативным персоналом предназначены для ввода текущей информации с участием человека и вывода информации обслуживающему персоналу в наглядной и удобной для восприятия форме или в форме документов. Связь между функциональными устройствами или их группами (процессора с памятью, процессора с устройствами ввода — вывода и т. п.) осуществляется с помощью устройств внутрисистемной связи.

Первая очередь АСВТ разработана с использованием дискретной элементной базы (условно обозначается АСВТ-Д). В АСВТ-Д входит набор агрегатных устройств, предназначенных для компоновки различных модификаций универсального процессора и два вида специализированных процессоров. В состав вычислительного комплекса любой *вычислительной*

системы, построенной из средств АСВТ-Д, входят: процессоры универсальные и специализированные; главная память; устройства внутрисистемной связи. Для всех модификаций универсального процессора принята единая унифицированная система команд, которая обеспечивает удобства при программировании задач, связанных с обработкой двоичных чисел с фиксированной и плавающей запятой, десятичных чисел, логической и символьной информации. Условное название минимальной и максимальной модификаций универсального процессора соответственно «М-2000» и «М-3000». Специализированные процессоры «М-1000» и «М-1010» ориентированы на обработку 16-разрядных двоичных чисел с фиксированной запятой и логических кодов.

В номенклатуру запоминающих устройств АСВТ-Д, из которых komponуется главная память, входят: ОЗУ емкостью 8192 36-разрядных слов с циклом обращения 8 мксек; ОЗУ емкостью 2048 18-разрядных слов с циклом обращения 8 мксек; ПЗУ емкостью 8192 36-разрядных слов с циклом обращения 32 мксек; комбинированное ЗУ, содержащее по 4096 18-разрядных слов оперативной и постоянной памяти; ППЗУ емкостью от 512 до 2048 36-разрядных слов (наращивается агрегатно). Перепись информации осуществляется вручную сменой перфокарт с циклом обращения 3 мксек.

Процессор модели «М-1000» выполняет операции над 16-разрядными двоичными числами с фиксированной запятой (сложение 20 тыс. опер./сек, умножение — 5 тыс. опер./сек). Емкость памяти 4096 ÷ 16 384 32-разрядных слов с произвольным сочетанием оперативных и постоянных ЗУ. Допускается подключение до 256 устройств ввода — вывода. Процессор «М-1010» отличается от процессора «М-1000» меньшими логическими возможностями, в то же время он более прост и имеет более высокое быстродействие.

Процессор модели «М-2000» выполняет операции над двоичными числами с фиксированной запятой 16- и 32-разрядного формата (сложение 40 тыс. опер./сек, умножение 15—19 тыс. опер./сек). Память набирается на ОЗУ и ПЗУ блоками по 8192 36-разрядных слов (до 6 блоков). Эта модель допускает наличие до 3 мультиплексорных каналов (до 256 устройств ввода — вывода в каждом).

Процессор модели «М-3000» рассчитан на выполнение операций двоичной арифметики над числами с фиксированной (16- и 32-разрядного формата) и плавающей запятой (32- и 64-разрядного формата) операций над целыми десятичными числами переменной длины (до 31 десятичного разряда). Быстродействие при выполнении операций над числами с фиксированной запятой: типа сложения — до 100 опер./сек, типа умножения — до 25 тыс. опер./сек. Память включает до 12 блоков ОЗУ или ПЗУ. К-во мультиплексорных и селекторных каналов — до 7 в любом соотношении.

Существенный недостаток АСВТ 1-й очереди — избыточность аппаратуры в каждом функционально и конструктивно законченном

устройстве вследствие унификации технической базы. Поскольку в АСВТ-Д используют только дискретные элементы микроэлектроники, это приводит к большому объему конструктивных элементов для реализации отдельных устройств. В сочетании с избыточным составом функциональных устройств, необходимых для создания конкретных автоматических систем управления, это приводит к высокой стоимости последних.

Этот недостаток в значительной степени устранен во 2-й очереди разработки АСВТ (условно — АСВТ-М), которая выполнена на микроэлектронной элементной базе по усовершенствованным структурным и архитектурным принципам. Осн. структурной единицей тех. средств АСВТ-М является агрегатный модуль — устройство, которое имеет унифицированные внешние связи, выполняет какие-либо функции по обработке или хранению информации, коммутации передач, преобразованию физ. сигналов и т. п.

Новый набор средств АСВТ-М включает в себя процессор модели «М-6000» и группу агрегатных модулей, служащих для построения систем на базе этого процессора. Этот набор позволяет компоновать проектным путем автономные и низовые информационные и управляющие вычисл. системы для технологических объектов и научного эксперимента, работающих в реальном масштабе времени, а также многопроцессорных систем различной структуры, обеспечивающих высокую производительность и живучесть.

По функциональному назначению набор агрегатных модулей АСВТ объединяется в следующие группы устройств: вычислительного комплекса, ввода — вывода, связи с объектом, устройства-согласователи.

Набор агрегатных модулей АСВТ-М сочетает в себе развитые систему ввода — вывода и систему команд, обеспечивающую удобство в программировании; удобную систему приоритетного прерывания, позволяющую совмещать выполнение операций ввода — вывода со счетом. Набор агрегатных модулей обеспечивает высокую производительность (до 200 тыс. адресных и до 1800 тыс. безадресных микроопераций в 1 сек); наращивание памяти (от 8192 до 65 736 байтов); возможность подключения быстродействующих каналов прямого доступа в память, выполняющих операции ввода — вывода без прерываний процессора; высокую надежность, простоту и удобство в обслуживании; малые габариты, современное эстетическое оформление.

Математическое обеспечение включает транслятор с языков ФОРТРАН, АЛГОЛ-60, со специализированных языков, комплекс программ управления вводом — выводом, библиотеку стандартных программ и т. д.

Внедрение АСВТ позволит получить значительный экономический эффект по сравнению с применением в системах разнообразных вычислительных машин, построенных на разных несоевместимых элементах и конструктивных базах.

Лит.: Агрегатная система средств вычислительной техники. К., 1969; Управляющий вычислительный комплекс АСВТ М-4000. М., 1971; Резанов В. В., Винокуров В. Г., Костелянский В. М. Основные концепции и общее описание устройств первой очереди АСВТ; Костелянский В. М., Итенберг И. И., Лехнова Г. М. Новый набор агрегатных модулей — дальнейшее развитие АСВТ. «Механизация и автоматизация управления», 1971, № 4. В. М. Египко.

**АСИНХРОННЫХ АВТОМАТОВ ТЕОРИЯ** — теория математических моделей дискретных устройств, перерабатывающих информацию, в которых длины входных тактов и величины задержек внутренних элементов не обязательно одинаковы. Входным тактом в асинхронных автоматах (АА) наз. интервал времени между двумя соседними изменениями входных сигналов (структурная схема АА см. в статье *Автомат асинхронный*). Первыми примерами АА явились релейно-контактные схемы: в них моменты поступления внеш. сигналов на обмотки реле бывают, как правило, достаточно произвольными и из-за разброса характеристик реле нельзя считать, что все они срабатывают одновременно.

Важной задачей А. а. т. является выяснение принципиальных возможностей АА с точки зрения преобразования последовательностей входных сигналов в последовательности выходных сигналов. Если при любой комбинации  $a_i$  входных сигналов, длящейся достаточно долго, и любом внутр. состоянии  $s_i$  АА переходит в т. н. устойчивое состояние  $s_k$ , (т. е. не меняющееся, пока не изменится входной сигнал), то такой АА сводится к *автомату конечному*; состояние  $s_k$  — является значением ф-ции переходов  $\delta$ :  $s_k = \delta(a_i, s_k)$ . Многие АА обладают более сложным поведением. Их изучение проводится с помощью различных моделей, имеющих в А. а. т., напр. в одной из моделей исходят из того, что величины задержек неизвестны и, возможно, являются переменными. В таких АА одной входной последовательности может соответствовать мн-во возможных последовательностей состояний, и в общем случае нельзя говорить о реализации автоматных отображений. Для такой модели важной задачей является изучение классов автоматов, поведение которых не зависит в том или ином смысле (напр., в смысле перехода в одно и то же устойчивое состояние в течение одного входного такта) от величин задержек, а также таких способов соединения АА, при которых эта независимость сохраняется. В другой модели элементы имеют произвольные, но фиксированные задержки. При этом выходная последовательность определяется однозначно, но может зависеть от длин тактов входной последовательности. Автоматные отображения в таких АА реализуются тогда, когда при любом достаточно длительном входном такте устанавливается устойчивый выходной сигнал. Однако и в этом случае отображение может не быть конечно-автоматным; при несоизмеримых задержках возможно представление нерегулярных событий. Это объясняется тем, что следующее состояние в таком автомате опреде-

ляется не только настоящим состоянием и входом, но и некоторой совокупностью *линейных форм* от величин задержек  $\tau_1, \dots, \tau_n$ ; при несоизмеримых  $\tau_1, \dots, \tau_n$  число различных линейных форм может оказаться бесконечным. В обоих моделях задержка пропускает только сигналы, по длительности не меньшие времени срабатывания задержки. Такие задержки иногда наз. *фильтрами*. Еще одна модель имеет различные виды задержек, в т. ч. задержки со случайным временем срабатывания, которое описывается некоторым вероятностным распределением.

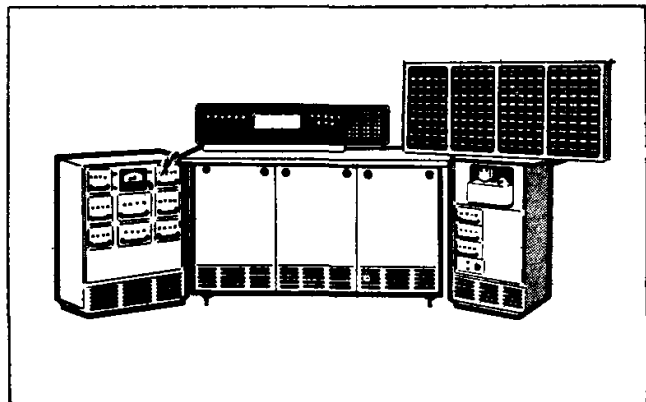
Т. о., в А. а. т. рассматриваются модели устр-в, обладающих более сложным поведением, чем конечные автоматы. Однако эта сложность в реальных АА считается нежелательной помехой, поскольку она проявляется в зависимости переходных процессов от соотношения временных характеристик элементов, а такая зависимость ввиду неизбежного разброса этих характеристик может оказаться недетерминированной. Такие недетерминированные переходные процессы (называемые состязаниями или гонками) могут приводить к ошибкам и сбоям в работе автомата. Поэтому важной практической задачей А. а. т. является устранение состязаний, т. е. синтез АА, в которых переходы из одного устойчивого состояния в другое под действием данного входного сигнала происходят однозначно и не зависят от величин задержек элементов и длительностей входных тактов. Такие АА функционируют как обычные конечные автоматы. Состязания устраняют с помощью спец. «противогончных» методов кодирования состояний абстрактных автоматов, введения дополнительных задержек в некоторых цепях обратной связи и построения схем с заранее заданными свойствами, гарантирующими отсутствие состязаний.

Лит.: Кузнецов О. П. Об асинхронных логических сетях. «Проблемы передачи информации», 1961, в. 9; Лазарев В. Г., Пийль Е. И. Синтез асинхронных конечных автоматов. М., 1964; Рогинский В. Н. Динамика работы дискретных автоматов с линейными задержками. «Проблемы передачи информации», 1967, т. 3, в. 1; Якубайтис Э. А. Синтез асинхронных конечных автоматов. Рига, 1970; Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств. Пер. с англ. М., 1962; Миллер Р. Теория переключательных схем. Пер. с англ., т. 2. М., 1971. О. П. Кузнецов.

**«АСОР»**, автоматизированная система организации работ — семейство специализированных вычислительных машин для решения и моделирования задач сетевого планирования и управления. Разработано в Ин-те кибернетики АН УССР. Предназначен для расчета и отображения небольших по объему сетей, фрагментов подробной сети или укрупненных сетевых графиков. Высокая степень наглядности решения и оперативность его получения позволяет использовать «АСОР» как машины-советчики для руководителей комплексов работ при планировании и управлении сетевыми методами. Разработаны две модификации «А.»

«АСОР-1» — *квазианалоговая модель*, содержит набор отдельных моделей работ — нелинейных

двухполюсников, в которых продолжительность выполнения работ моделируется величиной электр. напряжения. Модели работ при наборе задачи, соединяясь между собой в соответствии с конфигурацией сетевого графика, образуют модель сети. «АСОР-1» позволяет получать следующие характеристики сетевого пути: а) величину и форму критического пути; б) наиболее ранние возможные сроки начала и окончания работ; в) наиболее поздние допустимые сроки начала и окончания работ; г) резервы времени работ. Индикация крити-



Специализированная вычислительная машина «АСОР-2».

ческого пути осуществляется специальной мнемосхемой. Ввод информации — ручной, вывод — визуальный (на световой мнемосхеме) и с помощью цифрового измерительного прибора. Максимальное число работ в графике — 200. Погрешность измерения характеристик графика, приведенная к шкале машины, не выше 5%.

«АСОР-2» — комбинированная (цифро-аналоговая) модель задач сетевого планирования и управления (см. рис.). Моделями работ сетевого графика являются схемы электр. задержки сигналов цифровыми счетчиками. Моделями событий являются схемы совпадения. Модели работ и модели событий соединяются между собой в соответствии с конфигурацией сети. В начало модели сети посылается импульсный сигнал начала работ, который задерживается в моделях работ на время, пропорциональное их продолжительности. Задержка сигнала окончания конечного события пропорциональна продолжительности критического пути. Кроме характеристик сети, указанных выше, «АСОР-2» позволяет определить конфигурацию путей критической зоны, соответствующих заданному коэфф. напряженности, положение фронта работ на заданный момент времени, календарные сроки начала и окончания работ с учетом особенностей существующего календаря и визуальную индикацию дерева максимальных путей в графике с корнем в начальном событии. Максимальное число работ в графике — 400 (в т. ч. фиктивных работ — 160), максимальное число событий — 160.

Разрешающая способность по отношению к равнокритическим путям и их отрезкам не ниже 1% максимальной длительности одной

работы. Погрешность получения характеристик сети, приведенная к шкале машины, не более — 0,5%. Ввод исходных данных осуществляется с перфоленты или пульта управления. Вывод результатов — на печатающую машину, цифровые индикаторы и световую мнемосхему.

Благодаря цифровому способу представления информации «АСОР-2» перспективна в отношении включения в комплексы с цифровыми вычислительными машинами. Развитие специализированных вычислительных машин для моделирования задач сетевого планирования и управления (см. *Сетевые методы планирования и управления*) идет по пути создания цифровых моделей, разработки эффективных систем отображения информации и агрегатирования таких моделей с универсальными вычислительными машинами.

Лит.: Васильев В. В., Клепикова А. Н., Тимошенко А. Г. Решение задач оптимального планирования на электронных моделях. К., 1966 [библиогр. с. 161—164]; Васильев В. В. [и др.]. Специализированная цифро-аналоговая вычислительная машина АСОП-2 для моделирования задач сетевого планирования и управления. «Механизация и автоматизация управления», 1968, № 4.

В. В. Васильев.

**АССЕМБЛЕР** — общепринятое название транслятора с автокода. А. переводит исходную программу, написанную на автокоде, в перемещаемую программу на языке машинном. Поскольку А. осуществляет трансляцию на язык загрузчика, при загрузке программы необходима настройка условных адресов, т. е. адресов, значения которых зависят от расположения данной программы в памяти ЦВМ и от ее связей с другими независимо транслируемыми программами.

В простейшем случае А. переводит одно предложение исходной программы в один объект (команду, константу) модуля загрузки (т. н. трансляция «один в один»). При этом взаимное расположение объектов в модуле загрузки и, в конечном итоге, в памяти машины определяется порядком предложений в исходной программе на автокоде и полностью зависит от программиста. А. выполняет и вспомогательные функции, такие, как подготовка к печати документов требуемой формы, регистрация связей данной программы с другими программами и т. д. Для этой цели в автокодах предусматриваются команды А., которые не порождают объектов в рабочей программе и предназначены только для указания вспомогательных действий А.

Трансляция обычно требует двух просмотров исходной программы: при первом просмотре осуществляется памяти распределение и присвоение значений символическим именам; при втором — формируется рабочая программа в виде модуля загрузки. В процессе трансляции А. проводит полный синтаксический контроль исходной программы (см. *Синтаксический анализ программ*), обеспечивая при этом достаточно точную диагностику ошибок по месту и по характеру.

Расширение возможностей автокодов достигается за счет использования макрокоманд,

строющихся по правилам, близким к правилам написания команд автокода, но описывающих более сложные ф-ции, для реализации которых требуется группа обычных команд. В этом случае перед трансляцией производится замена макрокоманд макрорасширениями — последовательностями команд на базовом языке в соответствии с макроопределениями. В последних задается прототип макрокоманды со структурой списка параметров и процедура генерирования макрорасширения. Транслятор, выполняющий ф-ции макрогенератора и А., наз. **макроассемблером**. При трансляции с языков высокого уровня А. нередко используется для выполнения завершающей фазы трансляции. Ю. М. Баяковский.

**АССОЦИАТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ** — один из составных элементов *перцептрона*.

**АСТАТИЗМ  $n$ -ПОРЯДКА** — свойство автоматической системы полностью устранять установившуюся ошибку при изменении внешнего

воздействия по закону:  $f(t) = \sum_{i=0}^{i=n-1} f_i t^i$  при

$t \rightarrow \infty$ . Необходимое и достаточное условие А.  $n$ -п. для линейных стационарных систем заключается в том, чтобы *передаточная функция* замкнутой системы по ошибке  $W_e(p)$  содержала нуль  $n$ -кратности, т. е.  $W_e(p) = p^n W_{e0}(p)$ , причем  $\lim_{p \rightarrow 0} W_{e0}(p) \neq 0$ . Соответствующее условие для дискретных систем имеет вид:  $W_e^*(z) = (z-1)^n W_{e0}^*(z)$ ;

$(\lim_{z \rightarrow 1} W_{e0}^*(z) \neq 0)$ . Выполнение этого условия может быть достигнуто двумя разными спосо-

бами в зависимости от наличия или отсутствия в системе связей по заданию (возмущению). При отсутствии связей по заданию выполнение этих условий возможно при наличии в замкнутом контуре  $n$  интеграторов. Тогда передаточная функция разомкнутой системы будет иметь

вид для непрерывных систем:  $W_{\text{раз}}(p) = \frac{1}{p^n} W_1(p)$ , причем  $\lim_{p \rightarrow 0} W_1(p) \neq 0$ , и для

дискретных систем:  $W_{\text{раз}}^*(z) = \frac{1}{(z-1)^n} W_1^*(z)$ ,

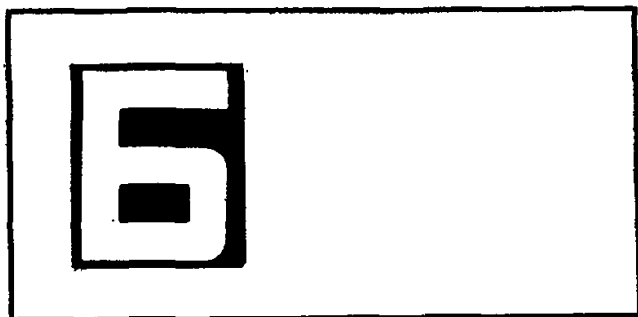
причем  $\lim_{z \rightarrow 1} W_1^*(z) \neq 0$ . При наличии связей

по заданию (точнее при комбинировании принципов регулирования по заданию и по отклонению) А.  $n$ -п. может быть достигнут за счет надлежащего выбора передаточной функции корректирующей связи по заданию  $W_K(p)$ .

Если передаточная функция разомкнутой системы  $W_{\text{раз}}(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ , то А.  $n$ -п. имеет место при выполнении условия:

$$B(p)(1 + W_K(p)) = G(p) \cdot p^n$$

(причем  $\lim_{p \rightarrow 0} B(p) \neq 0$ ;  $\lim_{p \rightarrow 0} G(p) \neq 0$ ). Соответствующее условие для дискретных систем имеет вид:  $B^*(z)(1 + W_K^*(z)) = G^*(z)(z-1)^n$ ;  $(\lim_{z \rightarrow 1} B^*(z) \neq 0$ ;  $\lim_{z \rightarrow 1} G^*(z) \neq 0)$ . В системах стабилизации рассматривают астатизм относительно возмущения, в следящих системах — относительно задания. А. А. Тунник.



**БАЗА ДАННЫХ** — совокупность сведений, хранимых в запоминающих устройствах вычислительной машины. Эта совокупность выступает в качестве исходных данных задач, решаемых в процессе функционирования автоматизированных систем управления, систем обработки данных, информационных и вычислительных систем.

Главной целью создания Б. д. является обеспечение (в рамках автоматизированной системы) функций обновления, ведения и пополнения хранимой информации, а также справочной функции. Б. д. в этих системах является одной из осн. структурных компонент и предназначена для информационного обеспечения задач, решаемых в условиях коллективного пользования хранимой информацией.

Осн. характерным свойством Б. д. является ее независимость от рабочих программ, с которыми она взаимодействует. Эта независимость проявляется в возможности изменения содержания, объема и организации хранимой информации без последующей модификации рабочих программ, пользующихся этой информацией. Для обеспечения независимости Б. д. необходимо хранить описание накопленной информации вместе с самой информацией, обеспечить возможность коллективного доступа к любой части хранимых сведений, а также строить рабочие программы таким образом, чтобы при их выполнении могла осуществляться настройка в соответствии с текущим состоянием Б. д.

Организация Б. д. может быть весьма сложной. В общем случае ее структура представляет собой совокупность взаимосвязанных массивов (файлов), имеющих различные внутреннюю структуру и вид представления информации. Доступ к отдельным массивам или элементам данных осуществляется при помощи имен и идентификаторов, присваиваемых пользователям или операторами системы во время определения Б. д.

Управление (администрирование) Б. д. осуществляется специальным персоналом и может быть автоматизировано (в зависимости от имеющихся средств матем. обеспечения и возможностей операционной системы). В функции администрирования Б. д. входит определение прав абонентов, защита секретности и целостности хранимой информации, поддержание Б. д. в рабочем состоянии, регулирование обращений к Б. д., установление параметров эффективной (оптимальной) организации мас-

сивов и Б. д. в целом, учет и протоколирование работы с Б. д. и др.

Автоматизация управления Б. д. предполагает реализацию доступа к хранимой информации на основе системы паролей и приоритетов, автоматическое ведение каталога данных и описание их организации, выполнение ассоциативного поиска в массивах Б. д. по запросам и автоматическое обновление и изменение организации информации для всей Б. д. или отдельных ее частей.

Операционные системы ЭВМ 3-го поколения обеспечивают многие из указанных выше функций по реализации и управлению Б. д. Расширение состава этих функций обеспечивается с помощью т. н. информационных систем общего назначения или систем управления Б. д. — проблемно-ориентированным матем. обеспечением, сопрягаемым с операционной системой базовой ЭВМ. Б. д. может строиться с использованием различных типов запоминающих устройств, хотя обычно применяются запоминающие устройства с произвольным доступом.

В. Н. Афанасьев.

**БАЙЕСА ФОРМУЛА**, формула вероятностей гипотез — формула элементарной вероятностей теории, позволяющая вычислять апостериорные (послеопытные) вероятности гипотез о наступлении некоторого события, если известно, что это событие осуществилось. Пусть событие  $A$  может наступить только совместно с одним из последовательности взаимно исключающих друг друга событий  $B_1, B_2, \dots$ , причем известны вероятности  $p(B_k)$  всех этих событий и условные вероятности  $p(A/B_k)$  события  $A$  при условии, что  $B_k$  осуществилось; тогда условные вероятности

$$p(B_k/A) = \frac{p(B_k) p(A/B_k)}{\sum_i p(B_i) p(A/B_i)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Н. П. Слободенюк.

**БАЙЕСОВСКИЙ МЕТОД** — метод принятия решения о ненаблюдаемых характеристиках, основанный на знании априорного распределения вероятностей этих характеристик и на условном распределении результатов эксперимента при заданных значениях ненаблюдаемых характеристик. Б. м. назван по имени англ. математика 18 в. Т. Байеса, предложившего Байесову формулу, связывающую апостериорные и априорные вероятности:

$$p(B_k/A) = \frac{p(B_k) p(A/B_k)}{\sum_i p(B_i) p(A/B_i)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

где  $B_k$  — попарно несовместимые события, объединение которых включает событие  $A$ .

Б. м. широко используют в теории статистических решений, в изр. теории, в теории распознавания образов. Обычно Б. м. заключается в выборе наиболее вероятных значений характеристик. В распознавании образов этому соответствует выбор наиболее вероятного ответа распознавания (см. Ответ распознающей системы), что обеспечивает миним. вероят-



ность ошибочных решений. В общем случае Б. м. состоит в выборе решения, отвечающего минимуму среднего риска решений (см. *Байесовское решающее правило*). Пусть  $\{x\}$  — наблюдаемые реализации рассматриваемого случайного события или величины;  $d_i, i = 1, 2, \dots, n$  — возможные решения о значениях искомых характеристик этого события (обычно решение наз. статистической гипотезой). При использовании Б. м. должны быть заданы т. н. априорные сведения: безусловные вероятности гипотез  $p(d_i)$  и условные вероятности (плотности вероятностей) реализаций  $p(x|d_i)$  при каждой из гипотез  $d_i$ . От этих априорных сведений легко перейти к условным вероятностям гипотез при наблюдаемой реализации  $p(d_i|x)$ , называемым апостериорными вероятностями. Наиболее вероятное решение в Б. м. определяется макс. апостериорной вероятностью. Если априорные вероятности гипотез  $p(d_i)$  неизвестны, может быть использован т. н. эмпирический Б. м., в котором эти вероятности статистически оцениваются по заданной выборке реализаций  $\{x_t, t = 1, \dots, N\}$ .

Г. Л. Гимельфарб.

**БАЙЕСОВСКОЕ ОБУЧЕНИЕ** — процесс изменения решающего правила, реализуемого распознающей системой, в результате которого минимизируется средний условный риск распознавания при данной обучающей выборке. Основное отличие Б. о. от других видов обучения состоит в том, что при Б. о. не производят оценку параметров распределений, а находят их апостериорные распределения при данной обучающей выборке. См. *Обучение распознаванию образов*.

**БАЙЕСОВСКОЕ РЕШАЮЩЕЕ ПРАВИЛО** — статистическое решающее правило, обеспечивающее минимум среднего риска решения. Под средним риском понимается следующее. Имеются объекты или ситуации, определенные параметры которых нас интересуют (напр., названия классов, к которым эти объекты принадлежат). Информация об объектах задается в форме наборов признаков  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , получаемых путем прямых измерений. Предполагается, что при каждом возможном значении искомого параметра  $\gamma$  наборы признаков  $x$  представляют собой реализации случайной величины с известным условным распределением вероятностей  $p(x|\gamma)$ . Предполагается также, что известно априорное распределение вероятностей  $\xi(\gamma)$  искомых параметров. Для определения этих параметров можно указать некоторое решающее правило  $\delta$ , которое отображает пространство признаков  $X$  на множество решений  $\Lambda$ , т. е. указывает для каждого объекта, описываемого набором признаков  $x \in X$ , решение  $\lambda = \delta(x) \in \Lambda$ . Это решение оценивает истинное значение искомого параметра  $\gamma \in \Gamma$  данного объекта. Мн-во решений  $\Lambda$  в общем случае может не быть тождественно (точнее, изоморфно) мн-ву  $\Gamma$  значений искомых параметров. Задается ф-ция потерь  $L(\gamma, \lambda)$ , которая устанавливает, какой количественный

убыток приносит решение  $\lambda$  в случае, когда действительное значение параметра равно  $\gamma$ . Средний риск  $r(\delta, \xi)$  решения определяется как матем. ожидание потерь при использовании данного решающего правила  $\delta$ :  $r(\delta, \xi) = \sum_{\gamma} \sum_{x} L(\gamma, \lambda = \delta(x)) p(x|\gamma) \xi(\gamma)$ , здесь

знаком  $\sum$  обозначено суммирование дискретных или интегрирование по вероятностной мере непрерывных величин. Б. р. п.  $\delta^*$  определено условием:  $r(\delta^*, \xi) \leq r(\delta, \xi)$  при всех возможных правилах  $\delta$ . Для каждого набора признаков  $x$  Б. р. п. указывает такое решение  $\lambda = \delta^*(x)$ , при котором средняя условная потеря  $\sum_{\gamma} L(\gamma, \lambda) p(\gamma|x)$  минимальна. Пример

Б. р. п. — байесовский алгоритм распознавания «с отказами». Пусть  $X$  — любое пространство признаков, для которого заданы распределения  $p(x|\gamma)$  и  $\xi(\gamma)$ . Искомый параметр  $\gamma$  — это номер класса распознаваемого объекта;  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ . Множество решений (т. е. номеров классов, указываемых алгоритмом) отличается от  $\Gamma$  и имеет вид:  $\Lambda = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ , где  $\gamma_0$  — дополнительный класс неразборчивых объектов (*отказов от распознавания*). Ф-ция потерь задается в следующем виде:

$L(\gamma, \lambda) = 0$  при  $\lambda = \gamma$ ;  $L(\gamma, \lambda) = \varepsilon$  при  $\lambda = \gamma_0$  и  $L(\gamma, \lambda) = 1$  при  $\lambda \neq \gamma, \lambda \neq \gamma_0$  (потеря при отказе принимается меньшей, чем при ошибке:  $0 < \varepsilon < 1$ ). При указанных условиях байесов алгоритм сводится к следующему:  $\delta^*(x) = \gamma_k$ , если  $p(\gamma_k|x) = \max_{t=1, \dots, N} p(\gamma_t|x) > 1 - \varepsilon$ , и  $\delta^*(x) = \gamma_0$  в противном случае. Б. р. п. используется в теории статистич. решений, в распознавании образов, в игре теории (байесова стратегия), в оптимального управления теории и пр.

Важным частным случаем использования Б. р. п. в распознавании образов является байесовское обучение. При обучении, кроме искомого параметра — номера класса  $\gamma$ , известен и ряд иных параметров  $\beta$ , характеризующих рассматриваемые объекты (иногда такие добавочные неизвестные параметры наз. мешающими). Предполагается, что значения мешающих параметров постоянны для совокупности всех рассматриваемых объектов в каждой конкретной задаче обучения и известно априорное распределение вероятностей этих значений  $\eta(\beta)$  для ансамбля однотипных задач обучения. Задача байесовского обучения может быть сформулирована по-разному. Напр., ее можно поставить как задачу построения Б. р. п., указывающего значения параметров  $\beta$  или значения определенных ф-ций от этих параметров по заданной обучающей выборке. В обучающую выборку  $u = \{(x_{(1)}, \gamma_{(1)}), \dots, (x_{(m)}, \gamma_{(m)})\}$  входят наборы признаков  $x_{(q)} \in X$  объектов, для которых указаны их классы  $\gamma_{(q)} \in \Gamma$  (при обучении с идеальным учителем указываются действительные значения  $\gamma_{(q)}$ , с реальным — ответы  $\lambda_{(q)}$ ).

некоторого вспомогательного решающего правила, которые являются оценками действительных значений  $\gamma_{(q)}$  и в принципе могут и не совпадать с ними). Полученные при обучении оценки значений мешающих параметров или ф-ций от этих параметров подставляются затем в качестве значений самых параметров или их ф-ций при построении байесовского алгоритма распознавания (Б. р. п., указывающего искомые классы объектов). Естественно потребовать, чтобы оценки параметров, полученные при обучении, позволяли осуществлять распознавание возможно лучшим способом. Поэтому в наиболее общем случае байесовское обучение сразу формулируется как задача построения байесовского алгоритма распознавания в присутствии мешающих параметров и заключается в минимизации среднего условного *риска распознавания* объектов при заданной обучающей выборке. Предполагается, что известны следующие статистические характеристики: условное совместное распределение вероятностей элементов обучающей выборки  $(p(u|\beta) = p(x_{(1)}, \gamma_{(1)}, x_{(2)}, \gamma_{(2)}, \dots, x_{(m)}, \gamma_{(m)}|\beta))$  и наборов признаков распознаваемых объектов  $p(x|u, \beta, \gamma)$ . Средний риск решений  $\lambda = \delta(x, u)$ , принимаемых алгоритмом распознавания для наборов признаков  $x$ , когда задана обучающая выборка  $u$ , задается как

$$r(\delta, \xi) = \sum_{x \in U} \sum_{\gamma} L(\gamma, \lambda = \delta(x, u)) \times \\ \times p(x, u|\gamma) \xi(\gamma),$$

где  $U$  — мн-во обучающих выборок, а условное совместное распределение вероятностей  $p(x, u|\gamma)$  элементов обучающей выборки и набора признаков распознаваемого объекта получается по известным статистич. характеристикам:  $p(x, u|\gamma) = \sum_B p(x|u, \beta, \gamma) p(u|\beta) \eta(\beta)$ ; здесь  $B$  — мн-во значений мешающих параметров. Обычно вводятся следующие упрощающие предположения: 1) элементы обучающей выборки статистически

независимы  $p(u|\beta) = \prod_{q=1}^m p(x_{(q)}, \gamma_{(q)}|\beta)$  и

2) при известных значениях мешающих параметров наборы признаков распознаваемых объектов статистически не зависят от обучающей выборки:  $p(x|u, \beta, \gamma) = p(x|\beta, \gamma)$ . При этом  $p(x, u|\gamma) = \sum_B p(x|\beta, \gamma) p(u|\beta) \eta(\beta)$ , и для приведенного выше примера подобное байесовское обучение сводится к замене условных вероятностей классов  $p(\gamma|x)$  оценками  $\hat{p}(\gamma|x) = \sum_B p(\gamma|x, \beta) p(\beta|u)$ , представляющими собой условные математические

ожидания вероятностей  $p(\gamma|x, \beta)$ , которые являются ф-циями от мешающих параметров.  
Г. Л. Гимельфарб.

**БАЙТ** (англ. byte). — единица количества информации, представляющая собой группу из соседних двоичных разрядов (обычно из восьми, иногда из шести разрядов), которой *цифровая вычислительная машина* может оперировать как одним целым при передаче, хранении и обработке данных (информации). Более крупные единицы информации — слова; они обычно кратны по длине Б., и это значительно упрощает согласование процессов обработки информации в ЦВМ. Б. используются для представления букв и спец. символов (занимающих обычно весь Б.) или десятичных цифр (размещаемых обычно по две цифры в Б.). 1 Б. = 8 бит. См. *Информации количество*.

**БАЛАНС МЕЖОТРАСЛЕВОЙ** — система показателей, отражающих производство и распределение общественного продукта в отраслевом разрезе, межотраслевые производственные связи, использование материальных и трудовых ресурсов, создание и распределение национального дохода. Б. м. является *моделью математической нар. х-ва*, которую описывают системой ур-ний, характеризующих производство и распределение продукции:

$$X = AX + Y, \quad (1)$$

где  $X$  — вектор валового выпуска;  $Y$  — вектор конечного выпуска;  $A$  — матрица коэфф. прямых затрат. Каждая компонента векторов  $X$  и  $Y$  означает соответственно валовый и конечный выпуск по отрасли, а каждый коэфф.  $a_{ij}$  матрицы  $A$  показывает то к-во продукции отрасли  $i$ , которое необходимо для производства единицы валовой продукции в  $j$ -ой отрасли. Модель баланса (1) при заданных значениях компонентов вектора  $Y$  и коэфф. матрицы  $A$  позволит находить сбалансированные объемы производства по всем отраслям нар. х-ва. Основу Б. м. составляет совокупность всех отраслей материального производства. Каждая отрасль отражается в балансе дважды: как производящая и как потребляющая. Отрасли как производителю продукции соответствует определенная строка, а отрасли как потребителю продукции — определенный столбец. В строках Б. м. отражается распределение объема продукции каждой отрасли материального производства, а в столбцах — структура материальных затрат и чистой продукции каждой отрасли.

На основе модели Б. м. можно рассчитать коэфф. полных затрат. Последние выражают расход одного продукта на производство единицы конечного выпуска другого продукта не только непосредственно в виде прямых затрат, но и косвенно, через другие продукты, участвующие в производстве. В последнее время в нар.-хоз. планировании используются динамические межотраслевые модели, описываемые системой ур-ний вида:

$$X_t = A_t X_t + B_t \Delta X_t + Y_t^*, \quad (2)$$

где  $Y_t^*$  — вектор конечной продукции, используемой на потребление;  $B_t$  — матрица коэфф.

капиталоемкости в  $t$ -ом году;  $\Delta X_t$  — прирост валовой продукции. Полная система Б. м. в рамках единой экономико-матем. модели объединяет материальные балансы, баланс трудовых ресурсов, баланс национального дохода, баланс совокупного общественного продукта, финансовый баланс денежных доходов и расходов населения.

Лит.: Гребцов Г. И. [и др.]. Основы разработки межотраслевого баланса. М., 1962; Дудкин Л. М. Оптимальный материальный баланс народного хозяйства. М., 1966 [библиогр. с. 167—182]; Коссов В. В. Межотраслевой баланс. М., 1966 [библиогр. с. 218—221]; Экономико-математические модели. М., 1969. Ю. С. Архангельский, И. И. Коваленко, Л. И. Сабирова.

**БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ** — экономико-математические модели, характеризующие равенство (баланс) между поступлением и распределением некоторого ресурса (продукция, трудовые ресурсы, мощности). Принципиальная схема Б. м. имеет вид (на примере материальных балансов):

$$S_i^r(t) + \sum_k x_i^{kr}(t) + x_i^r(t) = \sum_j a_{ij}^r(t) x_j(t) + y_i^r(t) + P_i^r(t) + \sum_k x_i^{rk}(t) + S_i^r(t+1),$$

где  $i, j$  — индексы продукции;  $t$  — индекс периода (года, квартала и т. д.);  $k, r$  — индекс района (республики, эконом. района, области, города, предприятия);  $S_i^r(t)$ ,  $S_i^r(t+1)$  — остатки продукции на начало (конец) периода  $t$ ;  $x_i^{kr}(t)$  — объем перевозки из района  $r$  в  $k$ ;  $x_i^r(t)$  — объем производства;  $a_{ij}^r(t)$  — норма расхода продукции вида  $i$  на производство единицы продукции  $j$ ;  $y_i^r(t)$  — потребности населения в предметах потребления;  $P_i^r(t)$  — прочие потребности (на капитальное строительство, ремонтно-эксплуатационные нужды, прирост резервов продукции и т. п.). Аналогично строят балансы мощностей, трудовых ресурсов, разведанных полезных ископаемых. Б. м. предназначены для изучения сложившихся темпов и пропорций развития нар. х-ва и разработки взаимоувязанных, внутренне согласованных планов на различных уровнях управления. Комплекс Б. м. планирования общественного производства включает взаимосвязанные и взаимодействующие модели предприятий, отраслей нар. х-ва. Результаты расчетов по Б. м. предприятий используют для составления моделей отраслей, а результаты расчетов отраслевых моделей — для составления Б. м. на уровне нар. х-ва.

Лит.: Коссов В. В. Межотраслевой баланс. М., 1966 [библиогр. с. 218—221]; Моисеев Н. Н. Математика — управление — экономика. М., 1970. Ю. С. Архангельский, Л. И. Сабирова, Т. И. Приходько.

**БАНК ДАННЫХ** — функционально-организационная компонента в автоматизированных системах управления и информационно-вычислительных системах, осуществляющая централизованное информационное обеспечение коллектива пользователей или совокупности решаемых в системе задач.

Б. д. рассматривают как *информационно-справочную систему*, осн. назначение которой состоит в накоплении и поддержании в рабочем состоянии совокупности сведений, составляющих и н ф о р м а ц и о н н у ю б а з у всей автоматизированной системы или некоторого набора решаемых в ней задач; в выдаче требуемых задач или пользователем данных; в обеспечении коллективного доступа к хранимой информации, а также в обеспечении необходимого управления использованием сведений, содержащихся в информационной базе.

Осн. принципы реализации Б. д. учитывают специфику Б. д. как информационно-справочной системы. Эта специфика определяется характером хранимой информации (которая обычно состоит из массивов сведений фактического характера), некоторой ограниченностью требований на реализацию справочной функции и необходимостью осуществлять регулирование доступа к информации и защиту ее целостности и секретности при обслуживании разнородного контингента пользователей.

Эффективная организация функционирования Б. д. предполагает осуществление доступа абонентов к информации, автоматическое ведение каталога хранимых данных и параметров их текущей организации, анализ собственно процесса функционирования Б. д., а также организацию информационной базы в соответствии с изменениями параметров потока требований на выдачу информации.

Требования к организации и хранению информации в Б. д. вполне соответствуют требованиям, предъявляемым к информационной базе и базе данных. Определение особенности в реализации Б. д. возникает в связи с тем, что Б. д. обычно не является автономной частью в составе автоматизированной системы. Автоматизация осн. функций по обработке, поиску и выдаче информации, как и управление Б. д., в большинстве случаев осуществляется с помощью спец. матем. обеспечения, сопрягаемого с операционной системой базовой ЭВМ. В последнее время Б. д. реализуют часто на основе информационных систем общего назначения, входящих в состав операционных систем многих ЭВМ 3-го поколения.

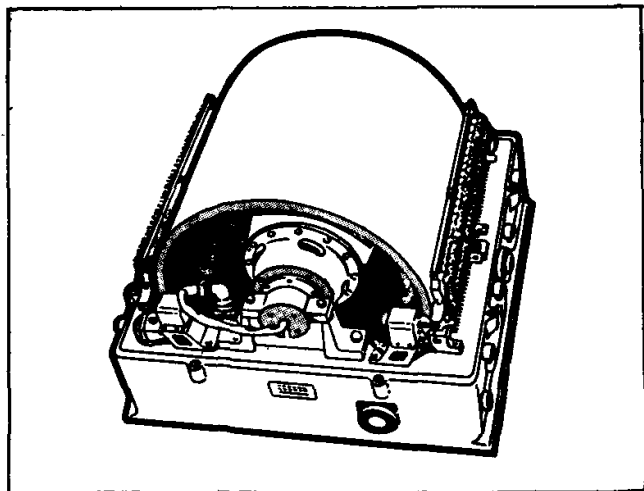
Использование Б. д. в АСУ является следствием комплексирования и интеграции функций управления и обработки применения принципов единства информационной базы в построении системы, автоматического ведения массивов и разового ввода информации в систему.

В. Н. Афанасьев.

**БАРАБАН МАГНИТНЫЙ** — цилиндр, покрытый слоем магнитотвердого вещества, на котором можно записывать дискретную информацию путем выборочного намагничивания участков поверхности. Вблизи поверхности Б. м. (рис. ) укреплены магн. головки записи — считывания, вызывающие при записи или обнаруживающие при считывании изменение магн. индукции ближайшего участка поверхности. Запись (намагничивание) осуществляется потоком рассеяния головки. Считывание обеспечивается наведением эдс в головке при

прохождении участка с остаточной намагниченностью, т. е. обнаруживается изменение индукции. Здесь считываемый сигнал зависит от скорости изменения индукции, пропорциональной скорости движения поверхности Б. м. Возможно считывание с неподвижной поверхности, напр., при шаговом движении, с использованием принципа магн. усилителя, явлений Холла или Керра.

Обычно головки неподвижны относительно оси Б. м., и каждая работает с дорожкой — кольцеобразным участком поверхности, про-



Барабан магнитный.

ходящим под головкой. Возможно обслуживание одной головкой группы дорожек Б. м. с помощью электро-, гидро- или пневмомеханических средств перемещения головки параллельно оси вращения. Такая конструкция снижает стоимость устройств с Б. м., но увеличивает время доступа к информации. Возможно обслуживание одной дорожки несколькими головками, распределенными по окружности, что уменьшает время доступа до нескольких мсек. Общее число дорожек на Б. м. — от нескольких единиц до нескольких сотен.

Ширина дорожки фактически меньше размера головки в направлении, параллельном оси вращения, и определяется геом. размерами и магн. характеристиками покрытия и головки. Эта ширина определяет т. н. поперечную плотность записи (до 10 дорожек на 1 мм). Для увеличения поперечной плотности записи головки собирают в несколько обоев, параллельных оси вращения, с соответствующим сдвигом. Характеристикой использования поверхности является также т. н. продольная плотность записи информации по направлению вращения. Она достигает 70 бит/мм и зависит не только от геом. размеров и магн. характеристик головки и покрытия, но и от способа формирования в обмотке головки последовательности импульсов тока и ограничивается рабочей частотой головки (1—2 МГц). С уменьшением зазора между головкой и Б. м. продольная плотность записи увеличивается. При неподвижных относительно оси вращения головках зазор составляет обычно не менее 20 мкм

(при жестких мех. требованиях к Б. м.). Применяют головки, «плавающие» на аэростатическом (наддуваемом) или аэродинамическом (увлекаемом) воздушном слое толщиной около 3 мкм. Используют также Б. м., «плавающий» в неподвижной обойме с головками.

Б. м. применяют в ЦВМ в составе запоминающих устройств внешних и как промежуточное ЗУ, а также в качестве дешевого циклического оперативного запоминающего устройства.

Серийные отечественные ЗУ на Б. м. НБ-11 имеют емкость 6,6 Мбит при ср. времени обращения 30 мсек, а самый большой Б. м. — UNIVAC Fastrand — 450 ÷ 900 Мбит при времени обращения 92 мсек.

Лит.: Каган Б. М., Ададько В. И., Пурэ Р. Р. Запоминающие устройства большой емкости. М., 1968 [библиогр. с. 314—317]; Макаручкин В. Г. Магнитная запись в вычислительной технике. М., 1968 [библиогр. с. 166—167].

А. А. Барабанов.

**БЕЛЛМАНА ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ** — основной принцип методов динамического программирования, утверждающий, что оптимальное поведение системы характеризуется тем свойством, что каковы бы ни были первоначальное состояние и решения до некоторого момента времени, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате принятых решений. В случае  $N$ -этапной задачи программирования динамического Б. п. о. выражается в виде рекуррентного соотношения

$$f_{k+1}(s) = \max_{u \in M} f_k(u(s)), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad f_0(s) = \varphi(s),$$

где  $f_k(s)$  — ф-ция, выражающая макс. доход за  $k$  шагов в зависимости от начального состояния  $s$ ;  $u$  — управляющий оператор перехода за один шаг, который выбирается из множества  $M$  допустимых управляющих операторов;  $\varphi(s)$  — заданная ф-ция дохода. На базе этого соотношения строятся численные методы динамического программирования. В задачах оптим. управления Б. п. о. выражается в виде нелинейного ур-ния в частных производных (см. Беллмана уравнение). См. также Оптимального управления теория.

Н. З. Шор.  
**БЕЛЛМАНА УРАВНЕНИЕ** — уравнение в частных производных первого порядка, полученное в результате применения метода программирования динамического для функции, выражающей в задачах оптим. управления оптимальное значение функционала в зависимости от начального состояния. Пусть движение управляемого объекта описывается векторным дифф. ур-нием:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad u \in U,$$

где  $x$  — вектор фазовых координат,  $U$  — мн-во управлений. Задан функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt.$$

Задача состоит в том, чтобы из всех допустимых управлений  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , переводящих начальную фазовую точку  $x$  в точку  $x_1$ , выбрать такое, которое придает функционалу  $I$  наименьшее возможное значение. Для решения этой задачи вводится ф-ция  $T(x)$ , выражающая зависимость оптим. значения функционала  $I$  от начального состояния  $x$ , определенная на множестве  $G$  тех точек фазового пространства, из которых осуществим переход в точку  $x_1$  за конечное время.

Пусть  $\omega(x) = -T(x)$ . Ф-ция  $\omega(x)$  в области  $G$  (за исключением особого подмножества меньшей размерности, чем размерность фазового пространства) удовлетворяет ур-нию

$$\max_{u \in U} (\hat{g}_\omega(x), f(x, u)) = f^0(x, u),$$

где  $\hat{g}_\omega(x)$  — градиент ф-ции  $\omega(x)$  в точке  $x$ . Это ур-ние и есть Б. у. Ур-ния, являющиеся модификацией Б. у., используются также для исследования *игр дифференциальных*. См. *Оптимального управления теория*. Н. З. Шор.

**БЕЛЫЙ ШУМ** — обобщенный случайный процесс вида

$$\xi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \xi(t) dt,$$

где  $u(t)$  — финитная ф-ция, а  $\xi(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $R(t, s) = \delta(t - s)$ ,  $\delta(t)$  — обобщенная ф-ция от  $t$ , определяется следующим образом. Для любых финитных ф-ций  $u_k(t)$ ,  $k = 1, 2$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - s) u_1(t) u_2(s) dt ds = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) u_2(t) dt. \end{aligned}$$

Широкое использование в практике разработки математ. моделей находит *гауссовский случайный процесс* типа Б. ш. Такой процесс может быть получен в результате дифференцирования (в обобщенном смысле) процесса броуновского движения. Этот процесс является стационарным (в широком смысле) случайным процессом со спектральной плотностью  $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$ ,  $-\infty < \lambda < \infty$  и абсолютно непрерывной спектральной функцией. Являясь матем. абстракцией, Б. ш. не может быть реализован в действительных условиях. Его применяют как удобную модель математическую в теор. исследованиях. Так, напр., шумы электронных ламп, атмосферные шумы, шумы моря, имеющие равномерный спектр в конечной полосе частот, могут быть достаточно хорошо аппроксимированы процессом типа Б. ш.

А. Н. Деменин.

**БЕРЖА ГРАФ** — граф без звеньев (ориентированный), без кратных петель и кратных дуг одного направления.

**БЕРНУЛЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** — распределение вероятностей случайной величины  $\xi$ , принимающей значения  $0, 1, \dots, n$  с вероятностями  $P_n(k) = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k \times (1 - p)^{n-k}$ . Числа  $n$  и  $p$  — параметры Б. р. Б. р. возникает в следующей часто встречающейся ситуации, называемой *схемой Бернулли*: производятся независимые испытания, в каждом из которых с одной и той же вероятностью  $p$  появляется событие  $Y$  — успех, и с вероятностью  $1 - p$  противоположное событие  $\bar{Y}$  — неудача. Пусть  $\xi$  — число успехов при  $n$  испытаниях в схеме Бернулли. Тогда  $\xi$  имеет Б. р. с параметрами  $n$  и  $p$ . Напр., число попаданий при  $n$  выстрелах имеет Б. р., если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна  $p$ . Б. р. наз. также *биномиальным распределением*. М. И. Ядренко.

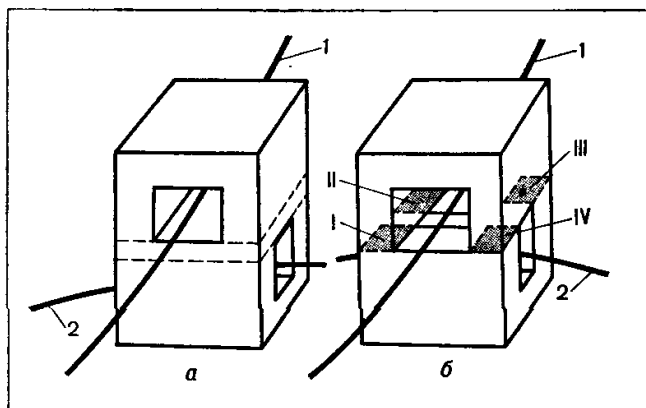
**«БЕРРАУЗ КОРПОРЕЙШЕН»** (Burroughs Corporation) — американская фирма, разрабатывающая и производящая конторское оборудование, средства оргтехники и вычислительные машины для коммерческих расчетов. Основана в 1886. Первую ЦВМ «B205» выпустила в 1954. В семействе «500», особенно в его последних моделях, развита концепция ЦВМ со структурой, системой адресации, форматом данных и списком инструкций, ориентированных на эффективную трансляцию программ, написанных на языках типа АЛГОЛ, ФОРТРАН и т. п. Развитие этой концепции продолжается в машинах семейства «700», выпускаемых с 1970. Семейство состоит из трех моделей, являющихся многопроцессорными *вычислительными системами* с виртуальной памятью. Самая большая модель семейства может иметь до 8 процессоров (центральных и периферийных) и до 5120 каналов ввода — вывода. В семействе имеется набор памятей с циклом 1,5; 1,2; 0,5 мксек; предназначены ЦВМ для решения статистических задач, задач линейной оптимизации и задач управления.

Лит.: Зейденберг В. К., Матвеев Н. А., Тароватова Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М., 1970; Sippl C. J. Computer dictionary and handbook. Indianapolis — New York, 1968.

Ю. П. Селиванов.

**БИАКС** — ферритовый элемент с разветвленным магнитопроводом, в котором магнитные потоки замыкаются вокруг двух отверстий со взаимно перпендикулярными непересекающимися осями. Первые образцы Б. имели форму прямоугольного параллелепипеда размером  $1,25 \times 1,25 \times 2,1$  мм с симметрично расположенными отверстиями квадратного сечения  $0,5 \times 0,5$  мм. Распространены и др. конструкции Б.: напр. для улучшения магн. характеристик, удобства проверки и монтажа отечественные Б. имеют несимметричную форму с отверстиями круглого сечения разного диаметра.

В основе действия Б. лежит взаимодействие ортогональных магн. потоков в общих участках магнитопровода. Ферритовая зона вокруг одного из отверстий, напр., верхнего (рис., а), используется для запоминания информации. Через это отверстие проходит проводник 1, по которому подаются двухполярные токи записи. Величина тока записи выбирается достаточной для полного перемагничивания зоны вокруг отверстия. Магн. потоки при записи единицы и нуля имеют противоположные направления. Проводник 1 используется также



Биакс: а — запоминающий; б — логический.

в качестве выходной обмотки. Под воздействием однополярных токов опроса, проходящих по проводнику 2, изменяется распределение магн. потоков в перемычке между отверстиями. При этом поток опроса увеличивается, а поток записи уменьшается, в результате чего в проводнике 1 индуцируется эдс считывания. Амплитуда сигнала считывания обычно составляет единицы мв. После прекращения тока опроса первоначальное распределение потоков восстанавливается, то есть записанная информация при опросе не разрушается.

Б. применяют в долговременных запоминающих устройствах с быстрой сменой информации и в буферных ЗУ с неразрушающим считыванием информации, где допускается сравнительно медленная запись и требуется большое быстродействие при считывании. Частота обращения при записи в ЗУ на Б. составляет  $200 \div 300$  кГц, а при считывании —  $2 \div 5$  мГц. Б. используются также для выполнения логич. ф-ций. В логич. Б. (рис., б) отсутствует перемычка между отверстиями. Общим участком магнитопровода для взаимодействующих ортогональных магн. потоков являются площадки I, II, III, IV. Быстродействие Б.-транзисторных логич. элементов в 2—3 раза выше быстродействия аналогичных феррит-транзисторных схем.

Лит.: Бардиж В. В. Магнитные элементы цифровых вычислительных машин. М., 1967 [библиогр. с. 438—451]. В. М. Корсунский.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ ПОИСК** — процесс составления и поиска документов научных, отвечающих на поставленный запрос. См. Поиск информации автоматический.

**БИБЛИОТЕКА СТАНДАРТНЫХ ПОДПРОГРАММ** — совокупность стандартных подпрограмм и система их использования. Является составной частью математического обеспечения ЦВМ. Стандартными подпрограммами (СП) обычно наз. самостоятельные программы или части программ, составленные на одном из языков программирования (ЯП) и удовлетворяющие некоторым критериям эффективности (точность вычислений, время исполнения, простота в использовании и др.) и определенным требованиям к их структуре, организации входов и выходов, перемещаемости в памяти машины и длине, использованию ячеек и регистров ЭВМ и т. д. Некоторые из названных требований к СП характерны для программ на языках машинно-ориентированных. Понятие «подпрограммы» существует в ряде ЯП (ФОРТРАН, ПЛ-1, автокоды на ЦВМ «Днепр-2» и «Минск-2» и др.).

Б. с. п. и СП имеют различную структуру в зависимости от ЯП. СП может включать обращения к другим СП. По назначению СП делятся на классы. Типичными классами СП являются: диагностика ЭВМ; ввод — вывод и внутренний обмен; отладочные и сервисные СП; вычислительная математика; статистический анализ и обработка данных; логика и символьные выкладки; исследование операций и моделирование; математическое программирование и методы управления; специальные СП пользователей ЭВМ. Б. с. п. на ЦВМ имеют следующую типичную структуру: каталог Б. с. п.; банк стандартных программ (подпрограммы, стандартные массивы, основные и типовые программы и др.); система организации работы Б. с. п.; система обслуживания и контроля Б. с. п.; инструктивно-методические материалы. По характеру использования и хранения Б. с. п. делятся на общие, личные, постоянные и временные. Для современных ЦВМ разработаны большие Б. с. п., содержащие сотни СП, на различных языках программирования.

Лит. см. к ст. Библиотечных подпрограмм метод. А. С. Стукало.

**БИБЛИОТЕЧНЫХ ПОДПРОГРАММ МЕТОД** — метод автоматизации программирования с помощью библиотек стандартных подпрограмм (БСП) и специальных систем их использования и обслуживания. Является эффективным методом программирования, позволяющим сокращать время и объем работ при подготовке данных, составлении и отладке программ. Элементарным способом использования стандартных подпрограмм (СП) является их вписывание в программы. Универсальными методами использования СП являются методы компиляции, интерпретации и их комбинации. Они реализуются на ЦВМ с помощью компилирующих и интерпретирующих систем. Основой таких систем являются компилирующая программа (КП) или интерпретирующая программа (ИП). Эти программы автоматически выполняют следующие функции: расшифровку (интерпретацию) обращений к СП; считывание СП с внешнего накопителя, распределение памяти



и размещение (загрузку) СП в ОЗУ; настройку СП (корректировку адресов, формирование команд) по их месту в ОЗУ; организацию связей между СП и программами (формирование входов — выходов и обращений к СП). ИП выполняет эти функции в процессе выполнения программы, а КП — до начала выполнения ее. Современные системы программирования на ЦВМ позволяют автоматически использовать БСП на одних языках программирования (ЯП) в программах на других ЯП. Системные подпрограммы обслуживания БСП предназначены для автоматического выполнения таких функций: открытие БСП на ЦВМ; контроль, включение, удаление и замена СП в БСП; вывод СП и их каталогов на печать или перфорацию; информационно-справочные функции и др. На современных ЭВМ системы использования БСП входят в состав *операционных систем*. Названные методы и системы организации БСП реализованы на всех современных отечественных и зарубежных ЦВМ.

Лит.: Библиотека стандартных программ. М., 1961; Глушков В. М. Об одном методе автоматизации программирования. «Проблемы кибернетики», 1959, в. 2; Крицкий Н. А., Миронов Г. А., Фролов Г. Д. Программирование. М., 1966 [библиогр. с. 596—599]. А. С. Стукало.

**БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ.** 1. Билинейной формой (б. ф.)  $A(x, y)$  в  $n$ -мерном векторном пространстве  $V_n$  над полем скаляров  $K$  наз. ф-ция от двух векторных аргументов  $x$  и  $y$  со значениями в поле скаляров  $K$ , линейная относительно  $x$  при каждом фиксированном значении  $y$  и линейная относительно  $y$  при каждом фиксированном значении  $x$ :

$$A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y);$$

$$A(\gamma x, y) = \gamma A(x, y);$$

$$A(x, y_1 + y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2);$$

$$A(x, \gamma y) = \gamma A(x, y),$$

где  $\gamma \in K$ . Если в базисе  $\{e\} = \{e_1, \dots, e_n\}$

пространства  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ ,  $y = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j$  и  $\alpha_{ij} =$

$= A(e_i, e_j)$ , то  $A(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \eta_j$ . Пример

б. ф. может служить скалярное произведение векторов  $x, y$ , которое в декартовом прямоугольном базисе имеет вид:  $xy = \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_n \eta_n$ . При переходе к новому базису матрица  $A = (\alpha_{ij})$  б. ф.  $A(x, y)$  преобразуется в матрицу  $A_1 = SAS^T$ , где  $S$  — матрица перехода, а  $S^T$  — транспонированная к  $S$  матрица. Б. ф. наз. симметричной, если  $A(x, y) = A(y, x)$ , и кососимметричной, если  $A(x, y) = -A(y, x)$  для любых  $x, y \in V_n$ . Каждая б. ф. представима в виде суммы симметричной и кососимметричной б. ф. Это представление однозначно. Если в б. ф.  $y^* = A(x, y)$  фиксировать  $y$ , то она становится линейным функционалом от  $x$  на  $V_n$  (см. *Линейная форма*). Если при этом  $y^*$  рассматривать как элемент сопряженного

пространства  $V_n^*$ , то с помощью б. ф.  $y^* = A(x, y)$  осуществляется линейное отображение пространства  $V_n$  в пространство  $V_n^*$ . При этом ранг отображения совпадает с размерностью образа, определяемой рангом матрицы  $A$ , т. е. рангом б. ф. Если этот ранг равен  $n$ , то б. ф.  $A(x, y)$  невырождена. Невырожденной б. ф. соответствует взаимно однозначное отображение  $V_n$  на  $V_n^*$ . Б. ф., заданная в бесконечномерном пространстве, наз. билинейным функционалом.

2. Квадратичной формой (к. ф.)  $A(x, x)$  наз. ф-ция от одного векторного аргумента  $x$ , которая может быть получена из б. ф.  $A(x, y)$  путем замены  $y$  на  $x$ . Так, напр., квадрат модуля вектора  $x$  можно рассматривать как скалярное произведение вектора  $x$  на самого себя:  $x^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ ; в результате получается к. ф. от вектора  $x$ , отнесенного к декартову прямоугольному базису. В общем случае к. ф. — произвольный однородный многочлен 2-й степени от  $n$  переменных:  $A(x, x) =$

$$= \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \xi_j.$$

В матричной записи:

$$A(x, x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

или сокращенно:

$$A(x, x) = x^T A x,$$

где  $x$  — вектор-столбец, а « $T$ » — знак транспонирования. К. ф. представляют и с помощью скалярного произведения вектора  $x$  и  $Ax$ :  $A(x, x) = (x, Ax)$ ;  $Ax$  получен из вектора  $x$  путем применения к нему оператора линейного с матрицей  $A = (\alpha_{ij})$ . Различные б. ф. могут породить одну и ту же к. ф., в частности, все кососимметричные б. ф. порождают нулевую к. ф. Поэтому для перехода от б. ф.  $A(x, y)$  к к. ф.  $A(x, x)$  рассматривают только симметричную часть б. ф. Эту симметричную часть наз. полярной формой относительно к. ф. Симметричную матрицу полярной формы наз. матрицей к. ф. Если она вещественна (комплексна), то и форму  $A(x, x)$  наз. вещественной (комплексной). Рангом к. ф. наз. ранг ее матрицы  $A$ . Если  $\det A = |A| \neq 0$ , то к. ф. наз. невырожденной. В противном случае она вырождена (или сингулярна). При изменении координатного базиса, матрица к. ф. изменяется так же, как и матрица полярной б. ф., а определитель преобразованной матрицы  $\det A_1 = \det A \cdot (\det S)^2$ , где  $\det S$  определяет матрицы перехода  $S$ . При любом невырожденном линейном преобразовании

$\xi_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} \eta_j$ , или в матричной форме  $x = ty$ ,  $t = (t_{ij})$ ,  $\det t \neq 0$ , к. ф.  $A(x, x)$  переходит

в новую к. ф.  $B(y, y) = y^T B y$ , где  $B = t^T A t$ . К. ф.  $A(x, x)$  и  $B(y, y)$  наз. эквивалентными (или конгруэнтными) и имеют одинаковые ранги.

Выбор базиса, в котором б. ф. и к. ф. имеют наиболее простой вид, наз. приведением их к каноническому виду. В пространстве  $V_n$  всегда существует базис  $\{f\} = \{f_1, \dots, f_n\}$  (канонический), в котором к. ф.  $A(x, x) = \lambda_1 \eta_1^2 + \dots + \lambda_n \eta_n^2$  для каждого вектора  $x = \sum_{i=1}^n \eta_i f_i$ . Это

и есть канонический вид к. ф. Канонический базис и канонический вид не определяются однозначно. Осн. методами приведения к. ф. к каноническому виду являются метод выделения полных квадратов Лагранжа и метод неопределенных коэфф. Якоби. Чтобы привести симметричную б. ф. к каноническому виду, нужно сначала привести к каноническому виду соответствующую ей к. ф., а затем снова перейти к билинейной (полярной) форме. Т. о., матрица симметричной б. ф. также всегда может быть приведена к диагональному виду. Если пространство  $V_n$  вещественно, то для к. ф. выполняется т. н. закон инерции: число положительных и число отрицательных коэфф. в каноническом виде формы  $A(x, x)$  является ее инвариантом (не зависит от выбора канонического базиса). Общее число членов в каноническом виде формы  $A(x, x)$  равно ее рангу и наз. индексом инерции. Число положительных членов наз. положительным индексом, а число отрицательных членов — отрицательным индексом. Разность между числами положительных и отрицательных членов наз. сигнатурой формы. Две к. ф. эквивалентны над полем вещественных чисел тогда и только тогда, если равны их ранги и сигнатуры. К. ф. наз. положительно определенной, если ее положительный индекс инерции равен размерности пространства. Такая к. ф. принимает во всех точках пространства (за исключением начала координат) положительные значения. Теорема инерции к. ф. переносится на породившие их б. ф. В евклидовом пространстве метод приведения к. ф.  $A(x, x)$  к каноническому виду путем ортогональных преобразований наз. отнесением ее к главным осям. Направлениям главных осей соответствуют экстремальные значения формы, которые для единичных векторов совпадают с ее каноническими коэффициентами и являются собственными значениями симметричного оператора  $A$  с матрицей  $A = (\alpha_{ij})$ . Поэтому они могут быть найдены из характеристического (векового) ур-ния, которое имеет вид:  $\det |\lambda E - A| = 0$ , где  $E$  — единичная матрица. Корни этого ур-ния всегда действительны. Б. ф. и к. ф. используются в теории программирования линейного.

Лит.: Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., 1968; Илюв Г. Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М., 1969; Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М., 1970. В. П. Белоусова.

БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — то же, что и *Бернулли распределение*.

БИОЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ — класс сложных систем, обладающих рядом специфических особенностей, характеризующих жизнь: способностью расти и размножаться, реагировать на внешние воздействия и изменяться. Жизнь в Б. с. обеспечивается обменом веществ, комплексом физ.-хим. процессов и хим. реакциями синтеза и разложения, имеющих сложный циклический характер и ферментативную природу. Б. с. являются открытыми системами, которые получают извне вещества и энергию, и создают из них сложные структуры, обладающие более низкой энтропией, чем окружающий мир. Б. с. могут существовать только благодаря развитию специальных подсистем управления, регулирующих ферментативные реакции обмена веществ и всю жизнедеятельность организмов. Они обладают способностью воспринимать и перерабатывать информацию, вырабатывать управляющие (эффекторного характера) сигналы.

Для описания Б. с. необходимы следующие понятия.

Элемент системы — наименьшая структурная единица, которая еще обладает чертами, выражающими гл. качество системы. Напр., для сложного организма таким элементом будет клетка, т. к. ей присущи важнейшие качества жизни. Для популяции элементом будет особь с ее качествами, характеризующими поведение. Элемент Б. с. имеет сложную структуру и ф-ции.

Сложность структуры системы определяется количеством и разнообразием элементов и подсистем, которые условно можно разделить на рабочие и управляющие. Степень сложности систем в основном определяется развитием отдельных элементов и подсистем, а также самой системы, сформированной в иерархические «этажи».

Связи — это энергет. и вещественные взаимодействия систем и элементов. Физ. связи определяются непосредственным видом и значимостью передаваемой энергии и вещества в балансе энергии элемента или системы-адресата. В информационных связях энергия используется лишь как носитель сигнала, управляющего деятельностью элемента или системы. Для физ. связи важен вид и напряжение передаваемой энергии, а для информационной — код, т. е. тип сигналов, напр., молекула РНК, нервный импульс, слово или вещь. Связи делятся на внешние и внутренние.

Сложность деятельности Б. с. определяется числом условно выделенных ее функций (программ) и сложностью последних, что выражается к-вом функциональных актов или циклов, числом участвующих в них элементов и подсистем и протяженностью их во времени. Сложность ф-ций определяется к-вом информации, перерабатываемой внутри системы, т. е. к-вом сигналов и сложностью моделей.

Сложные отношения, в которых находятся между собой Б. с., носят иерархиче-

ский характер. Степень независимости одной системы от другой, более крупной системы, прил. определяется ее жизнеспособностью при отключении от нее энерг. и информационных воздействий со стороны других подобных систем. С понятием сложных отношений связана степень упорядоченности системы или степень непротиворечивости деятельности ее подсистем и элементов, т. е. то, насколько частные ф-ции не мешают, не противодействуют друг другу. Повышение степени упорядоченности увеличивает устойчивость системы, но понижает способность к эволюции.

Более общим и широким понятием является **уровень организации**, под которым понимают тип структурных и функциональных отношений, определяющих в конечном счете жизнеспособность системы и ее способность к организации внеш. среды. Организация и упорядоченность системы не являются противоположными понятиями, т. к. при высоком уровне организации система может значительно меняться, а относительная гармония между частями при этом сохраняется. Это возможно благодаря развитию моделирующих способностей в сфере управления («уровень сознания»), позволяющих предусмотреть в моделях динамику изменения среды и самой системы для нахождения наилучших вариантов поведения.

**Эволюция**, т. е. усложнение системы и лучшая приспособленность к среде происходят по-разному: на уровне изменчивости элементов (напр., мутаций) или путем целенаправленного изменения организации в сфере управления (напр., воспитание человека или совершенствование общества).

Классификация Б. с. носит условный характер, поскольку нет единого критерия для подразделений и всегда существуют промежуточные формы. Принятая в зоологии и ботанике система классификации не пригодна для рассмотрения Б. с. «в информационном» плане. Более целесообразным является разделение Б. с. на пять иерархических уровней сложности: одноклеточные организмы, многоклеточные организмы, популяции, биогеоценоз и биосфера.

**Одноклеточные организмы** — это огромное число видов микроорганизмов (микроразмеры, вирусы, бактерии, простейшие). Величина их колеблется от 0,1 до 100 мкм. Подсистемы — органоиды клетки — можно разделить на рабочие и управляющие. Клетка имеет сложное строение, в котором полужесткий скелет (оболочка, перегородки, каналы) сочетается с вмонтированными в него органоидами. Ф-ции клетки — обмен веществ, рост и размножение, реакции на внеш. раздражители в виде изменения обмена и формы движения — в общем виде характерны для всего живого. Все рабочие и управляющие ф-ции клетки поддерживаются за счет хим. процессов ферментативной природы — начиная от способа получения энергии и вплоть до синтеза новых структур или расщепления существующих.

Механизм управления клеткой — это сочетание дискретных процессов синтеза молекул белков — ферментов, необходимых для осуществления той или иной ф-ции, и непрерывных процессов изменения их активности в ходе выполнения регулируемых реакций. ДНК представляет собой модель клетки — ее структуры и функций. В ней, как и в памяти машины, записаны исходные данные задачи и программа ее решения. В ДНК спец. триплетным кодом записана структура всех нужных белков. Это занимает, по-видимому, приблизительно треть ее «памяти». Остальная часть занята «программой считывания», представленной «генами-регуляторами», ответственными за синтез спец. веществ-репрессоров, которые включают синтез нужного фермента только при поступлении от рабочих подсистем сигнала о готовности. Сигнал этот поступает в виде другого активного вещества — регулятора. Таким образом осуществляется выполнение этапов циклических ф-ций (напр., рост и деление) под контролем *обратных связей*. Синтез белков-ферментов осуществляется по этапной программе с регулируемыми звеньями: ДНК (ядро) — РНК (рибосомы) — белки — их перемещение к месту действия.

Усиление или торможение активности уже синтезированных ферментов осуществляется начальными и конечными продуктами соответствующих хим. реакций. В этом состоит второй механизм регулирования. Следовательно, и в этом случае действуют обратные связи, т. е., регулирование клетки можно представить себе в виде сложной сети, состоящей из «рабочих» и «регулирующих» дискретных и непрерывных хим. реакций. Протекание их характеризуют пространственные координаты (фиксация на «скелете» клетки) и концентрационно-временные характеристики, обеспечивающие циклические ф-ции (выделение) и непрерывные процессы обмена.

Уровень организации одноклеточных по сравнению с другими Б. с. невысок, хотя и не сравним ни с одной тех. системой по к-ву перерабатываемой управляющей информации. Новые приспособительные (адаптивные) программы здесь не вырабатываются в течение жизненного цикла, а создаются лишь в результате мутаций.

Степень упорядоченности, видимо, высокая, т. к. «иерархия» — органоиды — имеют ограниченную «самостоятельность» в пределах регулирования действия ферментов, а структура жестко задана моделью в ДНК. Тем не менее изменения в отдельных генах ДНК — мутации, вызывающие небольшие отклонения в функционировании одного органоида, — переносятся другими генами за счет местного приспособления, т. е., имеется возможность для эволюции вида. Этому способствует быстрота размножения путем деления, позволяющая накапливать отдельные мелкие изменения в структуре и ф-циях. В результате этого возникают новые ф-ции.

**Многоклеточные организмы** проделали большой путь эволюции от губки до

человека. Они весьма разнообразны по размерам и сложности. Особенности структуры является дифференциация клеток (мышечные, эпителиальные, соединительнотканые, половые), выражающаяся в усилении и усложнении какой-то одной ф-ции клетки за счет ослабления или даже исчезновения др. ф-ции. Напр., сократительная ф-ция в мышечной клетке усиливается за счет исчезновения ф-ции переваривания. Дифференцированные клетки, объединенные в органы и системы (рабочие и управляющие), обеспечивают соответствующие ф-ции всего организма. К «рабочим системам» относятся: пищеварительная, выделительная, дыхательная, сердечно-сосудистая, двигательная, ретикуло-эндотелиальная. Управляющими системами являются эндокринная и нервная. Т. о., в многоклеточном организме можно выделить три иерархических уровня структурной сложности: клеточный, органный и системный. В пределах каждого уровня есть свои подсистемы, которые тоже составляют иерархию.

Информационные связи в организме осуществляются через центр. нервную систему кодом нервных импульсов — и через кровь — кодом гормонов. Передача энергии и веществ идет контактно, через кровь и посредством сокращения мышц внутр. органов.

Функции многоклеточного организма описываются понятиями рефлекса и инстинкта. Инстинкт объединяет иерархию и сочетание рефлексов по времени, направленных на сохранение вида. Это своеобразная программа, состоящая из множества подпрограмм. Можно выделить два инстинкта — продолжение рода, состоящий из полового и родительского, и самосохранения — из пищевого и защитного. В программе инстинкта можно выделить две стороны: в н е ш н ю деятельность — поведение, выражающееся у животных и человека сложным кодом двигательных актов, управляемых анимальной нервной системой и осуществляемых мышцами, и в н у т р е н н ю деятельность — выражающуюся в управляемом гомеостазисе, в сочетании ф-ций внутренних органов, управляемых эндокринной и вегетативной нервной системами и призванных энергетически обеспечить выполнение двигательных актов (см. *Регулирующие системы организма*).

Программы управления и регулирования, в общем виде «записаны» в ДНК, а подробно — в структуре формирующихся в процессе роста нервной и эндокринной систем, как взаимодействие наследственной информации (ДНК) с внеш. воздействиями. Взаимоотношения между внутренней и внешней частями программы (между поведением и гомеостазисом) таково: ведущей является, видимо, программа жизненного цикла (рост, созревание, размножение), заложенная в эндокринной системе. Стимулы от нее идут в анимальную нервную систему, настраивая и активизируя соответствующие сложные условные и безусловные рефлексы поведения — добывание пищи, поиск самки, воспитание детенышей. Сами рефлексы

осуществляются в зависимости от раздражителей, получаемых извне. Регулирование гомеостазиса «подстраивается» под двигательные акты поведения и в то же время является для них обратной связью, т. к. энергетически ограничивает их. Т. о., существует схема с четырьмя взаимосвязанными звеньями и обратными связями.

В информационном плане индивидуальное развитие организма можно представить себе таким образом: в ДНК заложены модели всех специализированных клеток с их тонкой структурой и функцией. ДНК содержит также программы считывания специфической информации для клеток, т. е. собственно программу роста и созревания целого организма и всех его частей. Эта программа состоит из этапов, представленных отдельными кусками ДНК, в которых периоды созревания и прогрессирующей специализации клеток перемежаются с размножением. В ДНК заложены также регуляторы этапов, которые включаются с периферии факторами-инициаторами, появляющимися из совокупности размножающихся клеток. Индивидуальное развитие организма на ранней стадии приблизительно повторяет историю эволюции видов, однако с пропусками и со смещениями во времени. Рост и созревание организма происходит вследствие взаимодействия генетической программы, заложенной в ДНК, с влиянием внешней среды и ответами на него растущего организма. Т. о. среда влияет на формирование растущего организма, хотя и в ограниченных пределах. Уровень организации многоклеточных организмов неодинаков у разных видов. Чем сложнее организм, тем выше организация и упорядоченность.

Старение и умирание также необходимы для эволюции. Пока не существует единого мнения о механизмах старения. Предполагают, что планомерное ослабление некоторых ф-ций запрограммировано в генах так же, как и рост, и развитие. Однако, действительный процесс старения, видимо, является сочетанием программы старения с накоплением помех — в виде ошибок в генетическом аппарате клеток и балластных хим. веществ внутри клеток и между ними. Помехи нарушают процессы регулирования, понижают способность противостоять болезням.

Б и о л о г и ч е с к и й вид не следует рассматривать как систему, поскольку он не имеет четких границ во времени и пространстве и выражается в других системах — популяциях. Тем не менее можно говорить о законах формирования и изменения видов, изучаемых в генетике. Основой генетики является учение о мутациях и рекомбинациях как источниках новой генетической информации. При этом нужно учитывать, что в процессе реализации мутантной модели ДНК в организме все значительные изменения в генах делают организм нежизнеспособным, поскольку нарушают координацию между его частями. Однако, умеренные изменения в модели возможны благодаря значительной гибкости генетической

программы формирования, допускающей развитие организма ценой напряжения частных приспособительных механизмов. Так возникает генотип с рядом новых признаков — мутант. Правда, такие индивиды чаще всего бесплодны или имеют пониженную плодовитость, что приводит к быстрому вытеснению их из популяции более плодовитыми «нормальными» конкурентами. Поэтому новые виды могут возникать только тогда, когда благоприятные мутации и рекомбинации сочетаются с изменением внеш. условий. Происходит естественный отбор.

Если популяция с новыми ценными наследственными данными уже сформировалась, то в дальнейшем она распространяется и «дорабатывается» путем последующих мутаций и рекомбинаций, усиливающих новый ценный признак и уменьшающих то внутреннее напряжение приспособления, ценой которого происходило формирование организма по измененной генетической модели ДНК.

**Популяцией** наз. совокупность особей одного вида, объединенных местом и временем проживания, что дает им возможность общаться между собой. Основу популяций составляет число и частота генотипов — т. е. вариантов наборов генов (рецессивных и доминантных), заложенных в ДНК всей совокупности особей. Это определяет возможности популяции в борьбе за существование и перспективы ее эволюции.

Элементом популяции является особь (фенотип) — животное или растение с его признаками — структурными и функциональными особенностями. Подсистемами популяции являются семьи и стаи. Структура популяции может иметь различную подвижность и ограниченную сложность, которые определяются разнообразием и характером связей, тесно зависящих от развития коры мозга. Связи внутри системы бывают физические (непосредственные физ. воздействия особей друг на друга посредством движения) и информационные (обмен сигналами — звуками, позами, мимикой), которые отражают прямые воздействия. Степень сложности и богатство сигналов определяются развитием коры мозга. Трудно выделить программы, относящиеся собственно к популяции. Она живет инстинктами особей как элементов системы. Только у высших животных с хорошо организованной стаей появляются свои законы сообщества, существенно влияющие на жизнь индивидуумов.

**Биогеоценоз** — система, состоящая из популяций отдельных биол. видов, объединенных общностью географ. и климат. условий. Элементами системы являются особи, подсистемами — семьи, стаи и популяции. Связи бывают прямые — физические и информационные (сигналы) и не прямые — через неживую природу и низшие биол. виды. Степень организации системы низкая и повышается только в результате воздействий человека. Упорядоченность ее тоже низкая. Система существует при постоянной межвидовой и, частично, внутривидовой борьбе.

**Биосфера** — это совокупность всего живого на планете.

О Б. с. известно пока очень немного. Чтобы повысить эффективность управления Б. с., необходимо углублять исследования не только традиционными методами, но и путем изучения количественных моделей, создаваемых *кибернетикой биологической*.

**БИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ** — математические способы, применяемые для изучения биологических объектов. Вследствие многообразия биологических систем, разнородности свойств, обусловленных физ. и хим. процессами в живом, разнообразием и сложностью взаимодействия со средой при биологических исследованиях находят применение многие методы классической и современной математики. Матем. методы используются прежде всего при обработке результатов экспериментального изучения биосистем. Методы *математической статистики* направлены на выделение в исследуемом процессе детерминированной и вероятностной составляющих, на изучение достоверности результатов наблюдения. Вычисление *математического ожидания* позволяет выявить среднее значение реакции биосистемы. По этим значениям, в том числе изменяющимся во времени, с помощью построения адекватного матем. описания изучается детерминированная составляющая реакции.

Вычисление *дисперсии* и определение доверительных интервалов дают возможность оценить возможные отклонения исследуемого процесса от среднего значения и косвенно судить о степени стабильности системы. Чем большее к-во данных однотипного опыта подвергается обработке, тем более точные результаты дает статистический анализ. При определении взаимосвязи во времени между предыдущими и последующими значениями одного и того же показателя работы биосистемы вычисляется коэфф. автокорреляции или автокорреляционной ф-ции, а для изучения взаимосвязи двух или большего числа показателей — коэфф. взаимной корреляции, или кросс-корреляционная ф-ция (см. *Корреляционная теория случайных процессов*). Весьма распространенным методом анализа данных биологических экспериментов является построение *гистограмм* распределения экспериментальных величин. Гистограммы могут использоваться для аппроксимации экспериментальных данных подходящим законом распределения (см. *Вероятностей теория*) и расчета уровня орг-ции биосистемы (см. *Биологических систем организации*). Параметры закона распределения часто могут служить показателями состояния или работы биосистемы. Расчет уровня орг-ции биосистем может служить основой для выбора адекватной матем. модели (см. *Биологических систем математическое моделирование*).

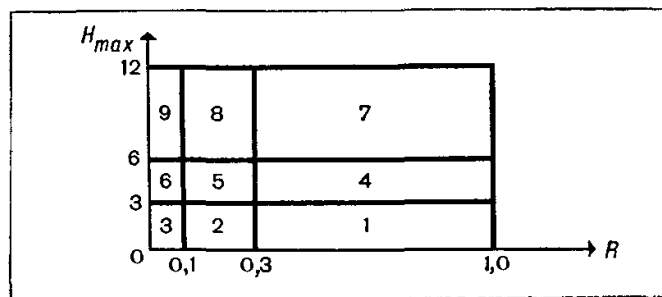
Обработка экспериментальных данных является основой дальнейшего изучения биосистем. Анализ закономерной взаимосвязи различных показателей в динамике и матем. исследование могут быть проведены на основе

применения методов теории дифф. ур-ний, автоматического управления теории и вариационных принципов механики. При большом к-ве показателей работы биосистемы и при изучении в основном логических соотношений возможно применение теории абстрактных автоматов, логики математической. Анализ структурных и функциональных особенностей биосистем можно провести с помощью графов теории и методов информации теории.

Исследование вероятностных свойств биосистем представляет весьма сложную задачу кибернетики биологической. Познавание сложных актов обучения, приспособления и развития биосистем тормозится трудностью экспериментального их изучения. В настоящее время разрабатываются матем. методы специально для этой цели (см. Систем общая теория). Кроме того, для описания вероятностных свойств биосистем используют случайных процессов теорию, автоматов теорию, теорию стохастических дифф. ур-ний, теорию распознавания образов и теорию информации.

Ю. Г. Антонов.

**БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ** — метод описания биологических систем с помощью адекватного математического аппарата. Определение матем. аппарата, адекватно отображающего работу биологических систем, является сложной задачей, связанной с их классификацией. Классификацию биосистем по сложности (логарифму числа состояний) можно провести, пользуясь, напр., шкалой, по которой к простым системам относятся системы, имеющие до тысячи состояний, к сложным — от тысячи до миллиона и к очень сложным — свыше миллиона состояний. Второй важнейшей характеристикой биосистемы является закономерность, выражаемая законом распределения вероятностей состояний. По этому закону можно определить неопределенность ее работы по К. Шеннону и оценку относительной организации. Т. о., биол. системы можно классифицировать по сложности (макс. разнообразию или максимально возможной неопределенности) и относительной организации, т. е. степени организованности (см. Биологических систем органи-



Классификационная диаграмма биосистем:

- 1, 2, 3 —  $0 < H_{\max} < 3$  — простые системы;  
 4, 5, 6 —  $3 < H_{\max} < 6$  — сложные системы;  
 7, 8, 9 —  $6 < H_{\max} < 12$  — очень сложные системы;  
 3, 6, 9 —  $0 < R < 0,1$  — вероятностные системы;  
 2, 5, 8 —  $0,1 < R < 0,3$  — вероятностно-детерминированные системы;  
 1, 4, 7 —  $0,3 < R < 1$  — детерминированные системы.

зация). На рис. приведена классификационная диаграмма биосистем в осях максимально возможной неопределенности —  $H_{\max}$ , характеризующей число состояний системы и определяемой логарифмом числа состояний, и уровня относительной орг-ции —  $R$ , характеризующего степень организации системы. На диаграмме даны названия соответствующих полос так, что, напр., область под цифрой 8 означает «очень сложные вероятностно-детерминированные биосистемы». Опыт изучения биосистем показывает, что если  $R$ , вычисленное по гистограмме распределения отклонений изучаемого показателя от его математического ожидания, лежит в пределах от 1,0 до 0,3, то можно считать, что это детерминированная биосистема. К таким системам относятся системы управления внутр. органами, в основном системы гормонального (гуморального) управления. Нейрон, органы внутр. сферы, системы обмена веществ по определенным параметрам тоже могут быть отнесены к детерминированным биосистемам. Матем. модели таких систем строятся на основе физико-хим. соотношений между элементами или органами системы. Моделированию в этом случае подвергается динамика изменения входных, промежуточных и выходных показателей. Таковы, напр., биофизические модели нервной клетки, сердечно-сосудистой системы, системы управления содержанием сахара в крови и другие. Матем. аппаратом, адекватно описывающим поведение таких детерминированных биосистем, является теория дифф. и интегральных ур-ний. На основании матем. моделей биосистем можно, используя методы автоматического управления теории, успешно решать задачи дифф. диагностики и оптимизации лечения. Область моделирования детерминированных биосистем развита наиболее полно.

Если организованность биосистем по отношению к изучаемому показателю (или системе показателей) лежит в пределах  $0,3 \div 0,1$ , то системы можно считать вероятностно-детерминированными. К ним относятся системы управления внутр. органами с явно выраженной компонентой нервной регуляции (напр., система управления частотой пульса), а также системы гормональной регуляции в случае патологии. В качестве адекватного матем. аппарата может служить представление динамики изменения показателей дифф. ур-ниями с коэфф., подчиняющимися определенным законам распределения. Моделирование таких биосистем развито сравнительно слабо, хотя и представляет значительный интерес для целей кибернетики медицинской.

Вероятностные биосистемы характеризуются значением организованности  $R$  в пределах от 0,1 до 0. К ним относятся системы, определяющие взаимодействие анализаторов и поведенческие реакции, включая процессы обучения при простых условно-рефлекторных актах и сложных взаимосвязях между сигналами окружающей среды и реакциями организма. Адекватным матем. аппара-



том для моделирования таких биосистем является теория детерминированных и случайных автоматов, взаимодействующих с детерминированными и случайными средами, *случайных процессов теория*.

Матем. моделирование биосистем включает предварительную статистическую обработку экспериментальных результатов (см. *Биологические исследования математические методы*), изучение сложности и организованности биосистем, выбор адекватной матем. модели и определение числовых значений параметров матем. модели по экспериментальным данным (см. *Кибернетика биологическая*). Последняя задача в общем случае является очень сложной. Для детерминированных биосистем, модели которых могут быть представлены линейными дифф. ур-ниями, определение наилучших параметров модели (коэфф. дифф. ур-ния) может быть проведено методом спуска (см. *Градиентный метод*) в пространстве параметров модели, оценивая по интегралу от квадрата ошибки. В этом случае требуется применить процедуру спуска по параметрам  $a_1, a_2, \dots, a_n$  для минимизации функционала

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T [y^*(a_1, \dots, a_n) - y]^2 dt,$$

где  $T$  — период, характерное время для показателя  $y$ ,  $y$  — экспериментальная кривая изменения показателя биосистемы,  $y^*$  — решение матем. модели. Если необходимо получить наилучшее (в смысле интеграла от квадрата ошибки) приближение матем. модели к работе биосистемы по нескольким показателям  $y_1, y_2, \dots, y_m$  по различным внутренним состояниям биосистемы или для различных характерных внешних воздействий, то можно, применяя метод спуска в пространстве параметров модели, минимизировать сумму частных

функционалов  $I = \sum_{i=1}^m I_i(a_1, \dots, a_n)$ . При

использовании такой процедуры выбора параметров матем. модели можно повысить вероятность получения единственного набора коэфф. модели, отвечающих принятой структуре. С помощью Б. с. м. м. желательно получить не только количественные характеристики работы биосистем, ее элементов и характеристики взаимосвязи элементов, но и выявить критерии работы биосистем, установить определенные общие принципы их функционирования. Лит.: Глушков В. М. Введение в кибернетику. К., 1964 [библиогр. с. 319—322]; Моделирование в биологии и медицине, в. 1—3. К., 1965—68; Буш Р., Мостеллер Ф. Стохастические модели обучаемости. Пер. с англ. М., 1962. Ю. Г. Антомонов.

**БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОРГАНИЗАЦИЯ** — специфическая для живых систем структурно-функциональная упорядоченность. Качественно более сложный уровень Б. с. о. по сравнению с естественными системами неорганической природы и с искусственными системами, создаваемыми человеком, обусловлен длительной эволюцией биосистем. Формальное определение Б. с. о. связано с работами К. Шеннона, У.-Р. Эшби, В. М. Глушкова, Г. Ферстера. У. Эшби использует в качестве меры сложности системы разнообразие или число ее состояний —  $n$ . Удобно пользоваться для оценки сложности системы логарифмической мерой, определяя  $H_{\max} = \log n$ , где  $H_{\max}$  — мера сложности, или макс. неопределенность, системы. Существенная сторона организации системы выявляется с помощью подсчета меры неопределенности ее состояний. Пусть система может принимать любое  $i$ -ое состояние из множества  $n$  состояний с вероятностью  $p_i$ . Тогда мера неопределенности состояний системы —  $H$  определяется по формуле К. Шеннона:

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i.$$

Оценка уровня организации системы связана с макс. и текущей неопределенностью системы  $H_{\max}$  и  $H$ . Пусть в результате эволюции, фило- или онтогенеза система, работавшая прежде с макс. неопределенностью  $H_{\max}$  (полностью дезорганизованная система), стала предпочитать некоторые из состояний и характеризоваться текущей неопределенностью  $H$ . Тогда организация системы для данного уровня развития определяется реализованной в системе неопределенностью

$$O = H_{\max} - H, \quad (1)$$

где  $O$  — абс. организация системы. Значение абс. организации системы ограничено снизу нулем, а сверху — величиной максимально возможной для данной системы неопределенности. Т. о., организация детерминированной системы ( $H = 0$ ) также определяется макс. неопределенностью, т. е. строится на максимально возможном числе состояний. Только в случае детерминированной системы смена состояний является закономерной. Для системы, замкнутой в организационном отношении, равенство (1) определяет закон сохранения орг-ции: организация и неопределенность на любом этапе эволюции (жизни, обучения и т. п.) равны максимально возможной неопределенности системы. От соотношения (1) легко перейти к формуле подсчета относительной организации системы —  $R$ , разделив обе части равенства на  $H_{\max}$ ,

$$R = 1 - \frac{H}{H_{\max}}. \quad (2)$$

Текущее значение неопределенности связано с *энтропией живых систем*. Любая биосистема характеризуется структурной и функциональной организацией. Основой, на которой строится структурная организация биосистемы, являются размеры элементов системы, число элементов и число связей между ними. Так, напр., размеры клеток данного нервного узла — параметры структурной организации, а по *гистограмме* распределения клеток данного узла по их диаметрам можно подсчитать степень организации с помощью формул (1)

и (2). Параметрами функциональной организации отделов нервной системы могут служить межспайковые интервалы спонтанной и вызванной активности, по гистограммам межспайковых интервалов можно тоже рассчитать величину абс. (1) и относительной (2) организации. Для элемента нервной системы (нервной клетки) осн. ф-ция — генерация спайка (нервного импульса) обеспечивается структурой самой клетки. Клетки с помощью аксонов, дендритов, синапсов (см. *Нейрон*) объединяются в сеть. Осн. ф-ция сети, связанная с переработкой информации и проявляющаяся в изменении ритмической активности выходных нейронов, строится на базе структурной организации сети — числе элементов сети, их размерах и числе связей между элементами.

Для сложной биосистемы, напр., организма, является характерным следующее структурно-функциональное построение: элемент  $i$ -го уровня с ф-цией  $\varphi_i$ , система элементов  $i$ -го уровня со связями, образующая структуру  $(i+1)$ -го уровня  $s_{i+1}$ , на которой строится ф-ция  $\varphi_{i+1}$ . В свою очередь структура  $s_{i+1}$  является элементом более сложной системы  $(i+2)$ -го уровня и т. д. Так, микроструктурные элементы клетки — молекулы, ионы обеспечивают генерацию спайка нервной клеткой; способность клетки генерировать импульсы используется элементарной сетью, напр., для выделения наиболее характерных признаков предмета, попавшего в поле зрения; способность выделять признаки элементарными сетями используется в более сложной сети для решения задач классификации, опознания и др. Структурно-функциональное усложнение биосистем на разных уровнях иерархии организма позволяет решать все более и более сложные задачи. С помощью формул (1) и (2) можно подсчитывать Б. с. о. и проводить их сравнение.

Для структурированных биосистем, т. е. для тех биосистем, которые по числу элементов и связям между ними являются детерминированными, расчет уровня организации может быть проведен по видоизмененным энтропийным оценкам. На каждую биосистему воздействует окружающая среда, формируя ее структуру и ф-ции. Биосистема, в свою очередь, не является пассивной по отношению к среде и активно воздействует на нее. Такое взаимодействие биосистем со все более усложняющейся средой и обеспечивает непрерывную эволюцию биосистем. «Только разнообразие может уничтожить разнообразие» — говорил У.-Р. Эшби, подчеркивая одну из сторон этого взаимодействия. Только организация может противостоять организации — можно добавить с полным правом. Основным принципом функционирования биосистемы в среде является динамический принцип адекватности: макс. разнообразие и организация биосистемы на каждом уровне иерархии и на каждой ступени эволюции адекватны макс. разнообразию и орг-ции своей среды. При этом  $H_{\max s}(t) \rightarrow H_{\max e}(t)$  и  $R_s(t) \rightarrow R_e(t)$ , где  $s$  — индекс системы,

$e$  — индекс среды,  $t$  — время. Различают три степени адекватности: а) слабую вероятностную, когда важно равенство макс. неопределенности и организованности системы и среды независимо от вида распределений вероятностей принятия состояний средой и системой; б) жесткую вероятностную, когда равенство разнообразия и организованности достигается за счет равенства законов распределения, т. е.  $p_{is}(t) \rightarrow p_{ie}(t)$ ; в) детерминированное взаимодействие, когда каждому состоянию среды из некоторого множества соответствует состояние системы. Изучение степеней Б. с. о. является осн. задачей *кибернетики биологической* и необходимо для определения подходящего матем. аппарата при матем. моделировании биологических систем (см. *Биологических систем математическое моделирование*).

Лит.: Глушков В. М. Введение в кибернетику. К., 1964 [библиогр. с. 319—322]; Антонов Ю. Г. Системы. Сложность. Динамика. К., 1969 [библиогр. с. 125—126]; Эшби У.-Р. Введение в кибернетику. Пер. с англ. М., 1959 [библиогр. с. 396—399]; Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 [библиогр. с. 783—820]; Ферстер Г. О самоорганизующихся системах и их окружении. В кн.: Самоорганизующиеся системы. Пер. с англ. М., 1964.

Ю. Г. Антомонов.

## БИОМЕДИЦИНСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА — см. Медицинская электроника.

**БИОНИКА** (от греч. *βίος* — жизнь) — научное направление, изучающее принципы построения и функционирования биологических систем с целью создания новых машин, приборов, механизмов, строительных конструкций и технологических процессов, характеристики которых приближаются к характеристикам живых систем. Используя живую природу как источник для новых тех. идей, Б. исследует аналогии между живыми и искусственными системами, сопоставляет их важнейшие параметры, устанавливает, в чем природа совершеннее и экономнее совр. техники и, опираясь на добытые знания, ищет принципиально новые пути оптим. решения многих сложных инженерных проблем.

В Б. обычно выделяют три направления: экспериментальную Б. (выявление идей и принципов живой природы, которые можно положить в основу решения тех или иных инженерных проблем); теоретическую Б. (разработка матем. моделей биол. систем); техническую Б. (реализация моделей математических, создание новых тех. средств и систем — приборов, аппаратов, устр-в, действие которых основано на аналогии с биол. принципами, и которые превосходят по своим характеристикам уже созданные ранее).

По научному содержанию отдельных направлений Б. можно разделить на следующие пять разделов: *нейробионика*, восприятие и преобразование информации в *анализаторных системах*, биомеханика, ориентация и навигация, биоэнергетика.

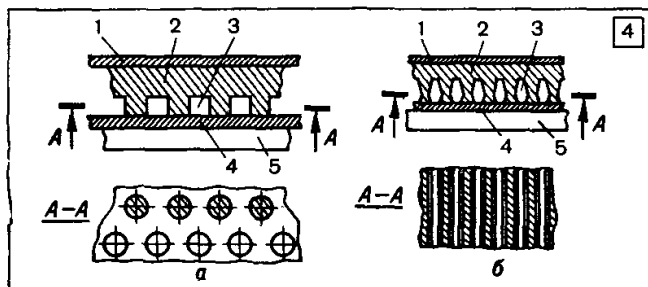
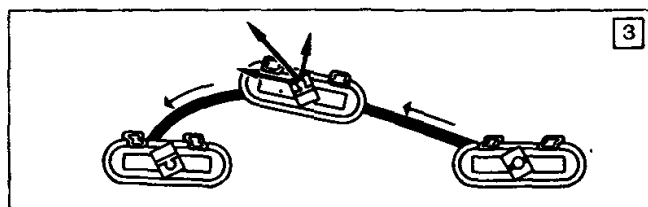
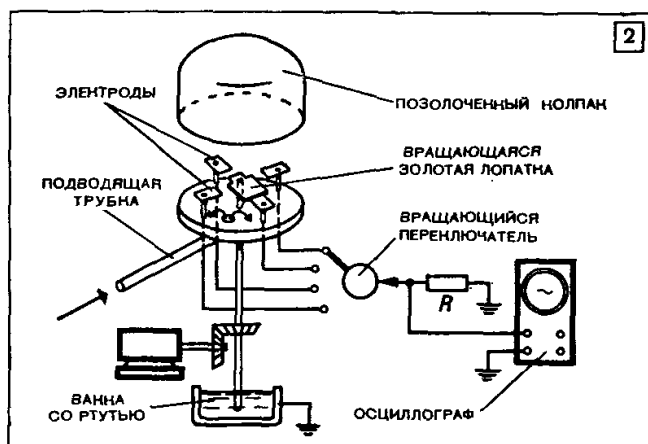
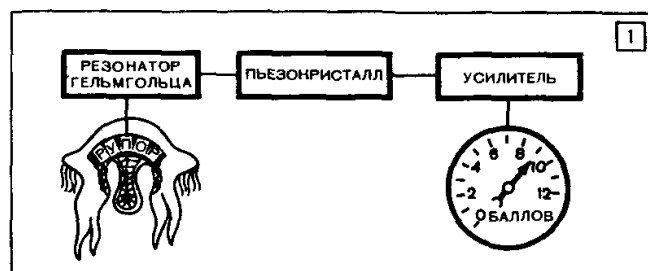
*Нейробионика* изучает и реализует в технических устройствах принципы переработки информации, в нервной системе человека и животных. Исследование способов

преобразования информации в биол. системах началось с изучения *нейронов* и разработки их различных матем. и тех. аналогов (см. *Модель нервной клетки*). От построения аналогов отдельных нейронов перешли к созданию их комплексов — моделированию пучков нервов и сетей (см. *Нейронные сети*). При помощи искусственных нейронных сетей исследуют различные стороны работы головного мозга — память, выделение сигналов на фоне помех, логич. операции, процесс обучения и т. п. Кроме создания физ. сетей из нейроподобных элементов, нервные сети моделируют на ЭВМ. Моделирование нейронов и нервных сетей привело к построению ряда устр-в, позволяющих решать некоторые задачи, связанные с передачей и обработкой информации. Примером таких устр-в являются *перцептроны*. Предпринимаются попытки по аналогии с живой природой вырабатывать искусственные нейроны и целые нейроподобные системы. Освоение технологии произв-ва искусственных нейронов в виде микрокомпонент коллоидных размеров ( $10^{-5} - 10^{-7}$  см) и молекулярных размеров ( $10^{-7} - 10^{-8}$  см) позволило бы резко повысить надежность, быстродействие, уменьшить вес, габариты, потребляемую мощность электронных систем.

Изучение восприятия и преобразования информации в анализаторных системах отдельных видов животных позволило обнаружить многие, ранее неизвестные свойства некоторых их органов чувств и разработать по их образцу ряд оригинальных устр-в. Так, на основе изучения глаза мечехвоста создана электронная модель, которая обладает способностью усиливать контрастность между краями наблюдаемого объекта и окружающим фоном. Такой аналог глаза позволит улучшить работу телевизионных трактов ряда систем, таких, как системы получения и анализа снимков Луны и других планет, аэрофотоснимков земной поверхности со спутников и др. Америк. фирма «Дженерал электрик» разработала бионическое устр-во — «визилог», которое способно выполнять некоторые функции человеческого глаза: воспринимать изображение, проводить измерения и передавать информацию. Предполагают, что такие устр-ва будут устанавливать на непилотируемых космических кораблях. Удалось построить довольно удачную электронную модель лягушечьего глаза. Она способна видеть контур изображения с учетом контрастности, отсеивать информацию о неподвижных предметах, вести наблюдения только за движущимися объектами. Создание моделей глаза и части зрительного анализатора (см. *Модель зрительного анализатора*) по существу является первым шагом в изготовлении нового типа оборудования, предназначенного для решения сложных задач обнаружения, слежения и наведения.

Исследования органов слуха ведутся в несколько меньших масштабах, но также интенсивно. Изучаются конструктивные особенности

звуковых анализаторов, механизмы обработки акустических сигналов и акустические сервомеханизмы. Разработана электронная модель (в виде системы фильтров), воспроизводящая частотные характеристики человеческого уха, электронная модель слухового органа, обеспечивающая различение слабых сигналов на фоне шумов за счет корреляционного процесса (см. *Модель слухового анализатора*). Сотрудники Ленинградского электротех. ин-та связи им. проф. М. А. Бонч-Бруевича построили «электронное ухо» для оценки качества звучания



1. Блок-схема прибора для предсказания штормов (искусственное «ухо медузы»).
2. Схема «электронного носа».
3. Схема перемещения прыгающего автомобиля.
4. Схема испытанных образцов искусственной «быстроходной» дельфиньей кожи «ламинфлов»: а — толстая кожа с отдельными столбиковыми опорами; б — тонкая кожа со сплошными ребристыми опорами; 1 и 4 — гладкие бесшовные резиновые оболочки; 2 — резиновая диафрагма; 3 — вязкая демпфирующая жидкость; 5 — стенка жесткой модели.

музыкальных инструментов. Установлено, напр., что слуховой анализатор медузы способен улавливать инфразвуковые колебания (частотой 8—13 гц), возникающие во впадинах штормовых волн и распространяющиеся со скоростью, превышающей скорость приближения шторма. На основе принципа действия инфрауха медузы создан автомат. предсказатель штормов (рис. 1). Он определяет направление и силу шторма приблизительно за 15 ч. Построено несколько электронных устр-в, способных анализировать запахи и определять по ним сорта цветов, вин, табака, кофе, бензинов, медикаментов, пищевых продуктов, парфюмерных товаров. Некоторые приборы воспринимают запахи при концентрации 0,00001% (рис. 2). Такие устр-ва можно применять в качестве дегустаторов различных продуктов, устанавливать в операционных, шахтах, на складах, в бензохранилищах, на территории фабрик и заводов.

Биомеханика изучает структурные и функциональные особенности рук и ног человека, механику бега, прыжков, ползания ряда животных, форму тела и локомоторный аппарат рыб, моллюсков, млекопитающих, полет птиц и насекомых. Проведенные исследования принесли много полезного. Так, анализ способа передвижения пингвинов привел к созданию оригинальной снегоходной машины «Пингвин», развивающей скорость до 30 км/час. Бег кенгуру подсказал идею создания «прыгающей» машины (рис. 3). Разработано большое число манипуляторов, в той или иной степени повторяющих элементы конструкции человеческой руки. Значительных успехов достигла и гидробионика. Изготовлены опытные образцы искусственной «быстроходной» дельфиной кожи — «ламинфло» (рис. 4). Обширная ею модель катера при тех же мощностях силовых установок движется почти в два раза быстрее. Многообещающими для будущего авиастроения являются проводимые бионические исследования полета птиц и насекомых. Б. ищет разгадку феноменальной подъемной силы живого крыла, пытается постигнуть закономерности машущего полета, познать секрет его высокой экономичности. Моделирование и изучение идеально отработанной природой машущего полета может дать ключ к созданию принципиально новых, высокосоввершенных летательных аппаратов. Возможно, бесшумный полет совы подскажет авиаинженерам эффективные способы снижения лобового сопротивления, летательные механизмы аиста, пчелы, саранчи, стрекозы, шмеля — способы повышения экономичности, маневренности и относительной скорости полета современных воздушных лайнеров, а «стоячий» полет мухи-журчалки или зависания маленьких колибри в воздухе над цветком — новые, отличные от вертолетных, способы вертикального взлета и посадки.

В последние годы сложилось еще одно новое научное направление, в котором Б. сотрудничает с архитектурой и строит. техникой, — архитектурная бионика. Используя в ка-

честве образцов модели живой природы — стебли растений, нерватуру живого листа, скорлупу яйца — инженеры создают прочные и красивые архитектурные сооружения: жилые дома, мосты, кинотеатры и др. Большое внимание уделяют бионическим исследованиям органов стабилизации, локации, ориентации и навигации у животных. Исследования в этой области привели к созданию ряда оригинальных тех. приборов и систем, напр., гироскопа — прибора, который можно применять вместо гироскопа в скоростных самолетах и ракетах. Он работает по принципу жужжащего насекомого: плоскость, в которой они колеблются, занимает неизменное положение в пространстве. Построен малогабаритный указатель скорости самолета относительно земли, в конструкции которого использованы некоторые принципы строения и функционирования глаза жука. Тщательно изучают локационные аппараты летучих мышей, дельфинов и др. животных и на основе этого создают более совершенные радары, сонары, ультразвуковые устр-ва — «поводыри» для слепых. Б. решает широкий круг задач, связанных с биоэнергетикой живых организмов. В частности, большой интерес представляет изучение и моделирование работы мышцы, основанной на непосредственном превращении хим. энергии в мех. (см. *Искусственная мышца*).

Другой важнейшей проблемой является разработка принципиально новых экономичных и дешевых биохим. источников энергии. В решении этой задачи Б. идет по двум направлениям. Первое — получение с помощью бактерий горючих газов из органических отходов. На этом принципе построено несколько небольших экспериментальных энергет. установок. Другое направление связано с созданием элементов, электроды которых находятся в сосуде, содержащем бактерии и запас кормов. Параллельно с созданием биохим. источников энергии ведутся работы по изучению биоэлектрогенеза — генерирования электричества живыми организмами. Известно, напр., около 500 различных видов рыб, генерирующих электроэнергию. Самая мощная «электростанция» у морского угря; она способна вырабатывать электр. разряд, напряжение которого достигает 650 в. Бионики надеются, что по принципу электростанции угря будет создана батарея, которая сможет быстро восстанавливать израсходованную энергию.

Б. — наука молодая, но она все больше и больше проникает в различные отрасли производства и в сферу научных исследований.

Лит.: Бионика. М., 1965; Вопросы бионики. М., 1967; Литинецкий И. Б. Бионика. К., 1967 [библиогр. с. 245—246]; Анисимова Т. Н. Бионика. Библиографический указатель отечественной и иностранной литературы. 1958—1968. М., 1971; Литинецкий И. Б. На пути к бионике. М., 1972 [библиогр. с. 222]; Жерарден Л. Бионика. Пер. с франц. М., 1971; Бертон Р. Чувства животных. Пер. с англ. М., 1972 [библиогр. с. 194—197]; Литинецкий И. Б. Беседы о бионике. М., 1968; Проблемы бионики. Пер. с англ. М., 1973.

И. Б. Литинецкий.

**БИОЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ** — управление, использующее в качестве команд или сигналов обратной связи сигналы биоэлектрической активности. Живая ткань, реагируя на электр. раздражение, может проводить и генерировать ток. Когда возбуждение с нерва переходит на мышцу, в ней происходит процесс возбуждения и возникают биоэлектрические потенциалы, а затем уже развивается и более медленный процесс — сокращение мышцы. Осциллограммы потенциалов мышц, находящихся в возбуждении, наз. электромиограммами (ЭМГ). Осн. параметрами ЭМГ при снятии их поверхностными электродами являются амплитуда и частота потенциалов. Наиболее широкое распространение получили методы Б. у., в основе которых лежит использование биоэлектр. активности мышц. Исследования показали, что для большинства скелетных мышц существуют зависимости между мощностью биосигналов, напряжением и скоростью сокращения или удлинения мышц. Эти зависимости используются при проектировании биотех. систем управления, предназначенных для моделирования двигательных реакций.

Б. у. двигательными ф-циями развивается в двух направлениях: управление тех. устр-вами (напр., протезами) с использованием внешних источников энергии (биопротезирование) и программное многоканальное Б. у. мышечной деятельностью при помощи командных сигналов, в основе которых лежит использование энергетических свойств биопотенциалов мышц.

Биоуправляемые протезы руки, впервые созданные в СССР, получили широкое признание и распространение. Ведется разработка многофункциональных биоуправляемых протезов конечностей. В блок-схеме биоуправляемого протеза руки биопотенциалы, снимаемые при помощи поверхностных электродов с мышц, усиливаются в усилителе биопотенциалов, детектируются и сглаживаются в интеграторе. Напряжение на выходе этого блока пропорционально мгновенному значению мощности биотоков. Синтезатора напряжение поступает в преобразователь, в котором непрерывные сигналы преобразовываются в частотноимпульсные. Пройдя через усилитель мощности, импульсы поступают на вход мех. устр-ва. Для управления движением используются биотоки, отводимые с двух мышц-антагонистов, и, соответственно, два канала усиления и преобразования информации. На основании физиол. исследований в лаборатории космических исследований (США) реализовано управление с помощью выделения т. н. «миографического образа». Управляющая ф-ция при этом определяется мгновенным состоянием биоэлектр. активности группы управляющих мышц, участвующих в естественном движении, при помощи логического устр-ва. Участие соответствующих мышц при движении руки «вверх — вниз», «к себе — от себя» кодируется двоичным кодом.

Большую роль в создании биоуправляемых

протезов играют системы с обратной связью. Для их разработки используют датчики разных типов: вибрационные, тензометрические, электромех. и др. Для Б. у. мышечной деятельностью посредством преобразующего тех. устр-ва по принципу «мышца — устройство — мышца» или «человек — машина — человек» используют энергетические свойства биопотенциалов мышц.

Изучение характера биоэлектр. активности мышц методом ЭМГ позволяет сравнивать физиол. возможности выполнения активных двигательных актов в различных ситуациях. Результаты исследований дают возможность приступить к созданию сложных систем Б. у. активными движениями конечностей и тела человека. К системам такого типа можно отнести устройство, реализующее метод программного многоканального Б. у. — «Миотон», созданное в Ин-те кибернетики АН УССР. В «Миотоне» имеется несколько каналов, и это позволяет регистрировать и управлять активностью групп мышц, участвующих в сложном движении. При управлении используются закономерности изменения степени биоэлектрической нервно-мышечной активности в процессе выполнения некоторых движений. В основу положены данные *математической статистики*, которые показывают, что среднее значение ЭМГ соответствует сумме частот элементарных электр. импульсов, возникающих в нервно-мышечной системе, а следовательно — степени возбуждения мышцы (блок-схему одного из каналов устр-ва «Миотон» см. на илл. между стр. 176—177). Принцип работы этого устр-ва состоит в том, что сигнал, снимаемый с мышц, участвующих в определенном двигательном акте (алгоритм движения), усиливается и служит для выработки сигнала, который подается на мышцы реципиента. Реципиент при соответствующем подборе амплитуд возбуждающих сигналов повторяет движение донора. Алгоритм движения, заранее записанный в блоке «магнитной памяти», может многократно повторяться для воспроизведения определенных движений. Каждый канал устр-ва может работать независимо. Элемент обратной связи, введенный в устр-во по принципу «биоэлектр. локация», позволяет автоматически корректировать управляющий сигнал при помощи ответной импульсации реципиента. Навязывание больным движений, близких к естественным, способствует развитию структурно-информационных перестроек в нервной системе, позволяя шире использовать ее компенсаторные механизмы во время лечения некоторых двигательных расстройств. «Миотон» успешно применяют при лечении больных с нарушениями двигательных функций.

Подобные исследования проводятся и за рубежом: в Югославии, Канаде, США и Польше. В США, напр., создан аппарат кисти, в котором для раскрытия используется стимуляция паретичной мышцы. В качестве управляющей используется трапециевидная мышца. Расширяются исследования по созданию средств Б. у. сердечным ритмом, дыханием

и работой искусственных органов и систем на основе поддержания гомеостатического постоянства уровней непрерывных показателей внутренней среды организма. Совершенствование методов Б. у. позволит в ближайшее время расширить их применение не только в области медицины, но и в области техники.

Лит.: К о б р и н с к и й А. Е. [и др.]. Биоэлектрическая система управления. «Доклады АН СССР», 1957, т. 117, № 1; Алеев Л. С., Бунимович С. Г. Многоканальный метод воздействия при управлении некоторыми двигательными функциями. В кн.: Моделирование в биологии и медицине, в. 1. К., 1965; Алеев Л. С. Биоэлектрична система «Міотон» і рухові функції людини. «Вісник АН УРСР», 1969, № 4; Bottomley A. Myo-electric control of powered prostheses. «The Journal of bone and joint surgery», 1965, v. 47B, № 3.

**БИТ** (от англ. binary digit — двоичная цифра) — двоичная единица измерения энтропии и количества информации. Источник с двумя равновероятными сообщениями имеет энтропию в одну двоичную единицу. Происхождение термина «Б.» объясняется тем, что к-во двоичных единиц указывает (с точностью до единицы) среднее число знаков, необходимое для записи данного сообщения в двоичном коде. Употребляются также натуральные и десятичные единицы. Переход от одних единиц к другим соответствует изменению основания логарифмов в определении энтропии и информации количества (10 вместо 2). Формула перехода: 1 десятичных единиц =  $1/\lg 2 \text{ бит} \approx 3,32 \text{ бит}$ , 1 натуральных единиц =  $1/\ln 2 \text{ бит} \approx 1,44 \text{ бит}$ .

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

**БЛЕЙКА АЛГОРИТМ** — алгоритм получения сокращенной дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) булевой функции из произвольной ДНФ. Б. а. основан на теореме Блейка: если в произвольной ДНФ булевой ф-ции произвести все возможные обобщенные склеивания, а затем устранить все элементарные поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ ф-ции. Операция обобщенного склеивания состоит в применении тождественного соотношения  $AC \vee B\bar{C} = A\bar{C} \vee B\bar{C} \vee AB$ , не изменяющего значения булевой ф-ции. В ряде случаев Б. а. определяет миним. форму булевой ф-ции: если сокращенная ДНФ булевой ф-ции не содержит отрицания переменных, то она является одновременно миним. формой, притом единственной; если в простых импликантах сокращенной ДНФ все переменные содержатся только с отрицаниями, то она будет и минимальной. Только монотонные булевы ф-ции имеют сокращенные ДНФ, не содержащие отрицаний переменных. Б. а. применяют при минимизации булевых ф-ций для получения их простых импликант. А. М. Богомолов.

**БЛОК** в программировании — замкнутая составная часть программы, представляющая собой совокупность описаний и операторов, образующих сферу действия каких-либо идентификаторов (имен). Понятие «блок» соответствует понятию «подзадача» или «подалгоритм». Используя блоки, можно разделить задачу на части, допускающие автономное их программирование. Каждый Б. вводит

новый уровень обозначений посредством описания идентификаторов и меток. В Б. может содержаться в качестве оператора другой Б. Блочная структура (см. АЛГОЛ-60, СИМУЛА, ПЛ-1) программы позволяет при памяти распределении отводить одни и те же поля памяти машины для хранения величин, описанных в непересекающихся Б., и тем самым способствует экономному ее использованию. См. также Блок-схема программы. А. И. Халилов.

**БЛОК ПЕРЕМЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ** — устройство, предназначенное для ввода в решающие цепи аналоговых вычислительных машин (АВМ) параметров, изменяющихся во времени по заданному закону и соответствующих переменным коэффициентам моделируемых значений. Применяются электромех. и электронные Б. п. к. Электромеханические Б. п. к. строятся с применением линейных потенциометров с отводами и без отводов. В первом случае изменение по заданному закону напряжения, снимаемого с движка потенциометра, достигается шунтированием отдельных участков потенциометров и подключением к отводам различных питающих напряжений. Во втором случае заданное изменение выходного напряжения потенциометра осуществляется в результате перемещения движка программным механизмом. В качестве таких механизмов применяются профилированные кулачковые механизмы, фотоэлектр. следящие системы, фигурные токосъемники и пр. В специализированных АВМ применяются потенциометры с профилированными по соответствующему закону каркасами. Электромеханические Б. п. к. строятся также по аналого-цифровым схемам. В этом случае используется, как правило, перфолента, равномерное протягивание которой осуществляет механизм типа мальтийского креста. Числовые значения ординат вводимого переменного параметра предварительно кодируются по какой-либо системе счисления (чаще двоичной или двоично-десятичной) и пробиваются на перфоленте. Каждая щетка токосъемочного механизма соединяется с соответствующим разрядным входом цифро-аналогового преобразователя, на выходе которого образуются напряжения, пропорциональные ординатам моделируемого переменного коэффициента. При подаче на общий электрод щеточного механизма переменного по величине напряжения, образуемого в решающих цепях АВМ, осуществляется операция перемножения. Наиболее простые схемы построения Б. п. к. осуществляются с применением делителей напряжения и шагового привода. Значения воспроизводимой ф-ции задаются в этом случае путем соединения на наборном поле пластинок шагового искателя с соответствующими клеммами делителя напряжения. Заданная зависимость воспроизводится в виде ступенчато аппроксимированной кривой. В зависимости от требований к точности ступенчато изменяемое напряжение может быть включено на вход интерполятора. Достаточно эффективным является линейный интерполятор, содержащий в своей основе усилитель опера-



ционный, включаемый по схеме интегратора. В электромех. Б. п. к. легко выполняется умножение аналоговых переменных, образованных в решающих цепях АВМ, на переменные коэфф. при подключении соответствующих точек схемы электр. моделирования на входы потенциометрических делителей Б. п. к.

Электронные Б. п. к. содержат электронные нелинейные преобразователи функциональные, настраиваемые по закону изменения вводимого параметра, и блоки перемножения. Для получения на выходе преобразователя заданных ф-ций времени на его вход подается линейно возрастающее напряжение (аргумент). Электромех. Б. п. к. обеспечивают большую точность и стабильность воспроизведения заданных зависимостей, чем электронные, но уступают последним в быстродействии. Лит.: Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. М., 1963 [библиогр. с. 494—505]; Вычислительная техника. Справочник. Пер. с англ., т. 1. М.—Л., 1964. Е. И. Ламин.

**БЛОК ХРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ** — см. *Накопитель*.

**БЛОКИ ЦВМ ТИПОВЫЕ** — устройства, предназначенные для выполнения *элементарных операций над словами*. К Б. ЦВМ т. относятся: *регистры, дешифраторы, счетчики, сумматоры*.

**Регистры** предназначены для хранения информации и для преобразования информации при реализации элементарных операций передачи и сдвига слов. Регистр представляет собой набор запоминающих элементов, пронумерованных в соответствии с разрядами слов, хранимых в нем (младшему разряду слова соответствует младший разряд регистра и т. д.). Под преобразованием информации в регистре понимают любое однозначное изменение состояния его разрядов (полное или частичное) под воздействием входных сигналов. К операциям по преобразованию информации в регистре относятся: элементарная операция сдвига, элементарная операция передачи кода на регистр и установочные преобразования. При операциях сдвигов в регистре каждый разряд должен одновременно и выдавать информацию в следующий разряд и принимать новую информацию из предыдущего разряда. Осуществляется это путем промежуточного запоминания сдвигаемой информации либо на линиях задержки, либо на реактивных элементах, либо во вспомогательном регистре в зависимости от типа применяемой элементной структуры ЦВМ. Различают линейные и циклические регистры в соответствии с выполнением линейной и циклической модификаций элементарной операции сдвига. Элементарная операция передачи кода на регистр заключается в изменении состояния каждого разряда регистра в зависимости от значения соответствующего разряда вводимого слова. Передача слова на регистр может осуществляться параллельным и последовательным способом. При параллельном способе все разряды слова поступают на регистр одновременно, при последовательном способе производится поразрядный ввод слова

со стороны младших или старших разрядов регистра с последующим сдвигом вводимой информации на один разряд влево или вправо соответственно. Установочные преобразования информации в регистре необходимы для перевода регистра из любого состояния в заданное (напр., в исходное нулевое или единичное).

Дешифратором  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  наз. устр-во, выходными ф-циями которого являются различные конституэнты единицы:  $\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_n, \bar{x}_1x_2, \dots, \bar{x}_{n-1}\bar{x}_n, \dots, x_1x_2\dots x_n$ . Дешифраторы устанавливают взаимнооднозначное соответствие между дешифрируемым словом и сигналом на соответствующем выходе дешифратора (сигнал принимает единичное значение только при появлении на входе дешифратора соответствующего слова, либо группы слов, для остальных мн-ва слов он равен нулю). Различают дешифраторы 1-го и 2-го рода. Первые реализуют систему функций, каждая из которых принимает единичное значение при соответствующем единственном значении слова на входе дешифратора. Вторые реализуют систему функций, принимающих единичное значение на определенном соответствующем диапазоне значений дешифрируемых слов. По способу построения различают линейные, пирамидальные и прямоугольные дешифраторы. **Линейные дешифраторы**  $n$  переменных представляют собой совокупность не связанных между собой  $2^n$  схем совпадения на  $n$  входов, каждая из которых реализует соответствующую конституэнту единицы. **Пирамидальный дешифратор** строится по методу каскадов: 1-й каскад реализует конституэнты единицы для двух переменных  $x_1$  и  $x_2$ :  $x_1x_2, \bar{x}_1x_2, x_1\bar{x}_2, \bar{x}_1\bar{x}_2$ ; 2-й каскад — конституэнты единицы для трех переменных, причем входными сигналами 2-го каскада являются выходные сигналы 1-го каскада и значения переменной  $x_3$  и  $\bar{x}_3$ . На следующем каскаде реализуются все конституэнты 4-х переменных, входными сигналами для него являются выходные сигналы 2-го каскада и значения переменных  $x_4$  и  $\bar{x}_4$  и т. д. На выходе  $(n-1)$ -го каскада реализуются все конституэнты единицы для  $n$  переменных. Прямоугольный способ построения дешифраторов сводится к тому, что входное слово разбивается на группы разрядов, дешифрируемые с помощью частичных линейных дешифраторов, представляющих собой 1-й каскад дешифратора. В последующем каскаде реализуются все возможные конъюнкции выходов частичных линейных дешифраторов. В отличие от дешифратора 1-го рода на выходах дешифратора 2-го рода образуются дизъюнкции ряда последовательно занумерованных конституэнт единицы.

**Счетчики** наз. устройства, производящие счет входных сигналов. Счетчик представляет собой триггерный регистр и предназначен, в основном, для реализации элементарной операции счета. Если обозначить через  $S_i$  некоторое  $i$ -ое состояние счетчика, которое определяется состояниями его разрядов, то

под воздействием сигнала, напр., «+1», счетчик переходит в соседнее  $S_{i\oplus 1}$  состояние, а под воздействием сигнала «-1» — в соседнее  $S_{i\ominus 1}$  состояние, в соответствии с задаваемым модулем счета ( $\oplus$  и  $\ominus$  обозначают прибавление и вычитание по модулю). По достижении состояния с предельным значением  $i$  счетчик устанавливается в исходное состояние. По направлению переходов из одного состояния в другое счетчики делятся на простые и реверсивные. Простые счетчики осуществляют счет сигналов одного знака, и переходы в нем происходят в одном направлении. Реверсивные счетчики осуществляют счет прибавляемых и вычитаемых сигналов, а переходы в нем происходят в прямом и в обратном направлениях. Структура счетчика существенно зависит от способа кодирования его состояния. Различают счетчики с позиционным двоичным или десятичным кодированием, счетчики с позиционным единичным или комбинированным кодированием, счетчики с непозиционным соседним кодированием. В счетчике с позиционным двоичным кодированием состояния кодируются обычными двоичными кодами последовательных целых неотрицательных чисел, начиная с нуля (аналогично для десятичного кодирования). Прибавление и вычитание единицы из кода такого счетчика осуществляется с помощью операций переносов и заемов (см. *Цепь переноса*) между разрядами счетчика. При единичном кодировании состояние счетчика отождествляется с местоположением определенного кода в его разрядах (в качестве такого кода используется код вида (00...01) либо (00...011), последний наз. также парно-единичным). Под воздействием входного сигнала происходит переход счетчика в новое состояние путем сдвига кода влево или вправо в зависимости от знака считаемого сигнала. Счетчик с единичным кодированием по структуре представляет собой кольцевой сдвиговый регистр. Число состояний такого счетчика равно числу разрядов сдвигового регистра. При комбинированном способе кодирования счетчик разбивается на частичные счетчики, внутри которых применяется единичное кодирование, а между ними связь организуется так же, как для счетчиков с позиционным кодированием. При соседнем кодировании состояний переход из любого  $S_i$ -го состояния в соседнее  $S_{i+1}$ -ое (или  $S_{i-1}$ -ое) осуществляется путем переключения только одного разряда счетчика. Для соседнего кодирования можно использовать, напр., непозиционную систему кодов Грея. Для определения состояний счетчика используются дешифраторы.

**Сумматором** наз. устройство, выполняющее элементарную операцию суммирования. Различают параллельные и последовательные сумматоры в зависимости от того, как поступают все разряды слагаемых в сумматор: одновременно либо последовательно, начиная с младших. Параллельные сумматоры состоят из  $n$  одноразрядных суммирующих схем ( $n$  —

число разрядов слагаемых), последовательные — из одной. Одноразрядная суммирующая схема (ОСС) осуществляет сложение по модулю 2 соответствующих разрядов слагаемых  $x_i$  и  $y_i$  и переноса  $p_i$  из предыдущего разряда, в результате которого образуется сумма  $\Sigma_i$  в данном разряде и перенос  $p_{i+1}$  в следующий разряд. Система *переключательных функций*, описывающая ОСС, может быть представлена в таком виде:

$$\begin{cases} \Sigma_i = x_i + y_i + p_i \\ p_{i+1} = x_i y_i \vee (x_i + y_i) p_i. \end{cases} \quad (1)$$

По способу построения ОСС различают комбинационные, накапливающие и амплитудные сумматоры. Комбинационные — строятся из логич. элементов, реализующих функционально полный набор элементарных операторов (см. *Элементная структура ЦВМ*). Система функций (1) должна быть представлена в виде, соответствующем операторным выражениям применяемых логич. элементов. Оба слагаемых поступают на вход комбинационного сумматора одновременно. Основой накапливающего одноразрядного сумматора является *триггер* со счетным входом, на который поочередно поступают суммируемые цифры и перенос. Способы организации параллельных сумматоров из ОСС определяются способом организации распространения сигнала переноса от младших разрядов к старшим.

Различают сумматоры с последовательным распространением переносов (ПРП), со сквозным, одновременным и групповым. В сумматорах с ПРП перенос в данный разряд может быть выработан только после того, как произойдет сложение в предыдущем разряде. В сумматорах со сквозным переносом организуется спец. цепь распространения переносов из более быстродействующих элементов т. о., что перенос, возникающий в предыдущих разрядах, обходит те разряды, в которых сумма слагаемых по модулю 2 равна 1. В сумматорах с одновременным переносом значение переноса из данного разряда является функцией входов всех предыдущих разрядов и возникает одновременно во всех разрядах. В сумматорах с групповым переносом несколько разрядов объединяются в группы, причем внутри группы перенос в каждом разряде возникает одновременно, а между группами может быть организован либо последовательный, либо сквозной, либо одновременный перенос. По способу фиксации окончания процесса суммирования все сумматоры делятся на синхронные и асинхронные. В синхронных сумматорах на выполнение сложения отводится время, не меньшее максимального времени распространения переноса по цепочке переносов. Асинхронный принцип управления окончанием суммирования основан на определении фактического окончания распространения переносов. Такие сумматоры снабжены схемами определения завершения переносов. Для суммирования чисел, представленных обратным кодом, сумматоры

снабжаются цепью циклического переноса, которая связывает перенос, возникающий в знаковом разряде со входом младшего разряда сумматора. В случае кодирования отрицательных чисел дополнительным кодом эта цепь в сумматоре отсутствует.

Лит.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]; Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [библиогр. с. 299—301]; Карцев М. А. Арифметика цифровых машин. М., 1969 [библиогр. с. 559—575].

З. М. Кириченко.

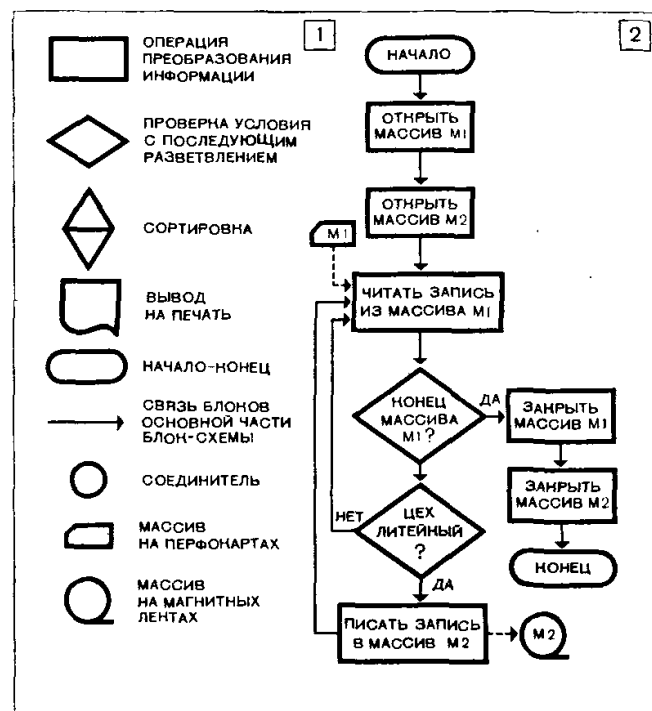
**БЛОКИРОВКА ОБСЛУЖИВАНИЯ** — явление временного прерывания процесса обслуживания или его замедления в системах массового обслуживания. В реальных системах Б. о. соответствуют действия различных факторов, затрудняющих нормальное функционирование системы или ее отдельных частей. Такими факторами могут быть неисправности оборудования, отсутствие материалов, рабочей силы, денежных средств, неблагоприятные метеорологические условия, действие торможения в биологических системах и др. См. *Массового обслуживания система*.

**БЛОК-СХЕМА ПРОГРАММЫ** — графическое изображение вычислительного процесса, который должен быть реализован соответствующей программой на цифровых вычислительных машинах. Различают принципиальную и рабочую Б.-с. п. Принципиальная Б.-с. п. изображает вычисл. процесс на уровне типовых процессов обработки информации. Эти процессы существенно зависят от класса решаемых задач. Так, для задач обработки эконом. информации типовыми процессами являются ввод информации, компоновка, редактирование, сортировка, управление массивами данных, вывод информации, преобразование массивов данных и др. В развитых системах математического обеспечения ЦВМ эти процессы реализуются стандартными подпрограммами (см. *Библиотека стандартных подпрограмм*). Назначение принципиальной Б.-с. п. — давать наглядное представление об алгоритме решения задачи, в ней находит отражение технологический процесс обработки информации на ЦВМ, она позволяет глубже изучить задачу, выявить недостатки постановки ее и устранить их на ранней стадии, выявить закономерности алгоритма обработки информации, найти типовые части, эффективно использовать запоминающие устройства внешние ЦВМ и оценить затраты времени на программирование и ориентировочное время обработки данных на ЦВМ.

К составлению рабочих Б.-с. п. приступают после составления и тщательного анализа принципиальной Б.-с. п. Рабочая Б.-с. п. должна отражать все разветвления вычисл. процесса, все обращения к стандартным подпрограммам с указанием параметров фактических, расчетных формул и структуры информационных массивов. Б.-с. п. обычно имеет в своей структуре основную и вспомогательную части. В основную часть входят все функциональные блоки алгоритма решения задачи и связи между ними. Во вспомога-

тельную часть должны войти все пояснительные блоки и связи их с основными функциональными блоками.

Существуют международный и отраслевые стандарты, определяющие форму блоков (символов) и линий на Б.-с. п. (рис. 1). В Б.-с. п. можно также использовать различные графические символы для указания внешних и внутренних носителей информации (перфокарты, перфоленты, бумага, ленты магнитные, барабаны магнитные, диски магнитные, оперативная память), приводить комментарии, пока-



1. Обозначения блоков в блок-схеме программы.  
2. Пример блок-схемы программы.

зывать физ. замену машинных носителей информации и т. л. В зависимости от класса решаемых задач набор блоков может несколько изменяться. Пример. Пусть имеется массив сведений по заводу М1, хранящийся на перфокартах; требуется выбрать из него записи, относящиеся к литейному цеху, и записать их в массив М2. Б.-с. п. для данного случая приведена на рис. 2. Первые два блока обеспечивают возможность обращения к массивам М1 и М2. В блоке «читать запись из массива М1» осуществляется ввод очередной перфокарты из массива М1. Два следующих блока проверяют, окончился ли массив М1, и, если нет, то относится ли запись к литейному цеху. Если относится, то такая запись пересылается в массив М2. Затем управление передается на блок чтения очередной записи из массива М1. Если массив М1 исчерпан, то закрываются массивы М1 и М2, и работа программы заканчивается.

Э. Н. Хотьшов.

**БЛОЧНЫЙ СИНТЕЗ ЦВМ** — представление структуры проектируемой цифровой вычислительной машины в виде композиции блоков и их связей с описанием функционирования каждого блока композиции и временной диаграммы

всей совокупности блоков. На этапе Б. с. ЦВМ решают следующие задачи: определяют по формальному описанию функционирования устройств набор типовых блоков, с помощью которого возможно реализовать это функционирование, описывают функционирование каждого блока в найденной композиции и характер связей между ними, анализируют временные соотношения между сигналами, поступающими на входы выделенных блоков, и сигналами, которые выходят из блоков (как информационными, так и управляющими). Задача представления устройства, функционирование которого описано в виде композиции типовых блоков из заданного набора, весьма сложна. Ее сложность определяется неоднозначностью допустимой декомпозиции исходного устройства на типовые блоки и противоречивость критериев, которыми руководствуется проектировщик при нахождении этой декомпозиции. Критериями, которые используются при решении задачи декомпозиции, могут служить: типизация (нахождение такой декомпозиции, при которой число различных используемых типовых блоков минимально, а в идеальном случае используется лишь один стандартный типовой блок), конструктивная однородность (нахождение такой декомпозиции, при которой типовые блоки объединены в одинаковые конструктивные единицы и связи между этими конструктивными единицами однотипны), миним. оборудование (поиск декомпозиции, дающий наименьшее суммарное число элементов в совокупности типовых блоков, используемых при синтезе) и т. д.

Общего метода решения задачи поиска композиции типовых блоков, которая обеспечивала бы необходимое функционирование синтезируемого устройства, не существует, и решение этой задачи носит, как правило, эвристический характер. Более или менее строгие методы существуют лишь на уровне *элементного синтеза ЦВМ*, когда из отдельных *логических элементов ЦВМ* синтезируются сами типовые блоки ЦВМ (*сумматоры, регистры, дешифраторы, счетчики* и т. п.). В этом случае удается использовать развитый аппарат теории *переключаемых функций*. Если при Б. с. ЦВМ используются типовые блоки, то описание функционирования этих блоков и реализация их на уровне выбранной системы элементов, как правило, известны. Если же выделяются нестандартные блоки, то их функционирование формально описывается и они синтезируются либо из типовых субблоков (т. е. решается снова задача Б. с. ЦВМ, но уже относительно блока), либо непосредственно из элементов, входящих в выбранную элементную базу (при этом, если элементы рассматривать как типовые субблоки, то формально снова решается задача Б. с. ЦВМ).

После нахождения композиции блоков, соответствующей синтезируемому устройству, необходимо описать связи между блоками. Эти связи бывают двух типов: информационные (функциональные), определяющие направление передачи информации из одного блока

в другой, и управляющие, которые определяют передачу сигналов управления между блоками композиции и между устройствами (для блоков, внешние каналы которых совпадают частично или полностью с каналами между устройствами, выделенными и описанными на предшествующих этапах синтеза). Совокупность выделенных блоков и связей между блоками одной композиции и блоками, относящимися к различным устройствам, определяет блочную структуру ЦВМ.

Как и на этапе выделения *алгоритмической структуры ЦВМ*, блочную структуру ЦВМ можно формально описать на *алгоритмическом языке* (напр., на языках типа *СИМУЛА, СИМСКРИПТ, СЛЭНГ* и др.) и провести моделирование на реально существующей ЦВМ. В результате моделирования можно установить необходимые временные соотношения в работе блоков, объемы буферных накопителей, необходимых для согласования работы блоков, проверить правильность работы блоков и т. д. См. также *Автоматизация проектирования ЦВМ, Алгоритмический синтез ЦВМ, Блоки ЦВМ типовые*.

Лит.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]; Геллер С. И., Журавлев Ю. П. Основы логического проектирования цифровых вычислительных машин. М., 1969 [библиогр. с. 266—267]; Рabinovich З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [библиогр. с. 299—301].

Д. А. Постелов.

**БОЛЬША ЗАДАЧА** — одна из наиболее общих вариационных задач с хорошо развитой теорией необходимых и достаточных условий экстремума. Формулируется так: среди всех гладких кривых  $y(x)$ , удовлетворяющих дифференциальным уравнениям связи

$$\Phi_i(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y = (y_1, \dots, y_n), \quad i = \overline{1, m}, \quad m < n$$

и граничным условиям

$$\varphi_j(x_1, y(x_1)) = 0, \quad (2)$$

$$i = \overline{1, p}, \quad p \leq n + 1, \quad x_2 = a, \quad y(x_2) = b, \\ b = (b_1, \dots, b_n)$$

найти такую, которая доставляет минимум функционалу

$$I(y(x)) = g(x_1, y(x_1)) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx. \quad (3)$$

Чтобы такая задача имела смысл, ф-ции  $\Phi_i$ ,  $\varphi_j$ ,  $g$ ,  $f$  должны удовлетворять определенным требованиям (в частности, система (1) должна допускать представление в виде  $y'_i = F_i(x, y)$ , где  $F_i$  — дифференцируемые ф-ции своих аргументов, ф-ции  $\varphi_j(x, y)$ ,  $i = \overline{1, p}$  должны быть независимыми и т. д.). Гладкие либо кусочно-гладкие ф-ции  $y(x)$ , удовлетворяющие уравнениям (1), (2), наз. допустимыми.

В приведенной форме Б. з. является задачей с подвижным левым и фиксированным правым

концами. Можно рассмотреть Б. з. с обоими подвижными концами. Частными случаями Б. з. является *Майера задача* (когда в функционале  $I f \equiv 0$ ) и *Лагранжа задача* (когда  $g \equiv 0$ ).

Б. з. может быть сведена к любой из последних двух задач. Например, если рассматривать кривые  $(y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x))$ , подчиненные, кроме условий (1) — (2), дополнительным условиям  $y'_{n+1} = f(x, y, y')$ ,  $y_{n+1}(x_1) = 0$ , и записать  $I$  в виде  $I = g(x_1, y(x_1)) + y_{n+1}(x_2)$ , то в таком виде Б. з. эквивалентна задаче Майера.

Важную роль в теории Б. з. играет правило множителей: для каждой допустимой кривой  $C$ , доставляющей минимум  $I$ , существуют ф-ции  $\lambda_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , ограниченные и непрерывные на  $(x_1, x_2)$  (за исключением значений  $x$ , соответствующих угловым точкам  $C$ ), и константа  $\mu_0$  такие, что ф-ция  $F(x, y, y', \lambda) = \mu_0 f + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \Phi_i$  вдоль  $C$  удовлетворяет почти всюду ур-ниям

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y_i} dx + C_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где  $C_i$  — постоянные, а для подвижного (левого) конца кривой  $C$  выполняется условие *трансперсальности*:

$$\left( F - \sum_{i=1}^n y_i' \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) dx + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i'} dy_i + \mu_0 dg|_{x=x_1} = 0. \quad (5)$$

Следствия, вытекающие из правила множителей:

1. В каждой точке допустимой кривой  $C$ , удовлетворяющей ур-ниям (4), кроме угловых точек, справедливы равенства (в предположении, что соответствующие производные существуют)

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (6)$$

ур-ния Эйлера.

2. В каждой угловой точке кривой  $C$ , удовлетворяющей ур-ниям (4), левый и правый пределы каждой из ф-ций  $\frac{\partial F}{\partial y_i'}$ ,  $i = \overline{1, n}$  сов-

падают — условия Вейерштрасса — Эрдмана. Допустимая кривая, для которой справедливы ур-ния Эйлера, наз. *экстремалью*. Кроме ур-ний Эйлера, необходимо выполняющихся для любой кривой, дающей минимум  $I$ , для Б. з. известны необходимые условия Вейерштрасса, Клебша и т. н. четвертое необходимое условие минимума. Известны также условия, достаточные для того, чтобы допустимая

кривая  $y(x)$  давала минимум  $I$ . Каждое из этих условий может быть получено, если на ф-ции  $f$ ,  $\Phi_i$ ,  $\Phi_j$  и т. д. накладывать дополнительные требования.

Теория Б. з. используется при решении различных задач оптимизации, в частности, задач, связанных с изучением движущихся объектов. Лит. см. к ст. *Вариационное исчисление*.

Ю. М. Данилин.

**БОЛЬШАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ СХЕМА** (БИС) — интегральная схема, содержащая тысячи компонентов и выполняющая функции целого узла электронной аппаратуры. На БИС строятся вычисл. машины 4 поколения (см. *Электронная вычислительная машина*).

**БОЛЬШИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ** — см. *Сложные системы управления*.

**БОЛЬШОЙ ЧИСЕЛ ЗАКОН** — общий принцип, в силу которого совокупное действие

большого числа случайных факторов приводит, при некоторых весьма общих условиях, к результату, почти не зависящему от случая.

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — последовательность случайных величин,  $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$  — сумма  $n$  первых из них,  $A_n = MS_n = M\xi_1 + \dots + M\xi_n$  — математическое ожидание  $S_n$ .

Говорят, что указанная последовательность подчиняется Б. ч. з., если при любых  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$  найдется такое  $N$ , что для всех  $n \geq N$  с вероятностью, не меньшей  $1 - \delta$ , среднее арифметическое  $S_n/n$  уклоняется от  $MS_n/n$  не

более, чем на  $\varepsilon$ . Если величины  $\xi_1, \xi_2, \dots$  взаимно независимы и имеют одну и ту же ф-цию распределения, то для применимости Б. ч. з. достаточно, чтобы  $\xi_k$  имели конечное матем.

ожидание (очевидно, одно и то же для всех  $\xi_k$ :  $M\xi_k = a$ ). В этом случае  $MS_n/n = a$ , и Б. ч. з. утверждает, что при больших  $n$  среднее арифметическое  $S_n/n$  практически совпадает с  $a = M\xi_k$ . В общем случае для примени-

мости Б. ч. з. достаточно, чтобы  $B_n^2/n^2 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  (здесь  $B_n^2 = DS_n$  — дисперсия  $S_n$ ). См. также *Вероятностей теория*.

Н. П. Слободенюк.

**БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА МЕТОД** — один из численных методов решения операторных уравнений. См. также *Операторных уравнений способы решения*.

**БУЛЕВА АЛГЕБРА** — алгебраическая структура с двумя бинарными операциями  $x \cup y$ ,  $x \cap y$ , одной унарной операцией  $x'$  и двумя выделенными элементами «0» и «1», для которой справедливы следующие равенства (аксиомы Б. а.):

$$x \cup y = y \cup x;$$

$$x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z;$$

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z);$$

$$x \cup 0 = x;$$

$$x \cup x' = 1;$$

$$x \cap y = y \cap x;$$

$$x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z;$$

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z);$$

$$x \cap 1 = x;$$

$$x \cap x' = 0.$$

Названа по фамилии англ. математика Дж. Буля (1815—64), который ввел ее, изучая законы логики (исчисление классов, *исчисление высказываний* и исчисление отношений). Используют Б. а. в *алгебре множеств*, *алгебре логики*, *вероятностей теории*, *релейно-контактных схем теории* и др.

Лит.: В л а д и м и р о в Д. А. Булевы алгебры. М., 1969 [библиогр. с. 308—313]; С и к о р с к и й Р. Булевы алгебры. Пер. с англ. М., 1969 [библиогр. с. 340—369]. Б. Г. Парахин.

**БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ** — функции, которые, как и их аргументы, принимают значения в области из двух элементов. В качестве этих элементов в *логике математической* берут значения «истинно» и «ложно», а в *автоматов теории* — «0» и «1». Б. ф. названы по фамилии англ. математика Дж. Буля (1815—64), работы которого положили начало развитию *алгебры логики*. Б. ф.  $f(x_1, \dots, x_n)$  полностью определяется заданием ее значений на всех наборах значений ее аргументов, число которых равно  $2^n$ . Эти значения можно задавать, напр., в виде таблицы или в виде вектора, у которого на  $i$ -м месте ( $i = 1, 2, \dots, 2^n$ ) стоит значение  $f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ , где  $x_1^0 \dots x_n^0$  — запись числа  $i - 1$  в двоичной системе счисления. Б. ф. можно задавать также аналитически, в виде выражений, представляющих собой суперпозиции некоторых Б. ф. (принятых за исходные) и переменных (в частности, в виде формул алгебры логики, в т. ч. дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм). Амер. математик Э. Пост (1897—1954) нашел необходимые и достаточные условия полноты любой системы  $S$  Б. ф., т. е. условия выразимости любой Б. ф. с помощью суперпозиции Б. ф. из  $s$  и переменных. Э. Пост также построил все замкнутые (относительно суперпозиции) классы Б. ф. и нашел их базисы, т. е. в определенном смысле миним. подклассы таких Б. ф., через которые выражаются все Б. ф. данного класса.

Б. ф.  $f(x_1, \dots, x_n)$  задают также графически — на  $n$ -мерном единичном гиперкубе, каждая вершина которого с координатами  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  отмечается значением  $f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Мн-во Б. ф.  $n$  переменных с определенными на нем операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции (см. *Логические операции*) образует свободную булеву алгебру с  $n$  образующими. Любая другая булева алгебра с  $n$  образующими есть гомоморфный образ алгебры Б. ф.  $n$  переменных и тем самым изоморфна алгебре классов эквивалентности, задаваемых в алгебре Б. ф. каким-нибудь отношением конгруэнтности.

Б. ф. применяют при построении контактных, релейно-контактных схем, схем из пороговых элементов, схем из т. н. функциональных элементов в некотором базисе (напр., схем из

элементов, реализующих ф-ции  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\neg$ ) и т. п. Б. ф. реализуют схемно, исходя из того, что их можно представить в виде суперпозиции Б. ф. из какой-нибудь фиксированной функционально полной системы Б. ф. От сложности представления зависит сложность схемы. Это приводит к важной проблеме — минимизации булевых функций, т. е. нахождения наиболее простых их представлений.

Две Б. ф.  $n$  переменных наз. ф-циями одного типа, если одну из них можно получить из другой с помощью некоторой перестановки аргументов и замены некоторых аргументов их отрицаниями. Б. ф. одного типа реализуются физически одинаковыми схемами. Число

Б. ф.  $n$  переменных равно  $2^{2^n}$ , оно очень быстро растет с ростом  $n$  (напр.,  $2^{2^3} = 256$ ,  $2^{2^4} = 65\,536$ ). Правда, с точки зрения схемной реализации можно ограничиться рассмотрением только типовых Б. ф. Имеется всего 402 различных типа Б. ф. четырех переменных. Но уже при  $n = 6$  число типов измеряется квадриллионами. Почти все Б. ф. допускают лишь очень сложную схемную реализацию: каждая Б. ф.  $n$  переменных требует для своей схемной реализации асимптотически не менее  $\frac{2^n}{n}$  кон-

тактов (см. *Шеннона функция*). Поэтому исследуют также классы Б. ф., существенно более узкие, чем мн-во всех Б. ф.: классы Б. ф. линейных, монотонных, самодвойственных, симметрических, инвариантных, относительно инверсий некоторых аргументов, Б. ф., имеющих значение «1» на небольшом мн-ве наборов и т. д. В теории автоматов и тех. приложениях рассматривают также частичные Б. ф., т. е. ф-ции, возможно, не определенные для некоторых значений их аргументов.

Лит.: Г л у ш к о в В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]; Я б л о н с к и й С. В., Г а в р и л о в Г. П., К у д р я в ц е в В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М., 1966 [библиогр. с. 113—115]. В. Ф. Костырко.

**БУХГАЛТЕРСКОГО УЧЕТА АВТОМАТИЗАЦИЯ** — использование в сфере бухгалтерского учета технических средств сбора, передачи и обработки информации с целью максимальной повышения оперативности учета и достоверности получаемых данных, а также снижения трудоемкости выполняемых операций, чтобы наиболее эффективно использовать учетную информацию в планировании и управлении хозяйством. Бухгалтерский учет в настоящее время совершенствуют в основном в таких направлениях: повышают его аналитичность; обеспечивают правильную эконо. группировку затрат для определения их эффективности и осуществляют широкую механизацию учетно-вычисл. работ с целью повышения производительности труда счетных работников. Качество учета, его четкость и своевременность во многом зависят от применяемых форм счетоводства, от того, насколько эти формы способствуют рационализации работ и автоматизации процессов обработки данных. В связи с ускорением темпов развития х-в и усложнением внутр. и внеш. связей предприятий начал



отставать учет, особенно техника обработки информации.

В учетном процессе различают две стадии. На первой стадии (первичный учет) производят измерения и регистрацию учетных данных; на второй (оперативный и бухгалтерский учет) — их систематизацию и обобщение в учетных регистрах. Для первичного учета применяют офицированную и мерную тару, обычные и счетные весы, количественные датчики, счетчики, различные измерит. приборы, фиксирующие заданные режимы или отклонения от них. Для ускорения процесса регистрации учетных данных и механизации процессов подготовки первичных документов используют бланки постоянных реквизитов и шифров, изготовленные типографским способом. Документы заполняют с помощью множительных аппаратов и номенклатурно-адресовальных машин. Для механизации записи данных применяют пишущие машины, телеграфные аппараты, счетно-клавишные машины (фактурные, бухгалтерские), регистраторы информации, счетно-перфорационные машины. Применение ЭВМ для Б. у. а. дает возможность решать два осн. вопроса: во-первых, анализировать осн. характеристики работы предприятий пром-сти, транспорта, с. х. и культурно-бытового обслуживания и выбирать наиболее рациональные формы и способы учета, планирования и организации работ; во-вторых, автоматизировать процессы получения и обработки информации, а в результате — повысить оперативность и точность управления. Решение этих вопросов позволяет поднять общую эффективность общественного труда и более рационально использовать хоз. ресурсы. Применение вычисл. техники дает возможность организовать маш. обработку учетной информации и вводить счета в качестве регистра для ведения бухгалтерского учета на ЭВМ. При обработке первичной бухгалтерской документации на ЭВМ руководствуются следующим: метод обработки документов должен способствовать функционированию системы автомат. ведения учета независимо от формы представления данных в документах, кроме того документ должен подвергаться обработке только один раз, синтез его содержания должен быть полным, а формальная запись в реквизитах — пригодна для непосредственного ввода в машину без дополнительных преобразований. Наличие в памяти ЭЦВМ массивов, содержащих полную информацию о состоянии хоз. деятельности предприятий и ее динамике, позволяет получать требуемые данные бухгалтерского учета и отчетности по установленной форме.

Опыт применения средств вычисл. техники в экономике показывает, что наибольший эффект достигается тогда, когда задачи учета, планирования и управления решают в едином комплексе, начиная от первичных данных и кончая построением синтетических показателей, необходимых для отчетности и управления хозяйством. При решении задач учета в автоматизированных системах управления предприятием можно не только комплексно ис-

пользовать информацию, но и намного упростить подготовку исходных данных (которая бывает более трудоемкой, чем при решении тех же задач старыми способами). При централизованном сборе и обработке информации, которые характерны для автоматизированной системы управления, определенная часть учетной информации может быть собрана и введена в ЭЦВМ для обработки без непосредственного участия человека, т. е. появляется возможность автоматически собирать часть учетной информации, автоматически ее классифицировать и континировать (относить к определенным статьям). Автомат. континировка существенно сокращает к-во ручных операций по обработке документации бухгалтерского учета, сокращает к-во ошибок, неизбежных при ведении учета вручную.

В связи с централизацией учета и применением вычисл. техники изменяется организация обработки данных. Машиносчетные бюро и машиносчетные станции уступают место информационно-вычислительным центрам, оснащенным ЭЦВМ, тех. возможности которых позволяют организовать обслуживание нескольких предприятий. В процессе совершенствования тех. средств, обеспечивающих механизированный и автоматизированный сбор и передачу учетных данных, а также их обработку в *вычислительных системах*, нар.-хоз. учет превращается в единую, централизованную информационную систему, обеспечивающую органы планирования и управления оперативной и достоверной информацией.

В последние годы интенсивно развивается производство счетно-вычисл. техники, применение которой существенно влияет на организацию учета. Большое к-во разнообразных счетно-вычисл. машин, начиная от простейших клавишных и кончая ЭВМ, применяют почти на всех пром. предприятиях и гос. учреждениях. Характерно, что счетно-вычисл. техника начинает превращаться из вспомогательного средства в учете в фактор, определяющий организацию бухгалтерского учета. Доминирующее значение приобретает оперативность выдачи данных бухгалтерского учета, используемых руководителями предприятий для принятия решений.

Лит.: Королев М. А. Вопросы применения электронных вычислительных машин в планировании и учете. М., 1960; Исаков В. К вопросу о формах организации механизированного учета и вычислительных работ. В кн.: Механизация учета, отчетности и вычислительных работ. М., 1961; Додонов А. А. Проблемы бухгалтерского учета в промышленности СССР. М., 1964.

В. Б. Ефетов.

**БЫСТРОДЕЙСТВИЕ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ** — скорость реакции системы на возмущающие режим ее работы воздействия. Оценивается длительностью *переходного процесса* —  $t_d$ , которая может быть определена аналитически (если известно матем. описание системы) и экспериментально. Для определения  $t_d$  широко используются приближенные методы. Так, для систем с единичной обратной связью можно оценить  $t_d$ , если известна частота среза системы  $\omega_c$ , опре-

деляемая из условия  $|W(j\omega_c)| = 1$ , где  $W(j\omega)$  — амплитудно-частотная характеристика разомкнутой части системы. Показано, что  $t_d$  — величина ограниченная и лежит в пределах  $\frac{\pi}{\omega_c} < t_d < \frac{4\pi}{\omega_c}$ . В системах со слабо колебательным переходным процессом  $t_d \approx$

$\frac{\pi}{\omega_c}$ . Б. в с. а. у. может быть повышено за счет увеличения коэфф. усиления и использования различных *корректирующих устройств*.

Требования к Б. в с. а. у. и устойчивости систем противоречивы. Ограничения, накладываемые на координаты систем, и устойчивость определяют предел повышения быстродействия. Б. Ю. Мандровский-Соколов.

**БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ЦВМ** — характеристика скорости работы цифровой вычислительной машины; измеряемая количеством *операций машинных (команд)* за единицу времени. Диапазон значений Б. ЦВМ — от  $10^2$  до  $10^7$  —  $10^8$  операций за 1 сек. Напр., Б. малой ЦВМ «Промінь» — порядка  $10^2$  операций за 1 сек, а сверхбольшой *вычислительной системы* «ILLIAC-IV» — порядка  $10^8$  операций за 1 сек. В связи с тем, что длительность разных операций неодинакова, Б. можно выразить одним числом, определяя длительность условной «средней» операции, которая зависит от того, насколько часто встречаются разные операции в разных программах. Такая частота зависит от состава рассматриваемых программ, а состав — от вида применения ЦВМ, характеризуемого классом решаемых задач. Оценку Б. в настоящее время связывают с классом задач, пользуясь представительной (характерной, типичной) смесью команд, или с типовой (образцовой) задачей. Смесью задается частота встречи (типов) операций, а типовая задача — общим методом формулировкой алгоритма и заданием численных значений осн. исходных параметров. Примеры смесей — т. н. смеси Гибсона, примеры типовых задач — обращение матрицы, составление ведомости на зарплату. С помощью смеси Б. можно выразить числом операций за 1 сек, а с помощью типовой задачи — временем ее решения.

Разнообразное применение ЦВМ потребовало использования близких по смыслу Б. скоростных характеристик. К характеристикам относятся: пропускная способность ЦВМ, работающей в контуре управления; время реакции в различных системах взаимодействия с ЦВМ (в т. ч. в диалога режиме); производительность ЦВМ, измеряемая количеством задач, решенных за сутки (или за год) на ЦВМ *вычислительного центра*.

Теория и практика построения ЦВМ, кроме понятия Б. машины в целом, используют также понятия скоростных характеристик более низкого уровня. К ним относятся: быстродействие элементов (напр., время переключения, задержка сигнала, рабочая частота), узлов (напр., число тактов рабочей частоты, затрачиваемых на исполнение некоторого элементар-

ного действия), устройств (напр., время выполнения операции *арифметическим устройством*, время обращения к запоминающему устройству), некоторых функциональных систем (напр., время прерывания — возобновления программы *системой прерывания ЦВМ*). Быстродействие верхнего уровня зависит от быстродействия нижнего уровня, напр., от быстродействия элементов зависит быстродействие узлов, устройств, функциональных систем и Б. ЦВМ в целом. Физико-технологический прогресс вычисл. техники обеспечивает увеличение быстродействия элементов вплоть до приближения времени переключения ко времени распространения сигнала. Одновременно происходит уменьшение габаритов и удешевление аппаратуры, что позволяет усложнить элементы до уровня узлов и укрупнить элементарные (однотактные) действия, т. е. повысить быстродействие нижнего уровня.

В первых ЦВМ порядок следования этапов машинной обработки был простой: одна задача последовательно проходила этапы ввода, обработки и вывода, занимая на каждом этапе соответствующую часть оборудования и вызывая простаивание остального оборудования. Тогда ввод — вывод был небольшим по объему и занимаемому времени по сравнению со временем переработки. Б. ЦВМ определялось, по существу, самым узким местом машины — арифм. устройством. Затем ввод — вывод стал большим по объему (из-за расширения эконом. применений) и по доле занимаемого времени (т. к. быстродействие оборудования обработки увеличивалось с большей скоростью, чем быстродействие оборудования ввода — вывода и «быстродействие» пользователей и персонала). Для устранения простоев дорогостоящего быстродействующего оборудования в ЦВМ ввели мультипрограммную обработку (см. *Мультипрограммирование*) и режим *разделения времени*. Это позволило увеличить производительность ЦВМ путем *совмещения операций в машине* во времени (ввода — вывода с обработкой). Совмещены были также отдельные этапы исполнения команд и операций. Все это повысило интенсивность работы (загрузку) ЦВМ на всех уровнях, а также интенсивность *взаимодействия человека с вычислительной машиной*, т. е. фактическое быстродействие приблизилось к максимальному при заданном оборудовании. Далее Б. ЦВМ повышалось путем введения мультипроцессорной обработки и построения *вычислительных сред*.

В связи с описанным выше усложнением организации ЦВМ, связанным с увеличением количества единиц оборудования ввода, вывода, обработки и запоминания, которое может работать одновременно и независимо, возникла необходимость иметь средства, обеспечивающие автомат. слежение за всем этим оборудованием и его загрузкой. Такими средствами стали спец. функциональные узлы и системы ЦВМ, прежде всего система прерывания и *управляющие программы* (см. *Операционная система*). Исполнение управляющих и обслуживающих программ может занимать значительную долю

времени работы ЦВМ, вызывая простаивание решаемых задач, т. е. потерю производительности, или фактического Б. ЦВМ.

Так, например, программы планирования загрузки периферийного оборудования и реакции на прерывания вызывают простаивание задач при мультипрограммной обработке, а *транслятор* влияет на производительность при работе на языке высокого уровня. Следовательно, при определении фактического Б. ЦВМ или ее производительности нужно учитывать, кроме быстродействия аппаратуры, быстродействие программ операционной системы и системы программирования. Упомянутое выше удешевление аппаратуры позволит повысить Б. ЦВМ путем увеличения количества аппаратуры при той же стоимости. Спец. дополнительная аппаратура может принять на себя и ряд функций управляющих и обслуживающих программ, в связи с чем снизятся непроизводительные потери Б. ЦВМ.

Определение Б., данное в начале статьи, относится к аппаратной скоростной характеристике ЦВМ, причем из аппаратуры рассматривается только центр. процессор (ЦП), который производит осн. переработку данных, т. к. он пропускает через себя последовательность команд исполняемой программы. Обычно предполагается, что быстродействие ЦП согласовано с быстродействием *оперативного запоминающего устройства* (ОЗУ), т. е. ЦП не простаивает из-за невозможности обращения к ОЗУ, связанной с недостаточным быстродействием последнего. Кроме того, при заданном быстродействии ЦП объем и быстродействие ОЗУ должны быть такими, чтобы это устр-во могло вместить достаточное к-во обрабатываемой и готовой к обработке в ЦП информации и одновременно вместить и допустить обращение (со стороны устр-в ввода — вывода) к вводимой и выводимой информации.

Иногда для характеристики центр. части ЦВМ используют быстродействие ЦП и объем ОЗУ, называя их вычисл. мощностью. Характеризуя некоторый парк ЦВМ, используют, в частности, их суммарное быстродействие. Полная аппаратная скоростная характеристика современной ЦВМ может быть представлена набором выраженных в соответствующих единицах скоростных характеристик ЦП, ОЗУ, периферийных устр-в и, возможно, линий связи, поскольку нельзя указать единственную компоненту, определяющую быстродействие (узкое место). Сравнение двух ЦВМ по таким наборам затруднительно. Существует общий подход к аналитическому определению единых сравнительных оценок (эффективного быстродействия и его цены), основанному на учете некоторых весовых коэфф., характеризующих работу ЦВМ в целом и ее частей. На практике при определении Б. ЦВМ используются методы цифрового моделирования и испытания на образцовых типовых задачах или на синтетических представительных смесях команд.

Лит.: Глушков В. М. Два универсальных критерия эффективности обчисловальных машин. «Доповіді АН УРСР», 1960, № 4; Dugmont M. E. (Jr).

A perspective on system performance evaluation. «IBM systems journal», 1969, v. 8, № 4. А. А. Барабанов. **БЭКУСА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА** — частный вид формальных грамматик порождающего типа, описывающих класс контекстно-свободных языков. Б. н. ф. ввел амер. матем. Бэкус для описания языка *АЛГОЛ-60*. В дальнейшем эти грамматики получили широкое признание и распространение. Б. н. ф. задается словарем терминальных (или основных) символов (напр., в АЛГОЛе-60 — это буквы, цифры, логич. значения, знаки операций, разделители, скобки, вспомогательные слова: *real, integer, Boolean, procedure* и др.), словарем нетерминальных символов (называемых *метапеременными*), один из которых наз. аксиомой, и совокупностью металингвистических формул (МЛФ), каждая из которых предназначена для определения одной метапеременной (в языках программирования аксиоме соответствует понятие *программы*). Каждая МЛФ строится из терминальных и нетерминальных символов с помощью металингвистических связей:  $=$  (означает «равно по определению») и  $\text{vert. черты}$  (означает «или»); каждая из них задает правило порождения допустимых значений соответствующих метапеременных, которыми являются осн. символы или их *цепочки*, расположенные между разделителями  $|$  или получающиеся посредством последовательной замены в этих цепочках метапеременных их допустимыми (порождаемыми) значениями.

Примером Б. н. ф. является задание синтаксиса целого числа в описании АЛГОЛа-60:

$$\langle \text{целое} \rangle :: = \langle \text{цифра} \rangle | \langle \text{целое} \rangle \langle \text{цифра} \rangle$$

$$\langle \text{цифра} \rangle :: = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9.$$

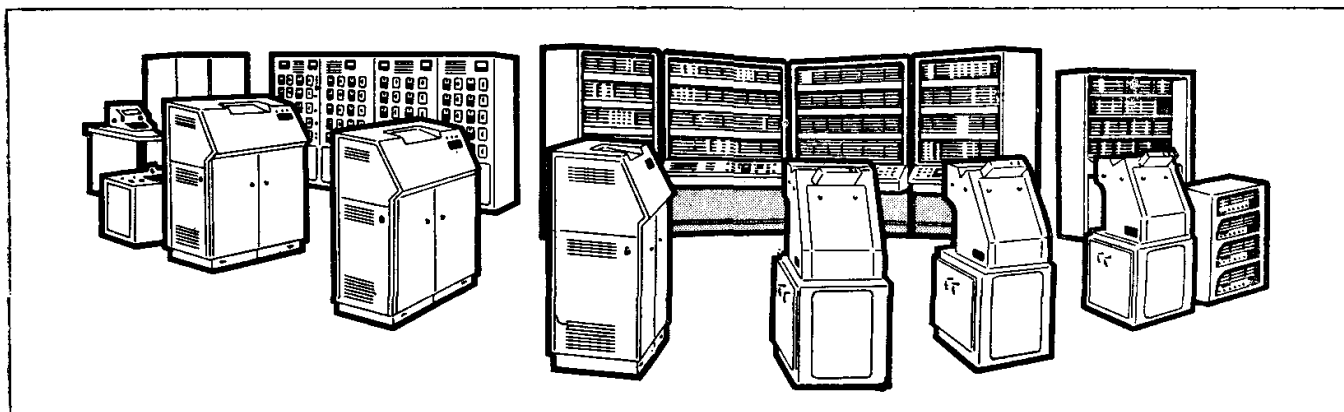
Здесь  $\langle \text{целое} \rangle$ ,  $\langle \text{цифра} \rangle$  есть метапеременные, а цифры от 0 до 9 — осн. символы языка. Это определение целого числа является рекурсивным, согласно которому любая цифра — целое число, или любое целое, к которому справа приписана цифра, также является целым числом и позволяет получить число в виде произвольной последовательности цифр, напр., 2379, 8, 032 и т. д. См. также *Грамматика формальная*.

«БЭСМ» — семейство цифровых вычислительных машин общего назначения, ориентированных на решение сложных задач науки и техники. Разработано в Ин-те точной механики и вычислительной техники АН СССР.

Работа над первой машиной была закончена в 1952. В этой трехадресной машине параллельного действия на электронных лампах (4000 ламп) использована двоичная система счисления с плавающей запятой. По структуре, конструкции и характеристикам машина стояла на уровне лучших зарубежных машин. «БЭСМ» оперировала с 39-разрядными словами со средней скоростью 10 тыс. операций в 1 сек. Вначале в ней использовалось оперативное ЗУ на электронно-акустических линиях задержки, замененное в дальнейшем устройством на электроннолучевых трубках, а затем — на ферритовых сердечниках емкостью 1024 слова с произвольной выборкой. Внешнее ЗУ — на

двух магн. барабанах по 5120 слов (скорость считывания с барабана — 800 чисел в 1 сек) и магн. ленте (120 тыс. чисел). В качестве устройств ввода использовалась перфолента, для вывода — магн. лента с последующим печатанием на специально разработанном быстродействующем фотопечатающем устройстве, применяемом для выдачи больших массивов данных. Кроме того, имелось электромеханическое печатающее устройство для печати контрольных значений и результатов в случае их малого количества по сравнению с объемом

арифм. устройства и устройства управления; в машине пять уровней предварительного просмотра команд. Структура машины рассчитана на применение ее в *режиме разделения времени* и *мультипрограммирования*. Обеспечивается это аппаратной системой прерывания, схемой защиты памяти, индексацией и развитой системой преобразования виртуальных матем. адресов и физ. адреса оперативной памяти в динамике счета. Предусмотрена возможность использовать любую часть памяти как *запоминающее устройство магазинное*. В машине



Цифровая вычислительная машина «БЭСМ-6».

вычислений (скорость работы — 20 чисел в 1 сек).

Интересными особенностями структуры машины было введение местного управления операциями, выходящими по времени за рамки стандартного цикла, а также автономное управление при переходе на *подпрограммы*. Машина содержала долговременное запоминающее устройство для подпрограмм, часть которого была сменной. Для контроля применялись как серия тестов, так и специально разработанные методы логического контроля.

За 1959—66 годы было создано 4 модели этого семейства: «БЭСМ-2», «БЭСМ-3», «БЭСМ-3М» и «БЭСМ-4». Совершенствование шло по пути увеличения и модернизации внешних устройств, перехода на полупроводниковую элементную базу, увеличения емкости ОЗУ на магн. сердечниках, а также емкости внешних ЗУ.

В 1967 создана самая мощная вычислительная машина данного семейства — «БЭСМ-6» (быстродействие ее около 1 млн. операций в 1 сек, см. рис.). Применение в машине одноадресной системы команд подтверждает общую тенденцию повышения гибкости командного управления. Характерными чертами внутренней организации центральной части машины являются в частности следующие: высокая степень локального параллелизма, наличие сверхбыстродействующего *запоминающего устройства буферного*, расширенная система операций, возможность организации магазинной памяти и разбиение оперативной памяти на независимые блоки. В машине широко используется совмещение выполнения операций обращения к оперативному ЗУ с работой

предусмотрены и косвенная адресация и широкие возможности переадресации.

В центральном процессоре машины имеется 16 быстродействующих регистров, работающих со скоростью 300 нсек. Тех. характеристики его таковы: длина слова — 50 разрядов (2 для проверки на парность); система счисления — двоичная; форма представления чисел — с плавающей запятой; время выполнения операций: сложения — 1,2 мсек, умножения — 2,1 мсек; система команд — одноадресная; длина команды — 24 двоичных разряда (2 на слово); количество осн. команд — 50 плюс экстракоды; емкость ОЗУ на сердечниках — 32 тыс. слов (8 блоков), ее можно расширить до 128 тыс. слов; время обращения к ОЗУ — 2 мсек; число линий прерывания — 40; время выборки из памяти — 0,8 мсек; тактовая частота — 10 Мгц. Электронная часть машины включает 120 тыс. диодов и 40 тыс. транзисторов. Внешние ЗУ: 16 барабанов емкостью по 32 тыс. слов и 32 лентопротяжных механизма с емкостью бобины на каждом механизме в 1 млн. слов.

В комплект устр-в системы ввода — вывода входят: устройство считывания с перфокарт — 700 карт в 1 мин; устройство считывания с перфолент — 1000 знаков в 1 сек; быстродействующее алфавитно-цифровое печатающее устройство на 96 знаков — 400 строк в 1 мин (128 знаков на строку); выходные карточные перфораторы — 100 карт в 1 мин; ленточные перфораторы — 20 знаков в 1 сек; 4 клавишных перфоратора; 1 контрольный для перфокарт и 2 ленточных перфоратора.

«БЭСМ-6» имеет развитое матем. обеспечение, в состав которого входят: *операционная систе-*

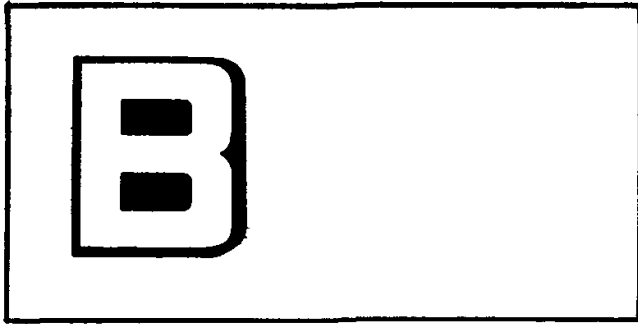
ма управления поточной обработкой задач и система программирования на символических машинно-ориентированных языках и на языках высокого уровня — на ФОРТРАНе, АЛГОЛе и ЛИСПе. В состав матем. обеспечения входят также пакеты стандартных программ для ФОРТРАНа и АЛГОЛа, охватывающие широкий круг инженерных и научно-технических задач. Общий объем математического обеспечения достигает нескольких сотен тысяч команд.

Операционная система (ОС) организует мультипрограммную обработку нескольких задач, каждая из которых располагает полным объемом виртуальной памяти, предусмотренной в машине. ОС распределяет физ. ресурсы памяти между задачами, используя ее постраничную организацию, обеспечивает одновременную, совмещенную с работой центр. процессора, работу внешних ЗУ и устр-в ввода — вывода; организует вызов в работу необходимых *трансляторов* и компиляторов, обращение к стандартным программам и следит

за правильностью выполнения рабочих программ, фиксируя ошибки, возникающие при их исполнении.

Система программирования на *автокоде* позволяет в символическом виде записывать программы, учитывающие все структурные особенности машины, и тем самым является средством получения наиболее эффективных программ. Системы программирования, основанные на языках высокого уровня (АЛГОЛе и ФОРТРАНе), представляют возможности формулировать задания в удобной и привычной матем. форме. Язык ЛИСП предоставляет широкие возможности для создания сложных логических программ.

Лит.: Лебедев С. А., Мельников В. А. Общее описание БЭСМ и методика выполнения операций. М., 1959; Машина вычислительная цифровая БЭСМ-6. В кн.: Изделия радиопромышленности. Каталог, т. 4. Вычислительная техника. Выпуск: Электронные цифровые вычислительные машины общего назначения. М., 1968; Грубов В. И., Кирдан В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. К., 1969 [библиогр. с. 179—181].  
Ц. В. Походило.



**ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ** — раздел математики, в котором изучаются методы отыскания экстремальных значений функционала. Понятие функционала, широко применяющееся в В. и., является обобщением понятия ф-ции: функционал — это ф-ция, аргумент которой — также ф-ция. Задание функционала  $I(y(x))$  равносильно заданию закона, по которому каждой ф-ции  $y(x)$  из некоторого класса ставится в соответствие определенное число. Физ. сущность функционалов может быть самой различной — длина, время и т. д. Поскольку ф-цию  $y(x)$  можно определить, задав ее значения в бесконечном числе точек, то функционал можно рассматривать как ф-цию бесконечного числа переменных, а В. и. — как соответствующее обобщение раздела дифференциального исчисления, занимающегося отысканием экстремальных значений ф-ций  $n$  переменных. Важное место в В. и. имеет понятие вариации (дифференциала)  $\delta I$  функционала — главной линейной части приращения функционала при переходе от ф-ции  $y(x)$  к близкой ф-ции  $y(x) + \delta y(x)$ . Значение

$$\delta I = \frac{d}{dt} I(y + t\delta y) \Big|_{t=0},$$

где  $t$  — числовой параметр. Для того, чтобы среди всех рассматриваемых ф-ций выделить те, на которых функционал достигает экстремального значения, необходимо знать условия (соотношения), характеризующие искомые ф-ции. Определение необходимых условий экстремума — одна из основных задач В. и. Необходимое условие экстремума формулируется так: чтобы функционал  $I(y)$  достигал экстремума при  $y = y_0$ , необходимо, чтобы вариация  $\delta I = 0$  при  $y = y_0$ .

Рассмотрим конкретные задачи В. и. Простейшая задача В. и.: среди дифференцируемых ф-ций  $y(x)$ , удовлетворяющих граничным условиям  $y(x_1) = a$ ,  $y(x_2) = b$ , необходимо найти ф-цию, на которой функционал

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (1)$$

достигает экстремального значения. Как в этой задаче, так и в других задачах В. и., для того, чтобы решение существовало, ф-ция  $f(x, y, y')$  должна удовлетворять определенным требованиям гладкости. Условие  $\delta I = 0$  для функционала (1) приводит к уравнению

(уравнению Эйлера)

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (2)$$

Искомые ф-циями могут быть только решения этого ур-ния. Значения постоянных, входящих в общий интеграл этого ур-ния, определяют с помощью граничных условий. Часто, кроме граничных условий, на ф-ции  $y$  налагаются дополнительные ограничения, напр., экстремум функционала (1) ищется лишь на ф-циях,

на которых функционал  $L(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y,$

$y') dx$  принимает заданное значение  $C$ . Это задача на условный экстремум. В таких задачах ограничения могут иметь также характер ур-ний (в том числе и дифференциальных), а функционал, экстремум которого ищется, может иметь более сложную структуру (см. *Лагранжа задача*, *Майера задача*, *Больца задача*). Для построения необходимых условий экстремума эти задачи сводятся к задачам без ограничений с помощью *Лагранжа правила множителей*. В. и. рассматривает также задачи с подвижными концами, когда необходимо отыскать экстремум функционала (1) среди ф-ций, концы которых не закреплены и могут перемещаться по заданным кривым. Поскольку эта задача отличается от простейшей только условиями на концах, то необходимое условие экстремума — ур-ние (2) — для нее сохраняется, но необходимо дополнительно определять положение концов ф-ции, на которой достигается экстремум функционала, на заданных кривых. Для этого пользуются условиями трансверсальности. Кроме необходимых условий экстремума, построенных с привлечением первой вариации функционала, могут быть построены необходимые условия, использующие вторую вариацию функционала (см. *Лежандра — Клебша условие*).

Непосредственное использование необходимых условий сводит задачу В. и. к решению дифф. ур-ний, что связано со значительными трудностями. Поэтому для получения ф-ций, на которых достигается экстремум функционала, в В. и. используются и прямые методы. Сущность этих методов заключается в построении каким-либо способом такой последовательности ф-ций  $y_k$ , что  $\lim_{k \rightarrow \infty} I(y_k) = \mu$ , где

$\mu$  — экстремальное значение функционала. Прямые методы позволяют получить приближенное решение задачи.

Первые задачи В. и. изучали И. Ньютон и братья Я. и И. Бернулли в конце 17 в. Как самостоятельная матем. дисциплина В. и. оформилось в 18 в. в трудах Л. Эйлера и Ж.-Л. Лагранжа. В середине 20 в. методы В. и. начали плодотворно использоваться во многих разделах математики и механики. В последнее время созданы новые разделы В. и. — теория оптимальных процессов (см. *Понтрягина принцип максимума*) и динамическое программирование (см. *Беллмана принцип оптимальности*) — и создается общая



теория экстремальных задач, позволяющая установить связь между этими разделами.

Лит.: Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. М.—Л., 1950; Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М., 1961; Блiss Г. А. Лекции по вариационному исчислению. Пер. с англ. М., 1950 [библиогр. с. 334—343]. Ю. М. Данилин.

**ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ** — методы приближенного решения задач прикладной математики, основанные на сведении исходной задачи к некоторой вариационной задаче, т. е. к задаче определения минимума некоторого функционала. Напр., решение краевой задачи для обыкновенного дифф. ур-ния (см. *Уравнений классификация*)

$$Ly = f \quad (1)$$

можно заменить задачей отыскания ф-ции  $y(x)$ , обращающей в минимум такой функционал, для которого (1) является ур-нием Эйлера (см. *Вариационное исчисление*). Это не единственный путь для получения функционалов, принимающих миним. значение при подстановке в них решения краевых задач. Можно, напр., решая краевую задачу для ур-ния (1), рассматривать функционал

$$I(y) = \int_a^b [Ly - f]^2 dx \quad (2)$$

в классе всех ф-ций, удовлетворяющих граничным условиям и обладающих достаточным к-вом непрерывных производных  $[a, b]$  — отрезок, на котором ищется решение). Можно также заменить (2) более общим функционалом

$$I(y) = \int_a^b p(x) [Ly - f]^2 dx, \quad (3)$$

где  $p(x)$  — некоторая положительная весовая функция. Функционалы (2) и (3) принимают наименьшее значение, равное 0, при подстановке в них решения краевой задачи. Такой способ получения функционалов наз. *наименьших квадратов методом*. Существуют и другие виды функционалов, минимум которых достигается на решении краевой задачи.

В общем случае, если операторное уравнение

$$Ay = f, \quad (4)$$

(где  $A$  — аддитивный симметричный оператор, определенный на всюду плотном в гильбертовом протр.  $H$  (см. *Пространство абстрактное* в функциональном анализе) мн-ве  $H_A$ , и  $(Ay, y) \geq 0$ ) имеет решение, то на этом решении функционал

$$I(y) = (Ay, y) - (y, f) - (f, y) \quad (5)$$

принимает наименьшее значение в  $H_A$ . Наоборот, если в  $H_A$  существует элемент  $y_0$ , минимизирующий функционал (5), то  $y_0$  является решением ур-ния (4). Функционалы (2) и (3) можно рассматривать как частные случаи функционала

$$I(y) = \|Ay - f\|^2.$$

Для отыскания наименьшего значения функционала применяют многие вычисл. методы (см. *Операторных уравнений способы решения*).

А. И. Березовский.

**ВАРИАЦИОННЫЙ РЯД** — упорядоченная в неубывающем порядке совокупность  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  членов выборки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  из генеральной совокупности с ф-цией распределения  $F(x)$ , т. е.  $x_1^*$  есть наименьшая из величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $x_2^*$  есть наименьшая из величин последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_n$  без  $x_1^*$  и т. д. *Случайные величины*  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  наз. *порядковыми статистиками*, или *членами В. р.*, а величину  $x_n^* - x_1^*$  — *выборочным размахом*. Известны распределения порядковых статистик и предельные распределения при  $n \rightarrow \infty$ . В. р. — одно из основных понятий *математической статистики*, поскольку в нем сосредоточивается вся информация, содержащаяся в выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , о значениях неизвестных параметров.

А. Я. Дороговцев.

**ВВОДА ИНФОРМАЦИИ УСТРОЙСТВО** — см. *Устройства ввода — вывода данных ЦВМ*.

**ВЕЙЧА ДИАГРАММА** — то же самое, что и *Карнау карта*.

**ВЕКТОР ОБОБЩЕННОГО ГРАДИЕНТА** выпуклой функции  $n$  переменных  $f(x)$  в точке  $x^*$  — вектор  $f_{x^*}$ , для которого при любом  $x \in E^n$  справедливо неравенство  $f(x) - f(x^*) \geq (f_{x^*}, x - x^*)$ , где

$E^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство. Если в точке  $x^*$  ф-ция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема, то вектор  $f_{x^*}$  определен однозначно и совпадает с *градиентом* ф-ции  $f(x)$ . Если же в точке  $x^*$   $f(x)$  не дифференцируема, вектор  $f_{x^*}$  определяется неоднозначно. Используя вектор  $f_{x^*}$ , можно построить итерационный процесс, дающий возможность отыскивать минимальное значение выпуклой недифференцируемой ф-ции. Аналогично определяется обобщенный градиент и в бесконечномерных пространствах.

Б. Н. Пшеничный.

**ВЕНГЕРСКИЙ МЕТОД** — один из методов решения транспортной задачи.

**ВЕРОЯТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** — см. *Распределение вероятностей*.

**ВЕРОЯТНОСТЕЙ ТЕОРИЯ** — математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений. Под случайным понимают такое явление, которое при многократном воспроизведении всех доступных фиксации условий его появления (условий опыта) приводит к различным результатам (исходам опыта). Эти различия в протекании явления обусловлены влиянием многочисленных не поддающихся точному учету факторов.

Случайные явления, как правило, носят массовый характер, т. е. многократно повторяются в неизменных или почти неизменных условиях. Поэтому говорят также, что В. т.

есть наука о закономерностях в массовых явлениях. Практика показывает, что в массовых случайных явлениях проявляются вполне определенные закономерности, своего рода устойчивости, свойственные именно массовым явлениям. Напр., при бросании монеты невозможно заранее предсказать, какая сторона монеты (герб или надпись) выпадет в данном конкретном опыте. Однако при увеличении числа бросаний частота появления герба (т. е. отношение числа появлений герба к общему числу бросаний) постепенно стабилизируется, приближаясь к числу  $1/2$ .

Центральным понятием В. т. есть понятие *вероятности*. Вероятность того или иного события можно оценить по результатам длинной серии опытов (наблюдений). В. т. позволяет находить значения вероятностей одних событий по известным вероятностям других событий, связанных каким-либо образом с первыми.

Наиболее просто определяют основные понятия В. т. как матем. науки в рамках т. н. элементарной В. т. В элементарной В. т. исходят из предположения, что каждый опыт  $s$  заканчивается (в зависимости от случая) одним и только одним из событий  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , которые наз. *элементарными событиями* (или *исходами*) опыта. Мн-во  $\Omega$  всех элементарных событий наз. *пространством элементарных событий*. С каждым элементарным событием  $\omega_k$  связывается положительное число  $p_k$  — *вероятность* данного исхода; при этом  $\sum_k p_k = 1$ . Каж-

дое событие  $A$ , связанное с данным опытом  $S$ , можно представить как событие, заключающееся в том, что «наступило или  $\omega_{i_1}$ , или  $\omega_{i_2}$ , ..., или  $\omega_{i_m}$ », где  $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_m}$  — некоторые элементарные события (записывается так:  $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_m}\}$ ); об исходах  $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_m}$  говорят, что они «благоприятствуют событию  $A$ ». Таким образом, мн-во всех событий, связанных с опытом  $S$ , отождествляется с мн-вом всех подмножеств пространства элементарных событий  $\Omega$ , в частности, само  $\Omega$  наз. *достоверным событием* (оно происходит при любом исходе опыта), а пустое подмн-во  $\emptyset$  пространства  $\Omega$  наз. *невозможным событием* (оно не происходит ни при каком исходе опыта). Вероятность  $P(A)$  события  $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$ , по определению, равна сумме вероятностей всех тех элементарных событий, которые благоприятствуют  $A$ , т. е.

$$P(A) = \sum_{k=1}^m P(\omega_{i_k}) = \sum_{k=1}^m p_{i_k}. \quad (1)$$

Из определения следует, что  $P(\Omega) = 1$ ,  $P(\emptyset) = 0$  и для любого события  $A$   $0 \leq P(A) \leq 1$ . В частности, когда  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$  (все исходы равновозможны), получаем т. н. классическое определение

вероятности

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}, \quad (2)$$

где  $n(A)$  — число исходов, благоприятствующих событию  $A$ , а  $n$  — общее число исходов опыта. Классическое определение сводит понятие «вероятности» к неопределяемому понятию «равновозможности».

**Пример.** При бросании двух игральных костей (кубиков из однородного материала с занумерованными от 1 до 6 гранями) возможны 36 взаимно исключающих друг друга исходов, которые можно обозначить  $(i, j)$ , где  $i$  — номер выпавшей грани на первой кости,  $j$  — на второй. Естественно считать все исходы равновероятными. Событию  $A$  — «сумма выпавших очков равна 6» — благоприятствуют 5 исходов, а именно:  $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2)$ , и  $(5, 1)$ , поэтому  $P(A) = 5/36$ .

Вопрос о выборе вероятностей  $p_k$  в каждой конкретной задаче лежит, по существу, вне В. т. как матем. науки. В одних случаях этот выбор можно произвести на основании обработки большого числа наблюдений, в других случаях (как, напр., в рассмотренном примере с игральной костью) на основании существующей объективной симметрии связи между условиями опыта и его исходами и т. д.

Объединением (или суммой) событий  $A_1$  и  $A_2$  наз. событие  $A$ , которое состоит в наступлении хотя бы одного из событий  $A_1$  и  $A_2$  (обозначается  $A = A_1 \cup A_2$ ). Пересечением (или произведением) событий  $A_1$  и  $A_2$  наз. событие  $A$ , которое заключается в совместном наступлении и события  $A_1$ , и события  $A_2$  (обозначается  $A = A_1 \cap A_2$ , или  $A = A_1 A_2$ ). Аналогично определяются объединение и пересечение любого числа событий

$A_1, A_2, \dots, A_m$  (обозначаются:  $\bigcup_{k=1}^m A_k, \bigcap_{k=1}^m A_k$ , или  $A_1 A_2 \dots A_m$ ). События  $A_1$  и  $A_2$  наз. *несовместными*, если наступление одного из них исключает наступление другого (т. е., если  $A_1$  и  $A_2$  не могут произойти одновременно). Событие, заключающееся в ненаступлении события  $A$ , наз. *противоположным к  $A$*  и обозначается  $\bar{A}$ .

Основными положениями элементарной В. т. есть теоремы сложения и умножения вероятностей и *полной вероятности формула*. Теорема сложения вероятностей заключается в следующем. Если события  $A_1, A_2, \dots, A_m$  таковы, что каждые два из них несовместны, то вероятность объединения их равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) = \sum_{k=1}^m P(A_k).$$

Пусть производится  $N$  испытаний и при этом события  $A, B$  и  $A \cap B$  наступают соответственно  $N(A), N(B)$  и  $N(A \cap B)$  раз. Выделим из общего числа испытаний те, в которых наступило событие  $B$ , и подсчитаем среди них

долю тех, в которых наступило и событие  $A$ . Эта доля (условная частота наступления события  $A$  при условии  $B$ ) равна

$$\frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{N(A \cap B)/N}{N(B)/N} = \frac{\text{частота } (A \cap B)}{\text{частота } B}.$$

При увеличении числа испытаний отношение  $N(A \cap B)/N(B)$  будет приближаться к отношению  $P(A \cap B)/P(B)$ . Это последнее отношение и наз. условной вероятностью события  $A$  при условии  $B$  (обозначается  $P(A/B)$ , т. е. полагают по определению

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (3)$$

В случае классического определения вероятности формула (3) приводит к формуле

$$P(A/B) = n(A \cap B)/n(B), \quad (4)$$

где  $n(B)$  — число исходов, благоприятствующих событию  $B$ , а  $n(A \cap B)$  — число исходов, благоприятствующих совместному наступлению  $A$  и  $B$ . В соответствии с формулой (2) равенство (4) определяет вероятность события  $A$  в новых условиях, возникающих после наступления события  $B$ . Из (3) вытекает т. н. теорема умножения вероятностей (для двух событий):  $P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)$ . Теорема умножения обобщается на любое число событий  $A_1, A_2, \dots, A_m$ :  $P(\bigcap_{k=1}^m A_k) = P(A_1) \times$

$$\times P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P(A_m/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}).$$

События  $A$  и  $B$  наз. независимыми, если  $P(A/B) = P(A)$  (отсюда в силу теоремы умножения следует, что и  $P(B/A) = P(B)$ ). События  $A_1, A_2, \dots, A_m$  наз. независимыми (более точно: независимыми в совокупности), если условная вероятность любого из них при условии, что наступили какие-то из остальных событий, равна безусловной вероятности этого события. Для независимых событий теорема умножения вероятностей означает, что  $P(\bigcap_{k=1}^m A_k) = \prod_{k=1}^m P(A_k)$ , т. е. вероятность сов-

местного осуществления независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. В практических вопросах для определения независимости данных событий редко прибегают к проверке равенств типа  $P(A/B) = P(A)$ . Обычно для этого пользуются интуитивными соображениями, основанными на опыте. Основанием для этого служит концепция, согласно которой события, происходящие в различных опытах, пренебрежимо мало связанных в физическом смысле, являются независимыми.

Если события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  независимы, а вероятности их наступления одинаковы и рав-

ны  $p$ , то вероятность  $P_n(k)$  наступления точно  $k$  из них равна

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (5)$$

Вероятность  $Q$  того, что число наступлений событий будет заключено в пределах от  $k_1$  до  $k_2$ , составляет

$$Q = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (6)$$

При больших  $n$  приближенное значение вероятности  $Q$  можно получить из предельной теоремы Лапласа:

$$Q \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right), \quad (7)$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$  — нормальная

ф-ция распределения (см. Нормальное распределение).

Важнейшим понятием В. т. является понятие о случайной величине. Говорят, что задана случайная величина, если каждому исходу  $\omega_k$  опыта поставлено в соответствие некоторое число  $y_k$ . Иными словами, случайная величина — это числовая ф-ция, определенная на исходах опыта. Если  $\xi$  — случайная величина, то значения  $y_k = \xi(\omega_k)$ , которые она принимает, наз. ее возможными значениями. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_m$  — все различные возможные значения  $\xi$ . Обозначим  $P_k = P\{\xi = x_k\}$ ; тогда

$\sum_{k=1}^m P_k = 1$ . Набор всех возможных значений  $x_1, x_2, \dots, x_m$  и соответствующих им вероятностей  $p_1, p_2, \dots, p_m$  наз. распределением случайной величины. Распределение вероятностей случайной величины дает ее наиболее полное описание. Однако в ряде случаев о случайной величине требуется иметь лишь некоторое суммарное представление. Для этого используют различные числовые характеристики случайных величин, из которых наиболее употребительны математическое ожидание и дисперсия.

Схема опыта с конечным числом исходов недостаточна для применений В. т. В практике исследований очень часто встречаются явления, которые нельзя с удовлетворительной точностью описать этой схемой. Такие ситуации возникают, напр., при исследовании времени безотказной работы прибора, при изучении случайных шумов в радиотехнических устройствах. В первом случае в качестве мн-ва

исходов «опыта» естественно принять мн-во всех положительных чисел, во втором — мн-во функций времени (графиков шумов). Поэтому очень важное значение имеет формально-логическое построение общей схемы В. т., пригодной для описания всех ситуаций, которые возникают в настоящее время, и в то же время удовлетворяющей запросы практики.

Общепризнанной является логическая схема построения основ В. т., которую предложил в 1933 сов. математик А. Н. Колмогоров. Осн. черты этой схемы таковы. С каждым реальным опытом (испытанием, экспериментом) связывается некоторое мн-во элементарных событий (исходов опыта)  $\omega$ ; само  $\Omega$  наз. пространством элементарных событий. Всякое событие описывается мн-вом благоприятствующих ему элементарных событий, т. е. рассматривается как некоторое мн-во элементарных событий. Над событиями (подмножествами пространства  $\Omega$ ) вводятся теоретико-множественные операции объединения, пересечения и др.; при этом полностью сохраняется терминология элементарной В. т. Далее выделяется некоторый класс  $\mathfrak{F}$  событий (класс наблюдаемых в данном опыте событий), образующий т. н.  $\sigma$ -алгебру (или борелевское поле) событий. В элементарной В. т. вероятность определялась формулой (1); при этом в качестве исходных принимались вероятности элементарных событий. В общей схеме В. т. событие, вообще говоря, является бесконечным мн-вом элементарных событий, вероятность каждого из которых может равняться нулю. Поэтому в общей схеме, по определению, считаются заданными вероятности всех событий из  $\mathfrak{F}$ , причем свойство вероятности, выражаемое в элементарной В. т. теоремой сложения, здесь не выводится из определения, а включается в него. Точнее, предполагается, что каждому событию  $A$  из  $\mathfrak{F}$  соответствует некоторое число  $P(A)$ , называемое вероятностью события  $A$ , причем выполняются следующие условия: 1)  $P(A) \geq 0$ ; 2)  $P(\Omega) = 1$ ; 3) если события  $A_1, A_2, \dots$  попарно несовместны, то  $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ . Свойства

неотрицательности (условие 1) и аддитивности (условие 3) вероятности есть основные свойства меры мн-ва. Таким образом, вероятность есть нормированная (условием 2) вполне-аддитивная мера, определенная на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{F}$ -подмножеств пространства  $\Omega$ ; поэтому с формальной точки зрения В. т. может рассматриваться как раздел теории меры. При таком подходе основные понятия В. т. получают новое освещение: события из  $\mathfrak{F}$  превращаются в измеримые мн-ва пространства  $\Omega$ , случайные величины — в измеримые относительно  $\mathfrak{F}$  функции, матем. ожидания случайных величин — в абстрактные интегралы Лебега и т. п. Изложение В. т., основанное на простой системе аксиом [типа 1), 2), 3)], вносит полную ясность в формальное строение этой теории и способствует развитию как самой В. т., так и сходных с ней по формальному строению матем. теорий.

Основная познавательная ценность В. т. раскрывается предельными теоремами. Простейшим примером таких теорем является теорема (закон) Бернулли, утверждающая, что при большом числе независимых испытаний частота появления какого-либо события  $A$  лишь незначительно отклоняется от его вероятности  $p = P(A)$ . Если  $\xi_k$  — число появлений события  $A$  при  $k$ -м испытании, то общее число появлений этого события при  $n$  испытаниях равно сумме  $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ ; здесь величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  независимы, каждая из них принимает лишь два значения: 1 с вероятностью  $p$  и 0 с вероятностью  $1 - p$ . В этих обозначениях теорема Бернулли утверждает, что при любом фиксированном  $\varepsilon > 0$

$$P \left\{ \left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\} \rightarrow 1$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Теорема Бернулли является простейшим частным случаем *больших чисел закона*. Примером предельной теоремы другого типа является упоминавшаяся выше теорема Лапласа, которая в принятых здесь обозначениях утверждает, что при  $n \rightarrow \infty$

$$P \left\{ x_1 < \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x_2 \right\} \rightarrow \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где  $\Phi(x)$  — нормальная ф-ция распределения; теорема Лапласа дает оценку вероятности отклонений частоты наступления события  $A$  от вероятности его наступления  $p$  и является простейшим частным случаем *центральной предельной теоремы*.

Предельные теоремы для сумм случайных величин тесно связаны с важным разделом В. т. — *случайных процессов теорией*. Те законы распределения, которые выступают в качестве предельных для нарастающих сумм случайных величин, в теории случайных процессов являются точными законами распределения соответствующих характеристик. Используя это, многие предельные теоремы удается доказать с помощью соответствующих *случайных процессов*.

В. т. находит широкое применение во многих разделах естествознания и техники (гл. о. в теории погрешностей наблюдений); она положена в основу *игр теории, информации теории, массового обслуживания теории и математической статистики*.

В. т. как матем. наука возникла в середине 17 в. Первые работы по В. т., принадлежащие франц. ученому Б. Паскалю (1623—62) и П. Ферма (1601—65) и голл. ученому Х. Гюйгенсу (1629—95), появились в связи с подсчетом различных вероятностей в азартных играх. Крупный вклад в В. т. внес швейц. математик Я. Бернулли (1654—1705), установивший закон больших чисел для схемы независимых испытаний с двумя исходами (опубл. 1713). Дальнейшее развитие В. т.

связано с именами англ. матем. А. Муавра (1667—1754), франц. ученого П. Лапласа (1749—1827), нем. матем. К. Гаусса (1777—1855), франц. матем. С. Пуассона (1781—1840). Следующий этап в развитии В. т. связан с основным с именами рус. математиков П. Л. Чебышева (1821—94), А. М. Ляпунова (1857—1918) и А. А. Маркова (1856—1922). Чебышев в 1867 доказал закон больших чисел при весьма общих предположениях; он же впервые сформулировал центр. предельную теорему для сумм независимых случайных величин (1887) и указал один из методов ее доказательства. Ляпунов другим методом получил (1901) близкое к окончательному решению решение этого вопроса. Марков впервые рассмотрел (1907) один случай зависимых испытаний, впоследствии получивший наименование цепей Маркова. В. т. превратилась в одну из наиболее быстро развивающихся матем. наук, тесно связанную с потребностями практики. Значительный вклад в ее развитие внесли сов. математики С. Н. Бернштейн (1880—1968), А. Я. Хинчин (1894—1959) и А. Н. Колмогоров (р. 1903).

Лит.: Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.—Л., 1936 [библиогр. с. 80]; Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. М.—Л., 1946 [библиогр. с. 547—549]; Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М., 1967 [библиогр. с. 481—487]; Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., 1969 [библиогр. с. 390—395]; Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. М., 1970; Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применение. Пер. с англ., т. 1—2. М., 1967. Н. П. Слободенюк.

**ВЕРОЯТНОСТНАЯ МАШИНА** — математическая модель вычислительного устройства, в работе которого участвует некоторый случайный процесс. Различные варианты понятия В. м. являются обобщениями понятий *автомата детерминированного*, *Тьюринга машины*, *автомата бесконечного*. Рассматривались, напр., такие понятия В. м.: 1) Машина Тьюринга (или другой детерминированный автомат) с входом, к которому присоединен бернуллиевский датчик, выдающий символы 1 и 0 с вероятностью  $p$  и  $1 - p$  соответственно ( $0 \leq p \leq 1$ ). 2) В. м., которая получается из машины Тьюринга, если для данного обозреваемого символа и внутреннего состояния задается не единственная комбинация «символ, состояние, сдвиг», а таблица вероятностей осуществления машиной каждой такой комбинации. (Если машина Тьюринга является конечным автоматом, то соответствующая В. м. — это конечный вероятностный автомат. Такие автоматы образуют наиболее изученный класс В. м.). 3) Бесконечный автомат со счетным множеством состояний, для каждой пары состояний которого указывается вероятность того, что автомат, находясь в 1-м состоянии, перейдет во 2-е. Различные понятия В. м. выражают различные уровни и цели абстракции. В приведенных примерах 2-е понятие является обобщением 1-го, 3-е обобщает 2-е. Возможны, конечно, и другие понятия В. м., такие, напр., в которых используются другие случайные

процессы, или данный процесс используется иным способом.

В. м. можно использовать для вычисления функций. Результат вычисления на В. м. для данного аргумента определен не однозначно: он зависит от реализации случайного процесса, используемого машиной. Различным возможным результатом естественным образом соответствуют вероятности того, что они будут получены в процессе работы машины. Можно различными способами задавать «уровень вероятности», выделяющий единственную функцию, которая и будет считаться функцией, вычисляемой на этой машине. Приведем два определения вычислимости функции, аргументами и значениями которой являются натуральные числа: а) функция  $f(x)$  вычислима на В. м.  $T$ , если для каждого  $x$  вероятность того, что машина  $T$ , будучи запущена на аргументе  $x$ , остановится, записав число  $f(x)$ , больше  $\alpha \left( \frac{1}{2} \leq \alpha < 1 \right)$ ; б) функция  $f(x)$  вычислима на В. м.  $T$ , если вероятность того, что для всех  $x$  машина  $T$  остановится, записав  $f(x)$ , больше  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ). Работу В. м. можно также описывать в терминах перечислимости множеств. Определения перечислимости множества аналогичны определениям вычислимости функций. Определению б), напр., соответствует такое: множество  $D$  перечислимо на В. м.  $T$ , если вероятность того, что все элементы множества  $D$  и только они появятся на выходе машины  $T$ , больше  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ). Можно фиксировать не одно множество, а целый класс множеств и интересоваться вероятностью того, что В. м. перечислит к.-н. множество этого класса (для разных реализаций случайного процесса на выходе машины могут появляться разные множества).

В теории В. м. изучаются следующие осн. вопросы: 1) расширение класса вычисляемых функций при переходе от детерминированных машин к вероятностным (как этот класс зависит от вероятностных параметров, участвующих в определении В. м.); 2) насколько один и тот же результат можно получить проще и экономнее, используя В. м. вместо детерминированных машин; 3) установление взаимосвязи между различными определениями В. м. и вычислимости на В. м. В этих направлениях получен ряд результатов. Перечислим некоторые из них (факты, относящиеся к конечным вероятностным автоматам, см. в ст. *Автомат вероятностный*). 1. Определения вычислимости а) и б) эквивалентны в том смысле, что если существует В. м. 1-го типа, вычисляющая функцию в смысле а), то существует и В. м. того же типа, вычисляющая ту же функцию в смысле б), и наоборот. То же верно для соответствующих определений перечислимости. 2. Если на вероятностные параметры, участвующие в определении В. м., не налагать никаких ограничений, то любую функцию можно вычислить на подходящей В. м. (перечислить любое множество). Если эти параметры являются вычислимыми действительными числами, то функция, вычисляемая на В. м.,

вычислима и на детерминированной машине (множество, перечислимое на В. м., перечислимо и на детерминированной машине). 3. Существуют *рекурсивные функции*, которые вычислимы на В. м. в некотором смысле проще, с меньшей затратой времени (см. *Сложность вычислений*), чем на любой детерминированной машине. 4. Существует такое бесконечное множество, что детерминированная машина не может перечислить никакое бесконечное его подмножество, но подходящая В. м. со сколь угодно большой вероятностью выдает бесконечное множество, содержащееся в нем. При этом вероятностные параметры В. м. являются рациональными числами.

Теория В. м. является в такой же степени абстрактной, как и вообще *автоматов теория*, и имеет такое же отношение к изучению реальных вычислительных машин и вычислений, напр., вычислений методом Монте-Карло (см. *Монте-Карло метод*). В качестве аргументов и значений функции, которую вычисляет В. м., можно брать не только записи натуральных чисел, но и вообще слова в конечном алфавите и рассматривать эту функцию в широком смысле, как поведение этой машины. В этом аспекте В. м. могут служить моделями при изучении поведения кибернетических устройств и организмов, напр., в теории обучения и адаптации. См. также *Поведение автоматов в случайных средах*.

Лит.: Барздин Я. М. О вычислимости на вероятностных машинах. «Доклады АН СССР. Серия математика, физика», 1969, т. 189, № 4; Лей К. де [и др.]. Вычислимость на вероятностных машинах. В кн.: Автоматы. Пер. с англ. М., 1956; Рабин М. О. Вероятностные автоматы. В кн.: Кибернетический сборник, № 9. М., 1964; Paz A. Introduction to probabilistic automata. New York — London, 1971. В. Н. Агафонов.

**ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПРОЦЕСС** — то же, что и *случайный процесс*.

**ВЕРОЯТНОСТЬ** — числовая характеристика степени возможности наступления какого-либо определенного события в тех или иных определенных условиях, которые могут повторяться неограниченное число раз. В. является характеристикой объективно существующей связи между указанными условиями и событием. Численное значение В. в некоторых случаях можно получить из т. н. «классического» определения В. Рассмотрим некоторый опыт с  $n$  взаимно исключающими друг друга равновероятными, т. е. равноправными по отношению к условиям опыта, исходами. Пусть  $A$  — событие, связанное с данным опытом. Тогда В.  $P(A)$  события  $A$  можно определить по ф-ле:  $P(A) = n(A)/n$ , где  $n(A)$  — число «благоприятствующих событию  $A$ » исходов, т. е. тех исходов, которые приводят к наступлению  $A$ . Напр., при бросании игральной кости — кубика из однородного материала с занумерованными от 1 до 6 гранями — имеется 6 взаимно исключающих друг друга равновероятных исходов (выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков). В.  $P(A)$  события  $A$  — выпадение четного числа очков — равна  $\frac{1}{2}$ , поскольку здесь  $n(A) = 3$ . Накопленные практикой мно-

гочисленные наблюдения позволяют след. образом охарактеризовать В. как в рассмотренном выше опыте с равновероятными (равновозможными) исходами, так и в самом общем случае. Предположим, что некоторый опыт может быть повторен многократно, так что в принципе осуществима серия одинаковых и независимых друг от друга испытаний, в каждом из которых в зависимости от случая происходит или не происходит событие  $A$ . Пусть  $N$  — число всех опытов в серии,  $N(A)$  — число тех опытов, в которых наступило событие  $A$ . Отношение  $N(A)/N$  наз. *частотой события  $A$  в данной серии испытаний*. Как показывает практика, при больших  $N$  частоты  $N(A)/N$  в различных сериях испытаний оказываются приблизительно одинаковыми, группируясь около некоторого числа  $P(A)$ , которое и наз. В. события  $A$ :  $P(A) \sim N(A)/N$ . Согласно этой эмпирически установленной закономерности В.  $P(A)$  события  $A$  характеризует долю тех случаев в большой серии испытаний, в которых наступает это событие. Об аксиоматическом подходе к понятию В. см. *Вероятностей теория*.

Н. П. Слободенюк.  
**ВЕРОЯТНОСТЬ УСЛОВНАЯ** — одно из основных понятий *вероятностей теории*. В. у.  $P(A/B)$  события  $A$  при условии, что осуществилось событие  $B$  (предполагается, что *вероятность события  $B$   $P(B) > 0$* ), определяется ф-лой:  $P(A/B) = P(AB)/P(B)$ . Если события  $A$  и  $B$  связаны с некоторым опытом с конечным числом  $n$  равновероятных взаимно исключающих друг друга исходов, а  $n(B)$  и  $n(AB)$  обозначают число тех исходов, которые приводят к наступлению соответственно событий  $B$  и  $AB$ , то

$$P(A/B) = \frac{n(AB)}{n} : \frac{n(B)}{n} = \frac{n(AB)}{n(B)},$$

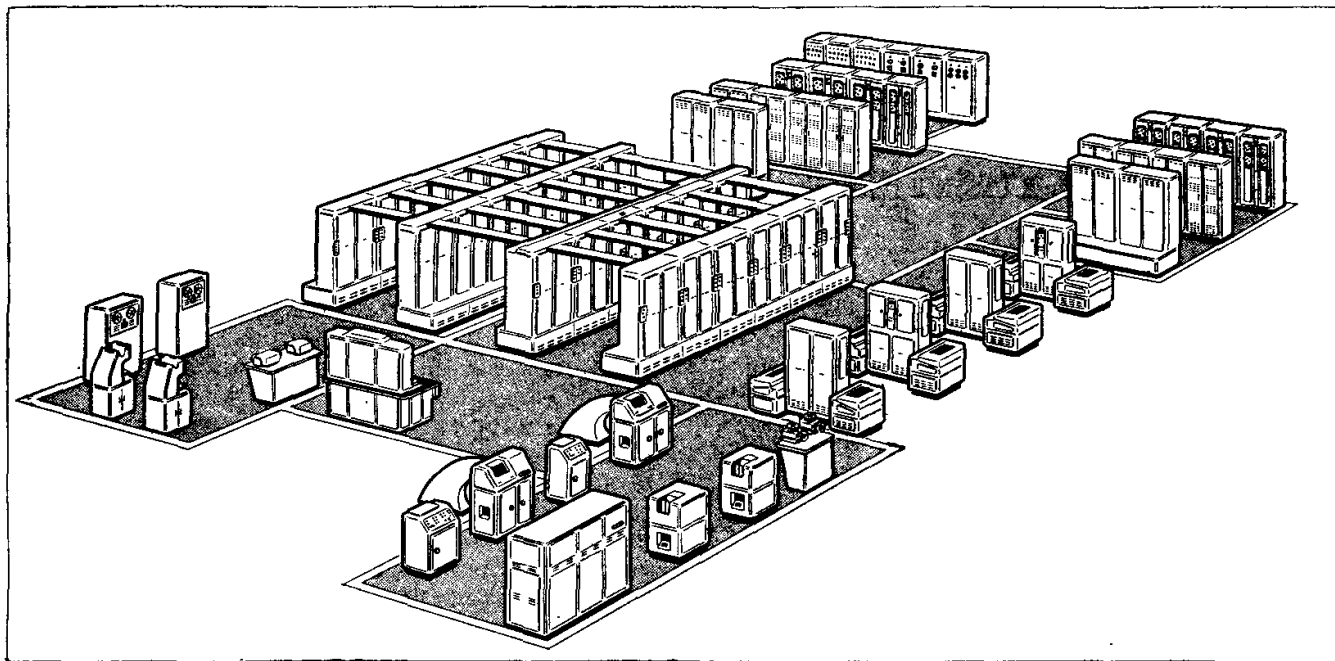
т. е. в «классической» схеме В. у.  $P(A/B)$  есть отношение числа исходов, приводящих к одновременному наступлению событий  $A$  и  $B$ , к числу тех исходов, которые приводят к наступлению события  $B$ . В отличие от В. у. вероятность  $P(A)$  события  $A$ , рассматриваемая при фиксированном комплексе условий, наз. *безусловной вероятностью*.

Н. П. Слободенюк.  
«ВЕСНА» — электронная цифровая вычислительная машина общего назначения. Электронные схемы машины построены на полупроводниковых диодах и триодах и конструктивно оформлены в виде стоек, содержащих каждая до 600 сменных ячеек (см. рис.). Центральное вычислительное устройство (ЦВУ) «В.» работает со скоростью около 250 тыс. команд в 1 сек. Обработка информации кодируется 48-разрядными двоичными кодами. ЦВУ имеет широкий набор операций: над числами с плавающей запятой; операций, обеспечивающих ускоренное выполнение расчетов с повышенной точностью (с мантиссой двойной длины); над числами с фиксированной запятой; логических преобразований кодов и различных вариантов операций управления. Опе-



ративное запоминающее устройство (ОЗУ) машины подразделяется на малое ОЗУ, построенное на 32 быстродействующих триггерных регистрах, основное ОЗУ на ферритовых сердечниках, состоящее из 2-х блоков емкостью по 1024 числа с циклом около 1 мксек, и большое ОЗУ из 4-х одновременно работающих блоков объемом 16 тыс. чисел каждый и циклом обращения 10 мксек. Последовательные адреса большого ОЗУ чередуются по различным блокам, за счет чего достигается сокращение среднего цикла обращения к большому

и до 32-х накопителей на магнитных лентах, объемом 0,5÷1 млн. чисел каждый. Предусмотрен ввод и вывод данных с помощью перфокарт и перфолент, вывод на алфавитно-цифровое печатающее устройство и телетайп. Обмен данными между ЦВУ и внешними устройствами производится через большое ОЗУ. Для управления этим обменом имеется программно управляемое координационное вычислительное устройство (КВУ) с простым набором операций и своей системой прерывания. КВУ, работая в многопрограммном ре-



Электронная цифровая вычислительная машина «Весна».

ОЗУ. Код команды ЦВУ содержит два 6-разрядных адреса малого ОЗУ (A1, A2), один 16-разрядный «длинный» адрес ОЗУ (A3), по которому можно обратиться к любой части ОЗУ, и 6-разрядный адрес модификатора «длинного» адреса (B), причем для хранения модификаторов используется малое ОЗУ. В коде команды имеется указатель, позволяющий использовать «длинный» адрес как адрес исходного числа и как адрес результата операции, выполняемой по данной команде. Когда данные, наиболее часто употребляемые в обработке, сосредотачиваются в малом и основном ОЗУ, достигается наивысшая скорость вычислений. Для повышения скорости работы в ЦВУ, как правило, совмещается обработка до четырех подряд идущих команд обрабатываемой программы: одновременно с выборкой из ОЗУ и модификацией адреса некоторой  $k$ -ой команды производится выборка чисел по  $(k - 1)$ -ой команде, действие над числами по  $(k - 2)$ -ой команде и отсылка результата по  $(k - 3)$ -ей команде. ЦВУ имеет систему прерываний, позволяющую осуществлять многопрограммную работу.

В комплекте запоминающих устройств внешних машины предусмотрено до 8 магнитных барабанов, объемом по 65 тыс. чисел каждый,

жиге, выполняет программы управления обменом данными между большим ОЗУ и конкретными внешними устройствами. КВУ работает обычно в режиме частых взаимных прерываний программ с учетом некоторого заданного приоритета в обработке программ различных устройств. В машине имеется аппаратура защиты областей памяти, обеспечивающая при многопрограммной работе автоматическое устранение взаимных помех при обращении различных программ в оперативную память. Организация всего процесса обработки данных ведется стандартной программой, которая загружает машину потоком информации из нескольких задач, управляет совмещенным во времени процессом вычислений в ЦВУ и обменом данными нескольких внешних устройств с большим ОЗУ (с участием КВУ) и обеспечивает функции контроля хода вычислений и оперативного управления. Наличие в машине аппаратуры для многопрограммной работы и совмещенного ввода — вывода данных позволяет в процессе вычислений вести автоматический обмен информацией с несколькими абонентами по линиям телеграфно-телефонной связи. «В.» широко применяется для решения научно-тех. и информационно-логических задач (напр., в Гидрометцентре СССР). В. К. Левин.

**ВЕСОВАЯ ФУНКЦИЯ** — неотрицательная функция, используемая при определении метрики в функциональном пространстве (см. *Пространство абстрактное* в функциональном анализе). Ряд задач в различных областях математики приводят к изучению пространств вещественных функций, заданных на отрезке  $a \leq x \leq b$  со скалярным произведением

$$(f, g)_p = \int_a^b f(x) g(x) p(x) dx. \text{ Ф-ции } f(x) \text{ и } g(x) \text{ наз. ортогональными с весом } p(x), \text{ если } (f, g)_p = 0.$$

Решение методом Фурье *краевых задач* ур-ний матем. физики приводит к нахождению тех значений параметра  $\lambda$ , которым соответствуют ненулевые решения ур-ния

$$A(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + B(x) \frac{dy}{dx} + C(x) y = \lambda y, \text{ удовле-}$$

творяющие условиям  $y(a) = y(b) = 0$ . Установлено, что собственные ф-ции этой задачи, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны с весом

$$p(x) = e^{\int_a^x \frac{B(t) - A'(t)}{A(t)} dt}.$$

Примерами ортогональных с весом функций служат различные классы специальных функций. И. В. Скрипник.

**ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ МЕТОД** — метод частичного перебора, предназначенный для решения задач оптимизации с ограничениями, в котором осуществляется направленный поиск оптимального решения в пространстве возможных решений. В. и г. м. является одним из наиболее общих подходов к решению задач, для которых не разработаны эффективные регулярные методы. К таким задачам относятся задачи комбинаторного типа, нелинейного программирования (напр., задачи минимизации невыпуклой ф-ции), *программирования целочисленного* и др. В основе В. и г. м. лежат построения, которые обычно позволяют существенно уменьшить объем перебора: а) вычисления нижней границы (для задачи минимизации); в этом случае исходная задача заменяется задачей, для решения которой существуют эффективные методы и значение минимизируемой ф-ции в ней не превосходит соответствующего значения исходной задачи; б) разбиение на подмножества (ветвление); реализация метода связана с постепенным разбиением множества решений исходной задачи на дерево подмножеств и последовательным уточнением значения ниж. границы на каждом из этих подмножеств. Способы вычисления нижней границы и ветвления зависят от вида рассматриваемой конкретной задачи, ее специфических особенностей, учет которых приводит к различным реализациям схемы В. и г. м. Лит. см. к ст. *Программирование целочисленное*. В. А. Трубин.

**ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС** — случайный процесс, описывающий эволюцию системы частиц, которые могут размножаться и исчезать либо испытывать к.-л. превращения. В. п. классифицируются в зависимости от области изме-

нения временного параметра: если область изменения времени является последовательностью неотрицательных целых чисел, то это В. п. с дискретным временем, если эта область — интервал  $[0, \infty)$ , то это В. п. с непрерывным временем. В. п. классифицируют также по числу типов частиц, участвующих в процессе. Процесс в момент  $t$  определяется набором неотрицательных целых чисел  $n_1(t), \dots, n_m(t)$ , обозначающих число частиц соответственно 1-го, ...,  $m$ -го типа, содержащихся в системе в момент  $t$ . Частицы каждого из типов могут испытывать такие превращения: частица либо исчезает, либо превращается в несколько частиц различных типов. Кроме того, определенное время она может находиться в системе, не испытывая превращений. Обычно предполагают, что частица испытывает превращения независимо от эволюции других частиц и времени, которое она уже провела в системе. В этом случае В. п. представляет собой однородный *марковский процесс* со счетным множеством состояний. Однако для В. п. используется особый аналитический аппарат, учитывающий специфику этих процессов, а именно, аппарат производящих функций.

В. п. используются в биологии для описания эволюции популяции или распространения эпидемии, а также в физике — для описания цепных реакций иливной космических частиц. Во всех этих случаях интерес представляет вопрос о вырождении. В. п. вырождается в некоторый момент времени, если все частицы исчезают. Важной характеристикой системы является вероятность того, что система когда-либо вырождается. Если эта вероятность равна 1, то В. п. наз. *вырождающийся*. Существуют методы, позволяющие определить вырождаемость системы и вероятность ее вырождения.

Лит.: Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., 1965 [библиогр. с. 648—654]; Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М., 1971 [библиогр. с. 431—434]; Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов. Пер. с англ. М., 1966 [библиогр. с. 318—338]. А. В. Скороход.

**ВЗАЙМНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ** — функция, характеризующая степень связи между значениями двух случайных процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ . Если  $x(t)$  и  $y(t)$  — случайные процессы с комплексными значениями, их В. к. ф. определяется формулой

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M [\overset{\circ}{x}(t_1) \overline{\overset{\circ}{y}(t_2)}]$$

(черточка сверху обозначает операцию комплексного сопряжения), где  $\overset{\circ}{x}(t_1) = x(t_1) - m_x(t_1)$ ,  $\overset{\circ}{y}(t_2) = y(t_2) - m_y(t_2)$ ,  $M$  — символ операции вычисления матем. ожидания,  $m_x(t)$  и  $m_y(t)$  — матем. ожидания процессов  $x(t)$  и  $y(t)$ . В. к. ф. действительных случайных процессов описывается выражением:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M [\overset{\circ}{x}(t_1) \overset{\circ}{y}(t_2)].$$

Если известна совместная плотность вероятности  $p[\overset{\circ}{x}(t_1), \overset{\circ}{y}(t_2)]$  случайных величин  $\overset{\circ}{x}(t_1)$  и  $\overset{\circ}{y}(t_2)$ , соответствующих значениям случайных процессов  $\overset{\circ}{x}(t)$  и  $\overset{\circ}{y}(t)$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , то В. к. ф. этих процессов можно выразить в виде

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{\circ}{x}(t_1) \overset{\circ}{y}(t_2) p[\overset{\circ}{x}(t_1), \overset{\circ}{y}(t_2)] dx(t_1) dy(t_2).$$

Если В. к. ф. случайных процессов  $\overset{\circ}{x}(t)$  и  $\overset{\circ}{y}(t)$  не равна тождественно нулю, то эти процессы наз. коррелированными, в противном случае — некоррелированными.

В. к. ф. двух стационарных и стационарно связанных случайных процессов является ф-цией разности аргументов  $\tau = t_2 - t_1$ . Если при этом двумерный процесс  $[\overset{\circ}{x}(t), \overset{\circ}{y}(t)]$  эргодичен (см. *Эргодическая теория*), В. к. ф. можно вычислить путем усреднения по времени одной реализации этих двух процессов, т. е.

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}(t + \tau) dt.$$

Для практических вычислений используют оценку В. к. ф. по реализации конечной длительности  $T$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}(t + \tau) dt$$

Часто бывает удобно использовать т. н. нормированную В. к. ф., т. е. отнесенную к среднему геометрическому дисперсий рассматриваемых процессов

$$r_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sqrt{D_x D_y}},$$

где  $D_x$  и  $D_y$  — дисперсии случайных процессов  $\overset{\circ}{x}(t)$  и  $\overset{\circ}{y}(t)$ , равные значениям их автокорреляционных функций при  $\tau = 0$ .

В. к. ф. широко используют в теории автомат. управления: при статистическом анализе систем автомат. управления, при определении динамических характеристик управляемых объектов, автомат. распознавании образов, измерении параметров движения, в тех. диагностике и т. д. Вычисление В. к. ф. осуществляют обычно с помощью аналоговых или цифровых специализированных вычислительных устройств — *корреляторов* или с помощью ЭЦВМ. См. также *Корреляционная теория случайных процессов*, *Корреляция* в теории вероятностей.

Лит.: Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., 1962 [библиогр. с. 873—878]; Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1. М., 1966; Пугачев В. С. Введение в теорию вероятностей. М., 1968.

С. Ф. Козубовский.

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧЕЛОВЕКА С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНОЙ** — процесс обмена сообщениями между человеком и вычислительной машиной, обусловленный необходимостью последовательного и / или параллельного выполнения человеком и машиной действий по совместному решению какой-либо задачи. До последнего времени значительную часть процесса решения задачи — чаще всего разработку метода или алгоритма решения — человек выполнял, не обмениваясь регистрируемыми сообщениями с вычислительной машиной (ВМ). Однако даже в этом случае условно можно говорить о «неявной» форме взаимодействия: человек производит мысленный обмен сообщениями с моделью ВМ, отраженной в его сознании. При явном взаимодействии процесс решения задачи включает в себя циклы обмена регистрируемыми сообщениями между человеком и реальной ВМ.

Выделяют следующие категории людей, вступающих во взаимодействие с ЭВМ: заказчики или постановщики задачи, которые формулируют ее условие, принимают участие в его уточнении и определении формы представления исходных данных и требуемых результатов; алгоритмисты с различной специализацией, разрабатывающие план и алгоритм решения задачи, и программисты, которые описывают план решения задачи на входном языке программирования; операторы, работающие на устройствах ввода — вывода, на центральном либо индивидуальных пультах и пр. По отношению к заказчику (постановщику) различают прямую связь человека с ЭВМ, когда между ними нет посредников (операторов, программистов), и непрямую связь, когда такие посредники имеются.

Выделяют следующие основные виды систем «человек — ЭВМ», обладающие определенными особенностями их математической эксплуатации: «заказчик — программист — оператор — машина», «заказчик — оператор — машина — консультант», «заказчик — машина» и др. Режим прямой связи для постановщика задачи реализуется благодаря тому, что появились развитые системы автоматизации программирования и операционные системы, упростилась связь с машиной в результате введения индивидуальных удобных пультов (типа пишущих машинок, пультов на базе электроннолучевой трубки; см. *Экранный пульт*) и, кроме того, — в результате передачи заказчику ряда пока еще не автоматизированных ф-ций программиста и оператора. Подобный режим реализован либо на однопрограммных ВМ (типа «МИР» и «Наури»), как правило, с невысоким быстродействием, либо на мультипрограммных быстродействующих машинах в режиме пакетной обработки данных и в режиме разделения времени.

На разных этапах решения задачи В. ч. с в. м. несет различную функциональную нагрузку. На начальном этапе решения взаимодействие обеспечивает регистрацию пользователя, наведение им справок о возможности данной машины (системы) и заказа ресурсов, требуемых для решения данной задачи. Далее,

при известном человеку алгоритме решения задачи в результате взаимодействия производится ввод сообщения и установление его грамматической правильности, а также проверка (и выработка) алгоритмической правильности сообщения, т. е. производится отладка программы (см. *Отладочные программы*). И, наконец, В. ч. с в. м. должно обеспечить построение неизвестного ранее алгоритма, т. е. метода решения задачи. При этом могут быть использованы как творческие возможности человека, так и соответствующие эвристические алгоритмы, заложенные в машину. В первом случае предполагается, что основную творческую работу по составлению алгоритма выполняет человек, а машина в лучшем случае информирует его о своих возможностях (о составе библиотеки стандартных подпрограмм и о входных языках программирования). Во втором случае человек выполняет только те действия, которые нужны для работы эвристических алгоритмов, заложенных в машину. Примерами таких действий могут служить: описание (на входном языке программирования) проблемных ситуаций, к которым машина не имеет доступа, установление предпочтительных оценок для предложенных машиной альтернатив и т. п.

Прямая связь человека с ВМ на всех этапах решения задачи во многих случаях требует оперативного взаимодействия, т. е. такого взаимодействия, когда обмен сообщениями между ними протекает достаточно быстро. При этом сами сообщения, как правило, невелики, легко обозримы. Для неоперативного взаимодействия, наоборот, характерны довольно большие интервалы времени между сообщениями, причем эти сообщения могут представлять собой достаточно объемистые и сложные тексты, графики и изображения. Оперативное взаимодействие при прямой связи человека с машиной характерно для *диалога режима*, при котором человек имеет возможность вмешиваться в ход решения задачи на машине, обращаться к машине за справками и получать ответное сообщение машины через такие интервалы времени, которые не нарушают ход его мыслительной деятельности, не являются для него тягостными. Режим диалога при решении задачи может управлять не только человек, как это сделано в подавляющем большинстве систем отладки, систем программирования на естественном языке и систем решения задач в режиме вопросов и ответов, но и вычислительная машина. Протообразом диалога, управляемого машиной, может служить обучение с помощью ВМ (см. *Автоматизированное обучение класс*) и разработка метода решения задач с помощью эвристических предписаний, реализованных на машине и обобщающих способы решения задач некоторого определенного класса.

Как и в случае, когда задачу совместно решают два человека, эффективность различных форм В. ч. с в. м. определяется качеством, временем и стоимостью решения задач (последние два показателя определяются не только

стоимостью и количеством машинного времени, но и временем, затрачиваемым человеком на решение всей задачи, а также стоимостью его труда). Она зависит и от взаимопонимания человека и ВМ, психологической готовности человека к решению своих задач с помощью ВМ, доступности ВМ для человека, удобства связи с ВМ и быстроты реакции ВМ на сообщение, введенное человеком. Реализация совокупности этих факторов обеспечивается благодаря созданию высокоразвитых алгоритмических структур и систем *математического обеспечения ЦВМ* (это создает предпосылки для реализации факторов взаимопонимания, быстроты реакции, доступности и пр.), а также благодаря разработке обучающих систем и подготовки к В. ч. с в. м. (чем выше уровень подготовки, тем проще достигается взаимопонимание человека и ВМ, тем увереннее чувствует себя человек, т. е. реализуется фактор психологической готовности к взаимодействию; этот фактор в значительной степени зависит от уровня развития систем матем. обеспечения: чем оно богаче, тем увереннее человек обращается к ВМ).

Процесс достижения взаимопонимания рассматривают как процесс изучения человеком возможностей машины при решении с ее помощью некоторой задачи. В результате этого изучения человек должен так формулировать свои сообщения, чтобы машина могла выполнять именно те действия, которые он от нее ожидает. Если реакция машины соответствует тому, что ожидал человек, то можно считать, что машина выполнила успешно предписания, содержащиеся в сообщении человека, и что в рассматриваемом цикле взаимодействия было достигнуто взаимопонимание. Доступность ВМ для человека предполагает создание возможности обращения к машине в любое удобное для человека время, а удобство общения человека с ВМ подразумевает выполнение ряда обычных требований *психологии инженерной* к удобству размещения и обозримости вводимых и получаемых сообщений, к конструкции устройств ввода, вывода и т. п. Быстрота реакции машины определяется задержкой между моментом окончания сообщения человека и моментом начала вывода очередного сообщения машины. Эффективность различных форм взаимодействия зависит не только от комплексной реализации указанных факторов в каждом из партнеров, но и от полноты, от уровня реализации каждого из факторов. В наибольшей степени эта зависимость проявляется для диалоговых форм взаимодействия. Чтобы вступить во взаимодействие с машиной, человек должен уметь по крайней мере четко сформулировать свою задачу и иметь хотя бы общие сведения о возможностях ВМ. Этого может оказаться достаточно, если устанавливается непрямая связь с машиной. При прямой связи с машиной человек должен уже знать хотя бы один из входных языков программирования, реализованных на данной машине, уметь записать на этом языке алгоритм решения своей задачи, сопоставить полученный резуль-

тат с предполагаемым и при необходимости внести коррективы в алгоритм.

Что же касается требований к машине, то для недиалогового взаимодействия, осуществляемого преимущественно в режиме пакетной обработки, они могут быть удовлетворены уже при наличии транслятора и библиотеки стандартных подпрограмм (количество трансляторов и полнота библиотеки прежде всего определяет разнообразие классов решаемых на этой машине задач). При диалоговом взаимодействии, которое осуществляется либо на однопрограммных ВМ, либо на мультипрограммных — в режиме разделения времени, требования к машине резко возрастают: она должна обладать большим количеством стандартных программ решения задач и средств интерпретации входных языков программирования, хранимых структурным образом, т. е. так, что обращение к соответствующим средствам можно выполнять автоматически, по команде с индивидуального устройства связи с машиной. В случае диалога, управляемого ВМ, в этой машине должна быть реализована и спец. операционная система, «знающая» о всех возможностях машины в отношении решения определенного класса задач и «умеющая» (после опроса пользователя) отнести его задачу к некоторому классу, а также реализовать эвристическое предписание по обобщенному способу решения задач данного класса. При диалоговом взаимодействии резко возрастают требования не только к уровню реализации фактора взаимопонимания, но и к фактору быстроты реакции машины — время задержки ответа должно быть минимизировано (как в результате разработки эффективного режима разделения времени, так и благодаря спец. устройствам отображения, напр., отображения на электроннолучевую трубку). Важным средством организации эффективного диалогового режима В. ч. с в. м. является также создание спец. обучающих систем, переводящих ВМ в режим обучающей машины, которая обеспечивает подготовку пользователей ВМ к решению задач с помощью этой же ВМ. Для непрямого связи пользователя с ВМ такую обучающую систему во многих случаях можно реализовать с помощью комплекта программированных учебников и пособий.

Организация эффективного В. ч. с в. м. на базе перечисленных факторов является комплексной проблемой, стоящей и перед разработчиками, и перед пользователями ВМ. Ключ к ее решению лежит в исследовании задач и способов их решения человеком, машиной и системой «человек — машина». В этом исследовании наряду с кибернетиками должны принять участие системники, математики и психологи. См. также Системотехника.

Лит.: Якубинский Л. П. О диалогической речи. В кн.: Русская речь. Петроград, 1923; Глушков В. М. [и др.]. Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации. К., 1970 [библиогр. с. 254—257]; Глушков В. М. [и др.]. Человек и вычислительная техника. К., 1971 [библиогр. с. 284—291]; On-line computing. New York, 1967; Schwartz R. M., Burger J. F., Simons R. F. A deductive question-answer for

natural language inference. «Communications of the Association for Computing Machinery», 1970, v. 13, № 3; Alpert D., Bitzer D. Z. Advances in computer-based education. «Science», 1970, v. 167, N 3925. В. И. Брановицкий., А. М. Довгалло.

**ВИНЕРА—ХОПФА УРАВНЕНИЕ** п е р в о г о

р о д а — уравнение вида  $\int_0^{\infty} R_{xx}(t-\tau) k(\tau) \times$

$\times d\tau = R_{xy}(t)$ ,  $t > 0$ , где  $R_{xx}(t)$ ,  $R_{xy}(t)$  — корреляционные функции стационарных эргодических случайных процессов  $x(t)$ ,  $y(t)$ , а  $k(t)$  — импульсная переходная функция. Впервые получили его в 1931 совместно амер. и нем. математики Н. Винер и Э. Хопф. К В.—Х. у. приводят задачи синтеза оптимальной физически реализуемой передаточной функции (ФРПФ) или импульсной переходной функции по критерию минимума среднеквадратической ошибки:

$$I = M \left| y(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) x(t-\tau) d\tau \right|^2,$$

где  $y(t) = H(p)x(t)$ ,  $H(p)$  — заданный преобразующий оператор,  $M$  — символ матем. ожидания,  $x(t)$  — входной сигнал системы,  $y(t)$  — желаемый выходной сигнал системы. При этом различают задачи: 1) оптим. сглаживания или фильтрации, когда  $x(t) = m(t) + n(t)$ , где  $m(t)$  — полезный сигнал,  $n(t)$  — шум; 2) статистического упреждения, когда  $x(t) = m(t)$ ,  $y(t) = m(t+t_0)$ ,  $t_0 > 0$ ; 3) оптим. фильтрации с одновременным упреждением, когда  $x(t) = m(t) + n(t)$ ,  $y(t) = m(t+t_0)$ ,  $t_0 > 0$ . Общая формула для определения оптимальной ФРПФ  $W(s)$  имеет вид

$$W(s) = \frac{1}{2\pi i [\Psi(s)]_+} \times \\ \times \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{xy}(s)}{[\Psi(s)]_-} e^{st} ds,$$

где  $S_{xy}(s)$  — взаимная спектральная плотность сигналов  $x(t)$ ,  $y(t)$ ;  $[\Psi(s)]_+$  — функция, аналитическая в правой полуплоскости;  $[\Psi(s)]_-$  — функция, аналитическая в левой полуплоскости;  $S_{xx}(s) = [\Psi(s)]_+ [\Psi(s)]_-$  — спектральная плотность сигнала  $x(t)$ . Для дробно-рациональных спектральных плотностей оптимальную ФРПФ находят по формуле

$$W(s) = \frac{1}{[\Psi(s)]_+} \left\{ \frac{S_{xy}(s)}{[\Psi(s)]_-} \right\}_+,$$

где операция  $\{ \cdot \}_+$  означает разложение  $S_{xy}(s) / [\Psi(s)]_-$  на сумму элементарных дробей и отбрасывание членов, имеющих полюсы в правой полуплоскости.

Лит.: Теория автоматического регулирования, кн. 2. М., 1967 [библиогр. с. 653—674]; Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New York, 1950. В. П. Яковлев.

**ВНЕШНЕЕ ОБОРУДОВАНИЕ** — то же, что и внешние устройства.

**ВНЕШНИЕ УСТРОЙСТВА** — устройства, выполняющие внешние функции машинной обработки информации, в отличие от преобразований информации, выполняемых центральным устройством (процессором) цифровой вычислительной машины (ЦВМ). По роду выполняемых операций В. у. разделяются на следующие группы: устройства подготовки информации, служащие для ручного занесения информации на перфоносители, на магнитные карты, магнитные ленты и т. п., а также устройства, выполняющие контроль, печать с перфокарт, размножение, перенос с одного вида носителя на другой и др. вспомогательные операции; устройства ввода информации — для ввода в ЦВМ как предварительно подготовленной информации на перфоносителях и специальных бланках, так и с первичных документов, графиков и т. п.; устройства вывода информации (см. *Устройства ввода — вывода данных ЦВМ*), посредством которых информация выводится из ЦВМ в виде алфавитно-цифрового текста, графиков и чертежей, а также на перфоносители (для связи с ЦВМ без промежуточных носителей используется аппаратура комбинированного назначения, напр., *телетайпы*, выносные пульты с экраном и световым карандашом); *накопители* — для хранения больших объемов информации (магнитные барабаны, ленты, диски); периферийное оборудование — аппаратура, устанавливаемая на рабочих местах для подготовки или передачи данных в ЦВМ непосредственно; аппаратура передачи данных — комплекс технических средств для обмена информацией с ЦВМ на большие расстояния по линиям связи. Тенденции развития В. у. направлены на исключение трудоемких подготовительных операций, повышение удобства и оперативности в общении человека с машиной.

*И. Т. Пархоменко.*  
**«ВНИИЭМ»** — семейство цифровых управляющих машин. Разработаны Всесоюзным научно-исследовательским институтом электромеханики (Москва) в 1962—65. Были выпущены в нескольких экземплярах, использованных для создания опытно-промышленных систем управления. Наиболее совершенная из них «ВНИИЭМ-3» имеет двоичную систему счисления, форма представления чисел — с фиксированной запятой (с плавающей запятой по подпрограмме), одноадресную структуру команд, длину слова — 24 двоичных разряда. Особенности системы команд — работа с полными словами, полусловами и словами двойной длины, адресный выбор входных и выходных каналов преобразования; операции с непосредственной адресацией; операции с алфавитно-цифровой информацией. Система аппаратного контроля — дублированное арифметическое устройство, коды с автокоррекцией ошибок. Имеет 168 каналов прерывания (с приоритетом). Быстродействие с фиксированной запятой (сложение) — 40 000 операций в секунду. Емкость ферритового запоминающего устройства (ЗУ) — 4096 слов (расширяется до 28 672 модулями по 8192 слова). Количество устройств на магнитной ленте, с которыми

может работать машина — 16. Возможен прием информации от телеграфных и телефонных линий связи. Основные выводные устройства: алфавитно-цифровой печатающий механизм АЦПМ, перфолента, электр. печатающие машинки.

*Лит.: М а л и н о в с к и й Б. М.* Обчислювальна техніка в народному господарстві. К., 1965; Г р у б о в В. И., К и р д а н В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. Справочник. К., 1969 [библиогр. с. 179—181].

*Б. Н. Малиновский.*

**ВОЗБУЖДЕНИЯ КЛЕТКИ ТЕОРИЯ** — теория процессов, возникающих в возбудимых клетках под действием раздражителей. Основой возбуждения являются определенные изменения физ.-хим. свойств поверхностных структур мышечных и нервных клеток, придающих возбуждению способность к самораспространению по клетке. Наиболее обоснованную В. к. т. разработали (1949) англ. физиологи А. Ходжкин и А. Хаксли. По этой теории, в поверхностной мембране клетки, находящейся в состоянии покоя, существует электрическая поляризация, обусловленная неравномерным распределением ионов натрия, калия и хлора между протоплазмой клетки и внеклеточной средой. Внеклеточная среда содержит в основном ионы натрия и хлора, а протоплазма — ионы калия. Электр. поля зарядов катионов внутри клетки компенсируются полями зарядов анионных групп аминокислот и белков. Т. к. в состоянии покоя поверхностная мембрана значительно лучше пропускает ионы калия, чем ионы натрия, то вследствие диффузии этих ионов изнутри наружу наружная поверхность мембраны заряжается положительно по отношению к ее внутр. поверхности. Величина возникающей разности потенциалов («мембранного потенциала») близка к потенциалу калиевого электрода  $E_K$ :

$$E_K = \frac{RT}{F} \ln \frac{[K]_{\text{вн}}}{[K]_{\text{нар}}}$$

где  $R$  — универс. газовая постоянная,  $T$  — абсол. т-ра,  $F$  — число Фарадея,  $[K]_{\text{вн}}$  и  $[K]_{\text{нар}}$  — активность ионов калия внутри и снаружи клетки. Небольшая постоянная утечка ионов через мембрану компенсируется особыми «насосами», которые переносят ионы сквозь нее против градиента потенциала, используя энергию обмена веществ. Непременной причиной возникновения возбуждения является снижение под действием раздражителя мембранного потенциала до определенного критического уровня (порога). Это снижение потенциала (деполяризация) мембраны обусловлено действием на поверхностную мембрану клетки либо особых веществ, выделяемых окончаниями отростков других клеток, образующих с ней синаптические контакты, либо поступлением внеш. энергии от раздражителя и связано с изменениями ионной проницаемости мембраны. Когда деполяризация достигает порога, в мембране происходят структурные изменения (неясной пока природы), которые приводят к существенному повышению



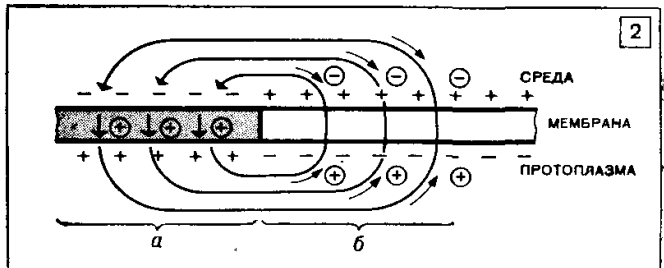
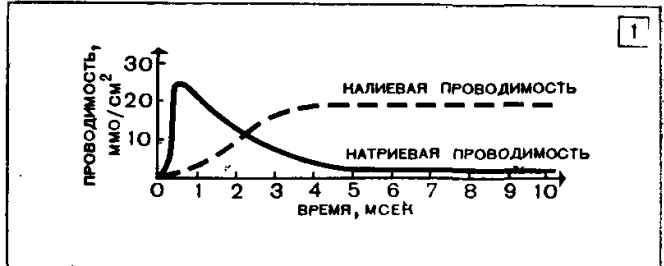
ее способности пропускать ионы натрия (в ней как бы открываются специфические «натриевые» каналы или поры). Вследствие этого возникает существенный ток их сквозь мембрану внутрь клетки, переносящий определенное к-во положительных зарядов и деполяризующий мембрану. Такой процесс является самоподдерживающимся, т. к. возникающая деполяризация еще больше увеличивает натриевую проницаемость и т. д. В итоге ток ионов натрия не только снижает существовавший на мембране мембранный потенциал, обусловленный ионами калия, но и создает разность потенциалов противоположного направления, близкую к потенциалу натриевого электрода:

$$E_{Na} = \frac{RT}{F} \ln \frac{[Na]_{нар}}{[Na]_{вн}}.$$

Структурные изменения мембраны и изменения ее потенциала чрезвычайно кратковременны. Структура мембраны и ее потенциал сразу же восстанавливаются, даже несмотря на продолжающееся действие раздражителя. Более того, с некоторой задержкой развивается повышение проницаемости мембраны для ионов калия, находящихся в избытке внутри клетки (открываются «калиевые» каналы), что создает выходящий из клетки ток этих ионов и способствует восстановлению исходной поляризации клеточной мембраны (рис. 1). Описанное изменение электр. потенциала мембраны («потенциал действия») является характерной чертой возбуждения; оно является и основой способности возбуждения к самораспространению. Появление в возбужденном участке клеточной мембраны измененной электр. поляризации приводит к тому, что на поверхности клетки возникает продольная разность потенциалов — возбужденный участок оказывается заряженным отрицательно по отношению к окружающим невозбужденным ее участкам (рис. 2). Т. к. внеклеточная среда и протоплазма клетки являются проводниками электричества второго рода, то между невозбужденными и возбужденными участками возникают электр. токи (токи действия), направленные снаружи клетки от невозбужденных участков к возбужденному, а внутри клетки — в противоположном направлении. Наличие этих токов приводит к деполяризации невозбужденных участков мембраны (т. н. электротоническое действие). Такая деполяризация, достигнув некоторого критического уровня, вызывает в невозбужденных участках активное изменение натриевой проницаемости мембраны и всю цепь последующих явлений. Раздражающее действие участка возбуждения на соседние невозбужденные участки клетки настолько велико (т. н. гарантийный фактор), что в нормальных условиях процесс возбуждения с большой скоростью распространяется по клетке до концевых ответвлений ее отростков. Эта скорость определяется в основном физ. факторами — электр. сопротивлением отростка, среды и пр.

Экспериментальные доказательства правильности описанных представлений весьма

обстоятельны. Опытами на гигантских нервных волокнах головоногих моллюсков было показано, что способность к возбуждению и проведению импульса сохраняется, если из них практически полностью выдавить протоплазму и заменить ее солевым раствором. Т. о. процесс возбуждения действительно связан с поверхностной мембраной клетки, а не с содержанием ее протоплазмы. Устранение из наружной среды ионов натрия у большинства возбудимых клеток обратимо устраняет начальный входящий ток ионов и тем самым делает не-



1. Изменение натриевой и калиевой проводимости во время деполяризации мембраны (по Ходжкину). 2. Схема распространения нервных импульсов по поверхностной мембране (а — возбужденный участок, б — невозбужденный участок).

возможным возникновение возбуждения. Такой же эффект можно получить, если искусственно увеличивать содержание ионов натрия внутри клетки и тем самым устранять градиент потенциала, обеспечивающий их движение сквозь мембрану вследствие возбуждения. Однако некоторые клетки могут использовать для той же цели ионы кальция. Количество ионов, проникающее во время генерации одиночного импульса, слишком мало для того, чтобы его можно было определить аналитически, однако его можно определить при ритмическом раздражении и затем пересчитать на один импульс; оно составляет  $2,6 \cdot 10^{12} \frac{\text{ионов}}{\text{см}^2}$ .

На основании экспериментально полученных данных о мембранных ионных токах можно провести моделирование распространяющегося потенциала действия на теор. кабеле, свойства которого идентичны физико-хим. свойствам клетки. Теоретически полученные кривые распространяющегося потенциала действия в этом случае очень хорошо совпадают с формой кривых потенциала действия, зарегистрированных в естественных условиях. Лит.: Ходжкин А. Нервный импульс. Пер. с англ. М., 1965 [библиогр. с. 113—123]; Катц Б. Нерв, мышца и синапс. Пер. с англ. М., 1968 [библиогр. с. 203—217]; Ходоров В. И. Проблема возбудимости. Л., 1969 [библиогр. с. 280—301].

П. Г. Костюк.

**ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ МЕТОД** — метод численного решения задачи *программирования выпуклого*, основанный на построении последовательности точек, каждая из которых получается из предыдущей путем сдвига вдоль направления, не выводящего за пределы допустимой области, и вдоль которого минимизируемая функция убывает.

Пусть задача выпуклого программирования приведена к такому виду: минимизировать  $g_0(x) = (p, x)$  при ограничениях

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где  $g_i(x)$  — выпуклые дифференцируемые ф-ции,  $x$  —  $n$ -мерный вектор. Кроме того, предполагается, что существует точка  $y$  такая, что  $g_i(y) < 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Для каждого  $\delta \geq 0$  обозначим через  $I(x, \delta)$  мн-во тех индексов  $i$ , для которых —  $\delta \leq g_i(x) \leq 0$ . Пусть точка  $x^k$ , удовлетворяющая условиям (1), уже построена и имеется  $\delta_k > 0$ . Шаг алгоритма, т. е. переход от точки  $x^k$  к  $x^{k+1}$ , производим по следующим правилам.

1) Решаем задачу *программирования линейного* — минимизировать  $\eta$  при ограничениях:

$$(p, e) \leq \eta;$$

$$(\nabla g_i(x^k), e) \leq \eta, \quad i \in I(x^k, \delta_k); \quad (2)$$

$$|e_j| \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

где  $e$  —  $n$ -мерный вектор,  $\nabla g_i(x)$  — градиент ф-ции  $g_i(x)$  в точке  $x$ . Обозначим решение этой задачи соответственно через  $\eta_k$  и  $e^k$ .

2) Различают три случая в зависимости от соотношения  $\delta_k$  и  $\eta_k$ :

а)  $\eta_k < -\delta_k$ , полагаем  $\delta_{k+1} = \delta_k$ ,

б)  $-\delta_k \leq \eta_k < 0$ , полагаем  $\delta_{k+1} = \frac{1}{2} \delta_k$ ,

в)  $\eta_k = 0$ , решаем задачу минимизации  $\eta$  при ограничениях:

$$(p, e) \leq \eta,$$

$$(\nabla g_i(x^k), e) \leq \eta, \quad i \in I(x^k, 0), \quad (3)$$

$$|e_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть  $e^*$ ,  $\eta^*$  — решение этой задачи. Если в результате решения получим  $\eta^* = 0$ , то точка  $x^k$  — решение исходной задачи. Если  $\eta^* < 0$ , то  $\delta_{k+1} = \frac{1}{2} \delta_k$ , а в качестве  $e^k$  берем вектор  $e^*$ .

3) Полагаем  $x^{k+1} = x^k + t_k e^k$ , где  $t_k$  — наибольшее значение  $t$ , при котором удовлетворены все неравенства

$$g_i(x^k + t e^k) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4)$$

На этом шаг алгоритма закончен. Точка  $x^{k+1}$  берется за начальную и все повторяется.

Для начала процесса необходимо найти точку  $x^0$ , удовлетворяющую ограничениям (1).

Для этого В. н. м. решается вспомогательная задача: минимизировать  $x_{n+1}$  при ограничениях  $g_i(x) - x_{n+1} \leq 0$ . Применение конечного числа шагов В. н. м. к этой задаче, для которой уже легко найти начальную точку, приводит к нахождению точки, удовлетворяющей условию (1). Доказано, что В. н. м. порождает последовательность, все предельные точки которой являются решением задачи выпуклого программирования.

Б. Н. Пшеничный.

**ВОЗМУЩАЮЩЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ**, н о з м у щ е н и е — воздействие, нарушающее требуемую функциональную связь (зависимость) между входной и выходной (контролируемой) координатами механизма, машины, процесса (системы). Могут быть как внешними — изменения нагрузки (тока, нагрузочного момента машины) и внешней т-ры, различные помехи (наводки, утечки, фоны), так и внутренними — изменения параметров звеньев системы за счет старения, самопрогрева и др.

Методы и средства уменьшения или полного устранения влияния В. в. составляют основное содержание теории и практики автоматического регулирования и управления. Компенсация вредных влияний В. в. осуществляется использованием *систем управления замкнутых* с обратной связью, работающих по отклонению (принцип Ползунова — Уатта), либо *систем управления разомкнутых* со связями по возмущениям (принцип Понселе). Наиболее совершенными в этом смысле являются *комбинированные системы автоматического управления*, содержащие и цепь обратной связи, и связи по возмущениям. Вопросы полного устранения влияния В. в. рассматривает теория инвариантности (см. *Инвариантность систем автоматического управления*).

П. И. Дехтяренко.

**ВОЛЬТЕРРЫ УРАВНЕНИЕ** — один из широко употребляемых видов *интегральных уравнений*.

**ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕОРИЯ** — раздел *вероятностей теории*, посвященный исследованию некоторых общих характеристик случайных процессов, связанных с суммами независимых случайных величин. Основные положения В. т. широко используются в теории надежности, *массового обслуживания теории*, *запасов теории* и т. п. Первые результаты В. т. получены из рассмотрения частных вероятностных задач, связанных с длительностью безотказной работы некоторых физ. элементов.

Основной моделью В. т. является простой процесс восстановления. Такой процесс описывается последовательностью  $\{X_i\}$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ) взаимно независимых, неотрицательных, одинаково распределенных *случайных величин*, которые понимаются как длительности существования заменяемых элементов, восстановление которых происходит мгновенно. Считается, что первый элемент включается в работу в начальный момент времени  $t = 0$  и заменяется в момент  $t = X_1$ . Следующая замена производится в момент  $t = X_1 + X_2$  и т. д. Иногда про-

цесс восстановления  $\{X_i\}$  начинается с другой случайной величины  $X_0$ , независимой от  $\{X_i\}$ , и, возможно, имеющей иной закон распределения. Расширенная последовательность  $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$  наз. общим процессом восстановления. Он рассматривается, когда первая установка элемента происходит в некоторый момент  $t \neq 0$ , выбранный на положительной полуоси времени в соответствии с заданным распределением вероятностей. Напр.,  $X_0$  может быть «остаточным временем жизни» элемента, используемого в начальный момент  $t = 0$ . Процесс восстановления наз. дискретным, если  $\{X_i\}$  — решетчатые случайные величины, такие, что с вероятностью единица наибольший общий делитель всех  $X_i$  совпадает с некоторым  $\omega > 0$ ; в противном случае процесс восстановления наз. непрерывным.

Важными характеристиками процессов восстановления являются случайные величины:  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  — момент  $n$ -го восстановления;  $N_t$  — наибольшее значение  $n$ , для которого  $S_n \leq t$ , т. е. число восстановлений, происшедших до момента  $t$ .

$\Phi$ -цией восстановления  $H(t)$  наз. математическое ожидание случайной величины  $N_t$ , т. е.  $H(t) = MN_t = \sum_{r=0}^{\infty} rP\{N_t = r\}$ . Теоремы восстановления:

а)  $\frac{H(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu_1}$  при  $t \rightarrow \infty$ , где  $\mu_1 = MX_i$ ;

б) теорема Блекуэлла для непрерывного процесса восстановления  $H(t + \alpha) - H(t) \rightarrow \frac{\alpha}{\mu_1}$  при  $t \rightarrow \infty$  и любом фиксированном  $\alpha > 0$ ;

в) при условии  $\mu_2 = MX_i^2 < \infty$  характер поведения  $\Phi$ -ции восстановления  $H(t)$  описывается соотношением:  $H(t) - \frac{t}{\mu_1} \rightarrow \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - 1$  при  $t \rightarrow \infty$ .

$\Phi$ -ция восстановления удовлетворяет следующему интегр. ур-нию

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-s) dF(s),$$

где  $F(t)$  —  $\Phi$ -ция распределения случайных величин  $X_i$ . Если существуют плотность восстановления  $h(t) = H'(t)$  и  $f(x) = F'(x)$ , то интегр. ур-ние для плотности восстановления

запишется в виде  $h(t) = f(t) + \int_0^t h(t-s) \times f(s) ds$ . См. также Случайных процессов теория. Т. И. Фурсова.

**ВРЕМЕННОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ СИГНАЛОВ** — разделение, при котором каждому из некоторой совокупности сигналов выделяется определенный отрезок времени. Применяется в случаях, когда ставится задача одним устройством обслужить большое число различных датчиков сигналов или наоборот, когда большое число различных сигналов, поступающих из одной линии связи, необходимо распределить по разным потребителям (напр., в телемех. системах сигнализации, управления и измерения, в многоканальных радиолиниях связи, машинах централизованного контроля, управляющих вычислительных машинах и т. п.). Полное время подключения всех датчиков (потребителей) наз. циклом. Оно равно  $T_{\text{ц}} = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$ , где  $\Delta t_i$  — время подключения датчика (потребителя) с номером  $i$ ;  $n$  — общее количество их. Реализуется В. р. с. с помощью электромех. или электронных коммутаторов. В телемех. системах принцип В. р. с. требует применения коммутаторов на передающей и приемной сторонах линии связи. Условием надежного и точного В. р. с. является синхронность и синфазность работы коммутирующих устройств. Синхронизация работы их может быть обеспечена с помощью общей электр. сети, питающей распределители путем использования генераторов одинаковой частоты на передающей и приемной сторонах с посылкой принудительных сигналов синфазирования их или посредством т. н. пошаговой синхронизации, выполняемой с помощью одного генератора для управления распределителями как на передающей, так и приемной сторонах с посылкой в линию синхронизирующих пошаговых импульсов.

Лит.: Райнес Р. Л., Горьяинов О. А. Телеуправление. М.—Л., 1965 [библиогр. с. 531—536]; Новицкий В. М. [и др.]. Телемеханика. М., 1967 [библиогр. с. 416—420]; Катков Ф. А. Телеуправление. К., 1967 [библиогр. с. 370—372].

А. С. Белима.

**ВРЕМЕННЫЕ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ** — дискретные функции, у которых значения аргументов и функции зависят от значений дискретного времени (дискретных тактов), значений аргументов и значений функций в различные временные такты. Если считать, что дискретное время фиксирует значение момента времени  $t = s$  значение  $\Phi$ -ции в этот момент времени определяется в общем случае всей предысторией, т. е. значениями всех аргументов  $\Phi$ -ции во все моменты времени от  $t = 0$  до  $t = s$  включительно, значениями самой  $\Phi$ -ции во все моменты времени от  $t = 0$  до  $t = s - 1$  включительно и значением самого аргумента времени  $t = s$ . Но не допускается, чтобы значение  $\Phi$ -ции в момент времени  $s$  зависело от ее значений в этот же момент или более поздние моменты и от значений аргументов в более поздние моменты времени. Т. о., в общем виде В. п. ф. могут быть определены следующим образом. Пусть заданы  $n$  упорядоченных последовательностей вида  $\{x_i^j\}$ , где  $x_i^j$  —

значение  $j$ -го элемента  $i$ -й последовательности (значение аргумента  $x_i$  в  $j$ -й такт дискретного времени) и задан элемент  $y^0$  последовательности  $\{y^j\}$  ( $y^j$  — значение ф-ции в  $j$ -й такт дискретного времени). Для любого фиксированного  $t = s$  В. п. ф. есть  $y^s = \varphi(y^{s-1}, y^{s-2}, \dots, y^{s-r}, x_1^s, x_1^{s-1}, \dots, x_1^{s-p_1}, \dots, x_n^s, x_n^{s-1}, \dots, x_n^{s-p_n}, s)$ , где  $r; p_1, \dots, p_n \leq s$ . Для некоторых начальных тактов может оказаться, что значение В. п. ф. зависит от значений ф-ции или аргументов в «отрицательные» такты времени. В этом случае, как правило, предполагают, что эти значения совпадают с теми значениями аргументов и ф-ции, которые были реализованы в момент  $t = 0$ .

Возможны различные методы описания В. п. ф. При одних вместо исчисления высказываний, пригодного для описания переключаемых функций, используется соответствующее исчисление предикатов. Напр., в алгебре состояний и событий, предложенной Э. Беркли, используется спец. набор операторов, отражающих временные соотношения (примерами таких операторов могут служить «ПОСЛЕ», «ПОКА», «ДО», «В ТЕЧЕНИЕ», «НАЧИНАТЬСЯ» и т. п.). Эти способы описания В. п. ф. оказались мало эффективными при решении задач логического синтеза схем. Другой подход основан на рассмотрении аргументов и значений операций на временных интервалах. Наконец, третий подход к описанию В. п. ф. связан с пополнением обычной алгебры переключаемых ф-ций операцией временной задержки на любое фиксированное число дискретных тактов (фактически достаточно иметь операцию задержки на один такт). В теории векторно-временных переключаемых ф-ций доказывается теорема, носящая общий характер для всех В. п. ф. Согласно этой теореме система В. п. ф. полна тогда и только тогда, когда она содержит полную систему переключаемых ф-ций и хотя бы одну ф-цию, изменяющую время. Весьма важен тот факт, что обладая полной системой В. п. ф., можно описать любой автомат конечный. Для получения эффективных методов описания В. п. ф. и решения задач логического синтеза удобно рассматривать подклассы В. п. ф. Если В. п. ф. от  $l$ -значных аргументов  $x_i$  имеет вид  $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ , т. е. ее значение при  $t = s$  является переключаемой ф-цией  $y^s = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, s)$ , то такую В. п. ф. наз. временно  $l$ -значной ф-цией (при  $l = 2$  — временно булевой ф-цией). При этом с точки зрения практики интерес представляют такие  $l$ -значные временные ф-ции, которые являются периодическими (с периодом  $q$ ), т. е. для любого  $t$  удовлетворяют равенству  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, t + q) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ . Такие ф-ции можно задать как  $y = \bigvee_{\alpha=0}^{q-1} \tau_\alpha y^\alpha$ . Изучение их сводится к изучению совокупности переключа-

тельных ф-ций  $\{y^\alpha\}$  и способа реализации характеристических функций  $\tau_\alpha$  ( $\tau_\alpha = 1$ ), если  $t = \alpha$  и  $\tau_\alpha = 0$ , если  $t \neq \alpha$ . Другим подклассом В. п. ф. являются рекуррентные ф-ции, определяемые следующим образом:  $y^s = \varphi(x_1^{r_1}, \dots, x_1^{r_{i_1}}, x_2^{r_2}, \dots, x_2^{r_{i_2}}, \dots, x_n^{r_n}, \dots, x_n^{r_{i_n}}, y^{r_{n+1}}, \dots, y^{r_{n+1}})$ . Здесь  $r_k$  — моменты дискретного времени, меньшие, чем  $s$  (для значений ф-ции) или не большие, чем  $s$  (для значений аргумента). Если через  $w_i$  обозначить задержку  $x_j$  или  $y$  на  $i$  тактов, то после соответствующей замены рекуррентная ф-ция принимает вид:  $y = \varphi(w_1, w_2, \dots, w_{r_{i_1} + r_{i_2} + \dots + r_{i_{n+1}}})$ . Это позволяет выражать ее с помощью аппарата переключаемых ф-ций (при значности аргументов и значений функции, булевой функции, равной двум — с помощью аппарата булевых ф-ций). Лит.: Б а з и л е в с к и й Ю. Я. Вопросы теории временных логических функций. В кн.: Вопросы теории математических машин, сб. 1. М., 1958; Р а б и н о в и ч З. Л. Векторно-временные переключаемые функции (ВП-функции) как язык для описания схем и процессов переработки информации. «Кибернетика», 1968, № 3—4; П о с п е л о в Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. М., 1968 [библиогр. с. 324—328]; Р о г и н с к и й В. Н. Динамические автоматы и временные булевы функции. «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1970, № 2—3; Б е р к л и Э. Символическая логика и разумные машины. Пер. с англ. М., 1961 [библиогр. с. 241—252]. Д. А. Поспелов.

**ВРЕМЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ** после отката — время, затрачиваемое на отыскание и устранение одного отказа в некотором устройстве, напр., в цифровой вычислительной машине. В. в. представляет собой случайную величину, зависящую от характера отказа, применяемых средств диагностического контроля и квалификации обслуживающего персонала. Как правило, оперируют величиной, называемой средним В. в.  $\tau_{ср}$ , которое может быть вычислено на основании статистических данных:

$$\tau_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_i}{n}, \text{ где } n — \text{число отказов ЦВМ}$$

за определенный период ее эксплуатации,  $\tau_i$  — время восстановления ЦВМ после  $i$ -го отказа.

Л. А. Корытная.

**ВРЕМЯ ВЫБОРКИ ИНФОРМАЦИИ** — время, затрачиваемое на отыскание и вывод из запоминающего устройства единицы количества информации (одного слова). См. также *Время обращения к запоминающему устройству*.

**ВРЕМЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ** — промежуток времени функционирования реальной системы, воспроизводящийся в процессе моделирования ее поведения. Поведение системы часто воспроизводится не в действительном времени, а во времени, преобразованном с помощью определенного масштаба. Так при моделировании функционирования морского порта В. м. д. иногда может достигать нескольких лет или даже десятков лет, в то время как воспроизведение процесса на вы-

числ. машине длится лишь несколько минут. На практике выбор В. м. д. производят, исходя из требований точности с учетом быстроты сходимости изучаемого процесса. При моделировании нестационарных процессов В. м. д. обычно в несколько раз больше, чем при моделировании стационарных.

Н. И. Костина.

**ВРЕМЯ ОБРАЩЕНИЯ К ЗАПОМИНАЮЩЕМУ УСТРОЙСТВУ** — минимальное время между очередными запусками запоминающего устройства (ЗУ) для считывания или записи единицы информации по произвольным адресам. В зависимости от типа ЗУ такой единицей может быть массив слов, размещаемых в запоминающего устройства зоне (напр., в случае ЗУ на магнитной ленте) или слово (число), размещаемое в ячейке запоминающего устройства. В первом случае, когда принципиально обращение происходит только к определенной зоне, а не к ячейке, В. о. к з. у. состоит из времени поиска зоны и времени считывания (записи) массива слов и зависит как от расположения искомого слова, так и от величины массива. Т. к. для таких ЗУ В. о. к з. у. является величиной переменной, то для характеристики их скоростных параметров используются другие показатели, напр., скорость считывания (записи) двоичных единиц или слов определенной разрядности либо плотность размещения информации на единицу длины носителя и скорость его перемещения и др. Наиболее широко пользуются понятием В. о. к з. у. во втором случае, когда принцип работы ЗУ использует обращение к ячейке. При этом для циклических ЗУ (ЗУ на барабане, ЗУ на линиях задержки и др.) В. о. к з. у. равно циклу работы (времени оборота барабана, периоду циркуляции информации относительно средств считывания), а для других типов складывается из времени выборки информации (состоящего из времени поиска физ. адреса ячейки и времени считывания) и времени регенерации (записи), включая время переходных процессов в разрядных линиях. Часто, с целью увеличения скорости работы ЗУ, производят совмещение рабочих циклов т. о., что поиск ячейки производится в то время, когда еще не закончился переходный процесс в разрядных линиях от предыдущего обращения, поэтому указанное время может быть исключено из В. о. к з. у. В ЗУ, в которых операция считывания и регенерации (стирания и записи) не связаны воедино, напр., в устройствах со считыванием без разрушения информации, скорость работы определяется В. о. к з. у. отдельно для считывания и записи или их обратными величинами: частотой считывания и частотой записи.

Ф. Н. Зыков.

**ВРЕМЯ ОЖИДАНИЯ** — промежуток времени в массового обслуживания системах от момента вступления абонента в очередь до момента начала его обслуживания. В. о. — случайная величина, характеризующая продолжительность пассивной задержки абонента, ожидающего обслуживания. Содержательный смысл В. о. в реальных системах весьма разнообразен: время простоя судов, ожидания пасса-

жирами трамваев, автобусов, хранения товаров в магазинах и т. д. Качество работы системы массового обслуживания часто может быть охарактеризовано с помощью вероятностного распределения В. о. абонента, прибывшего в систему в момент времени достаточно далекий от начала ее функционирования. Математическое ожидание этого распределения — среднее В. о. — важнейшая и наиболее простая характеристика качества обслуживания. Определить распределение В. о. аналитическими методами до настоящего времени удалось лишь при достаточно жестких предположениях: показательное распределение времени обслуживания или пуассоновский входящий поток (см. Пуассона поток). Для  $n$ -линейной системы обслуживания с пуассоновским входящим потоком параметра  $\lambda$  и произвольным распределением времени обслуживания со средним  $\frac{1}{\lambda}$  при

условии  $\frac{\lambda}{v} = \rho < n$  распределение В. о.

$F(t)$  имеет вид

$$F(t) = P\{\gamma > t\} = \frac{\rho^n P_0}{(n-1)!(n-\rho)} e^{-v \cdot (n-\rho)t},$$

$$\text{где } P_0 = \frac{1}{\left[ \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n-1}}{n!(n-\rho)} \right]}.$$

Отсюда можно получить ф-лу для среднего В. о.  $a$

$$a = \frac{\rho^n P_0}{(n-1)! v \cdot (n-\rho)^2}.$$

Понятие В. о. и методы вычисления его используют на практике в тех. и эконом. задачах при исследовании длительности хранения товаров, сроков задержки информации и т. д.

Н. И. Костина.

**ВРЕМЯ РАБОТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ ПОЛЕЗНОЕ** — время, в течение которого вычислительная машина, находясь в режиме решения или отладки задач, работает безотказно. Процентное отношение полезного времени к общему календарному времени работы машины является показателем надежности работы ЦВМ.

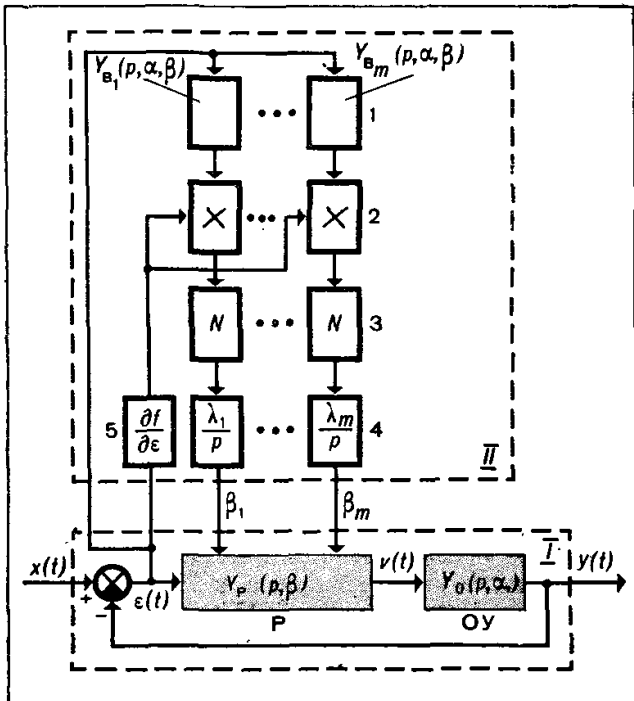
**ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ** (ВИНИТИ) — информационное и научно-исследовательское учреждение в Москве. Организован в 1952 в системе АН СССР как Ин-т науч. информации (с 1955 имеет нынешнее название) и находится в двойном подчинении — Гос. комитета Совета Министров СССР по науке и технике и АН СССР. Осн. задачи: систематическое и исчерпывающее реферирование всей мировой литературы в области естествознания и техники; подготовка и издание на этой основе реферативного журнала, выпуск обзорно-библиографической и справочной литературы, экспресс-информации по наиболее

актуальным вопросам науки и техники; организация и развитие науч. исследований, направленных на совершенствование методов и техн. средств, используемых в научно-информационной деятельности. Структурно ин-т состоит из нескольких десятков отраслевых, функциональных и научно-исследовательских отделов, машинно-счетной станции, производственно-издательского комбината, справочно-информационных служб. Ин-т является головной научно-информационной организацией в СССР (осуществляет координацию исследований и разработок в области научно-информационной деятельности в стране). ВИНТИ издает «Реферативный журнал» в 173 выпусках, из которых 41 выходят отдельными выпусками, 132 — в 25 сводных томах, выпуски «Экспресс-информация» (в 77 сериях), ежегодники «Итоги науки и техники», сборник «Научно-техническая информация». При Ин-те имеется аспирантура.

Лит.: А р у т ю н о в Н. Б. Дальнейшее развитие системы научно-технической информации в СССР. «Научно-техническая информация. Серия 1», 1967, № 11; М и х а й л о в А. И., Ч е р н ы й А. И., Г и л я р е в с к и й Р. С. Развитие информатики в СССР. «Научно-техническая информация. Серия 2», 1967, № 11; Ф о м и н А. А. Всесоюзный институт научной и технической информации и его деятельность. М., 1968 [библиогр. с. 49—61].

А. И. Михайлов.

**ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА МЕТОД** — способ получения компонент градиента показателя качества автоматической системы управления путем преобразования сигнала системы вспомогательным нелинейным (в общем случае) оператором. Рассмотрим



Блок-схема самонастраивающейся системы управления с использованием метода вспомогательного оператора: I — основная система; II — контур самонастройки; 1 — вспомогательные операторы; 2 — множительные звенья, 3 и 5 — блоки, выполняющие операции  $N$  и  $\frac{\partial f}{\partial \epsilon}$  соответственно, 4 — интеграторы;  $\beta_1, \dots, \beta_m$  — значения настраиваемых параметров.

систему управления замкнутую (I на рис.), состоящую из объекта управления ОУ и управляющего устройства (регулятора) Р, описываемых соответственно операторами  $Y_0(p, \alpha)$  и  $Y_p(p, \beta)$ , где  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования,  $\alpha$  — совокупность переменных параметров  $\alpha_i$  объекта ( $i = 1, 2, \dots, \dots, n$ ),  $\beta$  — совокупность варьируемых параметров настройки  $\beta_j$  регулятора ( $j = 1, 2, \dots, \dots, m$ ),  $x(t)$  и  $y(t)$  — соответственно входной и выходной сигналы системы,  $v(t)$  — управляющее воздействие. Часто критерий качества систем автоматического управления  $I$  определяется через ошибку системы  $\epsilon$ :

$$I = Nf(\epsilon), \quad (1)$$

где  $N$  — оператор или функционал.

Обычно требуют, чтобы  $I$  принимал оптимальное значение  $I_0$ , т. е.

$$I_0 = \text{extremum } I(\beta_1, \dots, \beta_m) \quad \beta_j \in B_j \quad (2)$$

или в более общем случае:

$$I_0 = \inf_{\beta_j \in B_j} I(\beta_1, \dots, \beta_m) \text{ или } I_0 = \sup_{\beta_j \in B_j} (\beta_1, \dots, \beta_m), \quad (3)$$

где  $B_j$  — допустимая область изменения параметров  $\beta_j$ .

При использовании градиентной процедуры поиска оптимальных значений параметров  $\beta$  (см. *Градиентный метод*) уравнения настройки параметров регулятора имеют вид:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = A \frac{\partial I(\beta)}{\partial \beta}, \quad (4)$$

где  $A$  — числовая матрица,  $\beta$  — вектор настраиваемых параметров. Из (1) следует:

$$\frac{\partial I(\beta)}{\partial \beta_j} = N \frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \beta_j}. \quad (5)$$

Учитывая, что  $\epsilon = x - y$ ,  $y = Y_0(p, \alpha) v$ ,  $v = Y_p(p, \beta) \epsilon$  и принимая во внимание, что  $x$  не зависит от  $\beta$ , получим:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \beta_j} = - \frac{\partial y}{\partial \beta_j}; \quad (6, a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \beta_j} &= Y_0(p, \alpha) \frac{\partial Y_p(p, \beta)}{\partial \beta_j} \epsilon + \\ &+ Y_0(p, \alpha) Y_p(p, \beta) \frac{\partial \epsilon}{\partial \beta_j}. \end{aligned} \quad (6, б)$$

Преобразование (6) дает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial \beta_j} &= - Y_{B_j}(p, \alpha, \beta) \epsilon, \\ j &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (7)$$



где оператор

$$Y_{vj}(p, \alpha, \beta) = [1 + Y_0(p, \alpha) Y_p(p, \beta)]^{-1} Y_0(p, \alpha) \frac{\partial Y_p(p, \beta)}{\partial \beta_j} \quad (8)$$

наз. вспомогательным оператором.

Из (7) и (5) видно, что преобразование ошибки системы с этим оператором позволяет определить компоненты градиента  $I$ , т. к.  $N$  и  $f(\epsilon)$  (см. (3)) заранее заданы (выбраны).

Структурная схема контура самонастройки, основанная на использовании В. о. м. для случая, когда  $A = \lambda E$  (где  $E$  — единичная матрица,  $\lambda$  — скалярный множитель), приведена на рис. (контур II). Выражение (8) можно записать в виде

$$Y_{vj}(p, \alpha, \beta) = Y_{vo}(p, \alpha, \beta) Y_{vcj}(p, \beta), \quad (9)$$

где  $Y_{vo}(p, \alpha, \beta) = [1 + Y_0(p, \alpha) Y_p(p, \beta)]^{-1} \times$

$\times Y_0(p, \alpha)$  — общая для всех вспомогательных операторов часть, а  $Y_{vcj}(p, \beta) = \frac{\partial Y_p(p, \beta)}{\partial \beta_j}$  —

т. н. существенные вспомогательные операторы. Из (9) видно, что  $Y_{vo}(p, \alpha, \beta)$  зависит от параметров объекта и регулятора, в то время как  $Y_{vcj}(p, \beta)$  — только от параметров регулятора. Иногда с целью упрощения контура самонастройки  $Y_{vj}(p, \alpha, \beta)$  аппроксимируют более простыми звеньями, в частности, используют только существенные вспомогательные операторы для приближенного определения компонент градиента:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \beta_j} \approx -Y_{vcj}(p, \beta) \epsilon. \quad (10)$$

В. о. м. используется в т. н. беспоисковых самонастраивающихся системах. При этом для достижения оптимального значения  $I$  не требуется применения спец. пробных сигналов, однако необходима значительная априорная информация о структуре и параметрах системы.

Лит.: Казаков И. Е. К статистической теории непрерывных самонастраивающихся систем. «Известия АН СССР. Энергетика и автоматика», 1962, № 6; Евланов Л. Г. Самонастраивающаяся система с поиском градиента методом вспомогательного оператора. «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1963, № 1; Костюк Б. И. Беспоисковые градиентные самонастраивающиеся системы. К., 1969 [библиогр. с. 264—273].

В. И. Костюк, Ю. В. Кременчуло.

**ВХОДНОЕ УСТРОЙСТВО** — см. *Устройства ввода — вывода данных ЦВМ.*

**ВЫБОРКА ТРЕНИРОВОЧНАЯ** — то же, что и обучающая выборка.

**ВЫВОДА ИНФОРМАЦИИ УСТРОЙСТВО** — см. *Устройства ввода — вывода данных ЦВМ.*

**ВЫДЕЛЕНИЕ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ПОМЕХ** — операция подавления мешающих действий помех и повышения качества передачи

полезного (несущего информацию) сигнала в результате восстановления мгновенных значений этого сигнала с заданной вероятностью ошибки. При этом эффективность выделения полезного сигнала можно оценивать функцией вероятности того, что отклонение  $\epsilon$  выделенного сигнала от его истинного значения не превышает некоторого заранее заданного порога  $\epsilon_0$

$$p = p\{\epsilon \leq \epsilon_0\}.$$

В общем случае В. с. на ф. п. основывается на априорных сведениях о параметрах (отличительных признаках) сигнала и помех. Различие спектральных характеристик, интенсивностей, временных свойств, фазовых соотношений сигнала и помех позволяет осуществить функциональную (частотную, амплитудную, временную, фазовую и др.) избирательность в системе выделения сигнала и ослабить в определенной мере мешающие влияния помех. Наибольшее распространение получила частотная избирательность.

Сов. ученый-радиотехник В. А. Котельников (р. 1908) и амер. ученый Ф. Вудворд независимо один от другого обосновали принципиальную возможность оптимального выделения (приема) сигналов, обеспечивающую макс. вероятность правильного воспроизведения полезного сигнала. Выделение сигнала в этом случае рассматривается как задача определения на основе анализа реализации принятого сигнала условной вероятности  $p_y(x)$  того, что принятому сигналу  $y$  соответствует определенный полезный сигнал  $x$ . Полезный сигнал при этом рассматривается, как случайный объект с известным законом распределения  $p(x)$  в соответствующем пространстве. Определение условной вероятности  $p_y(x)$  позволяет наилучшим образом уменьшить априорную неопределенность в отношении принимаемого сигнала. При известном законе распределения вероятностей полезного сигнала  $p(x)$  нахождение  $p_y(x)$  можно свести к определению условной вероятности  $p_x(y)$  того, что известному сигналу  $x$  соответствует принятый сигнал  $y$ , так как  $p_y(x) = k p(x) p_x(y)$ , где  $k$  — постоянная;  $p_x(y)$  обычно наз. ф-цией правдоподобия и обозначают  $L(x)$ . Решение о выделении (приеме) определенного сигнала  $x$  принимается по максимуму ф-ции правдоподобия.

Оптимальное выделение (прием) полезного сигнала можно осуществить и без определения условных вероятностей  $p_y(x)$ , или  $p_x(y)$ , достаточно, чтобы результат обработки смеси полезного сигнала и помехи однозначно определялся этими распределениями. Так, для оптимального выделения сигнала  $x(t)$ , действующего на фоне белого шума с нормальным законом распределения амплитуд  $n(t)$  в течение времени  $T$ , достаточно определить корреляционный интеграл

$$r_{yx}(\tau) = \int_0^T y(t) x(t - \tau) dt,$$

где  $y(t) = x(t) + n(t)$  — смесь полезного сигнала и помех. Такая операция позволяет извлечь наибольшее количество информации о наличии сигнала, поскольку по значениям  $r_{yx}$  однозначно определяется ф-ция правдоподобия  $L(x)$ . Это доказывает оптимальность приемника взаимно-корреляционного типа.

Устройство выделения сигнала можно рассматривать как линейный *фильтр*, обрабатывающий смесь  $y(t)$  так, что выходной сигнал  $y_{\text{вых}}(t)$  наилучшим (в рамках принятого критерия) образом воспроизводит полезный сигнал  $x(t)$ . Такое устройство наз. оптим. фильтром, а сам процесс выделения — оптим. фильтрацией. Основы теории оптим. фильтрации заложены в работах сов. математика А. Н. Колмогорова (р. 1903) и амер. математика Н. Винера (1894—1964).

Взаимно-корреляционный приемник можно рассматривать как оптимальный по критерию максимума информации фильтр, а его выходной сигнал в момент  $\tau$  — как реакцию фильтра с импульсной характеристикой, тождественно равной зеркальному изображению сигнала

$$r_{yx}(\tau) = y_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) x(t + t_0 - \tau) dt.$$

Частотная характеристика такого фильтра  $K(\omega)$  с точностью до постоянного множителя совпадает с комплексно сопряженным спектром полезного сигнала  $X(\omega)$ :

$$K(\omega) = X^*(\omega) \exp \{-j\omega t_0\}.$$

Будучи оптимальным в информационном смысле, взаимно-корреляционный приемник максимизирует отношение пикового значения сигнала к эффективному значению помехи. Это отношение равно отношению полной энергии сигнала к спектральной плотности мощности

$$\text{шума } q = \frac{E}{G_n} \text{ и не зависит от формы полезного}$$

сигнала. Фильтры выделения полезного сигнала можно оптимизировать по критерию минимума среднеквадратичного уклонения

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{[y_{\text{вых}}(t) - x(t)]^2}.$$

Частотная характеристика такого оптимального фильтра для статистически независимых сигнала и помех однозначно определяется формой энергетического спектра полезного сигнала  $G_x(\omega)$  и помех  $G_n(\omega)$ :

$$K(\omega) = \frac{G_x(\omega)}{G_x(\omega) + G_n(\omega)}.$$

В практике для В. с. на ф. п. широко применяют квазиоптимальные фильтры, форма частотной характеристики которых в известной степени произвольна и не зависит от спектров сигнала и помех, а полоса пропускания согласована с ними. Отношение сигнала к помехе на выходе таких фильтров хуже, чем у оптимальных.

Лит.: Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. «Известия АН СССР. Серия математическая», 1941, т. 5, № 1; Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. М.—Л., 1956; Гуткин Л. С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. М.—Л., 1961 [библиогр. с. 479—484]; Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New York, 1950; Woodward P. M. Probability and information theory, with applications to radar. London, 1955. В. И. Чайковский.

**ВЫИГРЫША ФУНКЦИЯ** — функция, приписываемая в *игре бескоалиционной* каждому игроку. Задается на множестве всех ситуаций и принимает вещественные значения, численно выражающие выигрыш игрока в различных ситуациях. В *игре антагонистической* В. ф. 1-го игрока часто называют В. ф. самой игры. См. также *Игр теория*.

**ВЫИГРЫШЕЙ МАТРИЦА** — матрица, строками которой являются стратегии первого игрока в конечной игре двух лиц (см. *Игры матричные* и *Игра биматричная*), столбцами — стратегии второго игрока, а элемент на пересечении строки и столбца — выигрыш игрока в ситуации, образованной соответствующими стратегиями. При описании матричной игры указывается только В. м. первого игрока.

**ВЫПУКЛАЯ ОБОЛОЧКА**  $[X]$  (или  $\text{co}X$ ) произвольного множества  $X$  линейного пространства  $E$  — наименьшее *выпуклое множество*, содержащее  $X$ , т. е. В. о. — это мн-во, являющееся пересечением всех выпуклых мн-в, содержащих  $X$ . Мн-во  $[X]$  состоит из всех точек, представимых в виде выпуклой комбинации произвольного числа точек  $X$ .

Простейшие свойства В. о.:  $[\alpha X] = \alpha [X]$ ;  $[X + Y] = [X] + [Y]$ ; если мн-во  $X$  ограничено, то и мн-во  $[X]$  ограничено. Если  $X$  — множество  $n$ -мерного евклидова пространства  $E^n$ , то мн-во  $[X]$  обладает следующим важным свойством: каждая точка  $[X]$  может быть представлена в виде выпуклой комбинации не более чем  $(n + 1)$ -й точки  $X$ .

**ВЫПУКЛАЯ ФУНКЦИЯ** — функция, определенная на *выпуклом множестве* линейного пространства, и удовлетворяющая неравенству  $g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$  при всех  $\lambda \in [0, 1]$ . Ю. М. Данилин.

Если область определения В. ф.  $g(x)$  лежит в конечномерном пространстве, то  $g(x)$  непрерывна во всякой внутренней точке этой области. Пусть  $x_1, \dots, x_m$  — любые точки из области определения В. ф.  $g(x)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — неотрицательные числа, в сумме равные 1. Тогда

$$g\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i g(x_i).$$

Если  $g(x)$  — дважды непрерывно дифференцируемая В. ф., то матрица ее вторых производных полуположительно определена.

**ВЫПУКЛОЕ МНОГОГРАННОЕ МНОЖЕСТВО** — множество, образованное пересечением конечного числа полупространств

вида  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m$  конечномерного евклидова пространства. Всякое В. м. м. может быть представлено в виде суммы выпуклого многогранника и выпуклого многогранного конуса.

**ВЫПУКЛОЕ МНОЖЕСТВО** — множество  $X$  линейного пространства  $E$ , характеризующееся следующим свойством. Если  $x_1$  и  $x_2$  — произвольные элементы мн-ва  $X$ , то при любом  $0 \leq \lambda \leq 1$  точка  $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in X$ . Др. словами, мн-во  $X$  — выпуклое, если оно целиком содержит отрезок, определяемый любыми двумя его точками. В. м., напр., являются: точка  $x \in E$ ; шар произвольного радиуса; любое подпространство  $E$ , в частности в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E^n$  — каждое из полупространств  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i (> b_i), i = 1, 2, \dots, m$ , определяемых гиперплоскостью  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ . Свойства В. м.:

1) если  $x_1, \dots, x_m$  — точки мн-ва  $X$ , то этому мн-ву принадлежит и любая точка  $x$ , являющаяся выпуклой комбинацией точек  $x_i: x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ , где  $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ ;

2) пересечение В. м. также является В. м.;  
3) в пространстве  $E_n$  любые два В. м.  $X$  и  $Y$ , не имеющие общих точек, могут быть разделены ненулевой линейной ф-цией, т. е. найдется такая линейная ф-ция  $f$ , что  $f(x) \leq \alpha < \alpha + \epsilon \leq f(y)$  для всех  $x \in X$  и  $y \in Y$  (теорема об отделимости В. м.). Аналогичное утверждение сохраняет силу и в случае произвольного линейного пространства, при условии, что одно из мн-в имеет внутреннюю (в определенном для рассматриваемого пространства смысле) точку. При более жестких требованиях, предъявляемых к В. м.  $X$  и  $Y$ , гарантируется существование ненулевой линейной ф-ции, строго разделяющей эти мн-ва:  $f(x) \leq \alpha < \alpha + \epsilon \leq f(y)$  для всех  $x \in X, y \in Y$ , где  $\alpha$  — некоторая константа, а  $\epsilon > 0$ . В пространстве  $E^n$  для этого достаточно, чтобы мн-ва  $X$  и  $Y$  были замкнуты, не пересекались, и, по крайней мере, одно из них было ограничено. В каждой граничной точке  $y$  В. м.  $X \subset E^n$  может быть определена по крайней мере одна линейная ф-ция  $f$ , называемая опорной ф-цией к мн-ву  $X$  в точке  $y$  такая, что  $f(y) \geq f(x)$  для всех  $x \in X$ .

Существуют различные спец. конструкции В. м. (см. *Выпуклый конус  $K$  с вершиной  $p$ , Выпуклая оболочка  $[X]$  (или  $coX$ ) произвольного множества  $X$  линейного пространства  $E$ , Выпуклое многогранное множество*). Благодаря своим свойствам, понятие В. м. находит широкое применение в функциональном анализе, программировании линейном и нелинейном, оптимального управления теории, играх дифференциальных.

Лит.: Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М., 1969; Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Пер. с англ. М., 1964 [библиогр. с. 798—819]. Ю. М. Данилин.

**ВЫПУКЛЫЙ КОНУС  $K$  с вершиной  $p$**  — выпуклое множество линейного пространства  $E$ , обладающее следующим свойством: из того, что  $p + x \in K$ , следует, что при любом  $\alpha \geq 0$   $p + \alpha x \in K$ . Если вершина В. к.  $p$  — нулевой элемент пространства  $E$ , то это определение эквивалентно следующему:  $K$  — В. к., если при любых  $x$  и  $y$  из  $K$  точка  $\alpha x + \beta y \in K$  при всех  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ .

Примеры В. к.: в двумерном евклидовом пространстве — внутренность угла, не превосходящего  $\pi$ ; в пространстве  $E$  — произвольное линейное подпространство, содержащее точку  $p$ . Наименьший В. к.  $K(X)$  с вершиной  $p$ , содержащий мн-во  $X$ , наз. В. к., натянутым на мн-во  $X$ , или конической оболочкой  $X$ . В. к.  $K(X)$  состоит из всех точек, представимых в виде  $p + \alpha \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i - p \right)$ , где  $\alpha \geq 0, \lambda_i \geq 0$ ,

$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, m$  — произвольное натуральное число,  $x_i \in X$ . Говорят также, что  $K(X)$  — конус, порождаемый мн-вом  $X$ . Ю. М. Данилин.

**ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК** — ограниченное выпуклое множество, образованное пересечением конечного числа полупространств

вида  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m$   $n$ -мерного евклидова пространства  $E^n$ .

Гиперплоскость миним. размерности  $k, 0 \leq k \leq n$ , в которой целиком содержится В. м.  $M$ , наз. несущей плоскостью многогранника, а число  $k$  — размерностью  $M$ . Мн-во  $\Gamma$  граничных точек многогранника, принадлежащих некоторой гиперплоскости размерности  $\mu, 0 \leq \mu \leq k - 1$ , являющейся пересечением плоскостей, образующих полупространства, которые определяют многогранник, наз.  $\mu$ -мерной гранью  $M$ . Нульмерную грань наз. вершиной многогранника, одномерную грань — ребром. Каждая точка многогранника  $M$  может быть представлена в виде выпуклой комбинации его вершин, т. е. выпуклый мн-к представляет собой выпуклую оболочку мн-ва всех своих вершин. Ю. М. Данилин.

**ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННЫЙ КОНУС** — выпуклое множество  $n$ -мерного евклидова пространства  $E^n$ , образованное пересечением конечного числа полупространств, граничные гиперплоскости которых проходят через некоторую точку  $p$ , наз. вершиной В. м. к. В. м. к. может быть представлен как выпуклый конус, натянутый на конечное число точек  $x_i, i = 1, m$  пространства  $E^n$ : каждая точка конуса  $B$  представима в виде  $p + \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, i = 1, m$ .

**ВЫСКАЗЫВАНИЙ ИСЧИСЛЕНИЕ** — см. *Исчисление высказываний*.

**ВЫСКАЗЫВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИ ИСТИННЫЕ**, **ВЫСКАЗЫВАНИЯ ТОЖДЕСТВЕННЫЕ** — сложные высказывания, истинные при всевозможных интерпретациях их элементарных высказываний. См. *Алгебра логики*, *Тождественно истинная формула*.

**ВЫСКАЗЫВАНИЯ ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНЫЕ** — высказывания, отражающие существование предметов с теми или иными свойствами. Напр.: «Существуют числа  $x$  и  $y$  такие, что  $x > y + 1$ ».

**ВЫХОДНОЕ УСТРОЙСТВО** — см. *Устройства ввода — вывода данных ЦВМ*.

**ВЫЧИСЛЕНИЯ В РЕАЛЬНОЕ ВРЕМЯ** на автоматах — вычисления, при которых автомат вырабатывает результат за время, необходимое для подачи на него значения аргумента. Примером таких вычислений могут служить вычисления на автоматах конечных. Формальное описание В. в р. в. удобнее всего дать в терминах вычисления операторов (см. *Поведение автоматов*). Пусть оператор  $O$  отображает мн-во бесконечных последовательностей во входном алфавите  $X$  во мн-во бесконечных последовательностей в выходном алфавите  $Y$ . Говорят, что автомат  $\mathcal{A}$  вычисляет в реальное время оператор  $O$ , если  $\mathcal{A}$  на  $n$ -ом такте ( $n = 1, 2, \dots$ ), получая на вход  $x(n) \in X$ , выдает на выход  $y(n) \in Y$ , где  $y(1) \dots y(n) \dots$  есть результат применения  $O$  к  $x(1) \dots x(n) \dots$ .

Класс операторов, вычисляемых в реальное время, не исчерпывается конечно-автоматными операторами. Примером не конечно-автоматного оператора, который вычислим на многоленточной Тьюринга машине в реальное время, является оператор распознавания симметрии. Он отображает произвольную двоичную последовательность  $x(1) \dots x(n) \dots$  в такую двоичную последовательность  $y(1) \dots y(n) \dots$ , что  $y(n) = 1$  тогда и только тогда, когда  $x(1) \dots x(n)$  — симметричное слово (т. е.  $x(i+1) = x(n-i)$  для всех  $i = 0, \dots, n-1$ ).

Известно, что оператор распознавания симметрии не вычислим в реальное время на одноленточных машинах Тьюринга. Примером не конечно-автоматного оператора, вычисляемого в реальное время на автоматах итеративных, является оператор умножения, отображающий каждую пару последовательностей  $\langle x(1) \dots x(n) \dots, x'(1) \dots x'(n) \dots \rangle$  в последовательность  $y(1) \dots y(n) \dots$ , где  $y(n), \dots, y(1)$  — первые  $n$  разрядов произведения чисел  $x(n) \dots x(1)$  и  $x'(n) \dots x'(1)$ .

В теории В. в р. в. наибольший интерес представляет изучение классов операторов, вычисляемых в реальное время на автоматах того или иного типа. Операторы, вычисляемые в реальное время при любой известной концепции автомата, являются вычислимыми операторами без предвосхищения. Обратное неверно. Более того, для многих достаточно широких классов автоматов класс операторов, вычисляемых в реальное время, является довольно

узким и не содержит многих естественно определяемых операторов.

Приведем некоторые результаты сравнения (по типу вычисляющих автоматов) классов операторов, вычисляемых в реальное время: 1) существует оператор, вычисляемый в реальное время на двухленточной машине Тьюринга и не вычисляемый в реальное время ни на какой одноленточной машине Тьюринга; 2) для любого  $n \geq 2$  существует оператор, вычисляемый в реальное время на  $n$ -мерном итеративном автомате и не вычисляемый в реальное время ни на каком  $(n-1)$ -мерном итеративном автомате; 3) классы операторов, вычисляемых в реальное время на многоголовочных машинах Тьюринга и на многоленточных машинах Тьюринга, совпадают. Результаты 1) — 3) естественно переинтерпретируются в терминах вычисления предикатов. Важную интерпретацию в терминах порождения последовательностей допускают операторы с унарным входным алфавитом  $\{1\}$ . Говорят, что бесконечная последовательность  $\beta$  порождается в реальное время автоматом  $\mathcal{A}$ , если оператор, отображающий последовательность  $111 \dots$  в  $\beta$ , вычислим в реальное время на  $\mathcal{A}$ . Пусть сверх того  $\beta$  — двоичная последовательность, содержащая бесконечное число символов 1. С  $\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \dots$  связывается монотонно возрастающая ф-ция  $f(n)$  такая, что  $f(n) = m$  тогда и только тогда, когда  $\beta_m$  есть  $n$ -ое вхождение символа 1 в  $\beta$ . В этом случае говорят, что функция  $f(n)$  вычислима в реальное время на  $\mathcal{A}$ . Другими словами, рассматривают автомат автономный  $\mathcal{A}$ , выдающий (двоичную) последовательность и  $f(n)$  принимают равным номеру такта, в котором вырабатывается  $n$ -ая единица. Напр., с  $\beta = 1001 \dots 10 \dots 01 \dots$

$\dots (k = 1, 2, \dots)$  связывается ф-ция  $f(n) = n^2$ , которая вычислима в реальное время на одноленточной машине Тьюринга. Приведем осн. результаты, связанные с порождением последовательностей и вычислением ф-ций в реальное время: (1) для всякого  $k = 1, 2, \dots$  существует последовательность, порождаемая в реальное время машиной Минского с  $k+1$  лентами, и не порождаемая в реальное время никакой машиной Минского с  $k$  лентами; (2) существует последовательность, порождаемая в реальное время одноленточной машиной Тьюринга, и не порождаемая в реальное время никакой машиной Минского; (3) класс функций, вычисляемых в реальное время на машинах Минского, содержит всевозможные полиномы, степенные функции  $c^n$  ( $c$  — постоянная),  $n!$  и замкнут относительно операций сложения, умножения, суперпозиции, возведения в степень; (4) класс ф-ций, вычисляемых в реальное время на машинах Тьюринга, содержит не примитивно-рекурсивные функции и замкнут относительно операций, перечисленных в (3); (5) существует монотонно-возрастающая примитивно-рекурсивная ф-ция, не вычисляемая в реальное время на машинах Тьюринга.

Лит.: Фрейвалд Р. Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга с входом. «Алгебра и логика. Семинар», 1965, т. 4, в. 1; Барздин Я. М. Емкость среды и поведение автоматов. «Доклады АН СССР», 1965, т. 160, № 2; Фишер П. Многоклеточные и бесконечные автоматы. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, в. 5. М., 1968; Слипченко А. О. Распознавание предиката симметрии многоголовчатыми машинами Тьюринга со входом. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1973, т. 129; Fischer P. C., Meyer A. R., Rosenberg A. L. Time-restricted sequence generation. «Journal of the computer and system sciences», 1970, v. 4, № 1.

М. К. Валиев, В. А. Непомнящий.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА** — раздел математики, изучающий методы получения решения различных математических задач в виде числового (точного или приближенного) результата (см. *Численные методы*). Свое начало В. м. ведет от глубокой древности и началом ее можно считать правила вычисления иррациональных чисел. Современная В. м. состоит из многих разделов; важнейшие из них: вычисление значений ф-ций, вычисл. методы линейной алгебры, численное решение алгебр. и трансцендентных ур-ний, численное дифференцирование и интегрирование, численное решение дифф. и интегро-дифф. ур-ний и численные методы отыскания экстремумов функционалов (*оптимизации методы*). В. м. развивается вместе с развитием математики вообще, представляя собой как бы завершающий этап в решении матем. проблем. Напр., развивающийся в последнее время *дискретный анализ* порождает вычисл. методы дискретного анализа, которые также относятся к В. м.

Любой числ. результат можно получить только с помощью арифм. и логич. действий, поэтому задачу В. м. можно сформулировать как задачу представления решений (точно или приближенно) в виде последовательности арифм. операций. Т. о., любой числ. метод состоит из алгоритма решения, т. е. точного описания последовательности арифм. операций, и оценки погрешности алгоритма (см. *Погрешностей вычислений теория*). Лишь в очень редких случаях точный результат может быть достигнут при конечном к-ве арифм. операций. Почти всегда этот результат представляется как предел бесконечной последовательности операций. Поэтому оценка погрешности часто сводится к оценке сходимости алгоритма. Однако сходимость отнюдь не является необходимым требованием, когда ставится задача о получении результата с заданной точностью (а не с любой степенью точности), при этом необходимая точность устанавливается обычно из практических соображений. Примером может служить вычисление значений ф-ций с помощью расходящихся асимптотических рядов, которые не могут дать приближения с любой степенью точности, но позволяют быстро и точно при соответствующих условиях вычислять значения ф-ций с конечной, но достаточной точностью.

Для практического применения алгоритма весьма важна его эффективность. Ее иногда оценивают по к-ву арифм. операций, необходимых для получения решения. Однако весьма

часто уменьшение к-ва арифм. операций достигается в результате логич. усложнения алгоритма, и поэтому программы для ЭВМ (особенно при трансляции с алгоритмических языков) для такого логически усложненного алгоритма получаются столь неэкономичными, что весь выигрыш вследствие снижения к-ва арифм. операций может потеряться.

Аналитической основой вычисления значений трансцендентных ф-ций является теория разложения в ряды (степенные, ряды по ортогональным ф-циям, ряды факториалов и др.), приближение многочленами, реже — разложение в непрерывные дроби, а также другие спец. методы, связанные со специфическими свойствами конкретных ф-ций. Приближение ф-ций многочленами (которое в частных случаях может совпадать с разложением в ряд по ортогональным многочленам) получило в последнее время значительное распространение для составления стандартных программ вычисления трансцендентных ф-ций на ЭВМ, при этом чаще всего используются многочлены Чебышева. Для широкого практического использования трансцендентных ф-ций вычисляют таблицы их значений для некоторой последовательности значений аргумента. Промежуточные значения находят с помощью интерполирования (см. *Интерполирование функций*). Практически осуществимо *табулирование функций*, зависящих лишь от одной, максимум двух, переменных.

Раздел вычисл. методов линейной алгебры рассматривает в основном две задачи: 1) решение систем линейных алгебр. ур-ний и 2) определение собственных значений и собственных векторов матриц (см. *Собственных значений и собственных векторов матриц способы вычисления*). Первая задача является «арифметизированной», т. е. ее точное решение можно получить с помощью конечной последовательности арифм. операций. К-во этих операций (сложений и умножений) для системы с  $n$  неизвестными в общем случае составляет величину порядка  $n^3$ .

К системам линейных алгебр. ур-ний приближенно сводится решение краевых задач для линейных дифф. ур-ний. В случае ур-ний с частными производными порядок системы алгебр. ур-ний может быть очень высок (тысячи и десятки тысяч неизвестных), и решение таких систем прямыми точными методами практически невыполнимо. Поэтому, помимо точных методов решения больших систем алгебр. ур-ний, применяют и прил. *итерационные методы*. Смысл их заключается в том, что матрицу  $A$  исходной системы  $\vec{A}\vec{x} = \vec{b}$  представляют в виде  $A = A_0 - B$ , причем для матрицы  $A_0$  обратную матрицу можно легко вычислить. После этого систему решают последовательными приближениями

$$A_0\vec{x}_{n+1} = B\vec{x}_n + \vec{b}$$

или, в более общей форме,

$$A_0\vec{x}_{n+1} = \alpha(\vec{A}\vec{x}_n - \vec{b}) + A_0\vec{x}_n \quad (1)$$

(здесь  $\alpha$  — некоторый параметр, используемый для улучшения сходимости, при  $\alpha = -1$  получают предыдущий случай). Если достаточно точное решение можно получить при небольшом к-ве итераций, то к-во арифм. операций, необходимое для получения этого решения, составит величину порядка  $n^2$ .

Прямые методы вычисления собственных значений матрицы приводят к задаче нахождения корней многочлена  $n$ -ной степени ( $n$  — порядок матрицы) относительно собственного значения  $\lambda$ . При тех высоких порядках матриц, к которым приближенно приводится, напр., задача о собственных значениях для краевых задач в частных производных, такой метод является часто практически невыполнимым. Для этих задач интерес представляет обычно вычисление небольшого к-ва первых собственных значений, для чего можно ограничиться вычислением сумм  $\sum_i \lambda_i^{-k}$ , которые

выражаются через следы степеней обратной матрицы. При достаточно высоких степенях  $k$  эти суммы приближенно можно заменять суммами нескольких первых членов. Однако и такой подход требует большой вычисл. работы, так как произведение матриц требует к-ва арифм. операций порядка  $n^3$ .

Широкое применение в задачах матем. физики получил метод возмущений. В этом методе исходную матрицу  $A$  заменяют суммой  $A = A_0 - B$  и задачу определения собственных значений матрицы  $A$  [ $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ ] заменяют задачей

$$A_0\vec{x} - \lambda\vec{x} = \varepsilon [\alpha (A\vec{x} - \lambda\vec{x}) + A_0\vec{x} - \lambda\vec{x}], \quad (2)$$

и при  $\varepsilon = 1$  сводят ее к исходной задаче. Матрица  $A_0$  выбирается так, чтобы ее собственные значения и собственные векторы легко вычислялись. Задача (2) решается методом разложения по степеням  $\varepsilon$   $\left[ \vec{x} = \sum_0^\infty \vec{x}_v \cdot \varepsilon^v \right]$ ,

$\lambda = \sum_0^\infty \lambda_v \varepsilon^v$ . Эффективность этого метода существенно зависит от того, насколько близко к исходной матрице  $A$  удастся подобрать матрицу  $A_0$ . Если это удастся так, что для вычисления собственных значений с необходимой точностью достаточно ограничиться небольшим к-вом членов разложения в ряд по  $\varepsilon$ , то это дает для матриц высокого порядка значительное сокращение к-ва арифм. операций.

Проблема определения корней алгебр. или трансцендентных ур-ний исчерпывающим образом разработана для случая  $\phi$ -ций одного переменного. В основе многочисленных методов лежит замена  $\phi$ -ции в окрестности нуля простейшей близкой к ней кривой (прямой или параболой). Такие методы требуют предварительной грубой локализации нуля, но для одной переменной эта задача весьма простая.

Для отыскания корней многочленов и целых  $\phi$ -ций используются также методы, основан-

ные на том, что суммы вида  $\sum_i x_i^{-k}$ , распространенные по всем нулям, могут точно выражаться через коэфф. разложения  $\phi$ -ции в ряды Тейлора. Значительно сложнее обстоит дело при определении корней системы ур-ний

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Конечно, если корни системы грубо локализованы, то замена  $\phi$ -ций системы простейшими поверхностями (например, плоскостями) дает возможность при определенных условиях определить корень с любой степенью точности. Однако для многомерных пространств нет еще сколь-нибудь универсальных подходов хотя бы для грубой локализации нулей. Развитие за последние годы эффективные прямые методы решения экстрем. задач стали применяться также для нахождения корней системы ур-ний, путем замены исходной задачи задачей отыскания минимума  $\phi$ -ции

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = \sum_{i=1}^n [F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2. \end{aligned}$$

Числ. дифференцирование и интегрирование непосредственно основывается на определении этих операций как предела отношения приращения  $\phi$ -ции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю (дифференцирование) или как предела сумм произведений элементов объема области интегрирования на значения  $\phi$ -ции в некоторой точке этого элемента. Несмотря на теор. простоту этой проблемы, большие вычисл. трудности возникают при вычислении многократных интегралов. Напр., в задачах кинетики разреженных газов, где приходится вычислять семикратные интегралы, вычисление их даже с очень малой точностью обычными методами разбиения на равные элементы объема приводит к десяткам миллиардов арифм. операций. Поэтому многие исследования были направлены на оптимизацию кубатурных формул с целью уменьшения к-ва узловых точек. Другой подход к вычислению многократных интегралов основан на аналогии между этими интегралами и вероятностью некоторого случайного процесса (Монте-Карло метод или метод статических испытаний). Преимущество метода Монте-Карло состоит в том, что в нем объем необходимых вычислений растет пропорционально к-ву измерений, а не экспоненциально возрастает с ростом к-ва измерений.

Числ. методы решения дифф. ур-ний составляют важнейший раздел вычисл. математики. Задачи механики, физики и хим. кинетики — это, в подавляющем числе случаев, задачи теории дифф. (иногда интегро-дифф.) ур-ний. Если числ. методы решения обыкновенных дифф. ур-ний начали разрабатываться почти одновременно с возникновением понятия дифф. ур-ний и ведут свое начало от Л. Эйлера (1707—83), то числ. методы решения ур-ний в частных производных, по существу, начали



развиваться только после создания ЭВМ. Причиной этого является т. н. «барьер многомерности» — резкий рост необходимого к-ва арифм. операций с возрастанием числа независимых переменных. Если для решения одномерного (т. е. обыкновенного) дифф. ур-ния с заданной точностью нужно определять решения в  $n$  узловых точках, то для получения решения с той же точностью для  $k$ -мерного ур-ния в частных производных потребуется уже  $n^k$  узловых точек. Поскольку при числ. решениях дифф. ур-ний часто приходится решать системы линейных алгебр. ур-ний относительно неизвестных значений ф-ции в узловых точках, то это значит, что в одномерном случае необходимо выполнить  $O(n^3)$  арифм. операций, а в  $k$ -мерном —  $O(n^{3k})$  операций. Практическая невозможность проведения такого рода вычислений «ручным» способом делала бессмысленной разработку числ. методов решения ур-ний в частных производных до появления ЭВМ. Лишь самые элементарные подходы были предложены в «домашинную эру», которые могли применяться только для простейших, как правило, линейных задач на ур-ния в частных производных.

В общем можно отметить два главных подхода к решению дифф. ур-ний: 1) представление решения в виде рядов по некоторой полной системе ф-ций (обычно ортогональной) и нахождение коэфф. этих рядов и 2) замена производных их конечноразностными приближениями (или интегралов — конечными суммами). Первый подход имеет ограниченное применение — он эффективен только в применении к линейным ур-ниям или в некоторых методах последовательных приближений, когда на каждой итерации решается линейное ур-ние. Именно этот подход чаще всего использовали до создания ЭВМ. В наст. время наибольшее применение имеют конечноразностные методы (в широком смысле этого слова); метод прямых или метод интегр. соотношений и метод характеристик мы также относим к конечноразностным. Важнейшей проблемой конечноразностных методов является устойчивость вычисл. процесса.

Простым примером можно проиллюстрировать значение этого явления. Дифф. ур-ние  $\frac{dy}{dx} + y = 0$  можно аппроксимировать, напр. следующими двумя конечноразностными формами:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + y_n = 0$$

или

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + y_n = 0.$$

Точность аппроксимации первой формы имеет порядок  $h$ , второй —  $h^2$ , т. е. вторая форма на порядок точнее. Легко получить точные решения этих конечноразностных ур-ний.

Общее решение первой формы

$$y_n = C(1 - h)^n,$$

второй формы

$$y_n = C_1(\sqrt{1 + h^2} - h)^n + C_2(-1)^n(\sqrt{1 + h^2} + h)^n.$$

Первое решение дает прибр. решение (с точностью до  $O(h)$ ) исходного дифф. ур-ния, во втором решении лишь первое слагаемое дает нужное решение (точность его по отношению к решению дифф. ур-ния выше — равна  $O(h^2)$ ), но второе осциллирующее и возрастающее по абс. величине слагаемое является паразитным решением. Однако при счете с конечным к-вом знаков оно обязательно появится (хотя  $C_2$  и будет малой величиной) и при большом к-ве шагов полностью перекроет истинное решение. Т. о., попытка повысить точность аппроксимации привела к неустойчивости вычисл. процесса и решения вторым способом нельзя получить при достаточно большом интервале переменной  $x$ . Исследование устойчивости проводят обычно методом локальной линеаризации и фиксации переменных коэфф. ур-ний, так как полное исследование устойчивости конечноразностных ур-ний с переменными коэфф. и нелинейных ур-ний пока еще далеко от полного решения.

Неустойчивость вычисл. процесса является причиной того, что в вычисл. практике почти не используются явные схемы для ур-ний в частных производных. Если одной из независимых переменных является время и решается задача с начальными условиями, то формально ур-ние вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi(u),$$

где  $\Phi$  — некоторый оператор, содержащий дифференцирование лишь по пространственным переменным, можно аппроксимировать конечноразностной формой:

$$\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \Phi[u(t)]$$

и т. о. свести задачу определения искомой ф-ции (системы ф-ций — в общем случае) в момент  $t + \Delta t$  по известным ее значениям в момент  $t$  к элементарным вычислениям. Но такой метод в общем случае является неустойчивым или устойчивым лишь при очень малых значениях  $\Delta t$ . Однако и в последнем случае, когда устойчивости все же можно достигнуть, общий объем вычислений превосходит практические возможности. Для корректно поставленных задач (см. *Некорректно поставленные задачи*) всегда можно добиться устойчивости вычисл. процесса применением неявных схем

$$\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \Phi[u(t + \Delta t)],$$

при этом существенно в неявной форме записывать старшие производные по координатам.

Однако в этом случае для многомерных задач на каждом шаге по времени необходимо решать системы ур-ний весьма высокого порядка (хотя они будут и линейными для квазилинейных ур-ний в частных производных). Выше уже говорилось, сколь большого к-ва арифм. операций требует решение таких задач. Выходом из положения явилась разработка схем, в некотором смысле промежуточных между чисто явными и чисто неявными, и которые приводят к тому, что система ур-ний высокого порядка неявной схемы расщепляется на последовательность систем существенно более низкого порядка, при этом устойчивость таких схем существенно превышает устойчивость явных схем. Одним из наиболее часто применяемых методов этого направления является т. н. метод переменных направлений, в котором на каждом шаге по времени поочередно в неявном виде записываются производные лишь по одной из простр. переменных. Т. о., порядок систем линейных алгебр. ур-ний будет здесь на каждом шаге по времени таким же, как и при решении одномерных задач.

Упомянутые методы во много раз упростили решение многомерных задач, однако никакие методы не позволяют уменьшить необходимый для вычислений объем памяти ЭВМ. Поэтому убыстрение методов решения не приведет к цели, если объем оперативной памяти вычисл. машины недостаточный. Стационарные задачи матем. физики также можно решать описанным выше путем, применяя метод установления, т. е. записывая систему в виде некоторой нестационарной системы, выходящей на установившийся режим. При этом, конечно, не обязательно использовать физ. реальную нестационарную систему. Важно лишь обеспечить устойчивость стационарного режима. Процесс установления здесь нужно понимать просто как некоторый итерационный процесс.

Широкое применение для решения стационарных задач получили также *вариационные методы*. В физ. задачах системы ур-ний часто являются вариационными ур-ниями Эйлера для некоторого функционала. Но если даже и нельзя построить функционал Эйлера, то задачу решения системы дифф. ур-ний с заданным граничным условием  $\Phi(u, x, y, z, \dots) = 0$  всегда можно свести к нахождению минимума функционала

$$\int [\Phi(u, x, y, z, \dots)]^2 dx dy dz \dots$$

Числ. методы отыскания экстремумов (числ. методы оптимизации) имеют широкое применение в самых различных областях. Сюда относятся не только научные задачи физ. цикла, но и задачи оптим. управления в тех. и административных системах, оптим. планирования в экономике и др. При аналитических решениях задач опт-ции эти задачи сводились к дифф. ур-ниям (вариационные ур-ния Эйлера) или к системам трансцендентных (в общем случае) ур-ний — при поиске экстремума ф-ций. Но для числ. методов прямые методы нахождения экстремума являются наиболее

эффективными, так что, как говорилось выше, наоборот, задачи дифф. ур-ний или решения систем трансцендентных ур-ний приводят к эквивалентным вариационным задачам. Задачи поиска экстремума (для определенности будем говорить о минимуме) обладают тем преимуществом, что всегда можно построить итерационный процесс, приводящий к уменьшению функционала, причем процесс этот можно составлять из простейших одномерных вариаций. Не представляет обычно труда обосновать сходимость процесса. Главная теор. трудность проблемы опт-ции для невыпуклых функционалов состоит в том, что может существовать несколько минимумов. Итерационный процесс приведет к к.-н. из этих минимумов, но не обязательно к наименьшему из них, и пока еще не разработаны регулярные методы поиска наименьшего минимума.

В. м. начала весьма быстро развиваться с созданием ЭВМ. Возникают новые ее разделы, как, например, вычисл. методы *игр теории, массового обслуживания теории*, минимизаций логических ф-ций, комбинаторики и др. В статье же были рассмотрены установившиеся разделы, которые вышли из состояния первых поисков и имеют уже широкое применение.

*Лит.:* Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.—Л., 1963 [библиогр. с. 677—734]; Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. К., 1969 [библиогр. с. 613—623]; Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971 [библиогр. с. 538—550]; Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М., 1971; Уиттекер Э., Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений. Пер. с англ. Л.—М., 1935; Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Пер. с англ. М., 1970 [библиогр. с. 559—564].

А. А. Дороницын.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА** — физическая система (устройство или комплекс устройств), предназначенная для механизации или автоматизации процесса алгоритмической обработки информации и вычислений. Физ. системы, применяемые для вычислений, могут быть мех., пневматическими, гидравлическими, электр., электронными, оптическими или комбинированными (смешанными). В соответствии с этим различают мех., электр., электронные и др. В. м.

Аргументы заданной математической зависимости, изображаемые с помощью физ. величин, подаются на входы В. м. В машине протекает такой физ. процесс, при котором измерение переменных величин, осуществляемое в некоторых точках или частях устройства, и дает результат вычислений; эти части устройства наз. выходами. В состав В. м. часто входят вспомогательные блоки для ввода и вывода величин, схемы для настройки машины на вычисления по заданной матем. зависимости и для автомат. контроля вычислений. Указанный комплекс устройств представляет единое целое и снабжается самостоятельным приводом или источником энергии.

Простейшими В. м. являются машины для выполнения отдельных операций и имеющие ручной ввод *данных*. К ним относятся арифмо-

метры, клавишные В. м. и др. Более сложными В. м., позволяющими выполнять целые серии операций, являются т. н. аналитические В. м., в которых последовательность соединения отдельных блоков зависит от вида воспроизводимой аналитической зависимости. К таким В. м. относятся счетно-перфорационные В. м., различные электромеханические В. м. непрерывного действия, аналоговые В. м. и др.; ввод данных в такие машины уже автоматизирован.

Наиболее сложными и универсальными являются В. м. с автоматическим управлением. Характерной особенностью таких машин является полная автоматизация всего вычислительного процесса, выполняемого по спец. программе. Помимо устройств, предназначенных для выполнения матем. вычислений, они имеют *запоминающее устройство* для хранения программ, исходных данных и промежуточных результатов вычислений, а также устройство управления, обеспечивающее автомат. выполнение вычисл. процесса. К таким В. м. относятся электронные цифровые вычислительные машины, аналоговые В. м. с периодизацией решения и др.

Все В. м. (от простейших до самых сложных) можно классифицировать по двум осн. признакам — методу решения задач и форме представления обрабатываемой информации. В зависимости от метода решения задач различают В. м. с аналоговым методом решения, программно-управляемым и комбинированным, объединяющим оба эти метода. В основу аналогового метода положена теория математического моделирования, опирающаяся на подобие матем. описаний объекта и его модели, и квазианалогии — эквивалентности этих описаний в смысле получаемых результатов. При аналоговом методе решения определенной матем. зависимости соответствует определенный набор функциональных блоков, взаимная связь между которыми в машине не меняется в процессе решения. Программно-управляемый метод решения основан на использовании *численных методов* матем. анализа и заключается в том, что определенной математической зависимости соответствует определенная последовательность выполнения простейших арифметических операций — *алгоритм* вычислений, осуществляемый в результате изменяющейся в процессе решения взаимной связи отдельных устройств и блоков. При комбинированном методе решения задачи используют оба метода решения.

Данные, с которыми оперируют В. м., могут быть представлены в непрерывном, дискретном и комбинированном виде. В соответствии с этим современные В. м. принято подразделять на 3 типа: машины непрерывного действия — *аналоговые вычислительные машины* (АВМ), представление информации в которых реализуется заменой матем. величин некоторыми физ. величинами (угол поворота вала, величина электр. тока, напряжение и т. п.); машины дискретного действия — *цифровые вычислительные машины* (ЦВМ), в которых не-

прерывное изменение аргументов представляется в виде последовательности цифровых значений, записываемых на носитель информации (в ЦВМ обрабатываются данные, представленные в виде цифровых *кодов*); *гибридные вычислительные машины* (ГВМ), в части узлов которых представление информации реализуется в дискретном виде, а в части — в непрерывном (машины этого типа наз. еще комбинированными В. м.).

Наиболее широкое распространение в практике обработки информации получили ЦВМ, которые (в зависимости от способа управления) подразделяются на ЦВМ с ручным управлением — арифмометры, *вычислительные машины клавишные* и *рычажные В. м.*; ЦВМ с жесткой программой — *табуляторы* и *специализированные вычислительные машины*; универсальные автомат. ЦВМ, вычисления в которых производятся по заранее составленной программе, полностью обеспечивающей автомат. решение задач на всех этапах — от ввода исходных данных до получения результатов. Такие машины обладают алгоритмической универсальностью и это позволяет производить с их помощью значительный круг вычислений и обработки информации. Быстродействие современных ЭЦВМ колеблется от нескольких тысяч до десятков миллионов операций в 1 сек. В зависимости от мощности и объема запоминающих устройств ЭЦВМ разделяют на большие (напр., «БЭСМ-6»), средние (напр., «Минск-32») и малые (напр., «МИР-2», которые еще наз. машинами для инженерных расчетов). ЭЦВМ классифицируют и по более общим признакам: к определяющим свойствам больших машин относят возможность их работы в режиме *мультипрограммирования* и (или) *режима разделения времени*, к малым относят машины, которые могут работать по одной программе и обслуживать одного потребителя.

АВМ, как состоящие из ряда отдельных блоков, каждый из которых выполняет над маш. величинами определенную матем. операцию (см. «МН», «ЭМУ»), в ряде случаев являются специализированными. Положительными качествами (определяемыми особенностями представления исходных величин и спецификой построения отдельных решающих элементов) таких машин являются большое быстродействие, позволяющее выполнять преобразование над быстроизменяющимися во времени величинами в реальном масштабе времени, аппаратная простота и наглядность программирования (см. *Программирование АВМ*). Однако по сравнению с машинами дискретного действия они обладают меньшей точностью и малой универсальностью.

ГВМ начали создавать во 2-й половине 1960-х годов. Достоинством этого типа машин является возможность расширять круг решаемых задач или сокращать время их решения, повышать точность в сравнении с АВМ.

Для обработки больших массивов информации (выполнения большого количества вычислений), решения большого количества разных по природе и характеру задач создают *вычисли-*

тельные системы, объединяющие разные (по типам и классам) машины в вычисл. комплексы с иерархической структурой организации вычисл. процесса (см. *Вычислительный центр, Комплексирование машин*).

Лит. см. к ст. Аналоговая вычислительная машина, Вычислительная техника, Комплексирование машин, Цифровая вычислительная машина.

В. П. Ботун, П. В. Походило.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА КЛАВИШНАЯ** — довольно распространенный тип вычислительных машин, который служит для переработки информации, содержащей п е р -

Большинство суммирующих клавишных машин имеет печатающий механизм, который производит запись цифровых данных и полученных результатов. Цифровые данные в машину вводятся, как и в мех. В. м. к., ручным способом. Суммирующие машины без печатающего механизма бывают только многоклавишные. Счетный механизм состоит из одного (реже — двух) счетчика. В суммирующих записывающих машинах тип установочного механизма еще более важен для производительности труда, чем в вычислительных. Поэтому

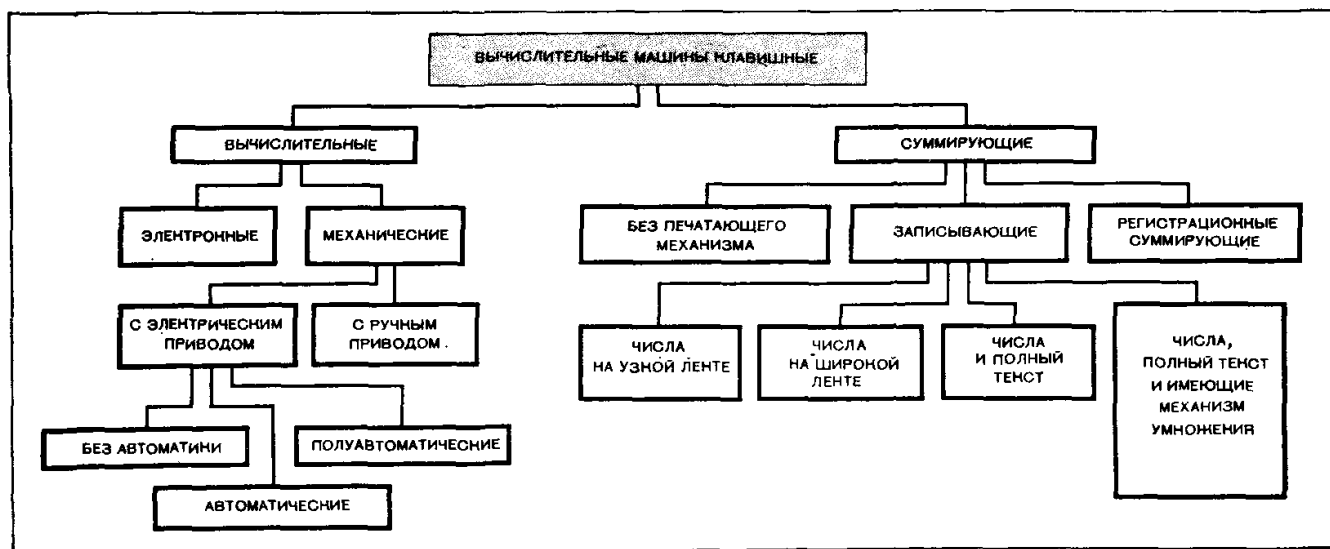


Схема классификации вычислительных клавишных машин.

вичные (исходные) сведения в процессе производственной, хозяйственной и научно-технической деятельности. Цифровые В. м. к. бывают (см. рис.) вычислительные (мех. и электронные) и суммирующие.

У механических вычислительных машин счетный механизм состоит из *счетчиков* двух типов: 1) счетчик результатов, в котором образуется при сложении сумма, при вычитании — разность, при умножении — произведение, а при делении — остаток; и 2) счетчик оборотов, который регистрирует количество ходов машины (на нем при сложении подсчитывается количество слагаемых, при умножении — один из сомножителей, при делении получается частное). Ввод цифровых данных осуществляется вручную с помощью спец. установочных механизмов, которые бывают рычажными (напр., у арифмометра), ползунковыми, десятиклавишными и многоклавишными. При этом, в зависимости от типа механизма, время ввода одной цифры в машину колеблется от 1 сек до 0,2—0,25 сек.

Электронные В. м. к., благодаря высокой надежности и бесшумности в работе, большей разрядности, высокой скорости вычислений, малому весу, потребляемой мощности и незначительным габаритам, повсеместно приходят на смену механическим машинам (см. *«Искра»*). Суммирующие клавишные машины приспособлены для выполнения работ, связанных, гл. обр., с действиями сложения и вычитания.

рычажные и ползунковые механизмы в таких машинах не применяются, а используются только десятиклавишные и многоклавишные механизмы. Скорость набора чисел на десятиклавишных суммирующих машинах благодаря применению «слепого» метода набора на 15—20% выше скорости набора чисел на многоклавишных машинах.

В практике вычислительных работ, наряду с подсчетом чисел, большой удельный вес занимает печатание текста. Для механизации этого процесса созданы такие цифровые машины, которые, кроме записи чисел и их подсчета по строчкам и колонкам, могут производить запись любого текста. Узел печати в этих машинах представляет собой обыкновенную пишущую машинку, а счетный механизм состоит из счетчиков двух видов: горизонтальных — для счета чисел по строчкам и вертикальных — для счета по колонкам. Горизонтальных счетчиков, как правило, два, и они закреплены на машине. Вертикальные счетчики — съемные, их количество и размещение определяются выполняемой работой и могут изменяться в зависимости от размеров каретки.

Для механизации одной из наиболее трудоемких вычислительных операций — действия умножения в случаях составления учетно-плановых документов создан механизм, которым снабжаются многосчетчиковые, записывающие полный текст, суммирующие машины. Эти машины представляют собой особую под-

группу суммирующих машин, которые наз. фактурными. К группе суммирующих машин можно отнести и регистрационно-суммирующие машины (напр., кассовые аппараты, многоклавишные машины и т. д.).

Лит.: Евдокимов И. С., Евстигнев Г. П., Криушин В. Н. Цифровые вычислительные машины. М., 1961; Хренов Л. С. Малые вычислительные машины. Краткое справочное руководство. М., 1966 [библиогр. с. 208—210].

Г. И. Корниенко.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ** — то же, что и *аналоговая вычислительная машина*.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА ОБЩЕГО НАЗНАЧЕНИЯ** — универсальная *цифровая вычислительная машина*, предназначенная для решения большинства классов научно-технических, экономических и других задач. Этим она отличается от *специализированных вычислительных машин*, предназначенных для решения отдельных классов задач.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА** — взаимосвязанная совокупность средств вычислительной техники, включающая не менее двух основных *процессоров* либо вычислительных машин (ВМ), из которых роль основного процессора выполняет хотя бы одна. Основным процессором наз. составную часть ВМ, которая выполняет вычисления, предусматриваемые алгоритмами решаемых задач; в отличие от него вспомогательный процессор предназначен для обработки информации, не предусматриваемой этими алгоритмами (напр., связанной с организацией вычисл. процесса), а, возможно, и для неосновных вычислений, предусмотренных программами (напр., для редактирования результатов вычислений). Как и осн. процессор, вспомогательный также может быть частью машины либо отдельной машиной, но в последнем случае соответствующее его сопряжение с одним осн. процессором является достаточным для того, чтобы эта совокупность наз. В. с. Если ранее вспомогательную обработку информации большей частью выполняли осн. процессоры, то теперь явно проявляется тенденция к созданию спец. вспомогательных процессоров (для повышения общей производительности) В. с.

Создание В. с. связано с необходимостью преодолевать возникающую несбалансированность между однопроцессорной ВМ и требуемыми характеристиками вычисл. процесса по входным и выходным потокам информации. К осн. преимуществам В. с. по сравнению с однопроцессорными ВМ относят: увеличение быстродействия при *распараллеливании алгоритма* решения и выполнения различных его ветвей на отдельных процессорах (реализация *мультипроцессорного режима*), увеличение эффективности использования оборудования при *многопрограммной обработке информации*, возможность получения высокой «живучести» системы путем дублирования работы процессоров («горячего резервирования»), применение общей для всей В. с. *библиотеки стандартных подпрограмм* и программ и др. Указанные достоинства В. с. в значительной степени

объясняются возможностью работы всех процессоров с общей памятью. В. с. классифицируют по конструкции и составу осн. процессоров, по типам связей и назначению.

По конструкции В. с. делятся на *разделимые* и *неразделимые*. Разделимые В. с. состоят из нескольких ВМ (выполняющих ф-ции осн. и вспомогательных процессоров), каждая из которых в отдельности может работать самостоятельно. Неразделимые В. с. (наз. иногда мультипроцессорными ВМ) состоят из процессоров, каждый из которых может выполнять свои ф-ции только в составе В. с.; подобные системы обычно разрабатывают как единое целое и строят на одной элементной базе.

По составу основных процессоров В. с. разделяются на однородные и разнородные. При этом однородные В. с. характеризуются идентичностью всех входящих в них осн. процессоров (либо ВМ, выполняющих те же ф-ции), а разнородные В. с. — различием осн. процессоров (либо ВМ).

Указанные два признака классификации позволяют выделить четыре осн. типа В. с.: 1) однородные неразделимые В. с.; 2) однородные разделимые В. с., или однородные комплексы; 3) разнородные неразделимые В. с.; 4) разнородные разделимые В. с., или разнородные комплексы.

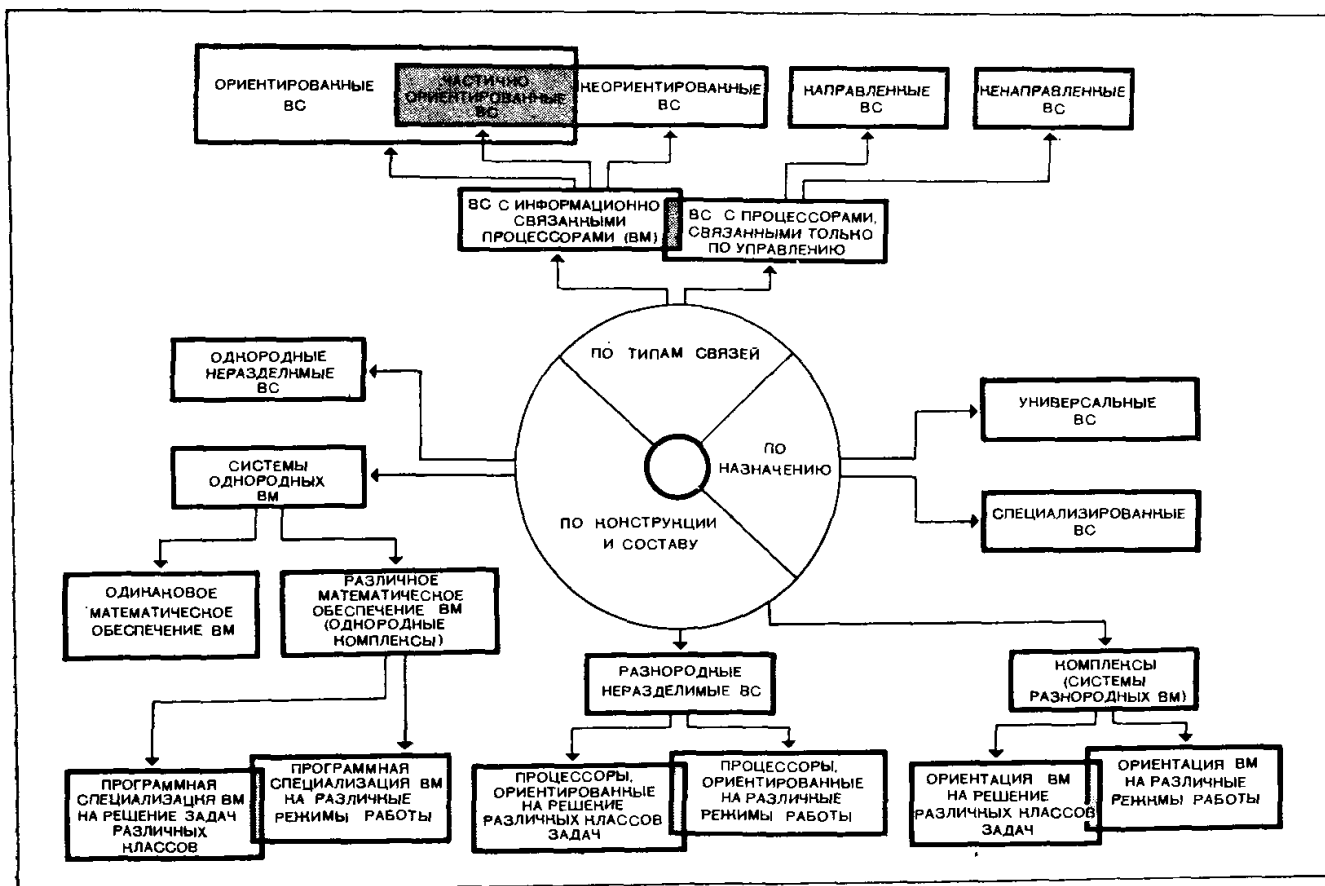
К однородным неразделимым В. с. относят систему «Illiac-4» (США), в которой наряду с одинаковыми осн. процессорами, объединенными особым образом, имеются и вспомогательные процессоры управления и ВМ «В-6500», которая управляет работой всей системы в целом, т. е. выполняет ф-цию вспомогательного процессора. К однородным комплексам относят В. с. «Минск-222», построенную на основе серийных ВМ «Минск-2/22», выполняющих ф-ции осн. и вспомогательных процессоров.

Широкое распространение получают разнородные комплексы, строящиеся также из серийно выпускаемых ВМ и неразделимых В. с. Так, напр., комплекс В. с., построенный и реализуемый фирмой «Форд мотор компани» (США), объединяет две 4-процессорные однородные неразделимые В. с. «Philco-2000—212», ВМ «GE-235» и др. Комплексы (однородные и разнородные) могут быть расположены по различным уровням в зависимости от степени обобществления *устройств ввода — вывода данных ЦВМ*, внешней, промежуточной и оперативной памяти, а также в зависимости от того, сохранена или нарушена функциональная целостность входящих в их состав ВМ. В последнем случае В. с. представляют собой уже не комплекс, а качественно иную форму организации систем — неразделимые В. с. Можно ожидать, что среди машин 4-го поколения именно разнородные (функционально) неразделимые В. с. займут ведущее место.

Разнородные неразделимые В. с. и комплексы, в соответствии с функциональной ориентацией объединяемых в них ВМ (либо процессоров), могут быть разделены на следующие группы: 1) В. с. с процессорами (ВМ), ориенти-

рованными на решение задач различных классов (напр., задач информационного поиска, вычисл. задач и др.); 2) В. с. с процессорами (ВМ), ориентированными на различные режимы работы (*диалога режим*, режим пакетной обработки); 3) В. с., объединяющие процессоры (ВМ), ориентированные по обоим указанным выше признакам. Первый признак заключается в том, что любая, даже универсальная, ВМ (как и процессор) является лучшим образом ориентированной для решения задач какого-либо определенного класса — более или

По типам связей В. с. делят на 3 группы: 1) В. с. с непосредственно информационно связанными ВМ (процессорами), когда компоненты системы обмениваются лишь программами, исходными и промежуточными данными; 2) В. с. с ВМ (процессорами), связанными только по управлению; 3) В. с., имеющие связи обоих указанных типов. 1-я и 3-я группы В. с. в свою очередь подразделяются на ориентированные (если каждая ВМ либо процессор может только принимать или только передавать информацию), неориентированные



Классификация вычислительных систем.

менее широкого в зависимости от ее структуры и программного обеспечения. В В. с. эту особенность можно хорошо использовать и для ускорения счета сложных задач путем распараллеливания их алгоритмов по отдельным машинам в соответствии с функциональными особенностями каждой из ВМ (каждого процессора). Второй признак указывает на то, что объединяемые ВМ (процессоры) в общем вычисл. процессе ориентированы уже только на различные режимы работы, напр., режим диалога, осуществляемый при выборе численного метода решения задачи, уточнении алгоритма решения и отладке программы, и режим решения задач по готовым программам (напр., пакетная обработка). Подобную детализацию можно провести и для классов однородных В. с., но в них функциональную ориентацию ВМ (процессоров) можно проводить лишь с помощью внешнего матем. обеспечения (т. е. программная специализация).

(если каждая ВМ либо процессор системы может и передавать, и принимать информацию) и частично-ориентированные В. с. (при наличии в системе ориентированных и неориентированных подсистем). 2-я и 3-я группы В. с. подразделяются на направленные (с централизованным управлением) и ненаправленные (децентрализованные) В. с.

По назначению В. с. делят на специализированные, которые предназначены для решения определенного класса задач, и универсальные, которые предназначены для решения более широкого круга задач (универсальная В. с. может включать в себя в качестве подсистемы специализированную В. с.).

Следует ожидать, что в дальнейшем развитие *вычислительной техники* пойдет не только по пути совершенствования и создания ВМ малой и средней мощности, но и по пути создания многопроцессорных В. с. (а не больших однопроцессорных ВМ).



Лит.: Евреинов Э. В., Косарев Ю. Г. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, 1966 [библиогр. с. 295—303]; Вычислительные системы, в. 23. Новосибирск, 1966; Поспелов Д. А., Эйвазов А. Р. Децентрализованные вычислительные системы. «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1968, № 5; Рабинович З. Л. Некоторые методологические вопросы теории комплексов вычислительных средств. В кн.: Вычислительные системы. Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам, в. 1. Новосибирск, 1968; Глушков В. М. [и др.]. Некоторые основные направления развития цифровой вычислительной техники. М., 1970 [библиогр. с. 91—94]; Мультипроцессорные вычислительные системы. М., 1971 [библиогр. с. 313—318]; Поспелов Д. А. Введение в теорию вычислительных систем. М., 1972 [библиогр. с. 258—274]. В. И. Брановицкий, З. Л. Рабинович.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА** — некоторая последовательность операций и форма записи результатов этих операций. Примером В. с. может служить схема Горнера для вычисления значений алгебр. многочлена  $n$ -ой степени  $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ . По этой схеме вычисление  $P_n(x)$  выполняется согласно представлению  $P_n(x) = (\dots ((a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0$  и требует  $n$  умножений и  $n$  сложений.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА** — 1) область техники, объединяющая средства автоматизации математических вычислений и обработки информации в различных областях человеческой деятельности; 2) наука о принципах построения, действия и проектирования этих средств.

По признаку физ. формы представления обрабатываемой информации различают аналоговые, цифровые и аналого-цифровые (гибридные) средства В. т. В аналоговых средствах В. т. обработке подвергаются физические величины (токи, напряжения и др.), которые в определенном непрерывном диапазоне моделируют матем. величины. В цифровых средствах В. т. обработке подвергаются цифровые (дискретные) коды математических величин. В аналого-цифровых (гибридных) средствах В. т. применяются обе указанные формы представления величин.

По степени универсальности в обработке информации средства В. т. подразделяются на машины общего назначения (универсальные) и специализированные. Первые служат для решения широкого класса задач, вторые — для решения узкого класса или даже единственной задачи. По степени автоматизации обработки информации различают вычислительные инструменты (линейки, счеты и т. п.), приборы (планиметры, арифмометры, корреляторы и т. п.) и машины. На современном этапе развития В. т. широко пользуются вычисл. машинами и их комплексами.

Простейшим примером аналогового вычисл. инструмента является логарифмическая линейка, изобретенная еще в конце 15 ст. В 1814 англ. ученый Дж. Герман изобрел планиметр. Позднее англ. физик Дж.-Дж. Томсон (1856—1940) создал фрикционный интегратор. Англ. физик У. Кельвин (1824—1907) показал возможность решения дифф. уравнений

путем соединения нескольких интеграторов. Польс. математик Б. Абданк-Абаканович (1852—1900) в 1878 изобрел аналоговый интегратор, называемый интеграфом. Идеи Абданк-Абакановича были положены в основу первой вычисл. машины для решения дифф. уравнений, построенной в 1904 рус. математиком и механиком А. Н. Крыловым (1863—1945) для решения задач кораблестроения. Усовершенствование механических интегрирующих машин связано с работами амер. ученого В. Буша. Машина Буша состояла из фрикционных интеграторов, мех. сумматоров и мех. передач для умножения на постоянную величину. Во втором десятилетии 20 ст. разработан метод моделирования, на основе которого в последующем развились вычисл. устройства, использующие электропроводящую бумагу.

Начало работ по аналоговым вычислительным машинам в СССР относится к 3-му десятилетию 20 ст., когда сов. математик С. А. Гершгорин заложил основы построения сеточных электроинтеграторов для решения уравнений в частных производных. В 30-х годах сов. ученый-электротехник С. А. Лебедев (р. 1902) разработал методику моделирования электросетей переменного тока и построил полуавтоматическую электрическую модель для их расчета, а затем появились работы сов. электротехников А. А. Горева и В. А. Веникова (р. 1912) по физ. моделированию энергетических систем. В 40-х годах под рук. сов. физика И. С. Брука разработан электромех. дифференциальный анализатор, в 1945 под рук. сов. электротехника Л. И. Гутенмахера были созданы электронные аналоговые машины с периодизацией решения. В этом же году под рук. С. А. Лебедева создана электронная аналоговая машина для решения систем обыкновенных дифф. уравнений. Аналоговые машины, основанные на операционных усилителях (наиболее близкие к современным аналоговым машинам) в СССР впервые созданы в 1949.

Осн. достоинствами средств аналоговой В. т. (по сравнению с цифровыми), обуславливающими их широкое применение для решения научно-тех. задач и использование в системах автомат. управления тех. объектами и в системах моделирования непрерывных процессов, являются их простота, надежность и высокое быстродействие. Главные недостатки их — сравнительно малая точность получаемых решений и ограниченность круга решаемых задач.

Цифровые вычислительные средства развивались параллельно с аналоговыми. В 1642 франц. физик Б. Паскаль (1623—62) построил счетную мех. машину, выполнявшую операции сложения и вычитания. Позднее построено около 50 таких машин. В частности подобные счетные устройства разрабатывали нем. математик Г.-В. Лейбниц (1646—1716), рус. математик П. Л. Чебышев (1821—94) и позднее рус. инж. В. Т. Однер. «Колесо Однера» стало основой современных арифмометров. В дальнейшем на смену арифмометрам пришли настольные мех. и электромех. машины, а

позднее — малые электронные цифровые машины. Наиболее близким прообразом современных цифровых вычислительных машин следует считать «аналитическую машину» англ. математика Ч. Бэббиджа (1833). Настольные счетные и счетно-аналитические машины уже в начале 19 ст. получают весьма широкое распространение.

В 1937—44 под рук. амер. ученого Г. Эйкена создана электромех. цифровая вычисл. машина «Mark-1». Революционным поворотом в развитии цифровой В. т. явилось создание электронных *цифровых вычислительных машин* (ЭЦВМ) с программным управлением, являющихся основными тех. средствами кибернетики (илл. между с. 176—177). Первая электронная быстродействующая ЦВМ «ЭНИАК» (построена в 1946 в США) содержала около 18 000 ламп и потребляла более 100 кВт мощности электроэнергии. Машина работала в десятичной системе счисления. Сложение и вычитание производилось за 200 мксек; умножение — за 2800 мксек. Она предназначалась для решения дифф. уравнений в частных производных, а также некоторых других расчетов. В СССР в 1950 под рук. С. А. Лебедева в АН УССР была создана первая в континентальной Европе малая электронная счетная машина «МЭСМ», которую можно отнести к классу машин общего назначения (в отличие от «ЭНИАК», являвшейся специализированной). «МЭСМ» содержала около 2000 электронных ламп, работала по параллельно-последовательному принципу выполнения операций, имела быстродействующую память на ламповых регистрах и внешнюю память на магн. барабане. Структура и осн. схемы этой машины являлись классическими, они положены в основу серии отечественных быстродействующих машин «БЭСМ» (1952), «БЭСМ-2», «БЭСМ-4» и «БЭСМ-6», созданных также под рук. С. А. Лебедева. К первым ЦВМ широкого назначения в СССР относятся и машины «М-1» (1952), «Стрела» (1954), «Урал-1» (1957). В 50-е и в начале 60-х годов 20 ст. в СССР создан также ряд других ЦВМ широкого назначения («М-2», «М-3» и «Киев»), серийные машины «М-20» и затем «М-220», семейства серийных машин «Урал», «Минск» и «Раздан», новые серийные модификации которых продолжают выпускать, и др. В этот же период в Советском Союзе разворачиваются работы по созданию и применению цифровых *управляющих вычислительных машин*. Создаются машины «Днепр», «УМ1», «УМ1-НХ», «ВНИИЭМ», «Днепр-2» и др. Позднее были разработаны более универсальные в применении агрегатно-блочные средства вычислительной техники. Они создаются в виде набора вычислительных средств, средств связи с объектом и оператором и средств внутри- и внесистемной связи, позволяющих легко компоновать различные системы управления пром. назначения. В 60-х гг. создаются малые машины для инженерных расчетов («Промінь», «МИР» и «Наири»), отличающиеся простым внешним языком, ориентированным на решение инженерных

задач со схемной реализацией трансляции и наличием удобных средств общения (взаимодействия) человека с машиной. Машины «МИР», кроме того, обладают развитой системой структурной интерпретации.

Развитие ЦВМ в целом идет по пути увеличения их надежности, производительности, объемов памяти, удобства общения человека с машиной и миниатюризации элементов для преобразования и хранения информации.

Производительность больших ЦВМ достигала в 60-х годах миллионов операций в секунду. Объем оперативного запоминающего устройства увеличился до сотен тысяч слов, а внешнего ЗУ — миллиардов слов. Машины оснащаются все более совершенными устройствами обмена информации с пользователями. Особую роль играет применение в ЦВМ *интегральных схем* (см. *Микроэлектронная элементная база вычислительной техники*), которые наряду с повышением качества средств В. т. позволяют также далеко продвинуть автоматизацию их проектирования и производства. Влияние элементной базы на развитие В. т., особенно ЦВМ, было и является настолько определяющим, что в зависимости от типа применяемых элементов теперь различают «поколения» ЦВМ (см. *Вычислительная машина*).

Важной вехой на пути развития средств В. т. явилось появление ЦВМ, рассчитанных на *многопрограммную обработку информации*, обеспечивающую одновременную работу машины по ряду программ и существенно увеличивающую ее полезную отдачу. Этапом развития ЦВМ в этом же направлении является создание развивающихся высокими темпами мультипроцессорных машин и систем (см. *Вычислительная система*).

Вместе с усовершенствованием структур ЦВМ происходит и развитие *математического обеспечения ЦВМ*, в частности создание эффективных систем программирования, основанных на универсальных, проблемноориентированных и специализированных алгоритмических языках, и *операционных систем*, эффективно организующих вычисл. процесс в целом, включая взаимодействие между пользователем и машиной. Развитие матем. обеспечения в свою очередь оказывает сильное влияние на принципы построения машин, в структурах которых реализуются некоторые компоненты матем. обеспечения, а это существенно повышает эффективность работы машины в целом, а также облегчает взаимодействие человека с машиной. Последнее приобретает весьма важное значение в условиях непосредственной эксплуатации ЦВМ пользователями различных специальностей, в особенности в режиме диалога человека с машиной.

Наряду с развитием средств цифровой В. т. происходит непрерывное расширение области их применения. Главные направления использования этих средств: решение матем., тех. и логич. задач, моделирование сложных систем, обработка данных измерений (получаемых при эксперименте и при управлении различными процессами), обработка экономико-ста-

тистических данных и поиск информации. Так, средства цифровой В. т. стали использоваться для научного эксперимента, при управлении технологическими процессами и производством в целом, в проектных и конструкторских работах, в системах планово-эконом. характера, в информационно-справочных и обучающих системах, в военном деле и т. д. Развитие цифровой В. т. в значительной мере определяет научный, эконом. и военный потенциалы страны. Эта роль В. т. на протяжении ближайших лет будет все возрастать.

К цифровым вычисл. средствам относят также *цифровые дифференциальные анализаторы* и *цифровые интегрирующие машины*. В них используется цифровое представление информации, но в качестве методов, с помощью которых реализуются вычисления, используются методы моделирования, характерные для средств аналоговой техники. Разработанные в 60-х годах 20 ст., они получили применение в ряде спец. систем, напр., в авиационных бортовых управляющих системах, системах аэрокосмического назначения и др.

Гибридные вычислительные средства появились в 50-х годах 20 ст. Вначале их создавали путем объединения в едином вычисл. комплексе аналоговой и цифровой вычисл. машин. Современные *гибридные вычислительные машины* характеризуются глубоким взаимным проникновением цифровых и аналоговых схем и работой их в едином вычисл. процессе с целью использования преимуществ и цифровой, и аналоговой В. т. При этом, как правило, аналоговые средства используются для собственно вычислений, а цифровые — для управления, а также переработки логической информации.

В связи с научно-технической революцией и связанным с ней колоссальным возрастанием потоков информации возникает объективная необходимость дальнейшего развития вычисл. средств, увеличения их производительности, приспособления их к различным областям науки и техники, облегчения взаимодействия человека с ЭВМ и автоматизации проектирования самих машин. Работы, связанные с решением этих вопросов, привели к появлению науки, наз. *вычислительная техника*. Теория вычислительных средств окончательно не сформирована и развивается по линии теории цифровых, аналоговых и гибридных средств. В каждой из указанных теорий явственно проступают два целевых аспекта — *научный поиск* новых принципов построения и совершенствования средств и *создание* методики их проектирования. В связи же с сущностью средств В. т., как автомат. средств переработки информации физ. способами, их общая теория имеет две стороны — конструктивно-техническую и информационную. Первая базируется на традиционных дисциплинах — электронике, *автоматике* и др., вторая — на ряде разделов теоретической кибернетики — на *алгоритмов теории*, *автоматов теории*, теории кодирования и теории языков, на *моделировании математиче-*

*ском* и др. и получает самостоятельное развитие как прикладная ветвь теор. кибернетики.

В связи с большим удельным весом ЦВМ в В. т., их значением как осн. средств кибернетики (реализующих универсальные преобразования информации), логико-структурной и тех. сложностью этих средств и задачами их развития, теория ЦВМ занимает особое место по объему охватываемого материала в теоретическом понятии термина «вычислительная техника». В США, Англии и др. англоязычных странах это понятие обозначается термином «computer science» — наука о ЦВМ.

Основополагающие работы в области теории ЦВМ в СССР выполнили С. А. Лебедев, В. М. Глушков (р. 1923) и др., из ранних зарубежных работ можно назвать, напр., труды амер. ученых Г. Эйкена, Дж. фон Неймана и др. В теории ЦВМ выделяется ряд взаимосвязанных разделов — теория переработки информации в ЦВМ на всех уровнях этого процесса (относящихся к элементной структуре, алгоритмической структуре, архитектуре машины и систем машин), теория хранения информации в вычисл. машинах и теория *взаимодействия человека с вычислительной машиной*, содержащая, в частности, ряд вопросов матем. обеспечения машин, связанных с организацией вычисл. процесса, с программированием и постановкой задач на машинах.

Во всех этих разделах, подразделяемых в свою очередь на отдельные научные дисциплины, имеются оба указанных аспекта — и поиск, и проектирование. Проектирование в соответствии с его задачами обычно разделяют на системное, логическое проектирование ЦВМ и техническое проектирование ЦВМ. Эти виды проектирования соответственно означают определение параметров, логической структуры и конструкции проектируемого устройства любого ранга (как элемента, блока, функционального устройства и машины в целом). Вместе с тем теорию проектирования ЦВМ делят на разделы, соответствующие этим рангам.

В основе теории аналоговых вычисл. машин лежит понятие изоморфизма (возникшее при развитии матем. представлений о природе и имеющее универсальный характер). Опираясь на него, развивалась теория электронного матем. моделирования, являющаяся основой построения современных средств аналоговой вычислительной техники.

Главной проблемой, возникающей при создании аналоговых машин для решения новых классов задач, является установление соответствующих аналогий, что представляет собой весьма трудную задачу. По-видимому, прогресс аналоговой техники будет связан с созданием квазианалоговых и гибридных вычисл. машин. Основы теории квазианалоговых вычисл. машин были заложены работами укр. ученого-электротехника Г. Е. Пухова (р. 1916). Квазианалоговая вычисл. машина для решения заданной задачи — это аналоговая вычислительная машина, решающая квазианалоговым путем такую вспомогательную задачу, решение которой при выполнении

условий эквивалентности с точностью до постоянных множителей полностью или частично совпадает с решением заданной задачи. Для выполнения указанных условий эквивалентности квазианалоговая вычисл. машина, кроме квазианалога, содержит и спец. устройство для управления им (см. *Квазианалоговое моделирование*).

По теории гибридных вычислительных машин, находящейся в стадии становления, основополагающие работы в СССР выполнили Г. Е. Пухов, Б. Я. Коган и др. Осн. вопросы здесь сводятся к разработке структур гибридных вычисл. систем, выбору рационального соотношения между цифровой и аналоговой частями, автоматизации работы гибридных систем и разработке элементов и схем, а также к разработке матем. обеспечения гибридных систем.

Учитывая большое научное, нар.-хоз. и оборонное значение средств В. т. в современных условиях, XXIII и XXIV съезды КПСС подчеркнули необходимость всемерного развития В. т. в СССР. В Директивах XXIV съезда КПСС по пятилетнему плану развития нар. х-ва СССР на 1971—1975 годы предусмотрено увеличить выпуск средств В. т. в 2,4 раза, в т. ч. ЭВМ в 2,6 раза, освоить серийное производство нового комплекса ЭВМ на базе интегральных схем. Эта задача решается в первую очередь рядом крупных научных и производственных организаций. Производится широкое внедрение в нар. х-во автоматизированных систем управления с использованием средств В. т. Все шире разворачивается *вычислительных центров сеть*, призванных обеспечить эффективное практическое использование средств В. т. для построения материально-технической базы коммунизма.

Лит.: Материалы XXIV съезда КПСС. М., 1971; Лебедев С. А., Мельников В. А. Общее описание БЭСМ и методика выполнения операций. М., 1959; Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]; Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. М., 1963 [библиогр. с. 494—505]; Малиновский Б. Н. Цифровые управляющие машины и автоматизация производства. М., 1963 [библиогр. с. 285—286]; Бруевич Н. Г., Доступов Б. Г. Основы теории счетно-решающих устройств. М., 1964; Анисимов Б. В., Четвериков В. Н. Основы теории и проектирования цифровых вычислительных машин. М., 1965 [библиогр. с. 480]; Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. К., 1967 [библиогр. с. 560—564]; Голубев-Новожиллов Ю. С. Многомашинные комплексы вычислительных средств. М., 1967 [библиогр. с. 402—415]; Глушков В. М. [и др.]. Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации. К., 1970 [библиогр. с. 254—257]. Б. А. Борковский, Б. Н. Малиновский, З. Л. Рабинович.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА ПОГРЕШНОСТЬ** — см. *Погрешностей вычислений теория*.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА СХОДИМОСТЬ** — свойство *вычислительного алгоритма*, указывающее на потенциальную возможность решения данной задачи рассматриваемым алгоритмом со сколь угодно высокой точностью (или сколь угодно малой погрешностью), когда параметры алгоритма прини-

мают некоторую бесконечную последовательность значений. Формализованное определение В. а. с. см. в ст. *Погрешностей вычислений теория*.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СРЕДЫ** — наборы цифровых автоматов с программируемой структурой, состоящие из одинаковых и однотипно соединенных друг с другом универсальных элементов, программно настраиваемых сигналами извне на выполнение любой из полного набора логических функций, функций памяти и функций соединений со своими соседями. В. с. предназначаются в качестве конструктивно-технол. основы построения однородных *вычислительных систем*, универсальных и специализированных машин, различных цифровых устройств *вычислительной техники* и технической кибернетики. В. с. при одной и той же физической реализации путем программной настройки ее элементов позволяет создавать в зависимости от требований универсальную или специализированную машину и решать задачу заданием либо программы, либо структурной модели, в которой для выполнения каждой операции отводится свой структурный блок.

В. с. представляют одно из перспективных направлений вычисл. техники и тех. кибернетики. Близким к направлению В. с. являются работы в области клеточных структур. В основу построения В. с. положены следующие принципы: 1) *о д н о р о д н о с т ь* — все элементы одинаковы и однотипно соединены друг с другом; 2) *б л и з к о д е й с т в и е* — все элементы соединены только с ближайшими элементами, передача сигналов между удаленными элементами осуществляется через промежуточные элементы; 3) *у н и в е р с а л ь н о с т ь* — каждый элемент реализует полный набор логич. ф-ций, ф-цию памяти (задержки), полный набор ф-ций соединений; 4) *п р о г р а м м н а я н а с т р о й к а* — каждый элемент может настраиваться на выполнение одной ф-ции с помощью сигналов настройки извне и продолжает сохранять состояние настройки до прихода следующего сигнала настройки.

В В. с. можно реализовать любой *автомат конечный*. Если допустить неограниченное наращивание В. с., то в ней могут быть реализованы потенциально *автоматы бесконечные*, Неймана — Черча автоматы, а также *автоматы растущие*. К недостаткам среды следует отнести то, что по сравнению с обычными способами реализации конечных автоматов затрачивается элементов в  $\log_2 M$  раз больше (где  $M$  — число элементов при реализации автомата логич. сетью).

При разработке В. с. выделяются две проблемы: синтез автоматов в средах и физико-технологические основы построения сред. К решению первой проблемы наметилось несколько подходов: отображение *сетей логических* в среде с использованием верхних этапов синтеза обычных автоматов, использование системы сквозного проектирования *вычислительных машин* с учетом особенностей среды и методы

автомат. синтеза автоматов в средах с учетом надежности.

Физ. реализация среды не представляет больших трудностей. В. с. может быть реализована на основе различных физ. явлений. Наиболее перспективно создание среды на криотронах, МОП-структурах (МОП — название элемента: металл — окисел — полупроводник) и пленочных электростат. реле в сочетании с МОП-структурами. Наибольшую трудность составляет разработка массовой технологии произ-ва элементов. Поэтому В. с. строится с учетом требований технологии. В. с. представляет собой идеальную структуру, максимально приспособленную для непрерывного автоматизированного процесса изготовления. Отдельного этапа сборки элементов в среду может и не быть: сборка осуществляется в процессе произ-ва. Простая структура элементов, отсутствие потребности в изготовлении отдельных элементов с соответствующими выводами позволяет рассматривать среду как один технолог. «элемент», для производства которого используется небольшое число технолог. операций в непрерывном процессе. В этом отношении изготовление среды подобно процессу массового произ-ва тканей или бумаги. Создание же в среде требуемой машины для решения каждой данной задачи или класса задач осуществляется уже после ее изготовления с помощью программной настройки элементов и связей между ними.

В. с. позволяют создавать машины с программируемой структурой, характеризующиеся универсальностью и высокой гибкостью структуры, экономичностью, живучестью и надежностью и высокой производительностью. Лит.: Евреинов Э. В. О микроструктуре элементарных машин вычислительной системы. В кн.: Вычислительные системы, в. 4. Новосибирск, 1962; Евреинов Э. В., Косарев Ю. Г. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, 1966 [библиогр. с. 295—303]; Праггишвили И. В. [и др.]. Микроэлектроника и однородные структуры для построения логических и вычислительных устройств. М., 1967 [библиогр. с. 224—226]; Пухов Г. Е., Боровский Б. А. Аналоговые и квазианалоговые вычислительные среды. В кн.: Вычислительные системы. Труды симпозиума. Новосибирск, 1967; Каляев А. В. Алгоритмы вычислительных структур, состоящих из цифровых интеграторов. В кн.: Вычислительные системы. Труды I Всесоюзной конференции, в. 1. Новосибирск, 1968. Э. В. Евреинов.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ** — алгоритм точного или приближенного решения задач прикладной математики. Начальные данные и результаты всякого В. а. — конечные мн-ва конечноразрядных вещественных или комплексных чисел, которые интерпретируются как мн-ва элементов *пространств абстрактных*, аппроксимирующих исходные и искомые данные соответствующих задач. В. а. решения различных ур-ний математики обычно состоят из В. а. аппроксимации исходных ур-ний прилб. и В. а. точного или прилб. решения прилб. ур-ний. См. также *Замыкание вычислительного алгоритма*.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР** — организация, основным назначением которой является сбор, хранение и автоматическая переработка

различных видов информации с помощью ЭВМ, или научно-исследовательское учреждение, занимающееся разработками и исследованиями общего и специализированного матем. обеспечения, разработкой и выбором методов решения различных классов задач, разработкой методик по организации вычисл. работ, консультациями и учебно-методической работой, а также осуществляющее руководство внедрением достижений *кибернетики* в практику и др. Постоянное увеличение объемов перерабатываемой информации требует постоянного повышения производительности вычисл. средств. Наиболее эффективный и эконом. способ использования *вычислительной техники* связан с организацией В. ц., где сосредотачивается квалифицированный обслуживающий персонал, а коэфф. полезного времени использования машин может быть очень высок.

Современные В. ц. оснащаются ЭВМ и *вычислительными системами* (ВС) коллективного пользования (см. *Комплексирование машин*). Центр. звеном ВС являются *операционные системы*. ВС характеризуются высокой степенью модульности, оснащены широким спектром внеш. устр-в, располагают возможностью для наращивания своей мощности (можно наращивать не только к-во *процессоров*, но и разнотипные *каналы связи*, периферийное оборудование, память, программное обеспечение и др.). В зависимости от потребностей В. ц. выбирает конкретную конфигурацию ВС, наиболее подходящую для решения заданного круга задач. Кроме того, каждый В. ц., как и отдельный абонент, в случае необходимости может посредством развитых линий связи подключаться через систему ввода — вывода к другим В. ц. и в любое время получать необходимые информационные и вычисл. мощности. В некоторых странах, в т. ч. в СССР, разрабатываются проекты организации сети В. ц., в которой будет осуществляться связь между осн. центрами обработки информации и ЭВМ на различных уровнях (см. *Вычислительных центров сети*). Разнотипные процессоры, используемые в В. ц., специализированы по типам обрабатываемой информации, поэтому каждый абонент подключается к соответствующему процессору. Часть задач потребителей решается с помощью периферийных процессоров, которые по отношению к ВС, размещенным в крупных В. ц., рассматриваются как оконечное оборудование (терминалы) и могут находиться в индивидуальном пользовании потребителя. Терминалы, территориально удаленные на многие километры от ВС, с которыми они сопряжены линиями связи, в тех случаях, когда их мощности для решения задач не хватает, могут подключаться к ВС и служить для передачи и приема информации. Вычисл. средства В. ц. широко используют мультипрограммную и мультипроцессорную работу. ВС работают в различных режимах: а) с применением режима разделения времени; б) в реальном масштабе времени; в) пакетная обработка данных; г) обработка

данных сеансами (территориально удаленному потребителю ВС предоставляется с помощью линий связи через определенное время на указанный промежуток времени).

Разделение ресурсов ВС между отдельными задачами производится автоматически с помощью специализированных программных средств. Очередность обработки данных определяется операционными системами на основании использования системы динамически изменяющихся приоритетов задач и системы прерываний. Управление работой ВС производится таким образом, что происходит одновременная обработка нескольких независимых друг от друга программ. Потребитель должен указать лишь необходимые сроки решения своей задачи и желаемую форму, в которой он хочет получить результат. Все остальные операции по решению задачи выполняет В. ц., предоставляя в случае необходимости возможность организовать диалог человека с машиной в реальном времени, а также выступать в качестве центра сети связи для обмена информацией между собой территориально удаленных абонентов. Практически ВС из центров обработки информации дают незамедлительные ответы на вопросы пользователей независимо от сложности требуемых вычислений.

ВС коллективного пользования применяются в В. ц. не только для централизованного информационного обслуживания потребителей, но и осуществляют управление многими реальными объектами. Они служат тем фундаментом, на котором функционируют автоматизированные системы управления, управление технологическими процессами и экспериментом на расстоянии, работают информационно-справочные системы и др. Т. о. человек, независимо от территориальной удаленности от В. ц., имеет возможность незамедлительно и непосредственно пользоваться вычисл. средствами, наилучшим образом сочетая свои творческие способности с вычисл. и информационными возможностями ВС. Эффективность работы В. ц. в значительной степени зависит от вида услуг, которые предоставляются пользователям ЭВМ.

Современные В. ц. оборудованы большим количеством всевозможных периферийных устройств ВС, предоставляя тем самым потребителю возможность получить результаты решения задач и задать ВС информацию о задачах в различных формах (см. илл. между с. 400—401). Для этого используются, напр., световые карандаши и телеэкраны, устр-ва для пространственного изображения объектов, автоматизированные библиотеки программ и массивов данных на различных носителях информации, всевозможные устройства ввода — вывода данных ЦВМ, а также размножения буквенно-цифровой и графической информации, средства для связи человека с машиной посредством голоса, голографических и цветных построений и др. В В. ц. абонент может, напр., передать заказ по телефону, который будет автоматически записан, а затем выполнен при соблюдении определенных условий; открыть личную библиоте-

ку данных, получить всевозможные информационные сведения о возможностях В. ц. и др. Для повышения эффективности работы обслуживающего персонала В. ц., а также учета времени и качества работы отдельных его служб и устр-в, разрабатываются всевозможные стандарты и критерии оценки эффективности, которые широко используются в автоматизированных системах управления В. ц. В организационном плане структура В. ц. зависит от его вычисл. и информационных мощностей, а также задач, стоящих перед ним. В качестве языковых средств для связи человека с ВС, ведения диалога с ней и др. используются различные уровни алгоритмических языков, приближающихся к обычным языковым средствам, применяемым специалистами различных отраслей.

Благодаря развитию принципа модульности наращивания мощности ВС (памяти, каналов связи, процессоров, матем. обеспечения и др.) в зависимости от потребностей В. ц. могут выполнять различный объем работ, одновременно обслуживая сотни и тысячи терминалов. Финансовые и др. расчеты с потребителями В. ц. ведут автоматически. Имеется возможность все необходимые данные о задачах, потребителях, состоянии расчетов потребителей между собой и др. информацию хранить в памяти ВС в динамике и обрабатывать ее автомат. способом. В ряде случаев ВС самостоятельно, без вмешательства человека выдают нужную информацию для управления работой В. ц. и принимают меры для повышения эффективности функционирования его служб. Надежность работы ВС гарантируется использованием мн-ва программных и аппаратурных средств, предназначенных для целей автомат. контроля правильности функционирования отдельных ее блоков и элементов и замены вышедших из строя объектов новыми.

Лит. см. к ст. Вычислительных работ методы организации. И. В. Сергиенко.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР И ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА** — научно-исследовательское учреждение в г. Ереване, созданное АН Армянской ССР в 1957 (с 1963 — объединенный ВЦ АН Армянской ССР и Ереванского ун-та). Имеет лаборатории и отделы, занимающиеся теорией алгоритмов и матем. логикой, теорией информации и кодированием, применением матем. методов в медико-биологических и экономич. исследованиях, теорией графов, теорией программирования и автоматизацией перевода научно-тех. текстов. Издает сборник трудов «Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники».

А. В. Петросян.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР** — научно-исследовательское учреждение в г. Тбилиси. Организован в 1956. Основные направления исследований: теория приближений, методы вычислительной математики, математическое обеспечение ЦВМ и вопросы программирования, математическая экономика, средства вычисли-



тельной техники. В ВЦ установлены три отечественные ЭВМ. Издаются науч. труды Вычислительного центра. Д. А. Киселева.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР АКАДЕМИИ НАУК СССР** — один из основных в стране научных центров по разработке вычислительных методов и матем. обеспечения цифровых вычислительных машин (ЦВМ). Создан в 1955 г. в составе Отделения математики АН СССР в г. Москве. В ВЦ АН СССР разрабатываются численные методы решения задач аэро- и гидродинамики, оптимального управления, теория больших систем, занимаются исследованием операций, матем. обеспечением ЦВМ, алгоритмическими языками и языками для описания вычислительных машин и систем, а также тех. кибернетикой. Есть ученый совет по присуждению степеней канд. и докторов наук и аспирантура. ВЦ оснащен машинами «БЭСМ-6», «БЭСМ-4», «БЭСМ-3» и «МИР-2». Издаются «Журнал вычислительной математики и математической физики», выпуски трудов ВЦ и сборники «Алгоритмы и алгоритмические языки».

Лит.: Основные направления научной деятельности Вычислительного центра. «Вестник АН СССР», 1968, № 5. П. П. Коряков.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР** — научно-исследовательское учреждение в г. Новосибирске. Создан в 1964. Осн. научн. профиль — прикладная математика и программирование. ВЦ имеет сектор эксплуатации электронных вычисл. машин (ЭВМ) и теор. отделы: физики атмосферы и океана, математических задач геофизики и геологии, механики сплошных сред, информатики, математической физики, АСУ и исследования операций. В ВЦ разрабатываются численные методы прогноза погоды, матем. модели физ. и хим. процессов, методы Монте-Карло, методы решения задач гидроакустики и газовой динамики, универсальное и специализированное матем. обеспечение ЦВМ, ведутся исследования по проблемам: теория программирования, условно-корректные задачи матем. физики и т. д. При ВЦ есть аспирантура. Г. Р. Контарев.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ХАРАКТЕРИСТИКИ** выражают свойства *вычислительных алгоритмов* (в. а.). Некоторые из этих свойств не зависят от особенностей вычисл. машин (ВМ), на которых производятся вычисления. К таким характеристикам относятся погрешность в. а. (см. *Погрешностей вычислений теория*), сходимость, замыкание вычислительного алгоритма, его сложность, длина в. а. — общее к-во букв того языка, на котором записан в. а., структурный (характеристический) вектор  $H(h_1, h_2, \dots, h_r)$ , где  $h_i$  — к-во операций  $o_i$  в. а. из полного набора операций  $O(o_1, o_2, \dots, o_r)$  в данном языке, и многие другие характеристики (см. *Алгоритмов теория*). Рассмотрим более подробно В. а. х., зависящие от особенностей ВМ, в частности, сложившиеся в практике числ. решения задач прикладной математики. Такие в. а. будем отождествлять с программой на ВМ.

Пусть в. а.  $A(X)$  предназначены для решения задач  $P(Y)$  на ВМ  $C(Z)$ . Здесь  $X, Y, Z$  — конечные мн-ва (векторы) параметров, от которых существенно зависят соотв.  $A, P, C$ . Среди компонент  $X$  могут быть числа итераций, степени аппроксимаций, порядки выполнения последовательности операций и т. п. В число компонент  $Y$  могут входить данные об априорных свойствах решений рассматриваемых задач, напр., константы, ограничивающие абс. значения ряда производных от искомых ф-ций, данные о точности задания исходных величин и т. п. Вектор  $Z$  может содержать к-во разрядов ячеек памяти ВМ, общее к-во ячеек памяти, среднее время бессбойной работы, времена выполнения и др. параметры для всех операций ВМ. Важное значение на практике имеют следующие характеристики в. а., задач и ВМ:  $T(X, Y, Z)$  — общее время, необходимое для реализации в. а.  $A$  при решении задачи  $P$  на ВМ  $C$ ;  $M(X, Y, Z)$  — необходимая память ВМ;  $E(X, Y, Z)$  — полная абс. погрешность решения задачи  $P$  на ВМ  $C$  в. а.  $A$ ;  $fef(X, Y, Z)$  — коэфф. технико-экономической эффективности. Дадим объяснение введенных характеристик. Общее время  $T$  — отрезок времени от постановки задачи  $P(Y)$  до ее решения в. а.  $A(X)$  на ВМ  $C(Z)$ . Можно положить  $T = T_1 + T_2 + T_3$ , где  $T_1$  — время разработки или выбора в. а.  $A$  и ВМ  $C$ ,  $T_2$  — время программирования и трансляции в. а.  $A$  и  $T_3$  — время реализации в. а.  $A$  на ВМ  $C$ . При известном наборе операций  $O(o_1, o_2, \dots, o_r)$  ВМ  $C$  и значении вектора  $T(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$ , в котором  $\tau_i$  — время выполнения операции  $o_i$  на ВМ

$C$ , искомое время  $T_3 = \sum_{i=1}^r h_i \tau_i$ , где  $h_i$  — к-во

операций  $o_i$  при реализации в. а.  $A$  на ВМ  $C$ . На практике при оценке  $T_3$  нередко учитывают лишь основные по к-ву и времени выполнения операции ВМ; при этом учитываемые операции приводят к одной стандартной операции (обычно операции сложения) или средней по времени (для арифм. операций).

При реализации в. а. часть памяти ВМ займут исходные данные  $Y$  и результаты решения задачи. Если эта часть памяти не меняется с изменением в. а., то для сравнения в. а. ее можно не включать в  $M$ . Обычно необходимая память — это миним. к-во ячеек ВМ для записи в. а. в машине плюс миним. к-во рабочих ячеек для хранения промежуточных данных, возникающих в процессе реализации в. а. на ВМ. Память  $M$  будет абсолютной, если в нее включается необходимая память для всех подпрограмм, которые содержатся в ВМ и используются при реализации в. а.; память  $M$  будет условной, если она состоит лишь из памяти, необходимой для записи собственно вычислительных алгоритмов.

Пусть решением задачи  $P$  является элемент  $R$  пространства абстрактного  $\Omega$  с метрикой  $\rho$  и пусть конечномерный вектор  $\bar{R}$  является результатом реализации в. а.  $A$  на ВМ  $C$  при

решении задачи  $P$ . Обозначим через  $\varphi$  интерпретатор  $\bar{R}$ :  $\varphi \bar{R} \in \Omega$ . Тогда

$$E = \rho(R, \varphi \bar{R}) \leq \rho(R, R_1) + \\ + \rho(R_1, \varphi \bar{R}_1) + \rho(\varphi \bar{R}_1, \varphi \bar{R}),$$

где  $R_1$  — решение той же или регуляризованной задачи с пригл. входными данными,  $\bar{R}_1$  — результат применения в. а.  $A$  к решению этой задачи. Первое слагаемое в оценке  $E$  обозначает погр. за счет неточности исходных данных, второе — погрешность в. а., а третье — погр. в результате реализации в. а. на ВМ.

Одной из интерпретаций показателя  $\text{fef}$  является прибыль  $G(X, Y, Z)$  на единицу затрат  $W(X, Y, Z)$  от решения задачи  $P$  на ВМ  $C$  в. а.  $A$ . В свою очередь,  $W = c_1 T_1 + c_2 T_2 + c_3 T_3$ , где  $c_i$  — стоимость единицы времени  $T_i$ , а  $G = S(X, Y, Z) - W$ , где  $S$  — доход от решения задачи  $P$  на ВМ  $C$  в. а.  $A$ . Таким образом,

$$\text{fef} = \frac{S - c_1 T_1 - c_2 T_2 - c_3 T_3}{c_1 T_1 + c_2 T_2 + c_3 T_3}.$$

Доход  $S$  зависит от погр. решения задачи. Одной из простейших моделей математических

$S$  может быть ф-ла  $S = \frac{c_4}{E + c_5^2}$ , где  $c_i$  — существенные константы.

Допустим, что ВМ  $C(Z)$  фиксирована. Тогда  $T, M, E$  и  $\text{fef}$  зависят лишь от  $X$  и  $Y$ . Удобно считать  $Y$  случайной величиной и говорить о различных вероятностных характеристиках величины  $T, M, E$  и  $-\text{fef}$ , которые также будут характеристиками в. а.  $A$  и будут зависеть лишь от  $X$ . Обозначим через  $H(X, Y, Z)$  любую из характеристик  $T, M, E, -\text{fef}$  и через  $p(Y), p(H)$  — плотности распределения соотв.  $Y$  и  $H$ . Важными характеристиками в. а.  $A(X)$  являются математические ожидания  $M_H(X)$  и дисперсии  $D_H(X)$ :

$$M_H(X) = \int_D H p(Y) dY = \int_{-\infty}^{\infty} H p(H) dH;$$

$$D_H(X) = \int_D (H - M_H)^2 p(Y) dY = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (H - M_H)^2 p(H) dH,$$

где  $D$  — область возможных значений  $Y$ . Нередко на практике применяется т. н. мажорантная характеристика в. а.  $A(X)$ :  $H^*(X) = \max_{p(Y) > 0} H$ . Показатель  $-\text{fef}$  и его вероят-

ностные характеристики  $M_{-\text{fef}}, D_{-\text{fef}}$  и  $-\text{fef}^*$  являются примерами целевых функционалов  $a(T, M, E)$ , минимизация которых по  $X$  с учетом необходимых ограничений на  $T, M$  и  $E$  дает в идеальных условиях оптимизацию в. а. В действительности вместо  $T, M, E$  и  $a$  будем

иметь лишь некоторые их оценки  $\tilde{T}, \tilde{M}, \tilde{E}$  и  $\tilde{a}$  и сравнивать в. а. в соответствии с теорией статистических решений можно будет лишь на основании значений некоторой ф-ции риска  $r(X) = M[e(\tilde{a}, a, a_*)]$ , где  $e(\tilde{a}, a, a_*)$  — т. н. ф-ция потерь,  $a_* = \min_X a(T, M, E)$ , с учетом

всех необходимых ограничений. Для любых двух в. а.  $A(X_1)$  и  $A(X_2)$  будем писать  $A(X_1) < A(X_2)$ , если они удовлетворяют требуемым ограничениям и  $r(X_1) < r(X_2)$ . Оптимальным в. а. на заданном мн-ве в. а.  $\mathfrak{N}$  будет в. а.  $A_* = A(X_*)$ , для которого  $r(X_*) = \inf_{A(X) \in \mathfrak{N}} r(X)$  с учетом всех необходимых

ограничений. Примерами ф-ции риска могут быть заданная ф-ция дисперсии и матем. ожидания от погр.  $e(\tilde{a}, a, a_*) = |\tilde{a} - a| + |\tilde{a} - a_*|$ , сама дисперсия  $De(\tilde{a}, a, a_*)$  или ее оценка, вероятность  $p(e \leq \varphi(Y))$ , где  $\varphi(Y)$  — заданная ф-ция, и т. д. Указанные примеры и определение  $r(X)$  носят формальный характер, т. к. в действительности ф-ция риска должна быть эффективной для использования и учитывать потери от замены некоторого идеального критерия его оценкой, напр., от замены матем. ожидания его оценкой в определении  $r(X)$ . Весьма общие способы построения эффективной ф-ции риска дает *игр теория*.

Приведенные В. а. х., конечно, не являются единственно возможными. В матем. литературе встречаются аналогичные  $T, M, \text{fef}, a$  и  $r$  характеристики на мн-ве алгоритмов, решающих данную задачу с точностью  $\epsilon$ . Вместо характеристики  $M$  можно рассматривать  $\lg_2 M$ , который естественно назвать энтропией в. а.

Можно рассматривать любые др. ф-ции от введенных характеристик, взаимно однозначно связанные с ними, если эти ф-ции поддаются более простым оценкам на практике. Можно утверждать, что опыт решения различных задач на ЦВМ приведет к необходимости изучения все новых свойств в. а., исчерпывающей характеристикой которых являются лишь сами вычислительные алгоритмы.

Лит.: Глушков В. М. Введение в кибернетику. К., 1964 [библиогр. с. 319—322]; Лебедев В. И. Об итерационном КР-методе. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1967, т. 7, № 6; Иванов В. В. Статистическое моделирование характеристик вычислительных алгоритмов. В кн.: Статистическое моделирование и аппаратура. М., 1970. В. В. Иванов.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН И СИСТЕМ КОМПЛЕКСЫ** — см. *Комплексирование машин*.

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ РАБОТ МЕТОДЫ ОРГАНИЗАЦИИ** — методы организации вычислений на электронных вычислительных машинах в вычислительных центрах (ВЦ), включающие организацию систем математического обеспечения и взаимосвязи потребителей машинного времени со средствами вычислительной техники, проблемы эффективного использования наличных ресурсов вычислительных систем (ВС), задачи построения критериев опти-

мальности организации различных этапов вычислительного процесса. С помощью различных В. р. м. о. на ВС решают большой круг вопросов. В. р. м. о. позволяют осуществлять полный контроль за прохождением каждой задачи в вычисл. процессе, выбор конфигурации ВС и системы ее матем. обеспечения, помогают оптимально планировать использование оборудования ВС и ее процессоров, организовывать взаимодействие оператора и системы, вести и обрабатывать массивы данных, оформлять библиотеки программ. Кроме того, В. р. м. о. дают возможность организовать защиту определенных видов информации, хранящейся в памяти системы от возможного использования посторонними абонентами, с помощью спец. программ выдавать на телевизионные экраны и др. выводные устр-ва ВС информацию об очереди задач, ожидающих обслуживания, о состоянии системы, включая показ массивов данных о событиях в системе в заданные промежутки времени (час, сутки и др.) и т. п. С помощью В. р. м. о. осуществляется прогнозирование состояния ВС, подключение новых абонентов к системе, ведется автомат. контроль и учет использования мощностей ВС (включая финансовые расчеты с потребителями маш. времени) и др.

При выборе В. р. м. о. необходимо обосновать целесообразность индивидуального или коллективного пользования ЭВМ: ЭВМ индивидуального пользования (как правило, средней мощности) в определенных условиях (когда, напр., ее мощности недостаточно) может превращаться в процессор периферийного оборудования какой-нибудь другой, более мощной машины коллективного пользования. Периферийные процессоры должны обладать развитыми логич. возможностями, которые позволяют им легко связываться с центральной ЭВМ, а также такими вычисл. мощностями, с помощью которых большинство заданий пользователя может быть на них выполнено. На выборе В. р. м. о. сказывается и способ взаимосвязи человека с машиной в процессе работы. Различают два режима работы потребителя с ЭВМ: пакетную обработку данных и диалогов режим. Первый способ предполагает независимость работы ЭВМ от потребителя во время выполнения всего задания (пакета); второй — наоборот, совместную работу машины и потребителя. Проблема выбора способа использования ЭВМ, а также режима работы с ней потребителя является одной из центральных при разработке В. р. м. о. Существенное значение при ее решении играют вопросы стоимости производства вычислений (стоимость связи периферийного процессора с центр. машиной, стоимость периферийного оборудования и др.) при том или ином методе организации вычислений.

Коллективный способ использования ЭВМ, как правило, предполагает ее работу в режиме разделения времени. ВС коллективного пользования представляют собой единство следующих компонент: 1) комплексированных ЭВМ, сопрягаемых с линиями связи; 2) линий связи (включая аппаратуру передачи данных);

3) окончного оборудования для ввода и вывода информации. Работа таких ВС базируется на использовании большого объема матем. обеспечения. Центр. звеном математического обеспечения ЦВМ и ВС коллективного пользования являются сложные операционные системы, позволяющие организовать оптим. использование осн. устройств ЭВМ или ВС, контролировать правильность их работы, производить диагностику неисправностей ЦВМ отдельных компонент системы и др. Построение операционных систем является одной из центр. задач разработки В. р. м. о. Практика их использования для ВС, работающих в режиме разделения времени показала, что они могут существенно повысить эффективность применений вычисл. техники. Усовершенствование операционных систем сопряжено с необходимостью проведения трудоемких и сложных исслед. работ. На практике часто используют различные методы моделирования, в частности, методы, основанные на применении методов массового обслуживания теории.

В вычисл. процессе можно выделить такие самостоятельные этапы, как подготовка данных, программирование, отладка программ и счет. Для проведения работ на каждом из этих этапов разрабатываются специфические методы. Естественно, что каждый из перечисленных этапов влияет на эффективность проведения вычисл. работ в ВЦ. Степень этого влияния на выбор В. р. м. о. точно определить невозможно. В связи с этим построение автоматизированных систем сбора и обработки статистических данных о параметрах вычисл. процесса является актуальной проблемой при разработке В. р. м. о., решение которой позволяет объективно выбирать оптим. методы и формы организации. Разработка В. р. м. о. в крупных ВЦ привела к необходимости создания моделей функционирования вычисл. процессов, автоматизированных систем управления ВЦ и др. К таким системам управления следует отнести различные информационно-справочные системы, планирующие системы и другие средства матем. обеспечения, позволяющие планировать маш. время, вести автоматизированный учет использования отдельных его служб, формализовать процесс хоз. расчета ВЦ с заказчиками, накапливать информацию о функционировании отдельных элементов вычисл. процесса и обрабатывать ее. Сложной задачей является разработка В. р. м. о. при решении проблем эффективного использования ресурсов ВС. Примером последних может служить проблема построения больших систем иерархической памяти (банков данных), а также методов быстрого обращения к ней, которая возникает при организации систем национального масштаба. Одной из осн. задач, возникающих при пользовании такой памятью, является разработка оптим. стратегии обращения машин к этой памяти, а также создание операционных систем, позволяющих организовать обслуживание иерархической памятью многих процессоров за миним. время. Естественно, что банки данных должны иметь свой

управляющий процессор, а каждый процессор в быстродействующих системах должен обладать сверхоперативной памятью.

Разработка эффективных В. р. м. о. часто сопряжена с необходимостью решения сложных многовариантных задач. Примерами последних являются задачи оптим. размещения различных элементов матем. обеспечения ВС в различных видах ее памяти, выбор наилучших способов использования устр-в вычисл. машин в зависимости от изменяемости характеристик их параметров (напр., от надежности этих устр-в), разработки оптим. методов обслуживания пользователей ВС при заданном варианте тех., матем. и кадрового обеспечения вычисл. процессов и др. Формальная постановка перечисленных задач при различных выборах в каждом конкретном случае критериев оптимальности показывает, что существует большое (а зачастую и бесконечное) к-во вариантов их решения. Часть этих задач решается с помощью операционных систем, а часть — путем построения др. видов матем. обеспечения, использующихся в вычисл. процессе.

*Лит.: Г л у ш к о в В. М. Два универсальні критерії ефективності обчислювальних машин. «Доповіді АН УРСР», 1960, № 4; Сергієнко І. В. К вопросу о построении математического обеспечения вычислительного процесса на ЭВМ. «Кибернетика», 1970, № 2.*

*И. В. Сергиенко.*

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЦЕНТРОВ СЕТИ** — совокупности связанных линиями передачи информации вычислительных центров (ВЦ) разной мощности и различного назначения, в которых обеспечивается высокая эффективность использования вычислительных средств. Необходимость создания В. ц. с. обусловлена тем, что наряду с крупными ВЦ, оснащенными мощными многомашинными системами, необходимы и ВЦ малой и средней мощности, которые предназначены для обслуживания отдельных, прежде всего замкнутых по производственному циклу предприятий, а также науч. и проектных ин-тов, учебных заведений и т. д. Но наличие таких относительно небольших ВЦ имеет и свои отрицательные стороны. Их разобщенность неизбежно порождает несогласованность и параллелизм в различного рода работах, распыление научных и инженерных кадров, малоэффективное и неправильное использование вычисл. машин (ВМ). Часто имеющиеся ВМ используют для решения задач, для которых они совершенно не приспособлены (напр., пытаются решать большие задачи на малых ВМ, или задачи обработки данных — на ВМ с небольшой емкостью запоминающих устройств). Этим и вызвана необходимость создания широко разветвленных В. ц. с., в которых можно осуществлять централизованное руководство всеми ВЦ при проведении работ, связанных с внедрением в нар. х-во матем. методов и средств вычислительной техники, созданием библиотек алгоритмов и стандартных программ и т. д. Каждый из ВЦ, входящих в В. ц. с., может подключиться через систему связи к другому ВЦ и получить требуемую помощь для решения своих задач: необходимые алгоритмы и программы или недостающие

для своевременного решения задач вычисл. мощности. Кроме того, В. ц. с. позволяет производить обработку информации для любых предприятий и организаций, не имеющих вычисл. оборудования, производить обмен опытом между отдельными звеньями сети и т. д. Таким образом, В. ц. с. — качественно новая, наиболее совершенная в организационно-структурном плане форма использования вычисл. техники.

В. ц. с. могут быть универсальными и специализированными. У н и в е р с а л ь н ы е В. ц. с. предназначены для решения задач самого широкого круга, напр., сеть, созданная фирмой «Форд мотор компани» (США). Центром ее является комплекс ВМ, предназначенный для решения науч., инж. и эконом. задач, задач управления, обучения и пр. Используя обычную телефонную сеть, этот комплекс обслуживает более 150 абонентов — ВМ, вычисл. систем и терминалов (удаленных пультов пользователей), расположенных и в США, и за рубежом. Вычисл. мощностями комплекса могут пользоваться не только работники самой фирмы, но и ученые и инженеры др. организаций (при условии, что их работы согласуются с интересами фирмы). С п е ц и а л и з и р о в а н ы е В. ц. с. используют для решения особо важных специфических задач. В США, напр., такая сеть ВЦ построена для управления полетом космических кораблей с человеком на борту. Эта В. ц. с. включает в себя: 1) ВЦ в Годдардском центре космических полетов, оснащенный системой из трех машин «IBM-7094»; 2) ВЦ в центре управления на мысе Кеннеди (Канаверал), оснащенный специализированной ВМ, а также машиной «IBM-7090» и 3) ВЦ в центре управления на Бермудских о-вах, оснащенный машиной «IBM-709». Возможны случаи, когда специализированные В. ц. с. являются частью универсальной сети.

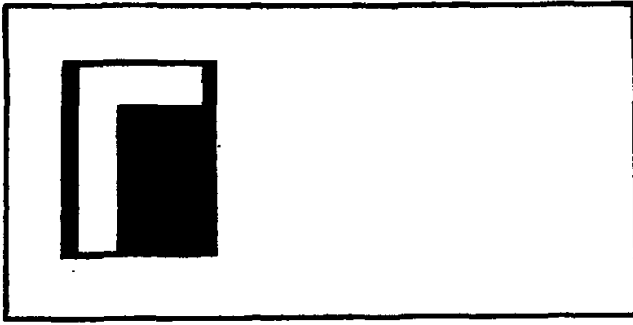
Построение универсальных отраслевых В. ц. с. и специализированных сетей и последующее их объединение является одним из рациональных путей создания единой государственной сети ВЦ (ЕГСВЦ). Такая система позволит осуществить оптимальную загрузку находящихся в эксплуатации средств вычислительной техники, обеспечить резервирование необходимых мощностей, повысить эконом. эффективность работы оборудования, осуществить планомерное распределение вычисл. средств и т. д. ЕГСВЦ — это высшая организационная форма использования ВМ. Работы по созданию ЕГСВЦ ведутся и в СССР, и за рубежом. Так, напр., в Англии строится В. ц. с., основанная на объединении между собой крупных региональных ВЦ, каждый из которых будет обслуживать потребителей своего района.

Более совершенной является такая организация В. ц. с., при которой объединяемые ВЦ и отдельные ВМ образуют иерархическую структуру. Здесь выделяются такие осн. организационно-структурные формы (см. илл. между с. 400—401): кустовые и периферийные ВЦ (КВЦ и ПВЦ), вычисл. пункты (ВП) и удаленные пульта пользователей (УПП). КВЦ предна-

значены для обслуживания больших районов или крупных науч. и науч.-произв. объединений (напр., республиканских академий наук). Как правило, их оснащают мощными разнотипными ВМ, работающими автономно либо объединенными в комплекс (см. *Комплексирование машин*). Развитое матем. оснащение, включающее многочисленные трансляторы и интерпретаторы с алгоритмическими языками различных уровней, обширные библиотеки осн. и типовых программ и гибкие операционные системы должны обеспечивать потенциальную возможность равноэффективного решения любых задач, программы которых поступают в кустовой ВЦ. Существенное различие остается лишь между задачами, решаемыми по готовым программам, и задачами, для решения которых требуется диалог между человеком и ВМ — разработка либо выбор алгоритма, отладка программ, задачи обучения и пр. (см. *Диалога режим*). В соответствии с этими двумя группами задач на машинах КВЦ должны быть реализованы режим пакетной обработки и режим разделения времени. Линии связи, соединяющие между собой отдельные КВЦ, позволяют оперативно перераспределить задачи в случае перегрузки одного из них. При этом каждый из кустовых ВЦ должен иметь свою собственную систему диспетчеризации, которая осуществляет распределение и относительную загрузку оборудования входным потоком задач, управление первичной и осн. обработкой исходных данных и программ, поступающих от внешних источников информации (ВП и УПП), и управление обменом информацией с периферийными ВЦ, ВП и УПП. Периферийные ВЦ предназначены для обслуживания крупных организаций с определенным кругом решаемых задач, и это обуславливает функциональную специализацию вычисл. средств, которыми эти ВЦ оснащают, — однородных вычисл. систем и больших ВМ. А те задачи, которые неэффективно решать с помощью имеющихся вычисл. средств, передают в КВЦ. Так же поступают и в случае, когда мощность ПВЦ недостаточна для того, чтобы справиться с решением всех задач к требуемому сроку. В зависимости от содержания решаемых задач, а также от потребностей организаций, в периферийном ВЦ может быть реализован либо

только режим пакетной обработки, либо этот режим совместно с режимом разделения времени. В последнем случае периферийный ВЦ может обслуживать несколько близрасположенных ВП и УПП. ВП предназначены для решения задач в проектных, конструкторских и науч.-исслед. ин-тах. Их можно организовать и в некоторых отделах учреждений, в которых имеется периферийный или даже кустовой ВЦ. Оснащают их малыми ВМ (напр., типа «МИР») и связывают линиями передачи информации с ближайшими ПВЦ или КВЦ. Все задачи решаются в ВП в однопрограммном режиме. Поскольку вычисл. мощность машин ВП невелика, на них решают небольшие по объему задачи; для больших задач производят лишь первичную обработку информации, а решают их в кустовом или периферийном ВЦ. УПП используют в небольших организациях, не имеющих возможности приобрести ВМ. Кроме того, как и ВП, их можно устанавливать и в некоторых отделах более крупных организаций. Собственной вычисл. мощности УПП не имеют, поэтому все без исключения задачи передаются для решения в ближайший периферийный или кустовой ВЦ. Определенный тип УПП и набор внешнего оборудования, которым их комплектуют, выбирают соответственно конкретным условиям и, в частности, характеристикам и типу решаемых с их помощью задач. Одновременно с разработкой В. ц. с. необходимо создавать и систему их математического обеспечения (см. *Математическое обеспечение ЦВМ*). Особое внимание следует уделять выбору входных языков, набор которых должен быть единым прежде всего для всех кустовых ВЦ. Входные языки для низших звеньев В. ц. с. (периферийных ВЦ, ВП и УПП) с соответствующими трансляторами либо интерпретаторами выбирают уже из общего набора входных языков кустового ВЦ в зависимости от характеристик решаемых на этих звеньях задач. Так же надо выбирать и библиотеки осн. и типовых программ.

Лит.: Г о л у б е в - Н о в о ж и л о в Ю. С. Многомашинные комплексы вычислительных средств. М., 1967 [библиогр. с. 402—415]; Г л у ш к о в В. М. [и др.]. Некоторые основные направления развития цифровой вычислительной техники. М., 1970 [библиогр. с. 91—94]; Г л у ш к о в В. М. [и др.]. Человеческий и вычислительная техника. К., 1971. [библиогр. с. 284—291]. В. И. Брановицкий.



**ГАМИЛЬТОНОВ ПУТЬ** (контур) — гамильтонова цепь (цикл) графа, в которой все дуги ориентированы в направлении обхода от начальной к конечной вершине (в контуре начальная и конечная вершины совпадают). См. также *Графов теория*.

**ГАМИЛЬТОНОВА ЦЕПЬ** — цепь графа, содержащая все вершины графа и проходящая через каждую из них один и только один раз.

**ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ МЕТОД** — метод приближенного определения условия существования и устойчивости периодических режимов при нелинейных систем автоматического управления анализе.

**ГАУССА МЕТОД** — один из прямых методов решения линейных систем алгебраических уравнений. См. *Линейных алгебраических систем уравнений способы решения*.

**ГАУССА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ** — то же, что и нормальное распределение.

**ГАУССОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС** — действительный случайный процесс  $\xi(t)$ , для которого совместные распределения всех компонент случайного вектора  $\xi(t_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$  являются гауссовыми. Характеристическая функция Г. с. п. имеет вид:

$$\varphi_{t_1, \dots, t_n}(z_1, \dots, z_n) = \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n a(t_k) z_k - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n R(t_k, t_j) z_k z_j \right\},$$

где  $a(t) = M\xi(t)$  — математическое ожидание, а  $R(t, s) = M[\xi(t) - a(t)][\xi(s) - a(s)]$  — корреляционная функция. Процесс  $\xi(t)$  может быть определен либо при всех  $-\infty < t < \infty$ , либо на конечном интервале  $0 \leq t \leq T$ . Если  $t$  не является временем, а принимает значение из некоторого параметрического мн-ва  $\Lambda$ , то  $\xi(t)$ ,  $t \in \Lambda$  наз. гауссовской случайной функцией.

Распределение вероятностей Г. с. п.  $\xi(t)$  полностью задается двумя его характеристиками: матем. ожиданием  $a(t)$  и корреляционной функцией  $R(t, s)$ . Матрица  $R = \{R(t_k, t_j)\}$ ,  $k, j = 1, \dots, n$  наз. корреляционной матрицей совместного распределения компонент Г. с. п. В случае, когда  $R$  — невырождена, совмест-

ная плотность распределения компонент Г. с. п. имеет вид:

$$P_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\text{Det } R}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n R^{(-1)}(t_k, t_j) [x_k - a(t_k)] \times \right. \\ \left. \times [x_j - a(t_j)] \right\},$$

где  $R^{(-1)}(t_k, t_j)$  — элемент матрицы  $R^{-1}$ , обратной к  $R$ , а  $\text{Det } R$  — определитель матрицы  $R$ . Г. с. п. обладают рядом важных свойств, напр., при линейном преобразовании Г. с. п. полученный процесс также оказывается гауссовским. Гауссовские случайные функции являются удобной моделью математической представления многих физ. процессов. Тепловые шумы в электр. цепях, броуновское движение частиц, случайные флуктуации в линейных системах (дробовой эффект), шумы атмосферной турбулентности и т. д. могут служить примерами Г. с. п. Это объясняется тем, что при достаточно общих условиях сумма большого числа независимых и малых по величине случайных процессов приближенно является Г. с. п., независимо от того, каким совместным распределениям подчинены отдельные слагаемые. Математически это следует из многомерного обобщения центральной предельной теоремы.

Важную роль в практических задачах играют гауссовские стационарные процессы  $\xi(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , обладающие свойством:  $a(t) = a$ ,  $R(t, s) = R(t - s)$ . Для таких процессов справедливо спектральное представ-

ление  $\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\gamma(\lambda)$ , где  $\gamma(\lambda)$  является

комплекснозначным Г. с. п. с ортогональными приращениями.

Лит.: Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., 1965 [библиогр. с. 648—654]; Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М., 1967 [библиогр. с. 481—487]; Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские случайные процессы. М., 1970 [библиогр. с. 383—384]; Дёч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. Пер. с англ. М., 1965 [библиогр. с. 196—201].

А. Н. Деменин.

**ГЁДЕЛЯ ТЕОРЕМЫ О НЕПОЛНОТЕ** — теоремы логики математической, показывающие невозможность полной формализации арифметики, а также более сильных математических теорий. Доказал и опубликовал их австр. математик К. Гёдель в 1931. Первая теорема тесно связана с явлением алгоритм. неразрешимости, вторая — значительно более тонкое утверждение о формальных системах. Содержание первой теоремы о неполноте (если ограничиться пока арифметикой) заключается в следующем. Пусть  $A$  — арифм. формальная система, содержащая аксиомы Пеано (см. *Ариф-*



метика формальная). При этом предполагается, что  $A$  корректно описывает арифметику, т. е., что все ф-лы, выводимые в  $A$ , являются истинными утверждениями о натуральных числах. Для любой такой системы  $A$  первая теорема Гёделя утверждает, что не все истинные ф-лы арифметики доказуемы в  $A$ . Другими словами, понятие истинности ф-л арифм. языка шире, чем понятие доказуемости в любой формальной системе (если последняя корректна). Ниже приводится интуитивная идея доказательства этой теоремы, которая существенна для понимания содержания обеих теорем о неполноте.

Предположим обратное, т. е., что арифм. истинность совпадает с доказуемостью в  $A$ . Поскольку доказательства в системе  $A$  суть конечные последовательности ф-л, связанных между собой правилами вывода, то проверка того, является ли данная последовательность ф-л доказательством, выполняется с помощью довольно простого алгоритма. При подходящем кодировании этот алгоритм может быть описан в арифм. языке (см. *Арифметизация метаматематики*). Поэтому можно построить арифм. ф-лу  $\text{Pr}_A(x)$ , означающую, что  $x$  есть код ф-лы, доказуемой в  $A$ . Теперь нетрудно написать ф-лу — назовем ее  $v_A$ , которая выражает свою собственную недоказуемость. Точнее, для этой ф-лы в системе  $A$  доказуема эквивалентность:

$$v_A \leftrightarrow \neg \text{Pr}_A(\bar{v}_A), \quad (1)$$

где  $\bar{v}_A$  есть код ф-лы  $v_A$ . В силу предположения о том, что доказуемость совпадает с истинностью, получаем, что  $v_A$  выражает также свою собственную ложность. Но тогда эта ф-ла не может быть ни истинной, ни ложной, так что мы приходим к известному «парадоксу лжеца». Следовательно, истинность и доказуемость не совпадают. Примером истинной, но недоказуемой в  $A$  ф-лы как раз и является ф-ла  $v_A$ : она истинна, так как утверждает свою недоказуемость и в самом деле недоказуема.

Приведенные выше эвристические соображения существенно используют предположение о том, что в  $A$  доказуемы только истинные формулы. Более строгое исследование показывает, однако, что недоказуемость  $v_A$  может быть выведена из более слабого предположения о непротиворечивости системы  $A$ . Это уточнение имеет принципиальный характер. Дело в том, что понятие арифм. истинности невыразимо в языке арифметики, в то время как утверждение о непротиворечивости  $A$  можно записать в виде довольно простой арифм. ф-лы  $\text{con } A$ . Благодаря этому первую теорему о неполноте можно высказать на языке арифметики посредством ф-лы:

$$\text{con } A \rightarrow \neg \text{Pr}_A(\bar{v}_A). \quad (2)$$

Можно показать, что эта ф-ла сама выводима из аксиом Пеано. Отсюда легко получается вторая теорема Гёделя о неполноте, которая (не строго) утверждает, что непротиворечивость

формальной системы  $A$  нельзя доказать средствами этой системы. Более строго, если формальная система  $A$  непротиворечива и содержит аксиомы Пеано, то ф-ла  $\text{con } A$  недоказуема в  $A$ . В самом деле, из доказуемости ф-л (1) и (2) вытекает, что формулы  $v_A$  и  $\text{con } A$  эквивалентны в системе  $A$ . Но  $v_A$  недоказуема в  $A$ , согласно первой теореме Гёделя; значит,  $\text{con } A$  тоже недоказуема.

До сих пор речь шла только об арифметике. Но все предыдущие рассуждения применимы также к достаточно произвольным формальным системам. В частности, совсем не обязательно, чтобы языком системы  $A$  был язык элементарной арифметики. Единственное, что здесь требуется, — это чтобы осн. понятия арифметики были выразимы в языке рассматриваемой формальной системы, а аксиомы Пеано — доказуемы в этой системе. Поэтому теоремы Гёделя применимы к любым разумным аксиоматизациям арифметики, анализа или *множеств теории*.

Теоремы о неполноте выявляют одну специфическую трудность, связанную с доказательствами непротиворечивости. Сущность ее удобнее всего проиллюстрировать на примере теории мн-в. Пусть  $ZF$  есть формальная система теории мн-в, основанная на аксиомах Цермело — Френкеля. До сих пор не существует доказательства непротиворечивости для  $ZF$ . Однако можно заранее сказать, что такое доказательство должно удовлетворять следующим двум требованиям (из которых первое обусловлено самой постановкой вопроса, а второе следует из теоремы Гёделя): а) это доказательство должно опираться лишь на концепции, интуитивно более простые, чем те, которые используются в самой теории мн-в; б) его нельзя провести в рамках системы  $ZF$ . Но система  $ZF$  отличается чрезвычайной широтой: в ней формализуется практически вся современная математика. Поэтому трудно представить себе, как выглядело бы матем. доказательство, удовлетворяющее указанным требованиям. Т. о., здесь затрагиваются сложные проблемы оснований математики, в силу чего теоремы Гёделя имеют определенный философский интерес.

Существует мнение, что теоремы о неполноте показывают невозможность маш. моделирования каких-либо нетривиальных форм мыслительной деятельности. Такое мнение, по-видимому, лишено достаточных оснований; Г. т. о. н. имеют к вопросу о машинном творчестве такое же отношение, как, напр., логические парадоксы к творческим способностям человеческого разума. Вопрос о возможностях «машинного разума» является дискуссионным (см. *Искусственный разум*).

Лит.: Клини С. К. Математическая логика. Пер. с англ. М., 1973 [библиогр. с. 451—465]; Feferman S. Arithmetization of metamathematics in a general setting. «Fundamenta mathematicae», 1960, v. 49; Ливдон Р. Заметки по логике. Пер. с англ. М., 1968 [библиогр. с. 123]; Арбиб М. Мозг, машина и математика. Пер. с англ. М., 1968 [библиогр. с. 217—224]; Нагель Э., Ньюмен Д. Р. Теорема Гёделя. Пер. с англ. М., 1970.

Н. В. Белякин.

**ГЕНЕРАТОР ПРОГРАММ** — программный комплекс, предназначенный для формирования необходимой пользователю модификации программы определенного класса. Понятие Г. п. близко к понятию пакета программ. Г. п. обычно состоит из ряда *подпрограмм*, реализующих близкие по содержанию методы вычисл. математики или методы обработки больших *массивов* данных. Подпрограммы находятся под управлением спец. организующей программы (*монитора*), которая, принимая от потребителя информацию о требуемой модификации метода, формирует из стандартных подпрограмм законченные содержательные программы. А. И. Никитин.

**ГЕНЕРАТОР СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ** — то же, что и *датчик случайных чисел*.

**ГЕНЦЕНА ФОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ** — *логиико-математические исчисления*, служащие для формализации и исследования содержательных доказательств, оперирующих с допущениями. Г. ф. с. делят на системы естественного вывода (натуральные, имитирующие форму обычных матем. умозаключений и потому особенно подходящие для формализованной записи их) и секвенциальные или, в терминологии Генцена — *логистические* (см. *Секвенция*), направленные на анализ возможных доказательств данной ф-лы, на получение результатов о нормальной форме доказательств и их использование в *доказательстве теории* и в теории *доказательства теорем на ЭВМ*. Иногда Г. ф. с. отождествляют с системами секвенциального типа; тем не менее натуральные Г. ф. с. могут использовать секвенции, а секвенциальные Г. ф. с. оформляют в виде исчисления ф-л, а не секвенций. Иногда все Г. ф. с. считают натуральными, т. к. все они в той или иной степени отражают обычные приемы оперирования с логич. связками и допущениями.

Натуральные Г. ф. с. содержат правила введения логич. символов и правила удаления символов. Логические аксиомы немногочисленны (обычно одна-две). Рассмотрим, напр., задание классического исчисления предикатов в виде натуральной Г. ф. с. Формулы строят обычным образом с помощью связок  $\forall$ ,  $\exists$ ,  $\vee$ ,  $\supset$ ,  $\&$ ,  $\neg$ . Выводимые объекты — односукцедентные секвенции. Аксиомы:  $A \rightarrow A$ ,  $\rightarrow (A \vee \neg A)$ .

Правила введения:

$$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B} (\vee^+); \quad \frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B} (\vee^+);$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} (\supset^+);$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow B \quad A, \Sigma \rightarrow \neg B}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \neg A} (\neg^+);$$

$$(*) \frac{\Gamma \rightarrow A(b)}{\Gamma \rightarrow \forall x A(x)} (\forall^+);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A(t)}{\Gamma \rightarrow \exists x A(x)} (\exists^+).$$

Правила удаления:

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \& B}{\Gamma \rightarrow A} (\&-);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \& B}{\Gamma \rightarrow B} (\&-);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \vee B \quad A, \Sigma \rightarrow C \quad B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Sigma, \Delta \rightarrow C} (\vee-);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad \Sigma \rightarrow (A \supset B)}{\Gamma, \Sigma \rightarrow B} (\supset-);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow B \quad \Sigma \rightarrow \neg B}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta} (\neg-);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \forall x A(x)}{\Gamma \rightarrow A(t)} (\forall-);$$

$$(*) \frac{\Gamma \rightarrow \exists x A(x) \quad A(b), \Sigma \rightarrow C}{\Gamma, \Sigma \rightarrow C} (\exists-).$$

Структурные правила:

$$\frac{\Gamma \rightarrow C}{A, \Gamma \rightarrow C} (\text{уточнение});$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \rightarrow C}{\Gamma, B, A, \Sigma \rightarrow C} (\text{перестановка});$$

$$\frac{A, A, \Gamma \rightarrow C}{A, \Gamma \rightarrow C} (\text{сокращение повторений}).$$

Здесь  $t$  — произвольный терм; (\*) означает, что переменная  $b$  не входит в  $\Gamma, \Sigma, \exists x A(x), C$ .

Секвенция, находящаяся под чертой, наз. заключением правила, а секвенции, находящиеся над чертой — посылками. Аксиома  $A \rightarrow A$  изображает введение допущения  $A$ ; правило  $\supset^+$  иллюстрирует освобождение от допущения: ф-ла  $B$  верхней секвенции зависит от допущения  $A$ , ф-ла  $A \supset B$  нижней секвенции — уже нет. Освобождение от допущений происходит также в правилах  $\neg^+$ ,  $\vee^-$ ,  $\exists^-$ . Г. ф. с. натурального типа задается иногда в виде исчисления ф-л (а не секвенций) с неявной записью зависимости от допущений: вывод в таком исчислении — это древовидная фигура, в вершинах которой могут находиться произвольные ф-лы (не обязательно аксиомы), а все переходы производятся по правилам вывода. Эти правила получаются вычеркиванием антецедентов из соответствующих правил натуральной системы, описанной с помощью секвенций, причем в случае, когда происходит освобождение от допущений, добавляются соответствующие условия, напр.:

$$\frac{A \quad B}{A \& B} (\&^+), \quad \frac{\begin{matrix} [A] \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{A \supset B} (\supset^+).$$

Считается, что вхождение  $V$  ф-лы в такой вывод зависит от допущения  $D$ , если  $D$  находится на вершине вывода над  $V$ , не является аксиомой и в ветви, ведущей от рассматриваемого вхождения  $D$  к  $V$ , не происходит освобождения от допущения  $D$ . При истолковании такого рода вывода каждому вхождению ф-лы  $C$  сопоставляется секвенция  $\Gamma \rightarrow C$ , где  $\Gamma$  — полный список допущений, от которых зависит рассматриваемое вхождение ф-лы  $C$ . Связь натуральных Г. ф. с. с обычными (гильбертовскими) вариантами соответствующих систем устанавливается с помощью утверждения:  $\Gamma \rightarrow C$  выводимо в натуральной системе тогда и только тогда, когда  $C$  выводимо из  $\Gamma$  с фиксированными переменными в гильбертовской системе.

Натуральные Г. ф. с. в их первоначальном виде плохо приспособлены для поиска вывода путем анализа: при попытке выяснить, по какому правилу из каких посылок можно получить данную ф-лу (секвенцию) возникает неоднозначность: в принципе подходит как правило введения соответствующей логической связи, так и любое из правил удаления. При этом к-во возможных посылок в правилах удаления потенциально неограничено (за счет варьирования ф-лы  $A$  в правилах  $\supset$ ,  $\vee$ ,  $\exists$  и т. д.). Поэтому для применения к теории логического вывода теорем на ЭВМ полезно иметь правила, обладающие свойством подформульности: в посылки входят только подформулы заключения, а бесконечность проявляется лишь за счет варьирования вида термов в правилах типа  $\exists^+$ . В секвенциальных Г. ф. с. либо все правила обладают свойством подформульности, либо это свойство нарушается лишь для одного правила — правила сечения

$$\frac{\Gamma \rightarrow A \quad A, \Sigma \rightarrow \Delta, \Omega}{\Gamma, \Sigma \rightarrow \Delta, \Omega}$$

или другого правила близкого вида, напр.,  $\neg$ . Поэтому системы, обладающие свойством подформульности, наз. также свободными от сечения. Пример: свободный от сечения вариант  $LK$  классического исчисления предикатов (выводимые объекты — произвольные секвенции). Аксиомы  $A \rightarrow A$ .

Сукцедентные правила:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \supset B} (\rightarrow \supset); \quad \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg A} (\rightarrow \neg);$$

$$(*) \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A(b)}{\Gamma \rightarrow \Delta, \forall x A(x)} (\rightarrow \forall);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \& B} (\rightarrow \&);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \vee B} (\rightarrow \vee); \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \vee B} (\rightarrow \vee).$$

Антецедентные правила:

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \Delta} (\& \rightarrow); \quad \frac{B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \& B, \Gamma \rightarrow \Delta} (\& \rightarrow);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Delta} (\neg \rightarrow);$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Delta} (\vee \rightarrow);$$

$$\frac{A(t), \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall x A(x), \Gamma \rightarrow \Delta} (\forall \rightarrow);$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Delta} (\supset \rightarrow);$$

$$(*) \frac{A(b), \Gamma \rightarrow \Delta}{\exists x A(x), \Gamma \rightarrow \Delta} (\exists \rightarrow).$$

Структурные правила: перестановка, уточнение и сокращение повторений в антецеденте и сукцеденте и сечение. Знак  $(*)$  в  $(\rightarrow \forall)$ ,  $(\exists \rightarrow)$  имеет тот же смысл, что в  $(\forall^+, \exists^-)$ . При сопоставлении секвенциальных и натуральных Г. ф. с. правилам введения соответствуют сукцедентные правила, а правилам удаления — антецедентные правила. При моделировании в секвенциальных Г. ф. с. правил удаления используется сечение. Свойство подформульности для  $LK$  обеспечивает осн. теорема Генцена (теорема об устранимости сечения): по всякому выводу в  $LK$  можно построить вывод (той же секвенции) без сечения.

Теорема об устранимости сечения позволяет устанавливать разрешимость бескванторных систем: из подформул данной бескванторной ф-лы можно составить лишь конечное число несходных секвенций (секвенции сходны, если они отличаются лишь порядком и повторениями членов в антецеденте и сукцеденте), из которых, в свою очередь, можно составить лишь конечное число «кандидатов» в выводы; данная ф-ла доказуема, если среди этих кандидатов найдется вывод. В действительности, при поиске вывода применяется более эффективный алгоритм поиска «снизу вверх» путем анализа испытуемой на выводимость секвенции  $S$ : производится «контрприменения» правил: над  $S$  надписываются секвенции (или пары секвенций), из которых  $S$  могла бы получиться однократным применением правила вывода (из-за свойства подформульности и отсутствия кванторов получается конечный список); к каждой из порожденных таким образом секвенций снова применяется тот же прием и т. д. После конечного числа шагов либо получится вывод (на вершинах всех «ветвей» окажутся аксиомы), либо произойдет обрыв процесса (зацикливание) — тогда формула невыводима.

Для кванторных систем эта схема модифицируется: на каждом этапе «анализа» при контрприменениях кванторных правил перебирается лишь конечный список возможных термов; процесс в целом организуется таким образом, что каждый из возможных термов

в конце концов включается в перебор. Из-за бесконечности множества возможных термов получается лишь алгоритм установления выводимости: для некоторых невыводимых секвенций процесс анализа неограниченно продолжим без заикливания; для выводимых секвенций он обязательно обрывается, т. е. дает вывод. Особенно удобно эта схема поиска вывода реализуется для Г. ф. с., не содержащих структурных правил. При построении таких систем пользуются обратимыми правилами, т. е. такими, что выводимость заключения влечет выводимость посылок.

Г. ф. с. широко используются в теории доказательств. Они позволяют отражать содержательные особенности теории с помощью чисто структурных соображений. Так, Г. ф. с. конструктивной математики часто отличаются от соответствующих классических систем лишь использованием односторонних секвенций вместо произвольных. Результаты типа непротиворечивости (невыводимость пустой секвенции) или дизъюнктивности часто тривиальны для свободных от сечения систем: соответствующий объект либо вовсе не может быть заключением никакого правила (пустая секвенция), либо может получиться лишь соответствующим способом (т. е. из какого-либо дизъюнктивного члена по правилу  $\rightarrow \vee$  при доказательстве дизъюнктивности).

Важным обобщением Г. ф. с. являются полужормальные системы, содержащие правило «бесконечной индукции».

Лит.: К л и н С. К. Математическая логика. Пер. с англ. М., 1973 [библиогр. с. 451—465]; Математическая теория логического вывода. М., 1967; К а р р и Х. Б. Основания математической логики. Пер. с англ. М., 1969 [библиогр. с. 518—547]. Г. Е. Минц.

**ГИБРИДНАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА** — вычислительная машина, в которой сочетается ряд особенностей цифровых и аналоговых вычислительных устройств. Идея создания Г. в. м. связана со стремлением преодолеть недостатки, свойственные аналоговым и цифровым вычислительным машинам (ЦВМ), и объединить их достоинства: быстродействие параллельно работающих устр-в аналоговых вычислительных машин (АВМ) и их способность решать целые классы задач неалгоритмическим путем с высокой точностью ЦВМ и их возможностями выполнять различные функциональные операции, к которым относятся вычисления в соответствии с заданной последовательностью выполнения операций, логические решения и итерационные вычисления.

Первые попытки сочетать свойства АВМ и ЦВМ были вызваны чрезвычайной сложностью проблем, возникших при моделировании в реальном масштабе времени таких задач, как полет космических аппаратов и управление производственными процессами. Возможности чисто аналоговых и чисто цифровых машин для решения таких задач оказались недостаточными. Это привело к их объединению в один вычисл. комплекс с помощью аналого-цифрового преобразователя и цифро-аналогового преобразователя информации. ЦВМ в таких комплексах производит ту часть вычислений,

выполнение которых с ее помощью наиболее целесообразно: точное преобразование координат, вычисление параметров траектории, моделирование цифровой аппаратуры управления. АВМ же используется для моделирования динамики объекта и управляющих воздействий, где требуется большое быстродействие и где допустима меньшая точность. Вопрос оптим. распределения вычисл. работ между аналоговой и цифровой частями Г. в. м. является чрезвычайно важным, так как в случае неправильного его решения в большой гибридной модели проявляются и отрицательные свойства вычисл. машин обоих типов. Ошибки и трудности, связанные с набором задачи, дополняют осложнения, связанные с конечностью темпа выборки в устр-ве аналого-цифрового преобразования, или с запаздыванием, определяемым временем выполнения вычислений в ЦВМ. Поэтому основными среди Г. в. м. являются машины, спроектированные именно в виде единой гибридной системы. В таких системах, содержащих достаточно мощные аналоговые и цифровые части, целесообразно, чтобы общая программа совместной работы аналоговой и цифровой части предусматривала осн. затраты времени на проверку и подготовку их к работе отдельно друг от друга. Кроме того, необходимо, чтобы в этих системах была предусмотрена возможность независимого использования аналоговой и цифровой частей. Так, при подготовке аналоговой части системы цифровая часть этой системы должна быть занята решением других задач до того момента, когда потребуется ее участие в решении общей задачи. Для эффективного использования таких машин требуется высокая квалификация обслуживающего персонала и хорошо разработанная система матем. обеспечения. При решении задач оптимизации, статистической обработки и др. необходимы отработанные стандартные программы управления комплексом.

Опыт, накопленный в области гибридного аналого-цифрового моделирования, позволил определить путь создания другого типа Г. в. м. Для задач, при решении которых можно ограничиться умеренной точностью вычислений, использование аналоговых подпрограмм в составе программы, выполняемой цифровым автоматом, приводит к значительной экономии машинного времени и снижению требований к объему оперативной памяти. К такому же результату приводит и замена в некоторых специализированных ЦВМ медленно выполняемой чисто цифровой программы умножения обращением к гибриднему цифро-аналого-цифровому устр-ву, реализующему операцию умножения. Более существенную экономию времени дает применение аналоговых арифметических блоков, управляемых цифровым способом, в которых выполняются аналоговые операции умножения и сложения. Аналоговое устр-во, оформленное в виде подпрограммы, которое либо вычисляет значения ф-ций либо решает алгебр. или дифф. ур-ния, позволяет отказаться от использования многих команд и от наличия дополнительного цифрового за-

поминающего устройства с малым циклом обращения.

Очень эффективным является применение аналоговых подпрограмм при итеративном решении ур-ний в частных производных. Схема возможной гибридной системы для решения двумерных ур-ний в частных производных с нелинейным членом приведена на рис. 1, где ПФП — переключаемый функциональный преобразователь, АЦП и ЦАП — аналого-цифровой и цифро-аналоговый преобразователи. В схеме в качестве аналоговой части взя-

та резисторная сетка Гершгорина, являющаяся моделью ур-ний Лапласа и Пуассона. Ввод токов в узлы сетки полностью автоматизирован путем присоединения ее через запоминающие источники к управляющему цифровому автомату (ЦА).

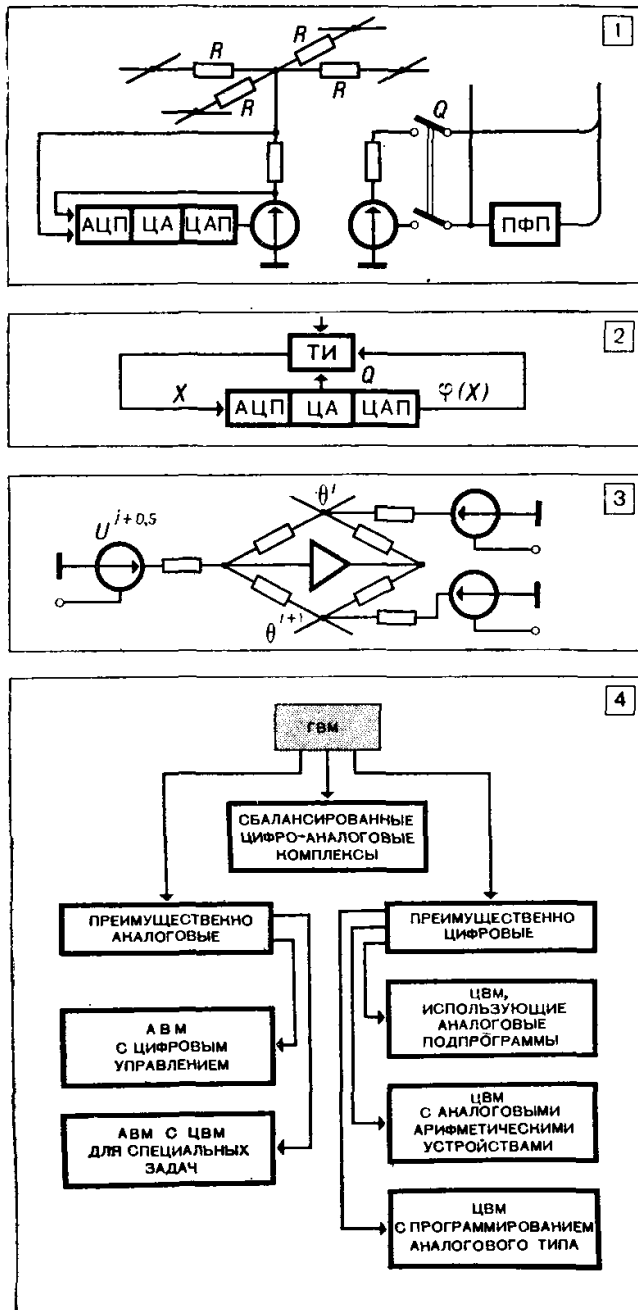
Весьма перспективно построение Г. в. м. для решения обыкновенных дифф. ур-ний с краевыми условиями по схеме, приведенной на рис. 2. Использование в ней аналоговой части, построенной на базе обратимых точечных интеграторов, позволяет реализовать краевые условия непосредственно в самих интеграторах. Точечным интегратором  $k$ -го порядка одномерной ф-ции  $U = U(t)$  на отрезке  $(0, t)$  наз. модель ур-ния  $h^k \frac{d^k X}{dt^k} + U = 0$ ,

в котором  $U(t)$  — задаваемая,  $X(t)$  — получаемая ф-ция,  $h$  — шаг дискретизации. Одна из возможных схем обратимого точечного интегратора первого порядка изображена на рис. 3. Обратимым он является потому, что все его полюсы являются равноправными в том смысле, что на каждом из них величины в виде напряжений можно и задавать и получать. В Г. в. м., изображенной на рис. 2, все нелинейные зависимости реализуются в управляющем ЦА. Точечные интеграторы (ТИ) играют в ней роль дискретного квазианалога системы

ур-ний  $\tau \frac{dX}{dt} + \varphi(X, t) = 0$  на заданном отрезке  $(0, T)$ . Краевые условия вводятся в схемы интеграторов непосредственно. Роль ЦА сводится к образованию при помощи кодов  $Q$  требуемой схемы из интеграторов и к уравновешиванию вычисл. системы так, чтобы точечное изображение вектора  $\varphi(X, t)$  соответствовало решаемой системе дифф. ур-ний (см. *Уравновешивания методы*).

Классификация Г. в. м. может быть проведена по схеме, приведенной на рис. 4. Существует несколько осн. типов таких машин. Аналоговые машины с цифровым управлением и цифровой логикой способны воспроизводить гораздо более сложные модели по сравнению со стандартными АВМ, сохраняя их положительные качества, в частности, возможность для исследователя активно вмешиваться в процесс поиска решения. На этих машинах могут автоматически выполняться последовательные решения, а результаты, полученные в предыдущих решениях, могут запоминаться и использоваться при выполнении последующих решений. Это дает возможность реализовать итеративный процесс решения, сходящийся к искомому результату, итеративный процесс оптимизации параметров и т. п. Первый удачный пример этого типа гибридизации представляет собой система «HYDAC» фирмы Electronic Associates (США). К машинам такого типа относятся и отечественные Г. в. м. «Аркус» и «Экстрема».

Существуют АВМ с ЦВМ в качестве периферийного оборудования. В таких системах небольшая цифровая машина используется вместе с большой аналоговой системой для



1. Схема гибридной системы для решения двумерных уравнений в частных производных с нелинейным членом.

2. Схема гибридной вычислительной машины для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Схема обратимого точечного интегратора первого порядка.

4. Схема классификации гибридных вычислительных машин.

решения спец. задач, решить которые было бы трудно или вовсе невозможно с помощью чисто аналоговой аппаратуры.

Самыми мощными из существующих гибридных вычислительных систем являются сбалансированные цифро-аналоговые комплексы, включающие в себя универсальные цифровые и универсальные аналоговые вычислительные машины. Оба осн. компонента таких гибридных систем можно использовать и отдельно для решения широкого класса важных задач. Но при объединении их возникает еще более мощная вычисл. система.

Цифровой вычислительной машиной, которая использует аналоговые подпрограммы, является, напр., система «UCLA DSDT» (США) для решений ур-ний в частных производных, в которой аналоговая аппаратура используется лишь для обращения матриц, требуемого программой ЦВМ.

У цифровых вычислительных машин с аналоговыми арифметическими устройствами скорость вычислений больше, чем у чисто цифровой машины за счет параллельного выполнения некоторых операций с помощью аналоговой аппаратуры. Примером таких машин может служить система, разработанная в 1962 в Массачусетском технологическом институте (США).

К цифровым вычислительным машинам с программированием аналогового типа относятся *цифровые дифференциальные анализаторы*, которые по методу подготовки и решению задач можно отнести к АВМ, а по форме представления информации и по тех. выполнению — к цифровым электронным машинам (см. *Цифровая интегрирующая машина*).

Г. Е. Пухов, Г. П. Галузинский.

**ГИДРОБИОНИКА** — раздел бионики, изучающий особенности животных, живущих в воде, с целью создания новых и совершенствования существующих технических средств, предназначенных для работы в водной среде. **ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ.** Для описания поведения сплошной среды используются различные модели математические, которые во многих случаях приводят к нелинейным дифференциальным уравнениям гиперболического типа (см. *Дифференциальных линейных уравнений с частными производными классификация*). Такие ур-ния имеют точные аналитические решения только в редких случаях. До появления ЭВМ возможности числ. исследования сплошной среды были ограничены в основном случаем одной пространственной переменной (нестационарные задачи), двух пространственных переменных (стационарные задачи), линейными моделями и простейшими прибр. методами. Создание ЭВМ дало возможность числ. исследования более близких к природным, а, следовательно, и более сложных матем. моделей сплошной среды. В наст. время различают следующие среды, матем. описание которых приводит к гиперболическим ур-ниям: а) идеальные сжимаемые жидкости; б) сжи-

маемые жидкости (ур-ния, описывающие их, учитывают процессы вязкости и теплопроводности); в) упругие, упруго-пластические и упруго-вязкие среды; г) плазма.

Ур-ния, описывающие состояние сплошной среды, являются матем. выражениями законов сохранения (массы, импульса, энергии и пр.), справедливыми для произвольного элемента среды. Как правило, после перехода к эйлеровым прямоугольным координатам (что соответствует законам сохранения для произвольного параллелепипеда с ребрами, параллельными осям координат) получают квазилинейные ур-ния в дивергентном виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = F_i(x, t);$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} \left( u_k, \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right);$$

$$i, j, k, l = 1, \dots, m,$$

которые являются основой для составления разностной схемы (см. *Конечноразностные методы*). Характерной особенностью рассматриваемых моделей сплошной среды является наличие в них ф-ций и параметров, которые во многих случаях можно рассматривать как малые. Таковы, напр., коэфф. вязкости, теплопроводности, сжимаемости. Их учет приводит к диссипативной модели среды, состояние которой описывается параболическими ур-ниями. В противном случае приходят к недиссипативной модели среды, описываемой гиперболическими ур-ниями. Отличительной чертой квазилинейных гиперболических ур-ний является то, что в решении могут возникнуть разрывы (напр., ударные волны, контактные разрывы) даже в том случае, когда начальные ф-ции гладкие. Поэтому вводится понятие обобщенного решения, основанного на использовании законов сохранения в интегр. форме и вытекающих из этих законов условий динамической совместности на появляющихся разрывах. Выполнение этих условий на разрывах приводит к необратимости процесса. При этом разрывы следует понимать как бесконечно тонкие зоны перехода, где происходят быстропротекающие необратимые термодинамические процессы. Недиссипативные модели можно рассматривать как предельные случаи диссипативных моделей при стремлении параметров диссипативности к нулю. Это замечание служит одним из способов получения обобщенных решений ур-ний гиперболического типа как пределов решений диссипативных (параболических) ур-ний при стремлении параметров диссипативности к нулю и широко применяется в разностных методах.

*Численные методы* решения ур-ний гиперболического типа можно разделить на две большие группы: 1) методы с явным выделением особенностей решения; 2) т. н. методы сквозного счета, в которых особенности решения явно не выделяются.



К первой группе методов следует прежде всего отнести метод характеристик, который появился в газовой динамике сравнительно давно и с успехом применялся для расчета одномерных нестационарных течений с небольшим к-вом особенностей, а также для расчета двумерных стационарных течений в области гиперболичности. Метод характеристик используется только для решения гиперболических ур-ний. Он основан на том, что гиперболическая система ур-ний с двумя неизвестными имеет два семейства действительных характеристик, которые образуют координатную сеть. В этом случае можно полностью избежать интерполяций, а тем самым и эффектов сглаживания и аппроксимационной вязкости. При большем к-ве неизвестных и независимых переменных начинают проявляться недостатки этого метода: возникает аппроксимационная вязкость, при наличии большого к-ва особенностей алгоритм становится логически сложным. Поэтому методом характеристик целесообразно решать задачи, в которых к-во разрывов невелико. В конце 60-х годов 20 ст. достигнут определенный прогресс в использовании метода характеристик при расчете пространственных задач. Доказано, что решение, полученное методом характеристик, сходится к решению исходной дифф. задачи в случае достаточно гладких решений.

В связи с необходимостью решать сложные задачи газовой динамики, содержащие большое к-во особенностей (ударных волн, контактных границ и центрированных волн разрежения), появились новые числ. методы, т. н. методы сквозного счета. В основе этих методов лежит единое толкование всех областей потока. Единство схемы расчета получается в результате наличия диссипативных членов схемы, которые сглаживают разрывы, превращая их в зоны перехода, имеющие ширину нескольких интервалов. Известные схемы сквозного счета имеют на гладких решениях локальную точность не выше 3-го порядка и глобальную точность — не выше 1-го порядка (учитывая невысокую точность схемы вблизи особенностей). В случае газовой динамики схемы сквозного счета довольно хорошо передают интегр. характеристики потока и воспроизводят довольно точно положение и скорость сильных ударных волн. Вместе с тем границы волн разрежения искажаются, контактные границы «размазываются» аппроксимационной вязкостью схемы, так что ширина их со временем растет.

Схемы сквозного счета по свойствам разрешимости и устойчивости линейных ур-ний, возникающих в результате конечно-разностной аппроксимации, можно в свою очередь подразделить на 2 большие группы: а) явные схемы; б) неявные схемы. В явных схемах область зависимости разностного решения является конечным мн-вом точек, расположенных на плоскости начальных данных (если ограничиться рассмотрением задачи Коши), так что число точек в области зависимости на предыдущем временном уровне не растет с уменьшением шагов сетки  $\tau, h$ . Т. о., двухслой-

ная явная схема представляется в виде

$$u_i^{n+1} = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} C_{\alpha}^n u_{i+\alpha}^n + f_i^n,$$

где  $C_{\alpha}^n = C_{\alpha}^n(u_i, \tau, h, n\tau, ih)$ ,  $t = n\tau$ ,  $x = ih$ , числа  $q_1, q_2$  не зависят от  $\tau, h$ .

В неявных схемах значение  $u_i^{n+1}$  выражается через все значения  $u_{i+\alpha}^n$  ( $\alpha = -N_1, \dots, N_2$ ), где числа  $N_1, N_2$  растут с уменьшением  $\tau, h$ . Неявную схему можно записать в виде

$$Au_i^{n+1} = Bu_i^n + F_i,$$

где операторы  $A$  и  $B$  являются финитными, т. е. представляются в виде

$$A = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} C_{\alpha}^{1,n} T_{\alpha}, \quad B = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} C_{\alpha}^{2,n} T_{\alpha},$$

где  $T_{\alpha}$  — оператор сдвига.

Явные схемы просты в реализации, но условие устойчивости их (см. *Устойчивость разностных схем*), как правило, дает на величину шага сильное ограничение вида

$$\tau \leq \text{const} \cdot h^m,$$

что приводит к излишне мелкому шагу  $\tau$  и неоправданному увеличению объема вычислений. Неявные схемы более сложны в реализации при переходе с одного временного слоя на другой, но зато шаг  $\tau$  можно выбрать сколь угодно большим и тем самым его можно определять, учитывая только требующуюся точность.

Явные и неявные схемы являются необходимыми элементами разностных методов решения систем гиперболических ур-ний. Кроме разделения схем по свойствам разрешимости (по структуре разрешающего оператора), существует классификация схем и по структуре сетки. Совр. теория рассматривает сетку как конечное мн-во точек — носителей информации, которые строятся в зависимости от решения, и эволюционируют вместе с ним.

Сглаживание разрывов в решениях, дающее возможность вести сквозной счет, происходит в схемах сквозного счета и благодаря явному введению диссипативных членов в дифф. ур-ния, и вследствие диссипативных свойств самой схемы. Объединяя оба механизма диссипативности, можно говорить об аппроксимационной вязкости разностных схем. Структура аппроксимационной вязкости схемы описывается первым дифф. приближением (ПДП) схемы, которое отличается от исходной дифф. системы ур-ний членами, содержащими старшие производные. Структура матриц при этих членах определяет не только свойства устойчивости схемы, но и ее диссипативные свойства. Во многих случаях представляется важным определить, насколько разностная схема или ее ПДП сохраняют групповые свойства исходной системы дифф. ур-ний. Сохранение схемой этих свойств имеет большое

значение в практическом счете, особенно для задач газовой динамики, где, напр., неинвариантность ПДП относительно преобразования Галилея приводит к неприятным счетным эффектам (неустойчивость, немонотонность профилей и пр.).

При численном интегрировании гиперболических ур-ний производные заменяют конечными разностями и после этого на каждом шаге приходится решать систему алгебр. ур-ний. Разностные схемы должны удовлетворять двум независимым условиям — аппроксимации и устойчивости. Эти требования в известной мере вступают в противоречие друг с другом. Кроме того, разностные схемы должны удовлетворять еще ряду практически необходимых требований — дивергентности, экономичности и т. д. Теория разностных схем начала развиваться в середине 40-х годов 20 ст. Это было вызвано необходимостью решения задач ядерной энергетики и ракетостроения, а также благодаря появлению ЭВМ. В 50-х годах 20 ст. были сформулированы и доказаны теоремы сходимости для разностных схем, аппроксимирующих линейные дифф. ур-ния. Эти теоремы позволяют сводить исследование сходимости разностной схемы к исследованию ее устойчивости.

В то время, как исследование аппроксимации разностной схемой соответствующего гиперболического ур-ния сравнительно просто, носит локальный характер и по существу сводится к разложению в ряд Тейлора, исследование устойчивости является значительно более сложной задачей. Несмотря на ряд исследований, предпринятых разными авторами, до сих пор не получены еще достаточно общие и эффективные критерии устойчивости и сходимости разностных схем для гиперболических ур-ний с переменными коэфф. (а тем более для нелинейных ур-ний).

Для разностных схем, аппроксимирующих гиперболические ур-ния с постоянными коэфф., устойчивость исследуется методом Фурье. Для этого оценивается норма образа Фурье оператора шага. Известно, что спектральный радиус матрицы образа Фурье оператора шага не превосходит нормы матрицы. Отсюда следует необходимый критерий устойчивости: для устойчивости разностной схемы необходимо, чтобы спектральный радиус образа Фурье оператора шага не превосходил величины  $1 + O(\tau)$ , где  $\tau$  — шаг разностной схемы по времени. Это условие необходимо и для разностных схем с переменными коэфф. При ряде дополнительных ограничений оно является и достаточным для устойчивости разностных схем.

Для исследования устойчивости разностных схем с коэфф., зависящими от пространственных переменных, применяются следующие методы: а) метод мажорантных или априорных оценок; б) локально-алгебр. метод. Наибольшее развитие метод априорных оценок получил в работах сов. и амер. математиков. Этот метод аналогичен соответствующему методу для дифф. ур-ний, но в разностном случае его очень

трудно реализовать; это связано со спецификой разностного анализа, в котором в отличие от априорных оценок в теории дифф. ур-ний многие соотношения принимают громоздкий вид. В основе локально-алгебр. метода лежит изучение свойств локального разностного оператора, получаемого из соответствующего разностного оператора с переменными коэфф. фиксацией, «замораживанием» коэфф. Тем самым анализ устойчивости разностного оператора с переменными коэфф. заменяется анализом целого семейства операторов с постоянными коэфф. Локальный критерий устойчивости является обобщением метода «замораживания» коэфф., используемого в теории дифф. ур-ний. К локальному критерию устойчивости примыкает диссипативный критерий устойчивости, а именно: из диссипативности и аппроксимации разностной схемы следует устойчивость схемы для гиперболических систем дифф. ур-ний 1-го порядка с эрмитовыми матрицами. Практические расчеты показали, что эти критерии можно использовать при исследовании устойчивости разностных схем для нелинейных ур-ний, хотя обоснования этого пока нет.

В конце 60-х годов 20 ст. при исследовании устойчивости разностных схем для нелинейных ур-ний (в частности, для ур-ний газовой динамики) стали широко применять метод ПДП, который заменяет анализ разностной схемы анализом ее дифф. приближения. В случае, когда коэфф. исходного дифф. ур-ния постоянные, либо являются ф-циями независимых переменных, для ряда разностных схем показано, что из корректности ПДП следует устойчивость соответствующей разностной схемы. В противном случае обоснования этого метода нет. Однако метод дифф. приближения может объяснить неустойчивость разностных схем, наблюдаемую в расчетах и не улавливаемую локальным методом Фурье, ибо последний не учитывает градиентов.

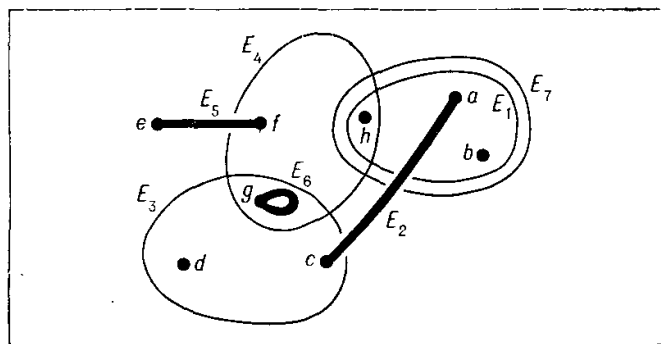
В конце 60-х годов 20 ст. большое развитие получили разностные схемы повышенной точности. Исследованию схем повышенного порядка точности посвящен ряд работ и уже имеются примеры обнадеживающего использования в газодинамических расчетах схем 3-го и 4-го порядков точности.

При увеличении размерности задачи к-во операций на точку растет. Возрастают логические трудности в составлении программы расчета. Схемы простой аппроксимации становятся неэкономичными. Для получения экономичных устойчивых разностных схем предложены методы, основанные на идеях расщепления разностных схем, прил. факторизации и расщепления (слабой аппроксимации) дифф. ур-ний. К одной из модификаций метода расщепления можно отнести метод «частиц в ячейках», широко используемый в наст. время при решении задач механики сплошной среды, в котором расщепление не связано с понижением размерности операторов. В основе метода расщепления лежит представление сложных операторов через простейшие, поэтому интегрирование исходного ур-ния сводится

к интегрированию ур-ний более простой структуры. В наст. время методом расщепления решаются многие сложные задачи матем. физики. Лит.: Яненко Н. Н. Введение в разностные методы математической физики. ч. 1—2. Новосибирск, 1968 [библиогр. ч. 2, с. 379—385]; Родественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., 1968 [библиогр. с. 585—592]; Алашкин Г. Б. [и др.]. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М., 1970; Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971 [библиогр. с. 538—550]; Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. Пер. с англ. М., 1972 [библиогр. с. 381—413]; Вычислительные методы в гидродинамике. Пер. с англ. М., 1967.

Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокин.

**ГИПЕРГРАФ** — пара  $H = (X, E)$ , образованная конечным множеством  $X = \{x_1, x_2, \dots,$



$\dots, x_n\}$  вершин и некоторым семейством  $E = (E_i / i \in I)$  ребер — непустых частей  $X$ , удовлетворяющих условию  $\bigcup E_i = X$ . Напр.,

для Г.  $H$  на рис.  $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ,  $E = (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7)$ ,  $E_1 = E_7 = \{a, b, h\}$ ,  $E_2 = \{a, c\}$ ,  $E_3 = \{c, d, g\}$ ,  $E_4 = \{f, g, h\}$ ,  $E_5 = \{e, f\}$ ,  $E_6 = \{g\}$ . Если все  $E_i$  — двухэлементные, то Г.  $H = (X, E)$  — это обыкновенный граф без голых вершин. Теория Г., используя осн. идеи графов теории, позволяет получать многие результаты короче и в более общем виде, а также допускает многочисленные приложения к др. проблемам комбинаторного характера. К Г., в частности, относятся матроиды, введенные с целью построения единой алгебр. теории деревьев, циклов и др. частей в графе.

Лит.: Зыков А. А. Теория конечных графов, т. 1. Новосибирск, 1969 [библиогр. с. 515—542]; Tutte W. T. Lectures on matroids. «Journal of research National Bureau of Standards», 1965, v. 69B, № 1—2; Berge C. Graphes et hypergraphes. Paris, 1971. А. А. Зыков.

**ГИПЕРПЛОСКОСТИ ОТСЕКАЮЩЕЙ МЕТОД** — один из методов решения задачи программирования выпуклого. Пусть задача выпуклого программирования поставлена в следующем виде: минимизировать  $(p, x)$  при ограничениях

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где  $x$  и  $p$  —  $n$ -мерные векторы,  $g_i(x)$  — выпуклые функции,  $(p, x)$  — скалярное произведение векторов  $p$  и  $x$ . Метод состоит из предварительного и общего шагов.

На предварительном шаге выбираются точки  $x^1, \dots, x^l$  такие, что область, определяемая неравенствами  $g_i(x^j) + (\nabla g_i(x^j), x - x^j) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, l$  ограничена. Здесь  $\nabla g_i(x)$  — градиент ф-ции  $g_i(x)$ .

Общий шаг заключается в следующем. Положим, множество  $I(x^j) = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Пусть точки  $x^1, \dots, x^k$ ,  $k \geq l$ , уже построены и построены соответствующие им множества индексов  $I(x^j)$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Решаем задачу минимизации  $(p, x)$  при ограничениях

$$(\nabla g_i(x^j), x - x^j) + g_i(x^j) \leq 0, \quad (2)$$

$$i \in I(x^j), \quad j = 1, \dots, k.$$

Точку минимума этой задачи обозначим через  $x^{k+1}$ . В качестве  $I(x^{k+1})$  берем множество тех индексов  $i$ , для которых  $g_i(x^{k+1}) > 0$ . Если при некотором  $k$  множество  $I(x^k)$  пусто, то  $x^k$  — решение задачи. В общем случае построенная последовательность  $x^k$  такова, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_i(x^k) \leq 0$ , а значение  $(p, x^k)$  стремится к значению минимума  $(p, x)$  в области (1).

Б. Н. Пшеничный.

**ГИПОТЕЗА КОМПАКТНОСТИ** — предположение о том, что подмножество распознаваемых изображений одного класса является в определенном смысле простым. Понятие простоты может быть конкретизировано по-разному. Напр., классы изображений наз. компактными, если они могут быть отделены друг от друга с помощью гиперплоскостей (см. Разделяющая поверхность в распознавании образов) или когда каждый класс изображений может быть представлен в виде объединения некоторого числа выпуклых множеств. В ряде исследований критерий компактности отражает представление о том, что сходство изображений одного класса должно быть больше, чем сходство изображений разных классов.

М. И. Шлезингер.

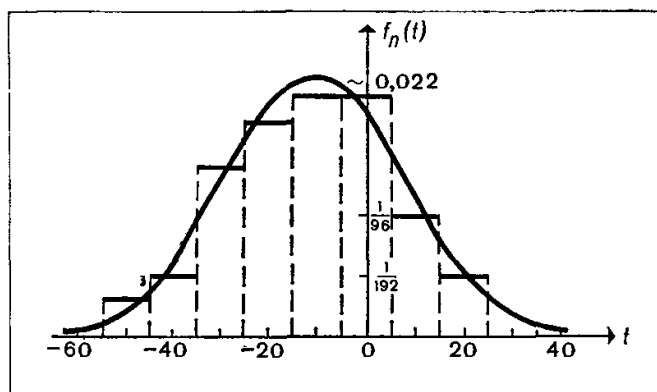
**ГИСТОГРАММА** — графическое приближенное представление плотности распределения вероятностей случайной величины, построенное по выборке конечного объема. Г. есть ступенчатая ф-ция  $f_n(t)$ , построенная по выборке независимых наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  случайной величины с плотностью  $f(t)$  следующим образом. Интервал, в котором лежат наблюдения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , разделяют на  $m$  ( $m < n$ ) подинтервалов  $[t_0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{m-1}, t_m]$ , называемых интервалами группировки,  $n_i$  — число наблюдений выборки, попавших в интервал  $(t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, m-1$ . Г. выборки  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , отвечающая интервалам группировки  $[t_0, t_1], (t_1, t_2], \dots$

...,  $(t_{m-1}, t_m]$  — ступенчатая ф-ция

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq t_0, \\ \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \cdot \frac{n_i}{n} & \text{при } t_i < t \leq t_{i+1}, \\ 0 & \text{при } t > t_m. \end{cases}$$

Согласно *большим числам закону*, значение  $f_n(t)$  для  $t$  из интервала  $(t_i, t_{i+1}]$  при больших  $n$  близко к величине  $\delta_i =$

$$= \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(u) du — \text{среднему значе-}$$



нию плотности распределения на интервале  $(t_i, t_{i+1}]$ .

Для того чтобы Г. давала хорошее представление о распределении вероятностей, следует выбирать число наблюдений и интервал группировки так, чтобы каждый интервал (за исключением, возможно, крайних интервалов) содержал хотя бы пять наблюдений. Сравнивая Г. и график предполагаемой ф-ции плотности  $f(x)$ , на практике обычно делают первое заключение о соответствии между данными наблюдениями и теоретическим предположением. При этом всякое достаточное большое несоответствие легко обнаруживается. Из-за того, что большое расхождение с некоторой вероятностью может быть следствием случайных колебаний, для более обоснованных заключений следует строить доверительные пределы (см. *Доверительный интервал* для параметра  $\theta$ , соответствующий доверительному уровню  $\epsilon$ ) для величины  $\delta_i$ . При больших значениях  $n$  приближенный доверительный интервал для величины  $\delta_i$ , соответствующий доверительно-му уровню 0,05, имеет вид

$$\left( \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \frac{n_i - 2\sqrt{n_i}}{n}, \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \frac{n_i + 2\sqrt{n_i}}{n} \right).$$

Рассмотрим, напр., результаты измерений некоторой *случайной величины* (в табл. указы-

ваются числа наблюдений, попавших в соответствующие интервалы):

Интервалы $t_i, t_{i+1}$	Количества наблюдений $n_i$
-55, -45	3
-45, -35	5
-35, -25	13
-25, -15	18
-15, -5	21
-5, 5	21
5, 15	10
15, 25	5

Здесь  $n = 96$ , все интервалы группировки имеют одинаковую длину 10 см. Г. выборки представлена на рис.: для сравнения изображена плотность нормального распределения, хорошо согласующаяся с данными.

А. Я. Дороговцев.  
**ГЛОБАЛЬНОГО ПОИСКА МЕТОДЫ** — методы нахождения экстремума глобального для функций, имеющих большое количество экстремумов локальных. Эти методы в наст. время разработаны слабо; о некоторых результатах см. *Минимизации функций методы, Оптимизации методы численные*.

**ГЛОБАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ** — переменные в языке программирования с блочной структурой, не описанные (не локализованные) в данном блоке, но используемые в нем. Такие переменные описываются в блоке, внутри которого содержится данный блок в качестве оператора. Понятие Г. п. тесно связано с понятиями области действия идентификаторов. См. также *Локализованные переменные*.

**ГНЕЗДОВОЙ СПИСОК** — один из программных способов организации ассоциативной (списковой) информации в памяти машины, при котором все члены списка располагаются в нескольких полях машинной памяти (гнездах). Внутри гнезда отдельные члены размещаются последовательно, а связь между гнездами осуществляется при помощи адресов связи. При этом в последнем слове предшествующего гнезда указывается адрес первого слова последующего гнезда. Г. с. экономичен с точки зрения расхода памяти, но сложен в части корректировки списков и восстановления освободившихся полей памяти. Г. с. удобно применять при построении больших постоянных списковых массивов. См. *Языки списковые*. А. И. Китов.

**ГНОСЕОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КИБЕРНЕТИКИ** — см. *Философские вопросы кибернетики*.

**ГОЛОГРАФИЯ** (от греч. *όλος* — полный и *γράφω* — пишу, т. е. полная запись) — способ получения изображения объекта путем полной регистрации пространственной структуры световой волны. Идею Г. впервые сформулировал англ. физик Д. Габор в 1948, но до появления лазеров она не получила широкого распространения. Сущность способа состоит в том, что

в некотором пространстве (плоскость, объем) регистрируется интенсивность картины интерференции волны света, идущей от предмета (предметной волны), и невозмущенной когерентной волны (опорной волны). Записанная таким способом картина распределения интенсивностей наз. голограммой.

Пусть волна света, рассеянная от какого-то предмета, описывается в плоскости записи оптической системы сигналом

$$u(x, y) = a(x, y) e^{i\Phi(x, y)}, \quad (1)$$

т. е. характеризуется распределением амплитуд  $a(x, y)$ , несущим информацию об отражательных способностях различных участков предмета, и распределением фаз  $\Phi(x, y)$ , несущим информацию об удаленности различных точек предмета от плоскости наблюдения.

Опорная волна, обычно представляющая собой волну с постоянной амплитудой и плоским фронтом, падает на плоскость записи под некоторым углом  $\theta$ , и описывается сигналом

$$u_0(x) = a_0 \cdot e^{-ik\theta x}, \quad (2)$$

где  $k$  — волновое число,  $a_0$  — амплитуда опорной волны. Фотопластинка, размещенная в плоскости записи, регистрирует распределение интенсивностей

$$I(x, y) = |u(x, y) + u_0(x)|^2 = a_0^2 + a^2(x, y) + \\ + a_0 a(x, y) \{e^{i[\Phi(x, y) + k\theta x]} + \\ + e^{-i[\Phi(x, y) + k\theta x]}\}. \quad (3)$$

Таким образом, проявленная фотопластинка — голограмма — содержит информацию как об амплитуде, так и о фазе предметной волны.

Чтобы извлечь информацию, записанную на голограмме, следует осветить ее опорной волной  $u_0(x)$ . Непосредственно за записанной голограммой появится волна света

$$u_{\text{вых}}(x, y) = a_0 e^{-ik\theta x} I(x, y) = \\ = a_0 e^{-ik\theta x} [a_0^2 + a^2(x, y)] + a_0^2 a(x, y) e^{i\Phi(x, y)} + \\ + a_0^2 a(x, y) e^{-i[\Phi(x, y) + 2k\theta x]}. \quad (4)$$

Три слагаемых выражения (4) соответствуют трем волнам, распространяющимся в разных направлениях. Волна света, соответствующая второму слагаемому, распространяется перпендикулярно плоскости голограммы и (с точностью до постоянного множителя) совпадает с предметной волной (1). Она создает изображение предмета, воспроизводящее все геом. параметры оригинала.

По спектру используемого при получении голограмм излучения Г. охватывает не только оптический диапазон. Проводятся интенсивные исследования и в области акустической, радио- и СВЧ-голографии.

Г. — не только метод получения изображений, дополняющий и вытесняющий обычную фотографию, но и мощный метод физ. исследований, метод тех. контроля на производстве.

Объемное кино, телевидение, интроскопия и микроскопия высокого разрешения, лазерная интерферометрия, прецизионные измерения, производство интегральных схем, СВЧ-видение и т. д. — таковы применения Г.

Широкое применение нашла Г. в кибернетике. Огромная информационная емкость голограммы, чрезвычайно высокая степень помехозащищенности, возможность записи двумерных массивов данных делают Г. одним из наиболее перспективных методов в решении ряда задач хранения и обработки информации.

В вычислительной технике Г. открывает возможность создания систем памяти большой емкости. Такие свойства голограмм, как помехозащищенность, малые размеры и возможность осуществлять запись информации в виде двумерных массивов позволяют создать системы памяти с плотностью записи порядка  $10^{11} - 10^{12}$  бит/см<sup>3</sup>.

Голографическое ЗУ представляет собой фотоноситель (фотопленка и др. материалы), на котором регистрируются голограммы числовых массивов, обычно представляемых в виде комбинации светлых и черных точек транспаранта. Для смещения предметного и опорного пучка при смене точки записи на фотоносителе используются оптико-электронные отклоняющие системы. Для считывания информации, накопленной в ЗУ, отклоняющая система направляет считывающий (опорный) луч в заданные координаты на фотоносителе. Восстановленное изображение проецируется на систему фотоприемников, на выходе которых производится считывание числа.

Информация в голографическом ЗУ может вводиться и считываться не только поэлементно, но и блоками, в виде двумерных матриц-транспарантов. Это позволяет создать мощные архивные ЗУ, информация в которых хранится в виде текстов, удобных для использования их человеком.

Перспективна возможность использования принципов Г. и для создания специализированных устройств матем. обработки информации, поступающей в виде световой волны либо записанной на голограмме, напр., устройств автомат. опознавания и поиска заданной информации, примененных в читающих автоматах и системах автомат. классификации различных объектов. В основе конструирования таких систем лежит возможность создания голографических фильтров высокой избирательности, способных выделить интересующую нас информацию из массива информации, поступающего на вход системы, напр., создания голографических устройств поиска заданных графических символов на странице текста, поиска информации в архивном ЗУ и т. д.

Г. можно использовать как средство кодирования информации. Кодирование осуществляется при записи кодируемой информации путем установки в опорном пучке специального рассеивателя, искажающего волновой фронт опорной волны. Восстановить в неискаженном виде записанную информацию возможно лишь при использовании той же самой опорной

волны, и для этого в опорный пучок надо установить тот же рассеиватель. Высокая степень кодирования определена тем, что неоднородности рассеивателя в каждой точке пространства искажают амплитуду и фазу волнового фронта случайным образом в зависимости от оптических свойств материала рассеивателя. Вероятность того, что различные рассеиватели в каждой точке поверхности обладают одинаковыми оптическими свойствами, чрезвычайно мала.

Лит.: Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики. М., 1971; Строук Дж. Введение в когерентную оптику и голографию. Пер. с англ. М., 1967; Применение голографии. Пер. с англ. М., 1973. Ю. Г. Синюк.

**ГОМЕОСТАЗИС** (от греч. *ὁμος* — равный и *στάσις* — состояние) — поддержание постоянства существенных переменных организма (температуры, давления крови, ее состава и т. д.) для обеспечения оптимального режима внутренней среды. Понятие Г. было развито физиологами К. Бернаром и В. Кэнноном, широко рассматривалось И. М. Сеченовым и И. П. Павловым. Представления о Г. тесно связаны с понятиями об ультраустойчивости и адаптивности. Стремление организма удерживать существенные переменные в физиол. пределах связаны с процессами саморегуляции, которые направлены на ликвидацию последствий возмущения в тех или иных подсистемах организма. По общему мнению, акт саморегуляции происходит с помощью обратной связи. В наст. время изучаются не только гомеостатические системы, обеспечивающие постоянство обмена вещества и энергии, но и вводится понятие о нервно-психическом Г. как основе уравнивания организма со средой посредством нервной системы и базе создания оптим. условий для деятельности мозга. Г. высшего уровня имеет вероятностный характер и связан с поиском адекватности планов и структуры физиол. актов организма условиям внеш. среды; Г., связанный с внутр. системами или локальными участками нервной системы, носит детерминированный характер (см. *Биологические системы организации*).

К. А. Иванов-Муромский.

**ГОМЕОСТАТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА** — техническое устройство, моделирующее особое свойство живых организмов — *гомеостазис*, т. е. свойство организма удерживать свои характеристики в допустимых для его существования пределах (напр., поддержание положения тела, постоянство т-ры тела, стабилизация содержания кислорода в крови, а также сахара и гормонов и т. д.). Англ. нейрофизиолог У. Эшби (р. 1903) построил аналоговую модель много-связанных процессов управления, решающих задачу гомеостазиса, и назвал ее *гомеостатом*. Гомеостат Эшби состоит из четырех вращающихся магнитов, изменяющих сопротивления четырех жидкостных потенциометров. Напряжения, снимаемые с потенциометров, после усиления подаются через переключатели на катушки, притягивающие или отталкивающие вращающиеся магниты. При некоторых сочетаниях положений переключателей

полярности сигналов система устойчива, а при других — неустойчива, т. е. магниты отклоняются до упоров. В гомеостате есть устройства, случайно изменяющие положение переключателей полярности, пока не будет найдено такое из них, которое обеспечивает устойчивость, после чего поиск устойчивого состояния прекращается. Знаки и величины четырех коэффициентов пропорциональности можно изменять при помощи указанных реостатов и переключателей полярности напряжений. Кроме того, обмотка каждого магнита, реализующая *обратную связь*, питается от реостата, имеющего 25 положений. Всего возможно  $25^4 = 390\,625$  различных состояний гомеостата, часть из которых статически устойчива, а часть — неустойчива. Если система находится в одном из неустойчивых состояний, то магниты движутся к упорам, выходные напряжения увеличиваются и происходит очередное переключение состояния. Гомеостат переключается до тех пор, пока не найдет одно из устойчивых состояний, при котором магниты находятся вблизи среднего положения.

Система находит устойчивое состояние при действии самых различных возмущений, поступающих в систему (напр., при мех. соединении двух магнитов с помощью планки), или при изменении знака связи (переключении полярности одной из электр. связей системы). Такое целеустремленное поведение гомеостата (система не успокаивается, пока не достигнет устойчивости) Эшби назвал свойством ультраустойчивости. Для внеш. наблюдателя Г. с. всегда кажутся устойчивыми, т. к. неустойчивые состояния системы проскакивают почти мгновенно. В гомеостате Эшби были использованы четыре усилителя. Другие исследователи построили экспериментальные модели систем, состоящих из большого числа одинаковых усилителей, связанных между собой. Кроме того, проведено много работ по моделированию процессов в Г. с. на универсальных вычисл. машинах.

Отличительной особенностью гомеостата Эшби является то, что в нем нет запоминающих устройств (нет памяти). Если гомеостат нашел устойчивое состояние, то при изменении условий он «забывает» его и может вернуться к нему только случайно, в процессе нового поиска.

Рассмотрим некоторые общие закономерности работы Г. с. Пусть в системе имеется  $n$  регулирующих воздействий, каждое из которых имеет  $m$  возможных значений, тогда число возможных ходов равно  $N = nm$ ; продолжительность поиска  $T_{\Sigma} \leq nmT$ , где  $T$  — продолжительность одного включения. Допустим, что показатель экстремума (ф-ция выгоды) системы принимает достаточно хорошее значение в  $k$  режимах. Начальная вероятность попадания в один из этих режимов  $p_i = \frac{k}{nm}$ .

Энтропия (степень неорганизованности) системы

$$H_0 = - \sum_{i=1}^{i=nm} p_i \log p_i.$$



Для гомеостата Эшби ни вероятность принятия устойчивого состояния  $p_i$ , ни степень неорганизованности системы не изменяются. Но с помощью несложных усовершенствований Г. с. такого типа можно сделать способной к обучению, к улучшению процесса поиска устойчивых состояний. Необходимо только реализовать в системе отключение из поиска малоперспективных состояний или первоочередное опробование наиболее перспективных состояний.

Если применяется система отключений с опробованных и оказавшихся непригодными режимов, вероятность благоприятного исхода случайного поиска с каждым ходом возрастает:

$$p'_i = \frac{k}{nm - s}, \quad H' = \sum_{i=1}^{i=mn-s} p'_i \log p'_i > H_0,$$

где  $s$  — номер последнего хода. Следовательно, при обучении энтропия уменьшается. В Г. с. с первоочередным опробованием наиболее перспективных состояний спец. счетные реле или интеграторы регистрируют число и продолжительность существования каждого режима. При поиске оптим. режима сначала опробуются режимы, которые чаще всего встречались в данной системе. Целью этого усовершенствования является сокращение времени случайного поиска режима. Применение счетчиков (накопителей информации) — осн. способ улучшения методики поиска. Беспорядочный случайный поиск часто нерационален, т. к. он слишком продолжительный.

На принципе гомеостата Эшби были созданы различные устройства, в т. ч. специализированная вычисл. машина для определения оптим. значений параметров автопилотов и др. систем автомат. регулирования методом случайного поиска с отключением уже испытанных комбинаций. Машина находит оптимальную настройку за 20—30 мин поиска.

Лит.: Ч и ч и н а д з е В. К. О некоторых вопросах построения самонастраивающихся и самообучающихся систем автоматического управления, основанных на принципах случайного поиска. В кн.: Труды I Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 2. М., 1961; И в а х н е н к о А. Г. Самообучающиеся системы с положительными обратными связями. К., 1963 [библиогр. с. 320—323]; Э ш б и У. Р. Конструкция мозга. Пер. с англ. М., 1964 [библиогр. с. 404—407].

А. Г. Ивахненко.

**ГОМОРИ МЕТОД** — метод решения задачи линейного программирования целочисленного, сводящий ее решение к решению последовательности задач линейного программирования путем отсечения на каждом шаге оптимального нецелочисленного решения. Метод предложил амер. математик Р. Гомори.

Пусть задача целочисленного линейного программирования записана в виде:

$$x_0 \equiv \sum_{j=1}^n c_j x_j \Rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_j - \text{целое}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где все  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_j$  — заданные целые числа,  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) — переменные задачи и  $A^1 = (A_{s_1}, \dots, A_{s_m})$  — базис оптим. плана  $X^1$  задачи линейного программирования (1—3),  $A_{s_i} = (a_{1s_i}, \dots, a_{ms_i})^T$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $T$  — знак транспонирования. Умножив ур-ния (2) на  $(A^1)^{-1}$ , перепишем их в виде:

$$x_{s_i} + \sum_{j \in N} x_{s_{ij}} x_j = x_{s_{i0}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

или

$$x_{s_i} = x_{s_{i0}} - \sum_{j \in N} x_{s_{ij}} x_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5)$$

где  $N$  — множество индексов  $j$  векторов  $A_j$ , не принадлежащих базису; все  $x_{s_{ij}}$ ,  $x_{s_{i0}}$  — преобразованные значения соответствующих коэффициентов  $a_{s_{ij}}$ ,  $b_{s_i}$ . Подставляя ур-ние (5) в ф-лу (1), выразим линейную форму  $x_0$  через небазисные переменные  $x_j$  ( $j \in N$ ).

$$x_0 = x_{00} - \sum_{j \in N} x_{0j} x_j, \quad (6)$$

где  $x_{00}$  — значение линейной формы,  $x_{0j} \geq 0$  — оценки небазисных векторов (см. Симплекс-метод) на оптим. плане. Если все  $x_{i0}$ , соответствующие данному плану  $x^1$ , целые числа, то  $x^1$  — решение задачи (1—4). Если же некоторые из  $x_{i0}$  дробные, выберем одно из них, напр.,  $x_{l0}$  и, отправляясь от  $l$ -й строки системы (5), построим дополнительное ограничение, которому не удовлетворяет полученное нецелочисленное решение  $x_{s_i} = x_{s_{i0}}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $x_j = 0$ ,  $j \in N$ , но удовлетворяют все целочисленные планы (1—4). Обозначим через  $[x_{li}]$  наибольшее целое число, не превосходящее  $x_{li}$ , тогда  $\{x_{li}\} = x_{li} - [x_{li}] \geq 0$  — дробная часть  $x_{li}$ . Искомое ограничение записывается в виде:

$$\sum_{j \in N} \{x_{lj}\} x_j \geq \{x_{l0}\}. \quad (7)$$

План  $x^1$  ему не удовлетворяет, т. к. для него левая часть неравенства (7) равна нулю, а правая — дробная часть нецелой величины  $x_{l0}$  — больше нуля. В качестве  $l$  можно выбрать и 0, т. е. строить дополнительное ограничение по ур-нию (6). Действительно, целочисленность всех  $c_j$  гарантирует целочисленность  $x_0$  на всех целочисленных планах. Ограничение (7) переписывается в виде:

$$x_{n+1} = -\{x_{l0}\} + \sum_{j \in N} \{x_{lj}\} x_j, \quad x_{n+1} \geq 0 \quad (8)$$

и добавляется к условиям (2).

## Матрица

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

получаемая расширением  $A^1$  при добавлении к системе (2) строки (8) и переменной  $x_{n+1}$ , является псевдобазисом расширенной задачи. Для решения этой задачи пользуются *двойственным симплекс-методом*, начиная решение с псевдобазиса  $A$ . Процесс добавления новых ограничений продолжается до тех пор, пока на одном из шагов не будет получен оптим. целочисленный план или не выявится неразрешимость задачи. В первом случае полученный план является решением задачи (1—4), во втором — задача (1—4) не имеет целочисленных планов. Г. м. сходится к решению за конечное число шагов, если выполнено хотя бы одно из условий: существует решение задачи (1—4) или значение линейной формы (1) ограничено снизу. Если ограничения целочисленности (4) наложены лишь на часть переменных, описанное правило построения дополнительного ограничения (8) неприменимо. Однако известно видоизменение этого правила (разработанное также Р. Гомори) и для такой задачи. Г. м. обобщен на задачи выпуклого целочисленного программирования, дискретного программирования и в некоторых других направлениях. Лит. см. к ст. *Программирование целочисленное*. В. А. Трубин.

**ГОНОК ПРОБЛЕМА** — проблема устранения возможности неправильного функционирования схемы автомата, содержащего элементы памяти, в результате явления гонок. Явление гонок возникает, если по условиям срабатывания автомата одновременно должны изменять свое состояние несколько элементов памяти, при этом элемент, который изменит состояние раньше других (т. е. элемент, выигравший гонки), может изменить сигналы на входах элементов памяти, участвующих в гонках, что может привести к установке автомата в неправильное состояние.

Разработаны методы выявления гонок и их устранения, а также способы устранения опасностей гонок при их допущении. Актуальной является разработка оптим. методов (для различных условий и ограничений) противогоночного кодирования, вопросов автоматизации противогоночного кодирования и т. п. (см. *Элементный синтез ЦВМ*).

Лит.: Г л у ш к о в В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]; М и л л е р Р. Теория переключаемых схем. Пер. с англ., т. 2. М., 1971. Э. И. Комухаев.

**ГОРНЕРА СХЕМА** — одна из распространенных *вычислительных схем*. Г. с. применяют, напр., для нахождения коэфф. разложения многочлена  $f(x)$  по степеням  $x - a$  или для вычислений значений многочлена.

**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ФОНД АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ (ГФАП)** — часть Генерального справочно-информационного фонда СССР. Начали создавать его в нашей стране в 1966 для решения научно-тех. и эконом. задач. ГФАП состоит из материалов по матем. обеспечению ЭВМ ВЦ АН СССР, фондов гос. публичной

научно-тех. библиотеки СССР (ГПНТБ СССР) и Всесоюзного научно-тех. информационного центра (ВНТИЦ) Гос. комитета Совета Министров СССР по науке и технике, отраслевых, ведомственных фондов ведущих орг-ций, а также фондов орг-ций и предприятий, использующих ЭВМ. В УССР, БССР и в ряде др. союзных республик созданы респ. фонды алгоритмов и программ, являющиеся составной частью ГФАП.

В ГФАП включаются лишь полностью законченные и проверенные на практике различные элементы матем. обеспечения, которые, кроме того, оформлены согласно соответствующим методикам. Сюда включаются такие материалы: системы матем. обеспечения отдельных процессов, ЭВМ и их комплексов (напр., автоматизированные системы процесса обработки данных на ЭВМ методами *математической статистики и вероятностей теории*); *алгоритмы и программы* для решения науч., инженерно-тех. и планово-эконом. задач, а также инструкции по их применению и использованию; программы, входящие в системы матем. обеспечения конкретных типов ЭВМ; методические и инструктивные материалы по программированию, *алгоритмическим языкам и вычислительным работам методов организации*; *трансляторы с языков программирования* различного типа вместе с инструкциями по их применению и использованию; системы орг-ции *библиотек стандартных подпрограмм*; программы-тесты для проверки правильности работы отдельных устройств ЭВМ и диагностики неисправностей в них; информационные и справочно-библиографические материалы по алгоритмам и программам, входящим в системы матем. обеспечения ЭВМ.

Отраслевые и ведомственные фонды алгоритмов и программ создаются в ведущих организациях, определяемых министерствами и ведомствами. Они состоят из материалов, разработанных и используемых в орг-циях (предприятиях) министерства (ведомства).

Осн. задачи сети ГФАП: разработка методов апробации и оформления систем матем. обеспечения ЭВМ; улучшение орг-ции вычислительных работ, повышение эффективности использования ЭВМ в стране и снижение трудоемкости подготовки алгоритмов и стандартных программ для решения задач различных классов на ЭВМ; проведение консультативной работы по разработке и внедрению элементов матем. обеспечения ЭВМ; сбор, классификация, апробация, хранение и рассылка разработанных алгоритмов и стандартных программ заинтересованным орг-циям в стране; издание алгоритмов, программ, систем матем. обеспечения и инструктивно-методических материалов, имеющихся в б-ке фонда; организация обмена научно-тех. информацией по матем. обеспечению ЭВМ между ГФАП и орг-циями, использующими в своей деятельности вычислительную технику.

Для выполнения этих задач ГФАП поддерживает контакты со многими н.-и., проектными и учебными орг-циями, использующими

и разрабатывающими вычисл. технику. Ведущие орг-ции осуществляют методическое руководство работами по созданию и функционированию фондов орг-ций отрасли (ведомства). Они несут ответственность за представление в ГПНТБ СССР опубликованных в печатных изданиях орг-циями министерства (ведомства) соответствующих материалов по матем. обеспечению; за подготовку, апробацию, полноту и науч. достоверность, оформление и поступление неопубликованных материалов отрасли (ведомства) во ВНИИЦ; дают рекомендации на разработку, исследование и внедрение алгоритмов и программ, необходимых для отрасли; обеспечивают организацию просмотра отечественных и зарубежных печатных изданий по специальности, составляют информационные карточки на алгоритмы, программы и др. материалы по матем. обеспечению ЭВМ, опубликованные в этих изданиях. Филиалы ГФАП, как правило, оснащены тех. средствами, чтобы они могли обеспечить издание своих материалов и удовлетворять запросы потребителей.

И. В. Сергиенко.

**ГРАДИЕНТ** функции  $f(x) = f(x_1, \dots, \dots, x_n)$  в точке  $x \in E^n$  — вектор, координаты которого в пространстве  $E^n$  равны частным производным этой функции в точке  $x$ . Обозначения Г.:  $\text{grad } f(x)$ ,  $\nabla f(x)$ ,  $f'(x)$ . Г. определяет направление, для которого производная по направлению ф-ции  $f(x)$  максимальна. Это свойство определило широкое использование Г. в различных *оптимизации методов*.

Для функционала  $f(x)$ , определенного в линейном нормированном пространстве  $E$ , роль Г. играет сильная производная. Оператор  $f'(x)$ , действующий из  $E$  в  $E^*$ , наз. с и л б о й п р о и з в о д н о й (производной Фреше) функционала  $f(x)$  в точке  $x$ , если для произвольного элемента  $h \in E$  имеет место равенство

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(\|h\|).$$

Первое слагаемое в правой части равенства, аппроксимирующее  $f(x+h) - f(x)$  с точностью до величины порядка малости высшего, чем  $\|h\|$ , наз. д и ф ф е р е н ц и а л о м Ф р е ш е, или с и л ь н ы м д и ф ф е р е н ц и а л о м и обозначается  $df(x, h)$ . Слабым д и ф ф е р е н ц и а л о м (д и ф ф е р е н ц и а л о м Г а т о) функционала  $f(x)$  в точке  $x$  наз. выражение

$$\begin{aligned} Df(x, h) &= \frac{d}{dt} f(x+th) \Big|_{t=0} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}. \end{aligned}$$

Существование сильного дифференциала  $df(x, h)$  обеспечивает существование слабого дифференциала, причем  $Df(x, h) = df(x, h)$ , но не всегда наличие слабого дифференциала обеспечивает существование сильного дифференциала. Последнее имеет место, когда слабый дифференциал  $Df(x, h)$  существует, равномерно непрерывен по  $x$  в некотором шаре  $E$  и не-

прерывен по  $h$ . В этом случае существует и сильный дифференциал, и  $df(x, h) = Df(x, h)$ . Если слабый дифференциал  $Df(x, h)$  линеен относительно  $h$ , т. е.  $Df(x, h) = Lh$ , то  $L = f'(x)$  — оператор, действующий из  $E$  в  $E^*$ , — называют с л а б о й п р о и з в о д н о й (производной Гато) функционала  $f(x)$  в точке  $x$ .

Р. А. Поляк, М. Е. Примак.

**ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД** — метод минимизации функции многих переменных. Г. м. состоит в построении последовательности векторов  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , связанных между собой соотношением  $x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k)$ , где  $\nabla f(x_k)$  — градиент минимизируемой ф-ции  $f(x)$  в точке  $x$ . Числовой параметр выбирают из условия минимума по  $\lambda$  ф-ции  $f(x_k - \lambda \nabla f(x_k))$  по  $\lambda$ ,  $\lambda \geq 0$ . См. также *Оптимизации методы численные*.

**ГРАММАТИКА АВТОМАТНАЯ**, г р а м м а т и к а с к о н е ч н ы м ч и с л о м с о с т о я н и й — разновидность грамматики порождающей.

**ГРАММАТИКА БЕСКОНТЕКСТНАЯ**, г р а м м а т и к а к о н т е к с т н о - с в о б о д н а я — разновидность грамматики порождающей.

**ГРАММАТИКА ЗАВИСИМОСТЕЙ**, г р а м м а т и к а у п р а в л е н и й — разновидность грамматики порождающей.

**ГРАММАТИКА КАТЕГОРИАЛЬНАЯ** — разновидность грамматики формальной. Г. к. использует конструируемые спец. способом имена-категории для обозначения типов слов и словосочетаний описываемого языка. Сооставление категорий с синтаксическими типами, которые выделяют из смысловых соображений для конкретных естественных или искусственных языков, проводится следующим образом. Определенные типы, считающиеся элементарными (исходными), обозначаются символами (буквами), которые наз. э л е м е н т а р н ы м и к а т е г о р и я м и. Если имеется синтаксический тип, все словосочетания которого, будучи присоединенными слева к словосочетаниям типа, обозначенного  $L$ , дают словосочетания типа, обозначенного  $K$ , то первый из трех названных типов получает обозначение  $[K/L]$ . Аналогично, синтаксический тип, который, присоединяясь справа к  $L$ , дает  $K$ , получает обозначение  $[L \setminus K]$ .

Т. о. синтаксические типы обозначаются выражениями, образованными из элементарных категорий последовательным применением двух операций:  $[ \setminus ]$  и  $[ \setminus ]$ ; такие выражения наз. к а т е г о р и я м и. Т. о. само строение категории указывает синтаксическую роль соответствующего типа. В частности, для описания русского языка можно ввести элементарные категории Пр (предложение) и С (существительное или группа существительного). Непереходные глаголы или глагольные группы будут тогда обозначаться категорией  $[C \setminus \text{Пр}]$ , прилагательные —  $[C/C]$ , приглагольные наречия —  $[[C \setminus \text{Пр}]/[C \setminus \text{Пр}]]$ . Эти обозначения показывают, что глагол, будучи присоединен к С справа, образует Пр; прилагательное,

присоединяясь к  $S$  слева, —  $S$ ; наречие, присоединяясь к глаголу слева, — глагольную группу (пример намеренно упрощен; в действительности описание естественного языка несравненно сложнее).

Формально  $G. к.$  и описываемый ею язык задаются следующим образом.  $G. к.$  определяется как четверка компонент: 1) словарь (т. е. конечное множество) основных символов; 2) словарь элементарных категорий; 3) выделенная элементарная категория, называемая главной; 4) приписывающая функция, ставящая в соответствие каждому основному символу конечное число категорий, образованных из элементарных. Основные символы интерпретируются как слова языка; элементарные категории — как названия синтаксических типов слов и словосочетаний, принимаемых за исходные. Главная категория интерпретируется как символ предложения, приписывающая функция — как задание для каждого слова всех его синтаксических типов. Наличие у одного слова или словосочетания нескольких синтаксических типов соответствует синтаксической омонимии. Приписывающая функция ставит в соответствие каждой цепочке  $a_1 \dots a_n$  основных символов конечное множество цепочек категорий, состоящее из всевозможных цепочек вида  $K_1 \dots K_n$ , где  $K_i$  — одна из категорий, сопоставленных  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Непосредственным сокращением цепочки категорий наз. замена в ней соседней пары категорий, имеющей вид  $L[L \setminus K]$  или  $[K/L]L$ , категорией  $K$  (непосредственное сокращение категорий аналогично сокращению дробей, но с той разницей, что для категорий различаются левые и правые «знаки дроби» и соответственно сокращения). Цепочка категорий  $\varphi$  сокращается до цепочки категорий  $\psi$ , если имеется последовательность цепочек, начинающаяся цепочкой  $\varphi$  и кончающаяся цепочкой  $\psi$ . В этой последовательности каждая последующая цепочка получается непосредственным сокращением предыдущей. Цепочка основных символов наз. предложением, если хотя бы одна из сопоставленных ей цепочек категорий сокращается до главной категории. Множество предложений наз. языком, допускаемым (или описываемым) данной  $G. к.$  Напр., при задании фрагмента русского языка с помощью  $G. к.$ , описанным выше способом, цепочке слов «старый человек спит» сопоставляется цепочка категорий  $[C/C] S [C \setminus \text{Пр}]$ ; она непосредственно сокращается до цепочки  $S [C \setminus \text{Пр}]$ , а та — до главной категории  $\text{Пр}$ ; поэтому указанная цепочка слов является предложением.

Приведенная система понятий представляет собой задание  $G. к.$  как разновидности *грамматики распознающей*. Алгоритм, позволяющий распознавать, является ли произвольная цепочка основных символов предложением языка, допускаемого данной  $G. к.$ , состоит в том, чтобы выписать все цепочки категорий, отвечающие данной цепочке, и каждую из них пол-

ностью сократить всеми возможными способами. Нетрудно ввести эквивалентную систему понятий, описывающую процесс построения предложения путем развертывания цепочек категорий; тогда  $G. к.$  окажется заданной как разновидность *грамматики порождающей*.

Класс языков, допускаемых  $G. к.$ , совпадает с классом языков, порождаемых грамматиками бесконтекстными. Понятие « $G. к.$ » было введено в 50-х годах 20 ст. для построения алгоритма синтаксического анализа естественных языков. Однако аппарат  $G. к.$  мало пригоден для практического моделирования естественных языков и теперь используется почти исключительно в теоретических исследованиях.

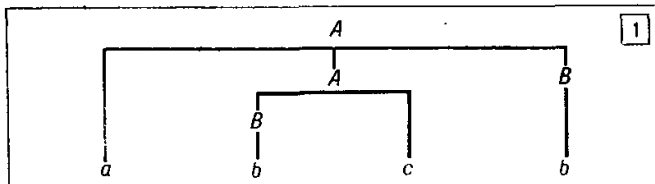
**ГРАММАТИКА ЛИНЕЙНАЯ** — бесконтекстная грамматика, в каждом правиле которой правая часть содержит не более одного вхождения вспомогательного символа. Частным случаем  $G. л.$  является автоматная грамматика. См. *Грамматика порождающая*.

**ГРАММАТИКА ПОРОЖДАЮЩАЯ** — система правил, позволяющая строить конечные последовательности символов; является разновидностью *грамматики формальной*. Понятие  $G. п.$ , используемое в математической лингвистике, по существу является частным случаем понятия *исчисления*, используемого в математической логике. Термин « $G. п.$ » используют обычно как название определенного класса исчислений (называемых также грамматиками Хомского). Каждое исчисление этого класса задается следующими четырьмя компонентами: 1) словарем (конечным множеством) основных, или терминальных символов; 2) словарем вспомогательных, или нетерминальных символов; 3) выделенным вспомогательным символом, называемым начальным; 4) набором правил вывода, или синтаксических правил, каждое из которых имеет вид  $\varphi \rightarrow \psi$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  — цепочки, состоящие из основных и вспомогательных символов. Основные символы интерпретируются как слова языка, вспомогательные — как названия классов слов и словосочетаний, начальный символ — как символ предложения. Синтаксические правила описывают связи между частями предложения. Применение правила  $\varphi \rightarrow \psi$  к цепочке, имеющей вид  $\alpha\varphi\beta$ , означает преобразование ее в цепочку  $\alpha\psi\beta$  (здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — цепочки, одна из которых или даже обе могут быть и пустыми). Вывод в данной  $G. п.$  есть последовательность цепочек, в которой любая цепочка, кроме первой, получается из предыдущей применением к.-л. правила вывода. Цепочка основных символов, выводимая из начального символа, наз. предложением, а множество всех предложений — языком, порождаемым данной грамматикой. Так, в  $G. п.$  с основным словарем  $\{a, b, c\}$ , вспомогательным  $\{A, B\}$ , начальным символом  $A$  и набором правил  $\{A \rightarrow aAB, A \rightarrow Bc, B \rightarrow b\}$ , одним из выводов будет последовательность  $A, aAB, aBcB, abcB, abcb$ . Цепочка  $abcb$  — предложение.

Осн. классы Г. п. выделяются в зависимости от ограничений, налагаемых на вид синтаксических правил. В грамматике составляющих (иначе — непосредственно составляющих) синтаксические правила имеют вид  $\chi A \omega \rightarrow \chi \psi \omega$ ; в бесконтекстной, или контекстно-свободной грамматике:  $A \rightarrow \psi$ ; в автоматной грамматике (или грамматике с конечным числом состояний):  $A \rightarrow aB$  или  $A \rightarrow a$ . Здесь  $a$  обозначает основной символ,  $A$  и  $B$  — вспомогательные,  $\chi$ ,  $\omega$  и  $\psi$  — цепочки основных и вспомогательных символов, причем  $\psi$  не пуста. Очевидно, что в указанной последовательности классов Г. п. каждый класс является частью предыдущего. Языки, порождаемые Г. п. перечисленных классов, наз. соответственно языками непосредственно составляющих, бесконтекстными и автоматными. В грамматиках составляющих на каждом шаге вывода заменяется только один символ, поэтому в них с каждым выводом предложения ассоциируется т. н. дерево вывода, строящееся следующим образом. Корень дерева соответствует начальному символу. Каждому символу цепочки, на которую заменяется начальный символ на первом шаге вывода, ставится в соответствие узел дерева и к нему проводится ветвь от корня. Для тех из полученных узлов, которые помечены вспомогательными символами, строится аналогичная конструкция и т. д.

Каждое дерево вывода, рассматриваемое как дерево составляющих предложения, задает на нем систему составляющих (для приведенного выше примера дерево вывода указано на рис. 1; соответствующая система составляющих состоит из цепочек  $abcb$ ,  $bc$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $b$ ). Эта особенность грамматик составляющих делает их важным инструментом для описания естественных и искусственных языков. Именно грамматика составляющих и их частные случаи являются одним из осн. объектов изучения математич. лингвистики.

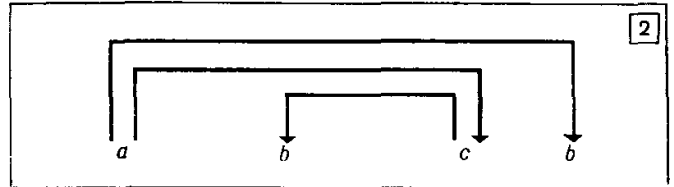
Для одного частного случая бесконтекстных грамматик — грамматик зависимостей, или управлений, каждому предложению порождаемого языка (точнее — каждому выводу предложения) может быть сопоставлено с некоторым отношением управления. Грамматикой зависимостей наз. грамматика, все правила которой имеют вид  $A \rightarrow B_1 \dots B_m a B_{m+1} \dots B_n$ , где



$0 \leq m \leq n$ ,  $a$  — основной,  $A, B_1, \dots, B_n$  — вспомогательные символы. Если при построении некоторого предложения используется правило указанного вида, то в дереве вывода от узла, помеченного символом  $A$ , идут ветви к узлам, помеченным символами  $B_1, \dots, B_m, a, B_{m+1}, \dots, B_n$ ; символ  $a$  наз. главным в со-

ставляющей  $A$  (т. е. составляющей, соответствующей узлу с пометкой  $A$ ), и по определению считается, что он управляет главными символами составляющих  $B_1, \dots, B_n$ . Грамматика нашего примера — грамматика зависимостей, и указанный вывод задает отношение управления (рис. 2). Имеются также разновидности Г. п., в которых для порождаемых предложений задаются как системы составляющих, так и отношения управления.

Эквивалентность Г. п. Две Г. п. наз. слабо эквивалентными, если они порож-



дают один и тот же язык; сильно эквивалентными, если, кроме того, для любого предложения порождаемого языка описания структуры, даваемые этими грамматиками, совпадают. Различают по крайней мере три типа сильной эквивалентности: одинаковость описания системы составляющих, описания отношения управления или одновременного описания составляющих и управления.

Основы теории Г. п. были разработаны в 1950—60-х гг. (в основном в трудах амер. лингвиста Н. Хомского) как формальный аппарат для описания естественных и искусственных языков в связи с внутренними потребностями лингвистики и с решением языковых задач на ЭВМ.

Среди направлений математического исследования Г. п. выделяют два: сравнение различных классов Г. п. и исследование разрешимости алгоритмических проблем. Среди перечисленных классов языков (языки, порождаемые Г. п. общего вида; языки непосредственно составляющих; бесконтекстные; автоматные) каждый последующий существенно шире, чем предыдущий. Классы языков, порождаемых грамматиками зависимостей и категориальными, совпадают с классом бесконтекстных языков. Класс бесконтекстных грамматик обладает большими возможностями для построения описаний структуры (для бесконтекстной грамматики может не существовать сильно эквивалентной ей грамматики зависимостей или категориальной).

Один из наиболее важных классов алгоритмических проблем для Г. п. — проблемы распознавания свойств языков, т. е. необходимо найти алгоритм, позволяющий по любой грамматике заданного (фиксированного для данной проблемы) класса  $K$  узнать, обладает ли порождаемый этой грамматикой язык некоторым определенным свойством. Если такой алгоритм существует, то говорят, что свойство распознаваемо в классе  $K$ ; если не существует — то оно нераспознаваемо. Наиболее важными свойствами языков, исследовавшимися на распознаваемость, являются: пустота

(свойство быть пустым множеством); полнота (свойство совпадать с множеством всевозможных цепочек основных символов); существенная неопределенность (свойство, состоящее в том, что любая грамматика из класса  $K$ , порождающая данный язык, сопоставляет с некоторой его цепочкой больше одного структурного описания).

Сводка результатов перечисленных проблем дается в следующей таблице ( $P$  — распознаваемость соответствующего свойства в данном классе грамматик,  $H$  — нераспознаваемость).

Проблемы	Классы порождающей грамматики			
	Все порождающие грамматики	Грамматик		
		составляющих	бесконечные	автоматные
Пустота	$H$	$H$	$P$	$P$
Полнота	$H$	$H$	$H$	$P$
Существенная неопределенность	$H$	$H$	$H$	$P$

Кроме перечисленных направлений матем. исследований Г. п., можно указать следующие вопросы: распознавание порождаемых языков с помощью автоматов с магазинной памятью; изучение сложности вывода в Г. п.; поиск классов Г. п., занимающих по «порождающей силе» промежуточные места в описанной иерархии Г. п.; связь Г. п. с грамматиками распознающими; управление выводами в Г. п. и пр. (см. также *Лингвистика математическая*).

Практическое применение аппарат Г. п. находит гл. образом при создании языков искусственных и в работах по машинному переводу. Большинство из создаваемых в настоящее время искусственных языков задается именно с помощью Г. п., причем чаще всего — бесконтекстных грамматик. Так, стандартные описания АЛГОЛ-60 и др. языков программирования по существу являются Г. п. Использование Г. п. в автоматическом машинном переводе было вызвано большими трудностями синтаксического анализа предложения. Алгоритм синтаксического анализа для языка, порождаемого Г. п., часто оказывается простым и легко обозримым. Большинство групп, работающих над автоматическим переводом и смежными проблемами, в той или иной мере используют моделирование естественного языка с помощью Г. п. В работах, ведущихся в СССР, используются Г. п., близкие к грамматикам зависимостей; в США — близкие к грамматикам составляющих. См. также *Инвек гипотеза*. Лит.: Гладкий А. В., Мельчук И. А. Элементы математической лингвистики. М., 1969 [библиогр. с. 188—192]; Хомский Н. Формальные свойства грамматик. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, в. 2. М., 1966; Фиталов С. Я. Об эквивалентности грамматик НС и грамматик зависимостей. В кн.: Проблемы структурной лингвистики.

1967. М., 1968; Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки. М., 1973 [библиогр. с. 349—356]; Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков. Пер. с англ. М., 1970 [библиогр. с. 310—319].

**ГРАММАТИКА РАСПОЗНАЮЩАЯ** — система правил, определяющая по любой цепочке (последовательности символов), входит ли она в фиксированное множество цепочек (язык). См. *Грамматика формальная*, *Грамматика порождающая*.

**ГРАММАТИКА СОСТАВЛЯЮЩИХ**, грамматика непосредственно составляющих — разновидность грамматики порождающей.

**ГРАММАТИКА ТРАНСФОРМАЦИОННАЯ** — система правил, позволяющая строить предложения естественного языка из относительно небольшого числа простейших, или ядерных предложений с помощью спец. преобразований, или трансформаций (см. *Языка модели математические*). Исследование Г. т. ведется гл. образом на уровне неформализованных соображений и рассуждений от примеров. Г. т. пока что нельзя рассматривать и как разновидность формальных грамматик, поскольку еще не существует ее удовлетворительного общего математического определения. Понятие Г. т. введено с целью обобщения и формализации принятого в англ.-амер. лингвистике метода трансформационного анализа предложения. Аппарат Г. т. применяется для некоторых исследований по автоматической обработке текста. Г. т. можно рассматривать как один из уровней грамматики порождающей.

Во избежание трудностей на пути применения метода непосредственных составляющих Н. Хомский предложил дополнить этот метод рядом трансформационных правил, образующих трансформационный уровень грамматики. Эти правила снимают ограничения с метода непосредственных составляющих, напр., дают возможность переставлять символы в цепочках, делать одновременно перекодирование нескольких символов (а правилами непосредственных составляющих это воспрещается) и т. д.

Каждый язык, если исходить из правил Г. т. может быть представлен набором ядерных предложений и набором трансформаций, которым подвергают эти ядерные предложения, чтобы создавать разнообразные типы предложений данного языка. Анализ предложения «Большое дерево сбрасывает листья» с применением символов Пр, Сущ, Г (Пр — прилагательное, Сущ — существительное, Г — глагол) по схеме непосредственных составляющих

Большое      дерево      сбрасывает      листья  
Пр      Сущ      Г      Сущ  
Дерево      сбрасывает  
Сущ      Г

сводится к конструкции Сущ Г («дерево сбрасывает»), которая является конечной конструкцией, или ядерным предложением. Приме-



няя различные трансформации к ядерному предложению, можно получить различные предложения. Однако на трансформационном уровне в большинстве случаев (особенно, для флективных языков, которыми являются русский и украинский) получаем не конкретные слова синтезированного предложения, а определенные единицы с индексами, напр., «идти<sub>пр</sub>», «сбрасывать<sub>пр</sub>», что означает сказуемые «идти», «сбрасывать» в прошедшем времени. Для того, чтобы образование предложений происходило полностью автоматически, возникла потребность ввести третий уровень — морфофонемный (на этом уровне происходит преобразование указанных выше единиц с индексами в реальные слова синтезированных предложений, напр., «идти<sub>пр</sub>» преобразуется на «шел» и т. д.).

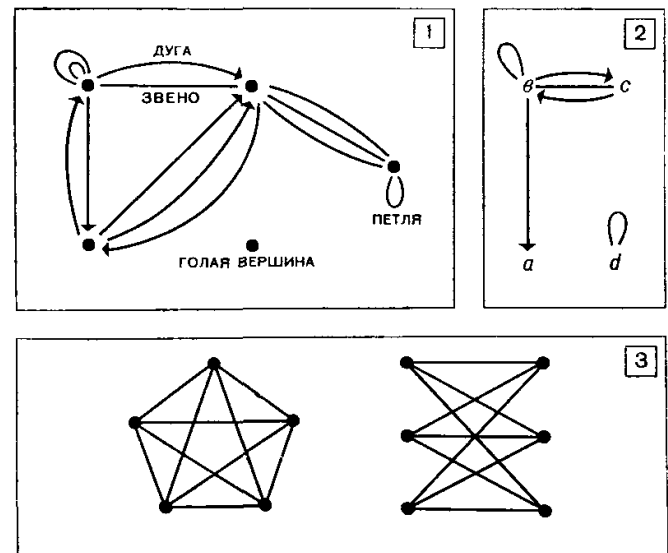
Лит.: Хомский Н. Синтаксические структуры. В кн.: Новое в лингвистике, в. 2. М., 1962; Хомский Н. Лингвистика, логика, психология и вычислительные устройства. В кн.: Математическая лингвистика. М., 1964; Хомский Н., Миллер Дж. Введение в формальный анализ естественных языков. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, в. 1. М., 1965.

**ГРАММАТИКА ФОРМАЛЬНАЯ** — система правил, описывающая множество конечных последовательностей символов. Конечные последовательности (цепочки), входящие в указанное множество, наз. предложениями, а само множество — языком, описываемым данной Г. ф. Различают два типа Г. ф.: *грамматики порождающие* — системы правил, позволяющие строить предложения языка, и *грамматики распознающие* — алгоритмы, распознающие по любой цепочке, является ли она предложением. Это деление в значительной степени условно, т. к. любая распознающая грамматика по существу задает способ построения всех предложений. Кроме того, для наиболее существенных классов порождающих грамматик (в частности, для грамматик составляющих, бесконтактных и автоматных) существуют алгоритмы, позволяющие по любой цепочке символов определить, является ли она предложением. Различают, кроме того, такие классы Г. ф. (напр., *грамматики категориальные*), которые в одинаковой мере можно рассматривать как порождающие и как распознающие. Г. ф. применяют чаще всего для описания естественных и искусственных языков в *лингвистике математической*. Теперь порождающие грамматики применяют больше, чем распознающие.

**ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА** — то же, что и *краевая задача*.

**ГРАФ** — система объектов произвольной природы (вершин) и связей (ребер), соединяющих некоторые пары этих объектов. Ребра могут быть ориентированными или неориентированными, одна и та же пара вершин может соединяться любым количеством ребер, вершина может быть соединена сама с собой (рис. 1). Строгое определение Г. (по А. А. Зыкову) следующее: Г.  $L = (X, U; P)$  задан, если даны мн-во  $X \neq \emptyset$  (вершин), мн-во  $U$  (ребер) и инцидентор — трехместный предикат

$P$ , причем  $P(x, u, y)$  означает высказывание: «ребро  $u$  соединяет вершину  $x$  с вершиной  $y$ » и удовлетворяет двум условиям: а)  $P$  определен на всех таких упорядоченных тройках элементов  $x, u, y$ , для которых  $x, y \in X$  и  $u \in U$ ; б)  $\forall u \in U \exists x, y \in X \{P(x, u, y) \& \forall x', y' \in X [P(x', u, y') \Rightarrow (x = x' \& y = y') \vee (x = y' \& y = x')]\}$ , т. е. каждое ребро соединяет какую-то пару (упорядоченную) вершин  $x, y$ , но кроме нее может соединять еще только обратную пару  $y, x$ . Ребро, соединяющее  $x$  с  $y$ , но не  $y$  с  $x$ , наз. дугой (исходя-



щей из  $x$  и заходящей в  $y$ ); ребро, соединяющее  $x$  с  $x$ , наз. петлей (при вершине  $x$ ); ребро, соединяющее как  $x$  с  $y$ , так и  $y$  с  $x$  ( $x \neq y$ ), наз. звеном (между  $x$  и  $y$ ). Деориентация дуги  $u_0$ , идущей из  $x_0$  в  $y_0$ , т. е. превращение этой дуги в звено, означает переход от Г.  $L = (X, U; P)$  к Г.  $L' = (X, U; P')$  с теми же  $X, U$  и новым предикатом, отличающимся от прежнего лишь тем, что оба высказывания  $P'(x_0, u_0, y_0)$  и  $P'(y_0, u_0, x_0)$  истинны, тогда как из двух высказываний  $P(x_0, u_0, y_0)$  и  $P(y_0, u_0, x_0)$  истинно только первое; деориентация всех дуг превращает  $L$  в Г.  $\tilde{L} = (X, U; \tilde{P})$ , где предикат  $\tilde{P}(x, u, y)$  — дизъюнкция  $P(x, u, y) \vee P(y, u, x)$ .

Другое определение Г. (по К. Бержу): Г. есть пара  $G = (X, U)$ , образованная мн-вом  $X$  (вершин) и семейством  $U$  (дуг), состоящим из упорядоченных пар вершин, причем одна и та же пара может фигурировать в  $U$  любое число раз. Все ребра (в том числе петли) есть дуги, т. е. «ориентированы», однако если в конкретном случае не важно, идет ли дуга  $u_0$  из  $x_0$  в  $y_0$  или из  $y_0$  в  $x_0$ , эту дугу рассматривают как «неориентированную» и рисуют без стрелки (либо с двумя противоположными стрелками); при таком представлении Г., в котором  $k$  дуг — «неориентированный», фактически представляет собой класс из  $2^k$  различных Г. В дальнейшем при изложении *теории графов* будем придерживаться определений и обозначений А. А. Зыкова.

Г.  $L' = (X', U'; P')$  наз. частью (по К. Бержу) — частичным подграфом) Г.  $L = (X, U; P)$ , если  $\emptyset \neq X' \subseteq X$ ,  $U' \subseteq U$  и на подмн-вах  $X'$ ,  $U'$  предикат  $P'$  совпадает с  $P$ . Часть  $L'$  есть подграф Г.  $L$ , если всякое ребро из  $U$ , соединяющее вершины мн-ва  $X'$ , принадлежит  $U'$ . Часть  $L'$  есть суграф (по К. Бержу — частичный Г.) Г.  $L$ , если  $X' = X$ . Два Г.  $L_1 = (X_1, U_1; P_1)$  и  $L_2 = (X_2, U_2; P_2)$  изоморфны, если можно установить взаимно однозначное соответствие  $X_1 \leftrightarrow X_2$ ,  $U_1 \leftrightarrow U_2$  так, чтобы для соответствующих вершин и ребер высказывания  $P_1(x_1, u_1, y_1)$  и  $P_2(x_2, u_2, y_2)$  были равносильны. Для каждого абстрактного (т. е. без указания конкретной природы вершин и ребер) Г.  $L = (X, U; P)$ , в котором мн-ва  $X$  и  $U$  не более чем счетны, заведомо можно построить его топологическое представление — изоморфный Г.  $L_s$ , вершинами которого служат некоторые точки евклидова трехмерного пространства, а ребрами — соединяющие их простые жордановы дуги (с указанием или без указания направления), не имеющие друг с другом общих точек, отличных от вершин. Г.  $L$  наз. плоским, если он допускает такое топологическое представление, все вершины и дуги которого расположены в одной плоскости (или на одной сфере, а это равносильно, поскольку стереографическим проектированием всегда можно перевести плоское представление в сферическое и наоборот). Г. без дуг (т. е. «неориентированный»), без петель и кратных ребер наз. обыкновенным; его можно задавать парой  $(X, U)$ , где  $U$  — некоторое мн-во (не семейство!) неупорядоченных пар различных вершин из  $X$ . Г. без звеньев («ориентированный»), без кратных петель и кратных дуг одного направления наз. Бержа графом  $(X, U)$ , где  $U$  — некоторое мн-во упорядоченных пар вершин; такой Г. записывают также в виде  $(X, \Gamma)$ , где  $\Gamma$  — отображение, которое каждому  $x \in X$  относит подмн-во  $\Gamma x \subseteq X$  тех вершин, в которые из  $x$  идет дуга или петля. Напр., для Г. Бержа на рис. 2 имеем  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $\Gamma_a = \emptyset$ ,  $\Gamma_b = \{a, b, c\}$ ,  $\Gamma_c = \{b\}$ ,  $\Gamma_d = \{d\}$ . Г. наз. двудольным (или бихроматическим), если мн-во  $X$  его вершин можно разбить на два подмн-ва:  $X = X_1 \cup X_2$ ,  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$  так, чтобы никакое ребро не соединяло вершин одного и того же подмн-ва; в частности, двудольный обыкновенный Г. наз. графом Кёнига и при заданном разбиении мн-ва вершин его записывают в виде  $(X_1, X_2; U)$ . Г. заданного типа наз. полным, если он содержит все возможные для этого типа ребра (при неизменном мн-ве вершин). Так, в полном обыкновенном Г. каждая пара различных вершин соединена ровно одним звеном; в полном Г. Бержа из каждой вершины в каждую другую идет одна дуга и при каждой вершине имеется одна петля; полный Г. Кёнига состоит из двух мн-в вершин и из всевозможных звеньев, соединяющих вершины одного мн-ва с вершинами другого (по одному звену для каждой такой пары вершин). На рис. 3

показаны полный обыкновенный пятивершинный Г. и полный Г. Кёнига с двумя трехвершинными мн-вами («три дома и три колодца»); оба они — неплоские. Г. без ребер ( $U = \emptyset$ ) наз. пустым. С понятием Г. связана целая система конкретных проблем и методов преимущественно практических или вызванных теор. проблемами из др. областей математики. Лит.: Зыков А. А. Теория конечных графов, т. 1. Новосибирск, 1969 [библиогр. с. 515—542]; König D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936; Берж К. Теория графов и ее применения. Пер. с франц. М., 1962 [библиогр. с. 293—302]; Оре О. Теория графов. Пер. с англ. М., 1968 [библиогр. с. 325—338]; Berge C. Graphes et hypergraphes. Paris, 1971; Харари Ф. Теория графов. Пер. с англ. М., 1973 [библиогр. с. 269—286]. А. А. Зыков.

**ГРАФ ВЗВЕШЕННЫЙ** — граф, в котором каждой дуге  $u$  поставлено в соответствие некоторое число  $c(u)$ , называемое ее весом. Вес дуги может иметь различные физ. или экономич. интерпретации: длина дуги, стоимость или время перемещения по ней, пропускная способность — в экономич. приложениях, вероятность безотказной работы — в теории надежности, напряжение или ток — в электр. цепях, передача звена — в системах автоматического управления. В различных приложениях  $c(u)$  может принимать положительные и отрицательные, целые и дробные значения. К наиболее известным задачам на Г. в. относятся задача о кратчайшем пути, о максимальном потоке, о кратчайшей связывающей сети, задача о коммивояжере и другие. В некоторых приложениях рассматриваются графы с несколькими весами каждой дуги. Так, напр., в сетевой транспортной задаче каждой дуге может соответствовать два веса — длина дуги и ее пропускная способность.

Лит. см. к ст. Графов теория. В. А. Трубин.

**ГРАФ РАСКРАШЕННЫЙ** — неориентированный граф без петель, множество вершин (или ребер) которого разбито на  $k$  непересекающихся групп так, что каждая вершина (ребро) принадлежит точно одной группе и смежные вершины (ребра) принадлежат разным группам. Минимальное число таких групп вершин (ребер) наз. хроматическим числом (классом) графа. Если каждой группе поставить в соответствие свой цвет, то в Г. р. смежные элементы будут окрашены различными цветами, т. е. их легко различить. Задачи, связанные с раскраской графов, кроме теоретического, имеют большое практическое значение. Они возникают при монтаже и проверке сложных электрических схем, составлении графиков турниров, в социологии и т. п.

Лит. см. к ст. Графов теория. В. А. Трубин.

**ГРАФИЧЕСКОЕ РЕГИСТРИРУЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО** — см. Устройства отображения информации.

**ГРАФОВ СВЯЗНОСТЬ** — одно из основных свойств графов, выражающееся в следующем. На мн-ве вершин графа  $L$  отношение «вершины  $x$  и  $y$  соединены хотя бы одной цепью» есть эквивалентность; классы этой эквивалентности порождают подграфы, называемые компонентами (связности) графа  $L$ . Если  $k$ -во компонент

$k(L) \neq 1$ , то граф  $L$  наз. связным. В теории фундаментальную роль играет теорема Менгера: для существования в графе  $L$  системы из  $k$  цепей ( $k \geq 1$ ), соединяющих две заданные вершины  $x$  и  $y$  и попарно не имеющих других общих элементов, необходимо и достаточно, чтобы никакое удаление  $k$  (или менее) элементов, представляющих собой отличные от  $x$  и  $y$  вершины или соединяющие  $x$  с  $y$  ребра, не превращало  $L$  в такой граф, где  $x$  и  $y$  принадлежат разным компонентам. «Реберный» вариант этой теоремы (теорема Коцига) отличается тем, что удаляемыми  $k$  элементами служат только ребра, а  $k$  цепей, соединяющих  $x$  с  $y$ , не должны иметь общих ребер (но могут иметь общие вершины, отличные от  $x$  и  $y$ ). Граф  $L$  наз.  $k$ -связным вершинно (соответственно реберно), если любые две его вершины  $x, y$  соединены по крайней мере  $k$  цепями попарно без общих элементов, кроме  $x$  и  $y$  (соответственно попарно без общих ребер). Максимальный 2-связный (вершинно) подграф графа  $L$  наз. его блоком, а вершина, принадлежащая более чем одному блоку, — точкой сочленения; последняя характеризуется тем, что ее удаление приводит к увеличению  $k$ -ва компонент графа.

Учитывая ориентацию ребер, получают понятие достижимости. Так, в Бержа графе  $L = (X, \Gamma)$  вершина  $y$  достижима из  $x$ , если существует ориентированная цепь с началом  $x$  и концом  $y$ . Граф, в котором всякие две вершины достижимы друг из друга, наз. бисвязным (или сильно связным). Бикомпоненты графа — это его макс. бисвязные подграфы, база вершин — такое подмн-во  $Z \subseteq X$ , что никакие две различные вершины из  $Z$  не достижимы друг из друга, а всякая вершина  $x \in X \setminus Z$  достижима хотя бы из одной вершины, входящей в  $Z$ . Проблема полного обзора без вершин графа решается так: выявляют все те бикомпоненты, в которые не заходит извне ни одна дуга, тогда всевозможными базами вершин служат мн-ва, получаемые выбором по одной вершине из всех выявленных бикомпонент. Проблема обзора и нахождения баз дуг — таких миним. суграфов, которые обеспечивают ту же достижимость вершин, что и в исходном графе, — гораздо сложнее, но и она в некотором смысле решена.

Лит.: Зыков А. Теория конечных графов, т. 1. Новосибирск, 1969 [библиогр. с. 515—542].

А. А. Зыков.

**ГРАФОВ ТЕОРИЯ** — раздел математики, изучающий графы и те их обобщения (транспортные сети, гиперграфы и др.), на которые распространяются некоторые из основных понятий и методов, относящихся к графам.

До возникновения общей теории графы встречались под разными названиями в матем. задачах развлекательного характера, в теории электр. цепей, в химии, физике, биологии, социологии, а также в некоторых разделах математики, в первую очередь алгебре и топологии. Т. к. существует широкий круг объектов и явлений реального мира, которые могут быть истолкованы в терминах Г. т., возникновение общей теории абстрактных графов представля-

ется естественным. Интенсивное развитие Г. т. обусловлено в основном запросами практики; важную роль сыграли в становлении Г. т. многочисленные исследования, связанные с проблемой четырех красок, а также идея метода чередующихся цепей.

Одной из первых работ, относящихся к Г. т., является работа Л. Эйлера (1736), однако основоположником Г. т. считают венгерского математика Д. Кёнига, автора первой монографии (1936), в которой графы рассматриваются как абстрактные матем. объекты и где заложены основы общей Г. т. Наибольший вклад в дальнейшее развитие Г. т. внесли венгерские, амер., канадские, нем., франц., чехословацкие и др. математики, а также советские, из которых можно отметить Л. М. Лихтенбаума (1900—1968), А. А. Зыкова (р. 1922) и В. Г. Визинга (р. 1937).

Основываясь на систематизации и обобщении ряда идей и приемов комбинаторно-логич. характера, относящихся в значительной мере к поискам оптим. решений различных дискретных задач, Г. т. вместе с комбинаторным анализом представляет интенсивно развивающийся специфический раздел совр. математики, тесно соприкасающийся с такими ее разделами, как алгебра, топология, теория чисел, вероятностей теория, логика математическая, программирование математическое и др.

В соответствии с наиболее общим определением графа  $L = (X, U; P)$  для задания графа достаточно знать мн-во его вершин  $X = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ , мн-во ребер  $U = \{u_\beta \mid \beta \in J\}$  и мн-во тех упорядоченных троек  $x_\alpha u_\beta x_{\alpha'}$  ( $\alpha, \alpha' \in I, \beta \in J$ ), на которых истинно высказывание  $P(x_\alpha, u_\beta, x_{\alpha'})$ . В случае обыкновенных графов или Бержа графов достаточно знать мн-во  $X$  и мн-во тех неупорядоченных (соотв. упорядоченных) пар  $x_\alpha x_{\alpha'}$ , для которых истинно  $\exists u \in UP(x_\alpha, u, x_{\alpha'})$ . Граф, у которого оба мн-ва  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  и  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  конечны (конечный граф) и  $U \neq \emptyset$ , можно задать матрицей инцидентий  $(a_{ij})$ , строки которой отвечают вершинам графа ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), столбцы — ребрам ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), а элемент  $a_{ij}$  несет информацию о типе ребра  $u_j$  (дуга, петля или звено) и об отношении этого ребра к вершине  $x_i$  (исходящая дуга, заходящая дуга, инцидентная петля, инцидентное звено или неинцидентное ребро). Для задания графа часто пользуются квадратной матрицей смежности  $(r_{ij})$ , у которой как строки, так и столбцы отвечают вершинам графа ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), а элемент  $r_{ij}$  несет информацию о  $k$ -вах ребер каждого типа, соединяющих вершины  $x_i$  и  $x_j$ ; в случае обыкновенного графа  $L = (X, U)$  достаточно положить  $r_{ij} = 1$  при  $x_i x_j \in U$  и  $r_{ij} = 0$  при  $x_i x_j \notin U$ , а в случае графа Бержа  $L = (X, \Gamma)$  положить  $r_{ij} = 1$  при  $x_j \in \Gamma x_i$  и  $r_{ij} = 0$  при  $x_j \notin \Gamma x_i$ . Для графов общего вида в качестве  $r_{ij}$  исполь-

зуют более сложные элементы (или довольствуются неполной информацией о графе). Др. способы задания графов менее употребительны, а визуальное задание (чертежом) практически эффективно лишь при очень малом к-ве ребер (или в некоторых сугубо спец. случаях).

Установить тождественность двух конечных графов  $L = (X, U; P)$  и  $L' = (X', U'; P')$  с одними и теми же мн-вами  $X$  и  $U$  нетрудно при любом из перечисленных способов задания. Напротив, проблема изоморфизма (задача выяснения того, существует ли взаимно однозначное соответствие мн-в  $X$  и  $X'$  вершин обыкновенных графов  $L(X, U)$  и  $L'(X', U')$ , при которой каждому ребру графа  $L$  соответствует ребро графа  $L'$  и наоборот) даже в случае обыкновенных графов проста лишь чисто теоретически. Напр., для выяснения изоморфности двух обыкновенных графов  $L = (X, U)$  и  $L' = (X', U')$  в случае  $|X| = |X'| = n$  и  $|U| = |U'|$  требуется, вообще говоря,  $n!$  сравнений матрицы смежности одного из них со всеми матрицами смежности второго, получаемыми друг от друга всевозможными перестановками рядов (одновременными одинаковыми перестановками строк и столбцов). Еще труднее проблема изоморфного вхождения, когда для двух графов  $L$  и  $L'$  необходимо установить, изоморфен ли  $L'$  к-л. части графа  $L$ . Практически эффективное решение этих двух проблем в общем виде не найдено, но оно осуществимо для многих спец. классов графов или при тех или иных ослаблениях постановки — напр., если речь идет не об изоморфизме данных графов, а лишь о паличии у них общих свойств (в частности, совпадении тех или иных характеристик), или об оценке вероятности того, что граф содержит часть данного вида.

**Характеристика графов** — это ф-ция, относящая каждому графу элемент некоторого фиксированного мн-ва (чисел, векторов, многочленов, матриц, разбиений, класса тех или иных алгебр. систем и т. д.) и, как правило, изоморфная, т. е. принимающая на изоморфных графах одинаковые значения. К важнейшим числовым характеристикам обыкновенного графа  $L = (X, U)$  относятся: к-во вершин  $n(L) = |X|$ ; к-во ребер  $m(L) = |U|$ ; к-во компонент (см. *Графов связность*)  $\kappa(L)$ ; *цикломатическое число*  $\lambda(L) = m(L) - n(L) + \kappa(L)$ ; к-ва  $f_i(L)$  полных и  $e_i(L)$  пустых  $i$ -вершинных подграфов ( $i = 0, 1, 2, \dots, n(L)$ );  $f_0(L) = e_0(L) = 1$ ; плотность  $\varphi(L) = \max \{i | f_i(L) \neq 0\}$ ; неплотность (число внутренней устойчивости)  $\varepsilon(L) = \max \{i | e_i(L) \neq 0\}$ ; к-ва  $n_i(L)$  вершин степени  $i$  (т. е. инцидентных ровно  $i$  ребрам); степень  $\sigma(L) = \max \{i | n_i(L) \neq 0\}$ ; к-ва  $p_{ji}(L)$  суграфов с  $j$  ребрами и цикломатическим числом  $i$ ; к-ва  $r_i(L)$  таких раскрасок вершин ровно  $i$  цветами, при которых никакие две смежные (соединенные ребром) вершины не окрашены одинаково; хроматическое число  $\gamma(L) = \min \{i | r_i(L) \neq 0\}$ ; число Хадвигера (степень гомоморфизма)  $\eta(L)$  — наибольшее к-во вершин полного графа, в который можно

превратить граф  $L$  (или какой-либо его подграф) при помощи стягивания ребер; хроматический класс (хроматический индекс)  $\chi(L)$  — наименьшее к-во цветов, которым можно раскрасить ребра графа так, чтобы никакие два смежных (т. е. имеющих общую инцидентную вершину) ребра не оказались одного и того же цвета; всесмежность (число внешней устойчивости)  $\beta(L)$  — наименьшее к-во вершин такого подграфа  $L'$ , что всякая не принадлежащая ему вершина  $L$  смежна хотя бы с одной вершиной из  $L'$ . Некоторые характеристики (радиус, диаметр и др.) связаны с метрикой графа — т. е. ф-цией, относящей каждой паре вершин  $x$  и  $y$  расстояние между ними — некоторое число  $\rho(x, y) \geq 0$ , напр., длину кратчайшей из *цепей*, соединяющих  $x$  с  $y$ , а другие — с различными представлениями графов. Из числовых характеристик можно составлять различные многочленные характеристики, напр., размерностный многочлен  $\sum_{i \geq 0} f_i(L) z^i$ ,

распределительный (хроматический) многочлен  $\sum_{i \geq 1} r_i(L) z^i$  и др., где  $z$  — формальная переменная.

Для ориентированных графов характеристики являются к-во простых орциклов заданной длины (см. *Цикл графа*), к-во ядер (см. *Игра на графе*), к-ва баз и бикомпонент, а также многие числа, связанные с орметрикой (уточнением понятия расстояния от одной вершины до другой, учитывающим направления дуг). Некоторые характеристики неориентированного графа обусловлены возможностью ориентировать его ребра заданным образом. Характеристикой графа может быть и некоторая алгебр. система — *группа* автоморфизмов, *полугруппа* эндоморфизмов и т. п. Примерами неизоморфных характеристик могут служить к-во простых цепей заданной длины между данной парой вершин графа и матрица таких к-в для всех пар его вершин. Многие из перечисленных характеристик переносятся на графы общего вида.

Практически эффективно вычислимую систему изоморфных характеристик, которая определяла бы граф с точностью до изоморфизма, указать не удастся. Осн. задачами относительно характеристик одного и того же графа являются выражения и оценки одних характеристик через другие (особенно важно находить точные оценки сверху и снизу для таких трудно вычисляемых характеристик, как  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$ ,  $\chi$ ,  $\beta$  через легко вычисляемые  $n$ ,  $m$ ,  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $n_i$ ,  $\sigma$  и др.). Так, для обыкновенных графов: если  $\sigma(L) \geq 3$  и граф  $L$  не содержит полных  $\sigma(L)$ -вершинных подграфов, то  $\gamma(L) \leq \sigma(L)$ ; верхняя оценка для  $\gamma(L)$  не может быть ф-цией одной лишь  $\varphi(L)$  (нижняя оценка  $\gamma(L) \geq \varphi(L)$  тривиальна);  $\chi(L) \leq \sigma(L) + 1$  (нижняя оценка  $\chi(L) \geq \sigma(L)$  тривиальна); были найдены точные верхние и нижние оценки для  $\varphi(L)$ ,  $\varepsilon(L)$ ,  $\gamma(L)$ , точная верхняя для  $\eta(L)$  и точная верхняя для  $\beta(L)$  через  $n(L)$  и  $m(L)$ ; точная нижняя оценка для  $\eta(L)$  через

$n(L)$  и  $m(L)$  пока не найдена, а гипотеза о том, что всегда  $\eta(L) \geq \gamma(L)$ , подтверждена пока лишь для графов с  $\gamma(L) \leq 4$ . Одним из осн. способов получения точных оценок является полное описание соответствующих оптим. графов, а многие равенства удается вывести с помощью той или иной операции разборки.

**Оптимальные (экстремальные) и критические графы** и разницу между ними рассмотрим на конкретном примере. Пусть  $L^K(n, \varphi)$  — класс обыкновенных  $n$ -вершинных графов плотности  $\varphi$  таких, что добавление любого ребра (без добавления вершин и изменения положения прежних ребер) приводит к увеличению плотности, а  $L^M(n, \varphi)$  — подкласс тех из них, которые при заданных  $n$  и  $\varphi$  имеют наибольшее возможное к-во ребер. Тогда графы из  $L^K(n, \varphi)$  — критические относительно добавления ребра, а графы из  $L^M(n, \varphi)$  — оптимальные (в данном случае максимальные) по к-ву ребер (на рис. 1 приведены соответствующие примеры для  $n = 5, \varphi = 2$ ). При фиксированных  $n$  и  $\varphi \leq n$  класс  $L^M(n, \varphi)$  состоит из единственного (с точностью до изоморфизма) графа и к тому же графу приводит замена плотности  $\varphi$  хроматическим числом  $\gamma$ ; напротив, классы  $L^K(n, \varphi)$  и  $L^K(n, \gamma)$  с одинаковыми числовыми значениями  $\varphi$  и  $\gamma$  различны. Вообще оптим. граф характеризуется тем, что числовое значение одной из его характеристик является наибольшим (или наименьшим) возможным при фиксированных значениях заданной системы других характеристик, а критический граф — тем, что применение к нему любой операции определенного типа обязательно увеличивает (или обязательно уменьшает) заданную характеристику.

**Операция разборки** относит графу  $L$  один или несколько графов  $L_1, L_2, \dots, L_q$ , каждый из которых в каком-то смысле проще исходного (напр., содержит меньше вершин или меньше ребер). С каждой такой операцией  $L \rightarrow \{L_1, L_2, \dots, L_q\}$  можно связать класс характеристик  $\Phi$ , удовлетворяющих рекуррентному соотношению

$$\Phi(L) = f(\Phi(L_1), \Phi(L_2), \dots, \Phi(L_q)),$$

где  $f$  — заданная ф-ция, и начальным условием; для «простейших» графов  $L^0$ , к которым данная операция разборки неприменима, значения  $\Phi(L^0)$  известны. Во многих случаях можно без существенной потери информации о графе считать, что ф-ция  $f$  линейна, т. е.

$$\Phi(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_i \Phi(L_i),$$

где числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$  и значения  $\Phi(L^0)$  являются образующими элементами некоторого кольца  $K$ . Осн. задачи для данного класса  $L$  графов и заданной операции разборки: а) найти условие  $\Omega$  (в виде системы соотношений между образующими кольца  $K$ ), необходимое и достаточное для того, чтобы характеристика  $\Phi$  была изоморфной; б) установить канонический вид,

к которому с помощью соотношений  $\Omega$  приводится общее выражение  $\Phi(L)$ ; в) выяснить смысл (используя термины структуры графа  $L$ ) коэфф. канонического представления  $\Phi(L)$ . Напр., если  $L$  — класс обыкновенных графов с линейно упорядоченным мн-вом вершин,  $L_p$  — подграф графа  $L \in L$ , порожденный всеми вершинами  $L$ , смежными с первой, а  $L_r$  — подграф, полученный из  $L$  удалением первой вершины, то, очевидно, размерностный многочлен

$$F(L) = \sum_{i \geq 0} f_i(L) z^i$$

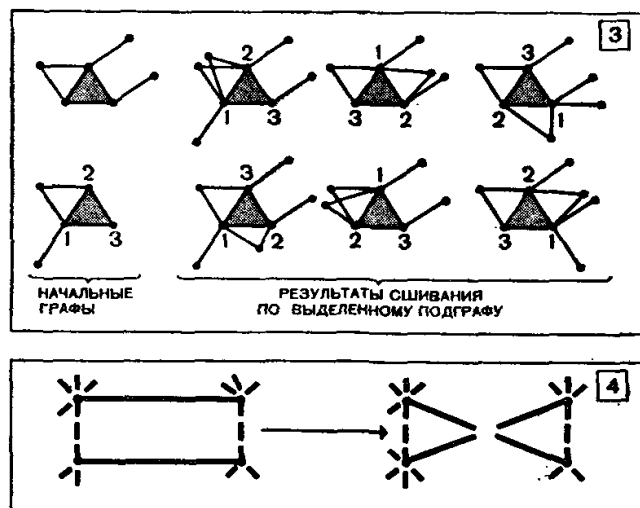
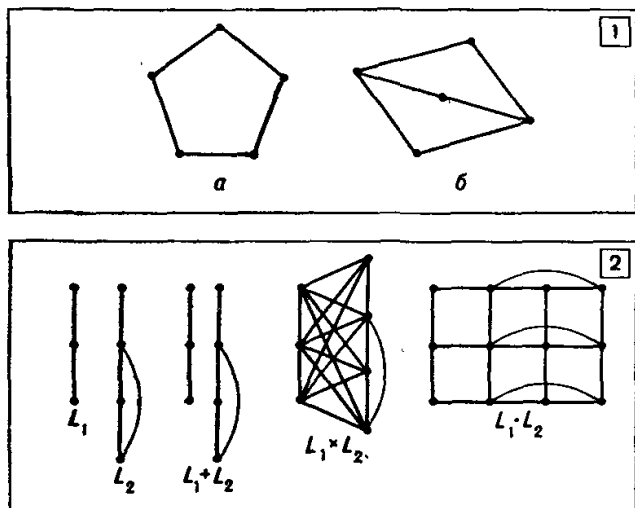
удовлетворяет рекуррентному соотношению  $F(L) = F(L_r) + F(L_p)z$  и начальному условию  $F(\cdot) = 1 + z$ . Установлено, что всякая изоморфная характеристика  $\Phi(L)$ , для которой  $\Phi(L) = \alpha_1 \Phi(L_p) + \alpha_2 \Phi(L_r)$  и  $\Phi(\cdot) = 1$  (единица кольца  $K$  с образующими  $1, \alpha_1$  и  $\alpha_2$ ), полностью определяется числами  $f_i(L)$ .

Для практического вычисления характеристик графа описанный рекуррентный метод, как правило, неэффективен (ибо каждый из графов  $L_1, L_2, \dots, L_q$ , возникающих после одного шага разборки, обычно не намного проще исходного графа  $L$ , а к-во таких графов растет с к-вом шагов по экспоненциальному закону), но он играет важную роль при нахождении соотношений между различными характеристиками (напр., выражения чисел  $r_i(L)$  через  $p_{ji}(L)$ ).

**Операция композиции** служит для образования нового графа из нескольких более простых. Напр., из двух обыкновенных графов  $L_1 = (X_1, U_1)$  и  $L_2 = (X_2, U_2)$  с  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$  можно образовать [рис. 2] сумму  $L_1 + L_2 = (X_1 \cup X_2, U_1 \cup U_2)$ , произведение  $L_1 \times L_2 = (X_1 \cup X_2, U_1 \cup U_2 \cup \{x_1 x_2 \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\})$  и декартово произведение  $L_1 \cdot L_2 = ((\{x_1 x_2 \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}, \{x_1 x_2 y_1, x_2 y_1 \mid x_1, y_1 \in X_1 \& x_2 y_1 \in U_1\} \cup \{x_1 x_2 x_1, y_2 \mid x_1 \in X_1 \& x_2, y_2 \in X_2 \& x_2 y_2 \in U_2\}))$ , где стрелка над парой вершин означает ее упорядоченность. Эти три операции обладают свойством изоморфизма (при замене исходных графов изоморфными результирующий граф тоже переходит в изоморфный), а также некоторыми алгебр. свойствами, напр., коммутативностью и ассоциативностью. Важным примером операции композиции, не обладающей свойством изоморфизма, служит сшивание обыкновенных графов по полному подграфу (рис. 3). Все известные до сих пор композиции таковы, что мн-во графов, неразложимых ни по одной из этих операций (т. е. не представимых в виде результата применения операции к некоторой совокупности графов), столь же необозримо как и мн-во всех графов вообще. Поэтому полное разложение графов не решает в общем виде проблемы изоморфизма (даже в случаях, когда разложение единственно, как, напр., по совокупности операций суммирования и умножения или же, для связных

графов, по операции декартова умножения) и не приводит к полному описанию всех графов (или хотя бы только всех обыкновенных). Однако нередко те или иные операции композиции оказываются полезными при описании классов спец. графов, напр., оптимальных (так, граф Турана  $L^M(n, \varphi)$  есть произведение  $r$  пустых  $(p+1)$ -вершинных и  $\varphi - r$  пустых  $p$ -вершинных обыкновенных графов, где  $n = r\varphi + r$ ,  $0 \leq r < \varphi$ ), или при построении графов с наперед заданными свойствами. Во всех этих случаях важно знать, как ведут

$m(L)$  тоже относятся к локальным; характеристики  $\chi(L)$ ,  $\lambda(L)$ ,  $\varphi(L)$ ,  $\varepsilon(L)$  и  $\eta(L)$  — не локальные. Многие обобщения локальных свойств можно назвать квазилокальными, напр., свойства, определяемые совокупностью окружений всех вершин обыкновенного графа (окружение  $O(L; x)$  вершины  $x$  обыкновенного графа  $L$  — это его подграф, порожденный всеми смежными с  $x$  вершинами  $L$ ) или совокупностью всех  $n(L)$  его  $(n(L) - 1)$ -вершинных подграфов (заданных с точностью до изоморфизма). Относительно второй



1. Графы: а — критический; б — оптимальный.
2. Операции композиции двух обыкновенных графов.
3. Сшивание двух обыкновенных графов по выделенному подграфу.
4. Перемещение ребер обыкновенного графа.

себя характеристики графа по отношению к операциям. Напр., размерностный и распределительный многочлены обладают свойством мультипликативности относительно умножения графов.

Операция преобразования переводит граф в другой граф, как правило, без упрощения или усложнения. По отношению к операции этого типа возникают вопросы нахождения инвариантных характеристик графа и вопрос о полноте систем таких характеристик (т. е. о возможности преобразования друг в друга двух графов с одной и той же системой последовательным применением операции). Напр., система степеней вершин обыкновенного графа полна относительно операции перемещения ребер, показанной на рис. 4.

**Локальные свойства графов.** Пусть  $L = (X, U; P)$  — граф общего вида; звездой его вершины  $x$  наз. часть, образованная самой вершиной  $x$  и всеми инцидентными ей ребрами (вместе с их вторыми концевыми вершинами). Задавая все  $n(L)$  звезд по отдельности без указания, какие вершины разных звезд являются одной и той же вершиной графа  $L$ , получим локальную информацию об  $L$ ; все свойства графа, основанные на такой информации, наз. локальными. Для обыкновенного графа вся локальная информация о нем исчерпывается системой чисел  $\{n_i(L)\}$ , поэтому выражаемые через них характеристики  $n(L)$  и

совокупности до наст. времени не известно, всегда ли она определяет исходный граф  $L$  однозначно с точностью до изоморфизма (проблема Улама — Келли).

Единый алгоритм для решения всех вопросов Г. т. невозможен, однако конкретный вопрос для конкретного конечного графа всегда разрешим в конечном к-во шагов. Но решение может оказаться слишком громоздким, поэтому и в отношении конечных алгоритмов возникает проблема их практической эффективности, т. е. возможности существенно избежать полного перебора всех мыслимых случаев. К практически эффективным относятся, напр., метод чередующихся цепей и метод Форда — Фалкерсона в теории транспортных сетей. Напротив, некоторые задачи (напр., среди связанных с раскраской вершин) не допускают в общем случае практически эффективных алгоритмов, и тогда часто прибегают к таким приемам, которые для подавляющего большинства графов дают результат в приемлемое время. С этим связано широкое применение в Г. т. вероятностных и асимптотических методов, опирающиеся на различные задачи подсчета графов (напр., найти к-ва неизоморфных обыкновенных графов с заданным к-вом вершин и ребер, заданными степенями вершин и др., а также аналогичные к-ва при дополнительном условии связности графов и т. п.), решаемые методами комбинаторного анализа.



Графы используются в сетевых методах планирования и управления, при построении граф-схем автоматов (см. *Абстрактного автомата граф*), в теории алгоритмов (см. *Алгоритмов граф-схемы*) и в др. разделах кибернетики.

Лит.: Зыков А. А. Реберно-вершинные функции и распределительные свойства графов. «Доклады АН СССР», 1961, т. 139, № 4; Ершов А. П., Кожухин Г. И. Об оценках хроматического числа связанных графов. «Доклады АН СССР», 1962, т. 142, № 2; Визинг В. Г. Оценка числа внешней устойчивости графа. «Доклады АН СССР», 1965, т. 164, № 4; Зыков А. А. Теория конечных графов, т. 1. Новосибирск, 1969 [библиогр. с. 515—542]; König D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936; Берж М. Теория графов и ее применения. Пер. с франц. К., 1962 [библиогр. с. 293—302]; Оге О. The four-color problem. New York, 1967 [библиогр. с. 249—253]; Оре О. Теория графов. Пер. с англ. М., 1968 [библиогр. с. 325—338]; Sachs H. Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, т. 1, 2. Leipzig, 1970; Харари Ф. Теория графов. Пер. с англ. М., 1973 [библиогр. с. 269—286]. А. А. Зыков.

**ГРАФОПОСТРОИТЕЛЬ** — см. *Устройства отображения информации*.

**ГРУПП ТЕОРИЯ** — раздел алгебры, в котором изучаются свойства групп. Понятие группы сложилось как одно из осн. понятий математики и, в первую очередь, алгебры и геометрии. В 20 в. Г. т. прочно вошла в физику (квантовая механика, кристаллография) и в кибернетику (*абстрактная теория автоматов*, коды линейные). На первом этапе Г. т. развивалась в рамках теории групп подстановок (или групп преобразований), которая составляет и сейчас одну из центр. глав Г. т. Пусть  $M$  — мн-во. Биекция  $\sigma$  мн-ва  $M$  на себя наз. подстановкой мн-ва  $M$ . Если на мн-ве подстановок мн-ва  $M$  рассматривать операцию последовательного применения подстановок (их суперпозицию), то совокупность всех подстановок образует группу  $S(M)$ , называемую симметрической группой мн-ва  $M$ . Подгруппы группы  $S(M)$  наз. группами подстановок мн-ва  $M$ . Если на мн-ве  $M$  определена какая-либо структура так, что  $M$  является носителем алгебры универсальной или алгебр. системы, то совокупность всех подстановок мн-ва  $M$ , которые сохраняют все отношения структуры, образует группу автоморфизмов данной структуры. Напр., пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $K$ . Операции в  $V$  — это сложение и умножение векторов на  $\alpha \in K$ . Автоморфизмами пространства являются невырожденные линейные преобразования (см. *Операторы линейные*): их совокупность — полная линейная группа пространства  $V$  и есть группа автоморфизмов пространства. Эта группа изоморфна группе невырожденных квадратных матриц порядка размерности пространства с коэфф. из поля  $K$ . Пусть  $E$  — евклидово векторное пространство, наряду с векторными операциями на нем определена еще операция скалярного произведения. Автоморфизмами пространства  $E$  являются т. н. ортогональные линейные преобразования, которым в ортонормированном базисе соответствуют ортогональные матрицы: их совокупность образует ортогональную группу, являющуюся группой автоморфизмов пространства. Исторически пер-

вым было понятие группы Галуа многочлена. Пусть  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  — многочлен с коэфф.  $a_i$  из поля  $K$  и пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — корни этого многочлена. Тогда совокупность всех подстановок множества  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  всех корней, сохраняющих все отношения вида  $\sum c_{i_1, i_2, \dots, i_n} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_n^{i_n} = 0$

с коэфф.  $c_{i_1, i_2, \dots, i_n} \in K$ , наз. группой Галуа многочлена  $f(x)$ . Франц. матем. Э. Галуа (1811—32) вывел условие, необходимое и достаточное для разрешимости ур-ния  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  в радикалах. Из него следовала неразрешимость в радикалах общего ур-ния пятой и выше степени. Возникшая в связи с решением этих задач т. н. теория Галуа стала отираемым пунктом для развития Г. т. Осн. причиной успеха понятия группы и понятия группы автоморфизмов оказался тот замечательный факт, что строение группы автоморфизмов какой-либо структуры несет большую информацию о свойствах этой структуры: строение группы автоморфизмов характеризует в некотором смысле свойства симметрии соответствующей структуры. В 20 в. развивается теория абстрактных групп, изучающая свойства групп и классов групп, определенных вплоть до изоморфизма и независимо от их конкретного задания преобразования и автоморфизмами структур. Теория абстрактных групп выясняет, какие подгруппы содержит данная группа и как они в ней расположены, изучает существование или отсутствие эпиморфизмов одних групп на другие; интерес представляет задание групп образующими и определяющими отношениями и, наконец, систематически исследует различные процедуры, позволяющие строить новые группы из заданных — прямые, подпрямые, свободные произведения групп, расширения групп, сплетение и др. Лит.: Мальцев А. И. Группы и другие алгебраические системы. В кн.: Математика, ее содержание, методы и значения. М., 1956; Курош А. Г. Теория групп. М., 1967 [библиогр. с. 581—636]; Вейль Г. Классические группы. Пер. с англ. М., 1947 [библиогр. с. 389—398]; Холл М. Теория групп. Пер. с англ. М., 1962 [библиогр. с. 452—459].

Л. А. Калужнин.

**ГРУППА** в алгебре — множество, в котором определена одна бинарная, ассоциативная и обратимая операция. Более подробно:  $G$  — это некоторое мн-во  $G$ , каждой паре элементов  $a, b \in G$  которого сопоставлен некоторый однозначно определенный элемент  $c \in G$ , называемый произведением элементов  $a$  и  $b$ ;  $c = a \cdot b$ .

Операция умножения элементов  $G$  должна удовлетворять следующим аксиомам: 1)  $(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  (аксиома ассоциативности); 2) существует однозначно определенный элемент  $e$ , называемый единицей или нейтральным элементом  $G$ .  $G$ , для которого имеет место равенство  $ae = ea = a$  для всех  $a \in G$  (аксиома существования нейтрального элемента); 3) для всякого  $a \in G$  существует и однозначно определен некоторый элемент  $a^{-1} \in G$ , называемый

обратным элементом элементу  $a$ , такой, что  $aa^{-1} = a^{-1}a = e$  (аксиома обратимости операции умножения). Если, кроме того, для всех  $a, b \in G$  справедливо равенство  $ab = ba$ , то  $G$  наз. коммутативной, или абелевой (см. Групп теория).

Л. А. Калужнин.

**ГРУППОВОЙ ИСТОЧНИК НАПРЯЖЕНИЯ** — источник тока, в котором величины напряжений между выходными полюсами устанавливаются в соответствии с заданной программой. Программа вводится в устройство управления УУ  $G$  и н. (см. рис.) и запоминается в нем

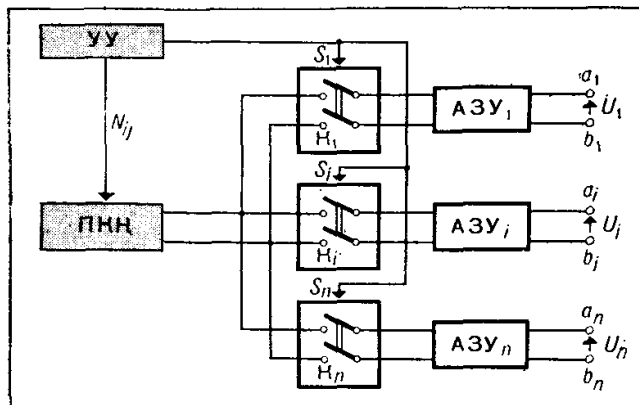


Схема группового источника напряжения.

в виде кодов. В ней указываются величины и знаки напряжений между соответствующими выходными полюсами, а также порядок выдачи кодов и сигналов, управляющих работой пар ключей. При отсутствии управляющих сигналов все ключи находятся в разомкнутом состоянии. В процессе работы из УУ на вход преобразователя код — напряжение ПМН поступают коды, синхронно с которыми подаются управляющие сигналы на ключи  $K_1, \dots, K_i, \dots, K_n$ . При появлении в момент  $t_j$  сигнала  $S_i$  соответствующий ключ  $K_i$  замыкается, и код  $N_{ij}$ , преобразованный в напряжение  $U_i(t_j)$ , поступает на вход аналогового запоминающего устройства  $АЗУ_i$  и фиксируется в нем. При этом на выходных полюсах  $a_i, b_i$  появляется напряжение  $U_i(t_j)$ , которое остается постоянным до тех пор, пока УУ снова не выдаст управляющий сигнал  $S_i$  и новое значение кода  $N_{i, j+1}$ . Таким образом, на каждой паре выходных полюсов может быть установлено напряжение, ступенчато аппроксимирующее заданную функциональную зависимость от независимой переменной  $t$ . К числу важных параметров  $G$  и н. относятся количество пар выходных полюсов, точность установки выходных напряжений и допустимый частотный диапазон их изменения.  $G$  и н. применяются в электрических моделирующих сетях для задания граничных условий, в аналоговых, квазианалоговых и динамических моделях. При использовании  $G$  и н. в гибридных системах функции УУ может выполнять цифровой автомат гибридной системы.

А. Ф. Катков.

**ГРУППЫ НЕПРЕРЫВНЫЕ.** Непрерывной (топологической) наз. группа, снабженная топологией, относительно которой непрерывна групповая операция. Более точно, группа  $G$  наз. непрерывной, если в мн-во  $G$  введена топология, относительно которой мн-во  $G$  образует топологическое пространство, и если ф-ции  $g^{-1} = \Phi(g)$  — обратный элемент группы и  $gg' = F(g, g')$  — произведение элементов группы — непрерывны. Если  $G_1$  и  $G_2$  —  $G$  н., то гомоморфизм  $G_1 \rightarrow G_2$  наз. гомоморфизм групп, являющийся непрерывным отображением соответствующих топологических пространств. В частности, изоморфизм наз. изоморфизм групп, являющийся гомеоморфизмом топологических пространств. Аналогично в теории  $G$  н. с учетом топологии видоизменяются и др. понятия групп теории (подгруппа, факторгруппа и т. п.).

Примеры:  $R$  — группа действительных чисел. Групповой операцией является сложение чисел. Топология вводится путем естественного отождествления действительных чисел с точками числовой оси.  $\Phi(t) = -t, F(t, t') = t + t' (t, t' \in R)$ .  $T$  — группа поворотов вокруг оси. Групповой операцией является сложение углов поворота (по модулю  $2\pi$ ). В этом случае топология вводится путем естественного отождествления угла поворота с точкой окружности.  $GL(n, R)$  — группа всех невырожденных квадратных вещественных матриц порядка  $n$ . Групповой операцией является умножение матриц. Топология вводится путем отождествления матрицы с точкой  $n^2$ -мерного евклидова пространства, координатами которой являются матричные элементы.

В приложениях чаще приходится иметь дело с группами преобразований  $G$  н. преобразований называют тройку  $(G, X, \psi)$ , где  $G$  —  $G$  н.,  $X$  — топологическое пространство и  $\psi(g, x) = T_g x (g \in G, x \in X)$  — непрерывная ф-ция со значениями в  $X$ . Предполагается, что при каждом  $g \in G, T_g$  является гомеоморфизмом  $X$  на себя, а также, что имеет место соотношение  $T_g T_{g'} = T_{gg'}$ . Группа преобразований наз. транзитивной, если для каждой пары точек  $x, x' \in X$  найдется преобразование  $T_g$ , переводящее точку  $x$  в  $x'$ ;  $T_g x = x'$ . Группа  $GL(n, R)$  естественным образом определяет группу линейных преобразований векторного пространства  $R^n: G = GL(n, R), X = R^n$ , если  $g = (g_{ij}) \in GL(n, R)$  и  $x = (x_i)$  — вектор из  $R^n$ , то  $\psi(g, x) = T_g x = (g_{ij})(x_i)$ .

$G$  н., встречающиеся в приложениях, являются обычно группами Ли.  $G$  н. наз.  $r$ -параметрической группой Ли, если некоторая окрестность единицы  $e$  группы гомеоморфна  $r$ -мерному евклидову пространству. В этом случае можно в  $G$  (локально) ввести координаты и определить элемент  $g$  с помощью координат  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . Ф-ции  $\Phi(g)$  и  $F(g, g')$  сводятся к набору из  $r$  ф-ций от  $r$  (соответственно  $2r$ ) переменных  $\Phi_i(g) = \Phi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ .

$F_i(g, g') = F_i(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha'_1, \dots, \alpha'_r)$  ( $1 \leq i \leq r$ ). Из теории групп известно, что при надлежащем выборе координат, ф-ции  $F_i$ ,  $F'_i$  являются аналитическими. Это обстоятельство позволяет широко применять матем. анализ при изучении групп Ли. Рассмотренные выше группы  $R$ ,  $T$ ,  $GL(n, R)$  являются группами Ли (первые две однопараметрические, а последняя —  $n^2$ -параметрическая).

Алгеброй Ли  $L$  наз. векторное пространство (обычно над полем действительных чисел), снабженное бинарной операцией  $[a, b]$  ( $a, b \in L$ ), удовлетворяющей следующим условиям: а) линейность по обоим аргументам, б)  $[a, b] = -[b, a]$ , в)  $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$  (тождество Якоби). Алгебры Ли являются более простыми объектами, чем группы Ли. Оказывается, что между алгебрами Ли и группами Ли, рассматриваемыми локально (т. е. в некоторой окрестности  $e$ ), существует взаимнооднозначное соответствие, позволяющее свести многие вопросы, касающиеся групп Ли, к соответствующим алгебрам.

Поясним точнее эту связь. Рассмотрим  $G$  —  $r$ -мерная группа Ли,  $X$  —  $n$ -мерное дифференцируемое многообразие и  $\Psi$  — бесконечно дифференцируемая ф-ция.  $X^*$  — пространство бесконечно дифференцируемых ф-ций на  $X$ . Для каждого  $g \in G$ ,  $f(x) \rightarrow f(T_g x)$  ( $f(x) \in X^*$ ) является оператором линейным в  $X^*$ . Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  — координаты элемента  $g$ . Частные производные

$$\left( \frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(T_g x) \right)_{g=e} = X_i f(x) \quad (1 \leq i \leq r)$$

являются линейными дифф. операторами первого порядка. Они наз. операторами Ли группы преобразований (инфинитезимальные операторы).  $X_i f(x) dx_i$  — изменение ф-ции  $f(x)$  под воздействием «бесконечно малого» преобразования, соответствующего элементу группы,  $i$ -я координата которого отличается от  $i$ -ой координаты  $e$  на  $d\alpha_i$ . Если группа преобразований эффективна (при  $g = e$ ,  $T_g x \neq x$ ), то линейные комбинации операторов  $X_i$  образуют  $r$ -мерное векторное пространство  $L$ . Положим  $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$ . Оказывается, что  $[X_i, X_j] \in L$  и относительно так введенной операции  $[ , ]$   $L$  образует алгебру Ли, не зависящую от  $X$  и  $\Psi$ . Это и есть алгебра Ли группы  $G$ . Пусть теперь  $X_1, \dots, X_r$  — линейные дифф. операторы первого порядка в  $X^*$ . Предположим, что их линейная оболочка  $L$  является  $r$ -мерным векторным пространством и  $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i \in L$ . Тогда  $L$  образует алгебру Ли. Теперь можно построить (локально) группу преобразований  $(G, X, \Psi)$  и, в частности, восстановить группу  $G$ , для которой  $L$  является алгеброй Ли, полагая

$$f(\Psi(g, x)) = f(T_g x) = \exp \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i X_i \right) f(x) \quad (f(x) \in X^*).$$

Перечислим некоторые группы Ли, особенно часто встречающиеся в приложениях. Наряду с указанными выше группами  $R$ ,  $T$ ,  $GL(n, R)$  — это группа  $GL(n, C)$  всех невырожденных квадратных матриц порядка  $n$  с комплексными элементами, а также ряд ее подгрупп и подгрупп группы  $GL(n, R)$ .  $O(p, q)$ : подгруппа  $GL(p+q, R)$ , состоящая из матриц, оставляющих инвариантной форму  $-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2$ . В частности,  $O(n) = O(o, n)$  — группа вращений  $n$ -мерного евклидова пространства.  $SL(n, R)$  ( $SL(n, C)$ ): подгруппа  $GL(n, R)$  ( $GL(n, C)$ ), состоящая из матриц с определителем 1.  $U(p, q)$ : подгруппа  $GL(p+q, C)$ , состоящая из матриц, оставляющих инвариантной эрмитову форму  $-x_1 \bar{x}_1 - \dots - x_p \bar{x}_p + x_{p+1} \bar{x}_{p+1} + \dots + x_{p+q} \bar{x}_{p+q}$ . В частности,  $U(n) = U(o, n)$  — группа унитарных матриц.  $Sp(n, R)$ : подгруппа  $GL(2n, R)$ , состоящая из матриц, оставляющих инвариантной форму  $x_1 y_{n+1} - x_{n+1} y_1 + x_2 y_{n+2} - x_{n+2} y_2 + \dots + x_n y_{2n} - x_{2n} y_n$ .

$G$  — находят применение в теории представлений (см. *Представлений групп теория*). Пусть  $G$  —  $G$  —  $(K, X, \Psi)$  —  $G$  — преобразований. Гомеоморфизм  $G \rightarrow K$  наз. представлением группы  $G$  в группе преобразований  $(K, X, \Psi)$ . Обычно под представлением понимают линейное представление. В этом случае роль  $(K, X, \Psi)$  играет группа  $GL(n, R)$ , рассматриваемая как группа преобразований  $n$ -мерного векторного пространства  $R^n$ . Представление группы относит каждому элементу группы  $g$  матрицу  $T_g$ , определяющую линейное преобразование в  $R^n$  так, что  $T_g T_{g'} = T_{gg'}$ . Центр. задачей теории представлений является отыскание минимальных подпространств, инвариантных относительно преобразований  $T_g$  [неприводимые подпространства (представления)], и разложение произвольных векторов из  $R^n$  по этим подпространствам. В настоящее время интенсивно разрабатывается также теория бесконечномерных представлений, в которой роль  $R^n$  играет бесконечномерное векторное пространство.

Рассмотрим непрерывную транзитивную группу преобразований  $(G, X, \Psi)$ .  $X^*$  — некоторое бесконечномерное векторное пространство ф-ций на  $X$  (пространство всех непрерывных ф-ций, всех бесконечно дифференцируемых ф-ций, всех ф-ций, суммируемых с квадратом по некоторой мере, и т. п.). Преобразования  $T_g$  определяют линейные операторы:  $f(x) \rightarrow f(T_g x)$  ( $f(x) \in X^*$ ) пространства  $X^*$ , последние образуют бесконечномерное представление группы  $G$ . Изучение этого представления, в частности, получение разложения ф-ций из  $X^*$  по ф-циям из неприводимых подпространств, составляет предмет гармонического анализа. Классический гармонический анализ рассматривает случай, когда

$G = T$ ,  $X = S^1$  — окружность или  $G = R$ ,  $X$  — числовая ось. Упомянутыми разложениями являются соответственно ряд и интеграл Фурье. Еще один пример: пусть  $G = O(3)$  — группа вращений трехмерного евклидова пространства,  $X = S^2$  — сфера в трехмерном пространстве с центром в начале координат. Соответствующее разложение — разложение ф-ции на сфере в ряд по сферическим ф-циям.

Теория динамических систем изучает не-транзитивные группы преобразований. Лучше всего изучены системы с группой  $G = R$ . В этом случае элемент группы  $t \in R$  интерпретируется как время, а  $T_t x = x(t)$  — как закон движения точки  $x \in X$ . Проблематика таких систем берет начало в общей механике и имеет в ней важные приложения. Теория групп буквально пронизывает всю современную математику. Перечисленное выше не исчерпывает даже важнейшие применения теории групп в матем. разделах.

Лит.: Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. М., 1958 [библиогр. с. 345—349]; Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М., 1973 [библиогр. с. 515—516]; Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. Пер. с англ. М., 1961; Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. Пер. с англ. М., 1966 [библиогр. с. 579—582]. Г. И. Кац.

**ГУРВИЦА КРИТЕРИЙ** — один из *устойчивости критериев*.

**ГУРВИЦА ТЕОРЕМА** — теорема, устанавливающая условия, при соблюдении которых все корни (нули) вещественного многочлена

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 > 0, a_n \neq 0, n \geq 1) \quad (1)$$

расположены строго в левой комплексной полуплоскости, т. е. имеют отрицательные вещественные части. Эта задача впервые была решена в работе Ш. Эрмита (1856), оставшейся

неизвестной широкому кругу специалистов. Вторично ее сформулировал Дж. Максвелл (1868) и решил Э. Раус (1877). Более удобное решение той же задачи независимо от Э. Рауса нашел А. Гурвиц (1895). В матем. и тех. литературе оно получило наименование теоремы (критерия) Гурвица.

**Т е о р е м а.** Чтобы все корни вещественного многочлена (1) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (2)$$

Здесь

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

последовательные главные миноры матрицы Гурвица

$$H_j = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad \left( \begin{array}{l} a_i = 0 \text{ при } i < 0 \\ \text{и } i > n \end{array} \right), \quad (3)$$

составленной из коэффициентов многочлена (1). Многочлен, удовлетворяющий приведенной теореме, называют обычно *многочленом Гурвица*, а миноры  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  — *определителями Гурвица*. Г. т. применяют в матем. теории устойчивости и теории автоматического регулирования в качестве *устойчивости критерия* линейных (линеаризованных) систем. Лит. см. к ст. *Устойчивости критерии*.

Ю. Н. Чеховой.

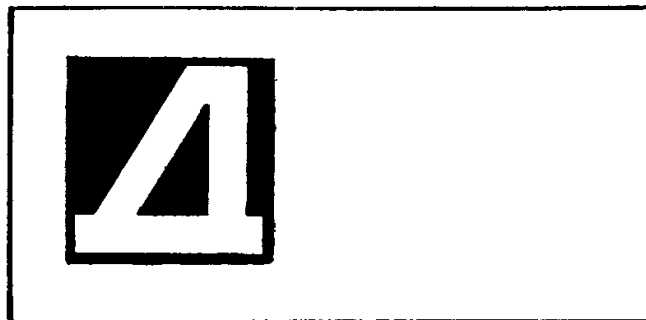
**ДАННЫЕ** — факты и идеи, представленные в формализованном виде, позволяющем передавать или обрабатывать эти факты и идеи при помощи некоторого процесса (и соответствующих технических средств). Д. обычно записаны на каких-нибудь носителях — *перфорационных картах, спец. бланках, лентах магнитных, барабанах магнитных и т. п.* (см. *Носитель информации*). Автоматическая обработка данных является одной из основных прикладных задач кибернетики. См. также *Обработка данных система*.

**ДАТЧИК ВРЕМЕНИ**, э л е к т р о н н ы е ч а с ы — устройство, предназначенное для измерения интервалов времени, выдачи временных управляющих сигналов при выполнении рабочих программ в ЦВМ, а также выдачи отметок истинного времени в различных системах управления. В качестве Д. в. используют спец. *счетчики*, программно-аппаратные или аппаратные (схемные) блоки, ведущие учет и выдачу временных отметок по спец. программе. Для образования временных отметок, как правило, используют кварцевые генераторы определенной частоты (кратной долям секунды) или обычную электросеть с частотой в 50 гц. Зная частоту поступления импульсов генератора (полуволн сети) и их количество, а также начальное время в Д. в., определяют истинное время.

В ЦВМ Д. в. представляет собой либо полноразрядное слово, хранящееся в фиксированной ячейке *оперативного запоминающего устройства*, либо спец. *регистр*, сигналы на изменение текущего значения которых поступают из схемы образования временных отметок (дни, часы, секунды, доли секунд и т. п.) через систему прерывания. В случае использования ячейки ЗУ или регистра их содержимое рассматривают как целое число со знаком, его можно обрабатывать по правилам операций с фиксированной запятой. Включение и выключение Д. в. производится по командам машины. При использовании Д. в. как отдельного регистра его предварительную установку можно производить вручную с пульта управления ЦВМ либо командой по программе. Подсчет временных отметок, как правило, ведется независимо от выполнения осн. программы, и машина в любой момент времени обращается в Д. в. как к одному из своих внешних устройств. Применение Д. в. позволяет значительно расширить возможности мультипрограммных систем (учет времени работы машины по каждой задаче, работы отдельных устройств и т. д.) и систем, работающих в *реальном масштабе времени* (опрос состояния объектов в определенные моменты времени, выдача временных отметок и управляющих сигналов и т. д.).

А. Я. Зубатенко.

**ДАТЧИК ОДИНОЧНЫХ ИМПУЛЬСОВ** — автономное колебательное звено (электронное устройство), формирующее импульсы определенной амплитуды и длительности, или стандартные импульсы, в результате воздействия случайного скачкообразного пускового сигнала. Такими устройствами прежде всего являют-



ся заторможенные релаксационные генераторы: мультивибратор или одновибратор, блокинг-генератор и др.; в простейшем случае — дифференцирующая цепь. Их особенность — немедленное срабатывание после пуска. Временная задержка определяется только характеристиками схемы и реализующих ее приборов. В вычисл. технике Д. о. и. наз. также цифровой автомат, который после сигнала «пуск» формирует импульс, синхронный с сигналами генератора тактовых импульсов.

Н. А. Левченко.

**ДАТЧИК РАБОЧЕГО ЦИКЛА** — совокупность программных и аппаратных средств для управления и согласования во времени действий отдельных устройств или элементов цифровых вычислительных машин в соответствии с заданной последовательностью их работы. В зависимости от выполняемых функций различают: 1) датчики управления и синхронизации, обеспечивающие требуемый порядок работы устройств и блоков; 2) датчики управления и синхронизации, обеспечивающие выполнение элементарных операций отдельными узлами машины; 3) датчики синхронизации элементов, выдающие последовательности импульсов, определяемые типом элементов и характером схемных решений.

В. П. Боян.

**ДАТЧИК СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ** — устройство для получения последовательности независимых случайных чисел с квазиравномерным законом распределения. Этот закон обусловлен тем, что в ЦВМ вместо непрерывной совокупности равномерно распределенных случайных чисел используется дискретная совокупность  $2^k$  чисел с одинаковой вероятностью появления любого из них ( $k$  — количество разрядов машинного числа в двоичном коде). При достаточно больших  $k$  различие между квазиравномерным и равномерным распределением стирается. Обычно для построения последовательности случайных чисел с любым требуемым законом распределения используют одно или несколько значений случайных чисел, квазиравномерно распределенных в интервале  $(0, 1)$ .

Для получения  $k$ -разрядного случайного числа используют последовательность  $k$  независимых случайных величин  $z_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ), равновероятно принимающих одно из двух возможных значений 0 и 1. Полученная последовательность нулей и единиц представляет собой последовательность двоичных знаков некоторой дроби, которая и является искомым случайным числом. Следовательно, для формирования случайных чисел достаточно

выработать случайную последовательность нулей и единиц так, чтобы вероятности появления 0 и 1 были строго равны.

Д. с. ч. можно разделить на две группы. К первой относятся Д. с. ч., использующие источники физических случайных процессов (напр., шумы электронных ламп). Шумовая эдс источника после усиления дает некоторое выходное напряжение  $U(t)$ , которое является случайной функцией времени. Если фиксировать значения этого напряжения в достаточно удаленные друг от друга моменты времени  $t_i$ , то получим дискретную последовательность независимых случайных величин  $U_i$ . Выбирая некоторый постоянный уровень напряжения  $U_a$ , определяем случайную величину  $z_i$  условием

$$z_i = \begin{cases} 0, & \text{при } U_i \leq U_a, \\ 1, & \text{при } U_i > U_a. \end{cases}$$

Величина напряжения  $U_a$  выбирается так, чтобы вероятность появления  $z_i = 1$  равнялась вероятности появления  $z_i = 0$ . Получаемые такими способами последовательности являются случайными. К недостаткам такого способа получения случайной последовательности можно отнести некоторую неустойчивость работы промежуточных звеньев между источником шума и ячейкой памяти машины, в которой образуется новое случайное число, а также нестационарность физ. случайного процесса. Кроме того, этому способу присуще одно неудобство: нельзя применить повторный подсчет для повышения достоверности результатов и устранения ошибок из-за случайных сбоев при решении задач на ЭЦВМ.

Ко 2-й группе относятся Д. с. ч., дающие псевдослучайные последовательности, которые могут быть получены либо с помощью спец. программ на ЭЦВМ, либо с помощью специализированных устройств — генераторов псевдослучайных последовательностей. Такими способами можно получить очень длинные последовательности, однако они будут периодическими. Д. с. ч. применяют при моделировании систем автоматического управления, при решении задач идентификации объектов управления и в др. случаях.

Лит.: Голенко Д. И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. М., 1965 [библиогр. с. 215—227]; Иваненко В. И., Хохель О. А. Задачи стабилизации параметров искусственно генерируемых случайных процессов. «Автоматика и телемеханика», 1969, № 6; Корн Г. А. Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах. Пер. с англ. М., 1968. О. А. Хохель.

**ДВИГАТЕЛЬ ПОЛИМЕРНЫЙ** — двигатель, рабочим телом в котором является совокупность сократительных полимерных волокон или пленок (см. *Искусственная мышца*). Характерной чертой Д. п. является преобразование энергии, выделяющейся во время хим. реакции в рабочей среде, непосредственно в мех. энергию, минуя тепловую.

**ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.** Общая задача конечномерного программирования математического состоит в отыскании

$$v = \sup_{g(x) \geq 0, x \in R} f(x), \quad (1)$$

где  $g(x) = \{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$  — некоторая вектор-функция,  $R$  — некоторое мн-во в  $n$ -мерном простр. (см. *Пространство абстрактное* в функциональном анализе). Вводя функцию Лагранжа  $F(x, \lambda) = f(x) + (\lambda, g(x))$  этой задачи, рассмотрим задачу, состоящую в отыскании

$$v' = \sup_{x \in R} \inf_{\lambda \geq 0} F(x, \lambda). \quad (2)$$

Задачи (1) и (2) эквивалентны и  $v = v'$ , если только исходная задача имеет решение. В противном случае  $v' = -\infty$ . Двойственной к задаче (1) является задача отыскания

$$\tilde{v} = \inf_{\lambda \geq 0} \sup_{x \in R} F(x, \lambda) = \inf_{\lambda \geq 0} \psi(\lambda). \quad (3)$$

Для формулировки теоремы двойственности необходимо ввести следующее обобщение задачи (1)

$$v'' = \lim_{\epsilon_h \rightarrow 0} \sup_{g(x) \geq -\epsilon_h > 0, x \in R} f(x). \quad (4)$$

Если мн-во планов (решений) задачи (1) либо (4) пусто, то величины  $v$  либо  $v''$  соответственно следует положить равными  $-\infty$ . При этом всегда  $\tilde{v} \geq v'' \geq v = v'$ . Если  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  — выпуклые функции (кверху),  $R$  — выпуклое множество, т. е. задача (1) является задачей программирования выпуклого, то выполняется равенство  $v'' = \tilde{v}$ . Т. о., для задачи выпуклого программирования справедлива следующая теорема. Задача (1) и задача (3) связаны соотношением двойственности  $v = \tilde{v}$  в том и только в том случае, если переход от исходной задачи (1) к обобщенной исходной задаче (4) не ведет к возрастанию верхней грани (1), т. е.  $v = v''$ . Эту теорему наз. т е о р е м о й д в о й с т в е н н о с т и.

Известно несколько условий, достаточных для выполнения соотношения двойственности

$v = \tilde{v}$ : 1) Ф-ции  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$  — выпуклы вверх и непрерывны на замкнутом выпуклом мн-ве  $R$ , мн-во  $G$  планов задачи (1) непусто и ограничено. При этом верхняя грань в прямой задаче (1) достигается при  $v < \infty$ , хотя нижняя грань в двойственной задаче (3) может и не достигаться. 2) Ф-ции  $f(x)$ ,  $g_i(x)$  выпуклы (вверх), мн-во  $R$  выпукло и выполняется условие Слейтера: существует план  $x^{(0)}$  задачи (1) такой, что  $g_i(x^{(0)}) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Это условие исключает наличие в задаче условий в виде равенств. Однако для задач  $g_i(x) \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m_1$ ;  $h_i(x) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ ,  $m_1 + 2s = m$ , где  $h_i(x)$  — ли-



нейные ф-ции, имеет место обобщение условия Слейтера, состоящее в том, что существует такой план  $x^{(0)}$ , что  $g_i(x^{(0)}) > 0$ ,  $i = 1, \dots, m_1$ , где  $x^{(0)}$  — внутр. точка мн-ва  $R$ . При этом нижняя грань в двойственной задаче при  $v = \tilde{v} < \infty$  достигается для некоторого  $\lambda^*$ . Однако верхняя грань в исходной задаче может и не достигаться. 3) Ф-ция  $f(x)$  — выпуклая (вверх) кусочно-гладкая, ф-ции  $g_i(x)$  — выпуклые (вверх) кусочно-линейные,  $R$  — выпуклое многогранное мн-во и мн-во планов задачи (1) непусто. При этом в случае  $v = \tilde{v} < \infty$  при некоторых  $x^* \in G$  и  $\lambda^* \geq 0$   $v = \tilde{v} = f(x^*) = \psi(\lambda^*)$ .

Пара двойственных задач (1) и (3) тесно связана с задачей отыскания седловой точки ф-ции Лагранжа  $F(x, \lambda)$ . Эту связь видно из следующей теоремы. Для существования седловой точки ф-ции Лагранжа  $F(x, \lambda)$  при  $x \in R$ ,  $\lambda \geq 0$  необходимо и достаточно, чтобы задачи (1) и (3) были связаны соотношением двойственности и имели в качестве решений некоторые точки  $x^* \in G$ ,  $\lambda^* \geq 0$ . При этом любая пара  $x^* \in G$ ,  $\lambda^* \geq 0$  решений двойственных задач составляет седловую точку ф-ции  $F(x, \lambda)$  и, наоборот, седловая точка  $(x^*, \lambda^*)$  ф-ции  $F(x, \lambda)$  определяет решения  $x^*$  и  $\lambda^*$  задач (1) и (3) соответственно. Т. о., эта теорема позволяет сводить решение задачи (1) к нахождению седловой точки ф-ции Лагранжа  $F(x, \lambda)$  в области  $x \in R$ ,  $\lambda \geq 0$ , если эта точка существует.

Для составления двойственной задачи необходимо найти ф-цию  $\psi(\lambda) = \sup_{x \in R} F(x, \lambda)$ .

Эта ф-ция выпукла книзу. В самом деле, если  $\lambda^{(1)}$  и  $\lambda^{(2)}$  — любая пара точек  $m$ -мерного простр., то при  $0 \leq d \leq 1$

$$\begin{aligned} \psi(d\lambda^{(1)} + (1-d)\lambda^{(2)}) &= \sup_{x \in R} [dF(x, \lambda^{(1)}) + \\ &+ (1-d)F(x, \lambda^{(2)})] = d \sup_{x \in R} F(x, \lambda^{(1)}) + \\ &+ (1-d) \sup_{x \in R} F(x, \lambda^{(2)}) = d\psi(\lambda^{(1)}) + \\ &+ (1-d)\psi(\lambda^{(2)}). \end{aligned}$$

Следовательно, двойственная задача  $\inf_{\lambda \geq 0} \psi(\lambda)$  является задачей выпуклого программирования для общей задачи матем. программирования. Так как всегда  $v \leq \tilde{v}$ , то решение двойственной задачи дает оценку сверху глобального максимума (см. *Экстремум глобальный*) многоэкстремальной задачи (1).

Проиллюстрируем на конкретном примере составление двойственной задачи. Пусть исходная задача —  $\max_{b-Ax \geq 0, x \geq 0(R)} (c, x)$ , где  $c = \{c_1, \dots, c_n\}$  — постоянный вектор, а  $A = \|a_{ij}\|$  — матрица размера  $n \times m$ . Найдем ф-цию  $\psi(\lambda)$ , где  $\lambda \geq 0$  — вектор размер-

ности  $m$ , как

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) &= \max_{x \geq 0} \{(c, x) + (\lambda, b - Ax)\} = \\ &= (b, \lambda) + \max_{x \geq 0} (c - A'\lambda, x) = \\ &= \begin{cases} (b, \lambda), & \text{если } c - A'\lambda \leq 0, \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь  $A'$  — матрица, транспонированная  $A$ . Итак, двойственной задачей к исходной является задача

$$\min_{c-A'\lambda \leq 0, \lambda \geq 0} (b, \lambda).$$

В. П. Гуленко.

**ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ** — см. *Двойственности теория* в программировании линейном. **ДВОЙСТВЕННОСТИ ЗАКОН**, принцип двойственности — утверждение, относящееся к формулам алгебры логики, гласящее, что, если две формулы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  эквивалентны, то и двойственные им формулы  $\mathcal{A}^*$  и  $\mathcal{B}^*$  также эквивалентны. Понятие двойственности относится к ф-лам, в которых из логических операций встречаются только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Ф-ла  $\mathcal{A}^*$  наз. двойственной ф-ле  $\mathcal{A}$ , если она получена из  $\mathcal{A}$  заменой в ней везде операции конъюнкции на дизъюнкцию и дизъюнкции на конъюнкцию.

**ДВОЙСТВЕННОСТИ ТЕОРИЯ** в программировании линейном — теория, изучающая общие свойства пары тесно связанных между собой двойственных задач линейного программирования; используется для построения численных методов решения этих задач. Две задачи программирования линейного

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \Rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \\ & i = 1, \dots, m; \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n; \\ 2. \quad & \sum_{i=1}^m b_i u_i \Rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \geq c_j, \\ & j = 1, \dots, n; \quad u_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где все  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_j$  — заданные числа, а все  $x_j$ ,  $u_i$  — переменные этих задач, наз. двойственной (сопряженной) парой; каждая из задач наз. двойственной по отношению к другой. Свойство двойственной пары задач выражено в теоремах двойственности.

**Первая теорема.** Если оптим. план 1-й (2-й) задачи существует, то существует оптим. план другой из этих задач, при этом для произвольной пары допустимых планов  $X = (x_1, \dots, x_n)$  и  $U = (u_1, \dots, u_m)$  этих задач

выполняется неравенство  $\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i u_i$ , которое переходит в равенство, когда  $X$  и  $U$  являются оптим. планами соответствующих

задач. Если 1-я (2-я) задача не имеет допустимых планов и существуют допустимые планы 2-й (1-й) задачи, то линейная форма 2-й (1-й) задачи принимает сколько угодно большие по абс. величине отрицательные (положительные) значения. Если существуют допустимые планы 1-й (2-й) задачи, принимающие сколько угодно большие по абс. величине положительные (отрицательные) значения, то 2-я (1-я) задача не имеет допустимых планов.

**Вторая теорема.** Если  $X^*$  — оптим. план 1-й задачи, а  $U^*$  — оптим. план 2-й задачи, то компоненты этих планов связаны соотношениями

$$\left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^*\right)u_i^* = 0, \quad (1)$$

$$i = 1, \dots, m;$$

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij}u_i^*\right)x_j^* = 0, \quad (2)$$

$$j = 1, \dots, n.$$

Наоборот, если соотношения (1) и (2) выполняются для пары опорных планов  $X^*$ ,  $U^*$ , то эти планы оптимальны. Соотношения (1) и (2) служат критерием оптимальности текущего плана в большинстве методов решения задачи линейного программирования. Пусть  $X^*$  — опорный план 1-й задачи. Подставив его компоненты в ф-лы (1) и (2), вычислим вектор  $U^*$ . Если  $U^*$  — план 2-й задачи, из сказанного выше следует оптимальность пары  $X^*$ ,  $U^*$ .

Переменные 2-й (1-й) задачи можно рассматривать как множители Лагранжа для 1-й (2-й) задачи.

Пусть  $L(X, U)$  — функция Лагранжа:

$$L(X, U) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m u_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m u_i b_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i a_{ij} x_j.$$

Тогда планы  $X^*$  и  $U^*$  являются соответственно оптим. планами 1-й и 2-й задачи в том и только в том случае, если  $(X^*, U^*)$  является седловой точкой ф-ции  $L(X, U)$  при ограничениях  $X \geq 0$ ,  $U \geq 0$ . Если одна из задач двойственной пары представлена в общем виде, то пара двойственных задач записывается так:

$$3. \sum_{j=1}^n c_j x_j \Rightarrow \max; \quad 4. \sum_{i=1}^m b_i u_i \Rightarrow \min;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \geq c_j,$$

$$i = 1, \dots, m_1 \leq m; \quad j = 1, \dots, n_1 \leq n;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i = c_j,$$

$$i = m_1 + 1, \dots, m; \quad j = n_1 + 1, \dots, n;$$

$$x_j \geq 0, \quad u_i \geq 0,$$

$$j = 1, \dots, n_1 \leq n, \quad i = 1, \dots, m_1 \leq m.$$

Все перечисленные выше свойства 1-й и 2-й задачи сохраняются и для 3-й и 4-й задач. Соотношения (1) и (2) для задачи 3 — 4 переписываются в виде

$$\left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^*\right)u_i^* = 0, \quad (3')$$

$$i = 1, \dots, m_1 \leq m,$$

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i^*\right)x_j^* = 0, \quad (4')$$

$$j = 1, \dots, n_1 \leq n.$$

Теоремы двойственности лежат в основе построения и обоснования основных численных построений методов линейного программирования. Они в большой мере обобщены на случай программирования выпуклого и на бесконечномерный случай. Д. т. в линейном программировании тесно связана с *игр теорией*. Рассмотрение пары двойственных задач линейного программирования особенно характерно для экон. исследований. В частности, если 1-я задача является задачей максимизации производства однородного продукта при ограничениях на к-во ресурсов, то оптим. план 2-й задачи дает оценку стоимостей единиц ресурсов. Эти оценки играют большую роль в теории ценообразования.

Лит. см. к ст. Программирование линейное.

**ДВОЙСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ** — такие функции алгебры логики  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , что  $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ . Ф-ция  $f_2$  наз. двойственной к ф-ции  $f_1$ . Тогда очевидно, что и  $f_1$  будет двойственной ф-цией к ф-ции  $f_2$  и вообще двойственная ф-ция к двойственной ф-ции есть исходная ф-ция. В алгебре логики выполняется следующий принцип двойственности: если

$$\Phi(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{np_1}) = f(f_1(x_{11}, \dots, x_{1p_1}),$$

$$f_2(x_{21}, \dots, x_{2p_2}), \dots, f_n(x_{n1}, \dots, x_{np_n})),$$

то

$$\Phi^*(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{np_1}) = f^*(f_1^*(x_{11}, \dots, x_{1p_1}),$$

$$f_2^*(x_{21}, \dots, x_{2p_2}), \dots, f_n^*(x_{n1}, \dots, x_{np_n})),$$

где  $\Phi^*$ ,  $f^*$ ,  $f_1^*$ , ...,  $f_n^*$  — ф-ции, двойственные соответственно к  $\Phi$ ,  $f$ ,  $f_1$ , ...,  $f_n$ . Отсюда следует, что если  $f$  выражена через  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\neg$ , то для получения выражения двойственной к ней ф-ции  $f^*$  нужно всюду заменить  $\&$  на  $\vee$  и  $\vee$  на  $\&$ . Если в выражении для  $f$  встречались константы 0 и 1, то надо заменить 0 на 1, а 1 на 0. Напр., двойственной к ф-ции  $x \vee y$  является ф-ция  $x \& y$ , а двойственной к ф-цией  $\bar{x}$  является сама  $x$ .

**ДВОЙСТВЕННЫЙ ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД** — модификация градиентного метода Эрроу — Гурвица. Д. г. м. решает следующую задачу программирования выпуклого: найти

вектор  $x$ , максимизирующий  $\phi$ -цию  $f(x)$  при условии  $g(x) \geq 0$ . Пусть выполнены следующие условия: а)  $f(x), g_1(x), \dots, g_n(x)$  — выпуклые  $\phi$ -ции (кверху); б) существует вектор  $x^0$  такой, что  $g(x^0) > 0$ ; в)  $f(x)$  — строго выпуклая  $\phi$ -ция (кверху); тогда оптим. решение  $\bar{x}$  этой задачи единственно; г) для любого  $u \geq 0$  функция Лагранжа  $\varphi(x, u) = f(x) + (u, g(x))$  имеет конечный максимум по  $x$ . Тогда непрерывный двойственный градиентный процесс

$$\dot{u}_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } u_j(t) = 0, \quad q_j(x(t)) > 0, \\ u_j(0) \geq 0, & j = 1, \dots, m, \\ -g_j(x(t)) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где  $x(t) = x(u(t))$ , а  $x(u)$  находится из условия  $\varphi(x(u), u) = \max_x \varphi(x, u)$ , сходится к некоторой седловой точке  $(\bar{x}, \bar{u})$   $\phi$ -ции Лагранжа  $\varphi$ .

При реализации этого процесса на ЭЦВМ необходимо перейти к конечноразностному аналогу его. Конечноразностный двойственный градиентный процесс вида:  $u(t+1) = \max\{0, u(t) - \rho g(x(t))\}$ ,  $(t = 0, 1, 2, \dots)$ ,  $u(0) \geq 0$  с заданной скоростью изменения  $\rho > 0$  является устойчивым по отношению к  $u(t)$ . Эта устойчивость означает, что для любой начальной точки  $u(0) \geq 0$  и любого числа  $\varepsilon > 0$  существует число  $\rho_0 > 0$  такое, что для решения  $u(t)$  процесса при  $\rho \leq \rho_0$  существует целое число  $t_0$  со свойствами  $V(u(t+1)) < V(u(t))$  для  $0 < t < t_0$ ,  $V(u(t)) \leq \varepsilon$  для  $t \geq t_0$ , где  $V(u) = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} |u - \bar{u}|^2$ ,  $\bar{U}$  — мн-во векторов  $u$  таких, что  $(x, u)$  является седловой точкой  $\phi$ -ции Лагранжа  $\varphi(x, u)$ . Т. о., имеет место монотонная сходимость вектора  $u(t)$  к  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\bar{u} \in \bar{U}$ , а, значит, и сходимость вектора  $x(t)$  к произвольно малой окрестности точки  $\bar{x}$ . При выполнении условий а) — г) и условия непрерывности производных  $f_{xx}$  в случае линейности  $\phi$ -ции  $g(x)$  можно выбрать такой шаг  $\rho \leq \rho_0$ , что будет иметь место монотонная сходимость вектора  $u(t)$  к некоторому  $\bar{u} \in \bar{U}$ , а, значит, и вектора  $x(t)$  к оптим. решению задачи  $\bar{x}$ . Этим же методом может быть решена задача программирования линейного.

Осн. практическим недостатком указанной методики является трудность в определении заранее шага  $\rho_0$ . Однако эту трудность можно преодолеть, если рассмотреть процесс:  $u(t+1) = \max\{0, u(t) - \rho(t) \gamma(t) g(x(t))\}$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ),  $u(0) \geq 0$ , где  $\sum_{t=0}^{\infty} \rho(t) = \infty$ ,  $\sum_{t=0}^{\infty} \rho^2(t) = S < \infty$ ,  $\gamma(t) |g(x(t))| \leq k < \infty$ .

При этих условиях имеет место, вообще говоря, немонотонная сходимость вектора  $u(t)$  к вектору  $\bar{u} \in \bar{U}$ , а поэтому и вектора  $x(t)$  к  $\bar{x}$ .  
В. П. Гуленко.

**ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД**, метод последовательного уточнения оценок — метод решения задачи программирования линейного, в котором осуществляется направленное движение по опорным планам двойственной задачи до нахождения оптимального решения исходной задачи; формулируется в терминах исходной задачи. Д. с.-м. есть симплекс-метод для задачи, двойственной к исходной (см. Двойственности теория в программировании линейном).

В. А. Трубин.  
**ДВОЙСТВЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ МЕТОД** — один из оптимизации методов.

**ДВУПОЛЮСНИК КОНТАКТНЫЙ** — схема контактная с одним входным и одним выходным полюсами.

**ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА** — краевая задача, у которой ограничения и краевые условия заданы в двух точках.

**ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ВРЕМЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ** — см. Время моделирования действительное.

**ДЕКОДИРУЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО** — см. Дешифратор.

**ДЕКОМПОЗИЦИИ МЕТОД**, блочный метод — метод решения задачи линейного программирования, сводящий ее к решению последовательности задач меньшей размерности.

Д. м. разработаны в основном для сокращения числа обращений к внешней памяти ЦВМ при решении задач программирования линейного с большим числом переменных и ограничений. Другая область применения Д. м. — задачи, часть ограничений и переменных которых обладают какими-либо специфическими свойствами, которые позволяют применить для решения таких частных задач методы, являющиеся наиболее эффективными в каждом отдельном случае. При этом исходная задача с помощью Д. м. может быть сведена к решению последовательности задач меньшей размерности, каждая из которых решается с учетом ее специфических свойств. Впервые Д. м. был разработан американскими учеными Дж. Данцигом и Ф. Вулфом 1960. В их подходе к решению задачи движение осуществляется по опорным планам исходной задачи, при этом линейная форма изменяется монотонно. В Д. м. Данцига и Вулфа рассматривается задача линейного программирования, ограничения которой разделены на два блока, т. е. требуется найти максимум  $\phi$ -ции

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \max \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n A_j^0 x_j = B^0, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n A_j^1 x_j = B^1, \quad (3)$$

$$x \geq 0, \quad (4)$$

где  $C = (c_1, \dots, c_n)$  — вектор-строка,  $B = (B^0, B^1)^T = (b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots$

...,  $b_{m+m_1})^T$  —  $(m + m_1)$ -мерный вектор ограничения задачи,  $A_j = (A_j^0, A_j^1)^T = (a_{1j}, \dots, a_{mj}, a_{m+1j}, \dots, a_{m+m_1j})^T$  —  $(m + m_1)$ -мерный  $j$ -й вектор условий  $j = (1, \dots, n)$ ,  $T$  — знак транспонирования,  $X = (x_1, \dots, x_n)$  — вектор переменных. Пусть множество планов  $X$  системы (3—4) ограничено и  $X^1, \dots, X^N$  — все ее опорные планы. В случае неограниченности множества (3—4) принципиальных трудностей не возникает. Любой план  $X$  из (3—4) можно представить в виде линейной комбинации опорных планов

$$X = \sum_{v=1}^N \lambda_v X^v, \quad (5)$$

$$\sum_{v=1}^N \lambda_v = 1, \quad (6)$$

$$\lambda_v \geq 0, \quad v = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Подставляя ур-ние (5) в ур-ния (1—2), представим задачу (1—4) в новой форме

$$\sum_{v=1}^N \sigma_v \lambda_v = > \max \quad (8)$$

при ограничениях (6—7) и

$$\sum_{v=1}^N P^v \lambda_v = B^0, \quad (9)$$

где  $\sigma_v = (C, X_v)$ ,  $P_v = (A_1^0, \dots, A_n^0) X_v$ ,  $v = 1, \dots, N$ .

Задача (6—9) содержит  $(m + 1)$  ограничение вместо  $(m + m_1)$  в исходной задаче, зато число переменных  $N$  во много раз больше, чем  $n$ . Однако для решения задачи (6—9) Д. м. не нужно знать все векторы  $P^v$ . На каждом шаге достаточно иметь только  $(m + 1)$  векторов  $P^v$ , которые входят в текущий базис задачи. Проверка базиса на оптимальность и определение вектора, подлежащего включению в базис, производится путем решения вспомогательной задачи линейного программирования с условиями (3—4). Если матрица ограничений (3) имеет блочно-диагональную форму

$$A^1 = (A_1^1, \dots, A_n^1) = \begin{pmatrix} A^{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^{12} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A^{1r} \end{pmatrix},$$

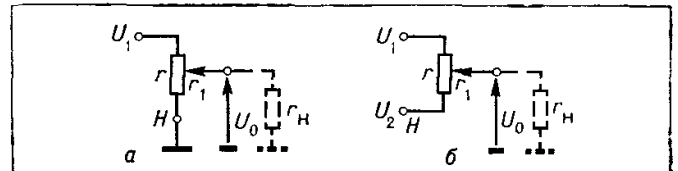
то вспомогательная задача распадается на  $r$  задач меньшего объема, что упрощает процедуру и сокращает время ее решения. Такой особенностью обладают, напр., матрицы транспортной задачи и ее обобщений, распределительной задачи и т. д.

Лит. см. к ст. Программирование линейное.

**ДЕЛЕЖ** в теории игр — вектор выигрышей игроков в игре кооперативной, удовлетворяющий некоторым первичным условиям «рациональности». Напр., доля каждого из игроков в распределении выигрыша не должна быть меньше, чем та сумма, которую он может

себе обеспечить самостоятельно; суммарная доля всех игроков должна быть равна подлежащей разделу сумме.

**ДЕЛИТЕЛЬ НАПРЯЖЕНИЯ** — устройство, в котором выходное и входное напряжения связаны коэффициентом передачи  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Распространенной разновидностью Д. н. является потенциометр, имеющий регулируемый резистивный элемент (см. АВМ электромеханическая). В качестве резистивных элементов Д. н. применяют углеродистые или металлические пленки. В аналоговой вычисл. технике



Схемы включения делителя напряжения.

применяют многооборотные (чаще всего 10- и 20-оборотные) проволоочные потенциометры.

Для ввода в решающие блоки постоянных коэфф. задачи Д. н. можно применять в соответствии с двумя осн. схемами включения (рис. а и б). В схеме (рис. а)  $U_0 = \alpha U_1$  (при  $r_H \rightarrow \infty$ ), на рис. б —  $U_0 = \alpha U_1 + (1 - \alpha) U_2$  (при  $r_H \rightarrow \infty$ ), где  $r$  — полное сопротивление делителя,  $r_1$  — выходное сопротивление, заключенное между подвижным и нижним контактами,  $\alpha = \frac{r_1}{r}$  — коэфф. передачи,  $U_1$  и  $U_2$  —

входные напряжения,  $U_0$  — выходное напряжение,  $r_H$  — сопротивление нагрузки. В большинстве случаев, в АВМ ввод этих коэфф. осуществляется путем непосредственного измерения напряжения на выходе Д. н. при подаче на вход соответствующего эталонного напряжения и при подключении к его выходу нагрузки.

**ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ**, функция Дирака,  $\delta(t)$  — функция, с помощью которой описывают импульс бесконечно малой длительности (мгновенный импульс) и бесконечно большой амплитуды. Этот импульс считается существующим только при значении аргумента, равном нулю. Интеграл функции в любых конечных пределах, включающих начало координат, т. е. площадь импульса, ограниченного

Д.-ф.,  $\int_{-a}^{+a} \delta(t) dt = 1$ . Как следует из самого определения Д.-ф.,

$$\int_{t-\tau-\varepsilon}^{t-\tau+\varepsilon} \delta(t-\tau) f(t) dt = f(\tau), \quad \varepsilon > 0,$$

где  $\tau$  — величина сдвига по времени,  $\varepsilon$  — интервал времени, если  $f(t)$  — непрерывна в окрестности  $\tau$ . В частном случае

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) f(t) dt = f(0).$$

Функции, обладающие таким свойством, получили название *обобщенных функций*. Существует ряд функций, напр.,  $\frac{1}{k\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{k^2}}$ , или

$\frac{k}{\pi} \frac{\sin^2 \frac{t}{k}}{t^2}$ , предельные значения которых при  $k \rightarrow 0$  дают Д.-ф.

С Д.-ф. можно производить те же операции, что и с обычными функциями. Интеграл от Д.-ф. по времени получил название *единичной функции* или *единичной скачкообразной функции*

$$\int_0^{+\infty} \delta(t - \tau) d\tau = 1 [t - \tau]. \text{ Д.-ф. широко}$$

используется в различных разделах *автоматического управления теорией*. Импульсная переходная функция, дискретизация непрерывной функции по времени, *автокорреляционная функция* сигнала типа *белого шума*, спектральная плотность гармонического колебания и др. связаны с использованием понятия Д.-ф.

Лит.: Харкевич А. А. Спектры и анализ. М., 1962 [библиогр. с. 235—236].

Б. Ю. Мандровский-Соколов.

**ДЕМОДУЛЯТОР**, *детектор* — устройство, осуществляющее демодуляцию (детектирование), т. е. операцию выделения полезного (модулирующего) сигнала из модулированных колебаний. При гармонической несущей в зависимости от вида *модуляции* различают амплитудные, частотные и фазовые Д. Аналогично при импульсной несущей (см. *Модуляция импульсная*) различают амплитудно-, широтно-, частотно- и фазо-импульсные Д. Как и *модулятор*, Д. обязательно содержит элементы — нелинейные или линейные, но с изменяющимися во времени параметрами.

На рис. изображены принципиальные схемы двух простейших амплитудных Д. — диодного кольцевого (а) и вибрационного (б); эти схемы Д. (синхронных детекторов) часто используются в *регуляторах экстремальных*, измери-

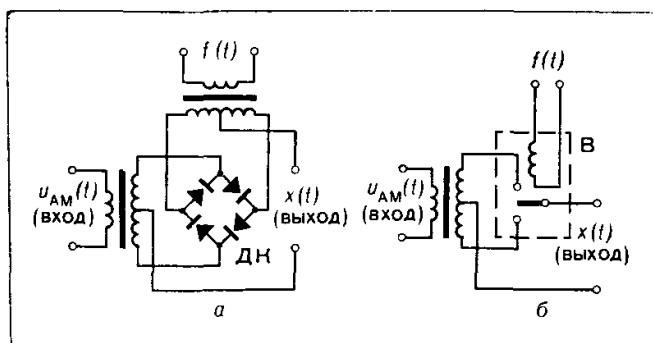
деленный с помощью Д. (выходной сигнал Д.). Диодный кольцевой Д. содержит существенно нелинейное звено — диодную кольцевую схему (ДК), а вибрационный — линейное звено с параметрами, периодически изменяющимися во времени, — вибратор В. Обе схемы обратимы и могут быть включены как модуляторы.

Д. широко применяют в различных отраслях техники, связанных с передачей или преобразованием сигналов (сообщений), в т. ч. в технике связи и автомат. регулировании, в измерительной технике, в цифровой и аналого-цифровой вычисл. технике и т. п.

Ю. Н. Чеховой.

**ДЕМПФИРОВАНИЕ** — гашение колебаний в динамической системе путем рассеяния (диссипации) энергии колебаний. В мех. колебательных системах потенциальная энергия аккумулируется в упругих элементах (пружинах), а кинетическая энергия — в массах инерционных элементов, в электрич. системах — в конденсаторах и катушках индуктивности соответственно. В мех. системах рассеяние энергии происходит вследствие наличия вязкого или сухого трения, а в электрич. — вследствие наличия в колебательном контуре активного (омического) сопротивления. Дифференциальное ур-ние простейшей колебательной системы записывается в общем виде:  $\tau^2 \ddot{x} + 2d\tau \dot{x} + x = 0$ , где  $d$  — относительный коэфф. гашения,  $\tau$  — величина, обратная круговой частоте собственных колебаний системы,  $x$  — отклонение от положения равновесия.

Д. колебаний количественно характеризуется величиной  $d$ . При  $d = 0$  в системе совершались бы незатухающие колебания (консервативная система). Если  $d < 1$ , колебания носят затухающий характер (диссипативная система). Критическим значением является  $d = 1$ , что соответствует срыву колебаний, т. е. режиму перехода от колебательных движений к апериодическим. При  $d > 1$  процессы в системе носят апериодич. характер. Характер движений в системе, описываемой дифф. ур-нием 2-го порядка в зависимости от величины  $d$  качественно характеризуется таблицей.



Принципиальные схемы амплитудных демодуляторов: а — диодного кольцевого; б — вибрационного.

тельных приборах и др. устройствах. Здесь  $u_{AM}(t)$  — амплитудно-модулированные колебания (входной сигнал Д.);  $f(t)$  — опорный гармонический сигнал, синхронный с несущими колебаниями;  $x(t)$  — полезный сигнал, вы-

Значения $d$	Характер движения
$d \leq -1$	Апериодический рост отклонения $x$
$-1 < d < 0$	Колебания с возрастающей амплитудой
$d = 0$	Незатухающие колебания с постоянной амплитудой
$0 < d < 1$	Затухающие колебания
$d \geq 1$	Апериодическое убывание отклонения $x$

Усилие, развиваемое демпфером (глушителем), напр., в мех. системах, действует в направлении, противоположном направлению вектора мгновенной скорости колеблющейся массы, по величине оно пропорционально этой скорости (т. е. первой производной смещения). С матем. точки зрения это приводит

к увеличению коэффициента при первой производной в приведенном ур-нии, т. е. к увеличению  $d$ , а с физической — к увеличению рассеяния энергии колебаний. Для Д. колебаний в замкнутых системах автом. регулирования применяют введение первой производной ошибки в *регулирования закон*. А. А. Тумик.

«ДЕРЕВО» в теории графов — связный граф без циклов (см. *Графов теория*). Наиболее важные характеристические свойства «Д.» выражены следующими шестью равносильными друг другу высказываниями:  $\kappa(L) = 1$  и  $\lambda(L) = 0$  (определение «Д.»);  $\lambda(L) = 0$  и  $m(L) = n(L) - 1$ ;  $\kappa(L) = 1$  и  $m(L) = n(L) - 1$ ; для любой пары вершин  $x, y$  в  $L$  существует одна и только одна цепь, соединяющая  $x$  с  $y$ ;  $\kappa(L) = 1$ , но если из  $L$  удалить любое ребро, то для полученного графа  $L^-$  будет  $\kappa(L^-) = 2$ ;  $\lambda(L) = 0$ , но если к  $L$  добавить любое ребро (не добавляя вершин), то у полученного графа  $L^+$  будет  $\lambda(L^+) = 1$ . Здесь  $L$  — произвольный граф,  $n(L)$  — к-во его вершин,  $m(L)$  — к-во ребер,  $\kappa(L)$  — к-во компонент,  $\lambda(L)$  — цикломатическое число.

Произвольный граф без циклов часто наз. лесом (поскольку каждая его компонента — «Д.»). Ордеру, растущее из  $x_0$ , — это «Д.», в котором выделена одна вершина  $x_0$  («корень»), а ребра ориентированы т. о., что все цепи, начинающиеся в  $x_0$ , являются путями (т. е. их дуги ориентированы в направлении обхода). А. А. Зыков.

«ДЕРЕВО» КОНТАКТНОЕ с  $n$  реле — схема контактная с одним входным полюсом,  $2^n$  выходными полюсами и  $2^{n+1} - 2$  переключаемыми контактами. Служит для реализа-

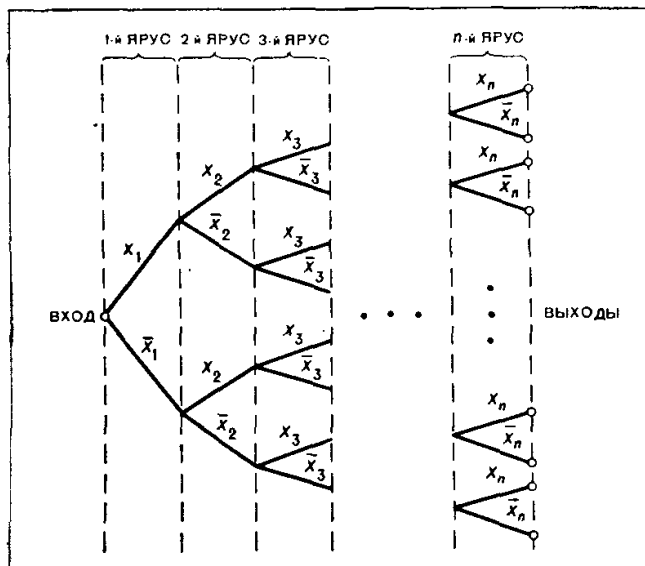


Схема контактного «дерева», составленного из  $n$  реле.

ции всех  $n$ -членных конъюнкций  $n$  булевых переменных. Каждая конъюнкция реализуется между входом и каким-нибудь выходом. По замкнутой цепи, установившейся между входом и одним из выходов, можно выяснить, какая из  $2^n$  комбинаций сигналов подана на

реле схемы. «Д.» к. с  $n$  реле состоит из  $n$  ярусов (рис.). В  $i$ -ом ярусе ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), считая от входа, содержится  $2^i$  контактов. «Д.» к. наз. стандартным, если каждое реле управляет контактами только одного яруса.

«Д.» к. обладает следующим свойством разделительности: каждая цепь, соединяющая некоторые два выходных полюса, содержит замыкающий и размыкающий контакты одного реле и поэтому имеет нулевую проводимость. Если в «Д.» к. объединить некоторые выходы, то между входом и полученным выходом будет реализовываться булева функция, являющаяся дизъюнкцией соответствующих конъюнкций. «Д.» к. используют при синтезе различных схем релейно-контактных; его можно использовать и в качестве дешифратора. См. также *Релейно-контактных схем теория*.

Лит.: Коршунов А. Д. О нижних оценках сложности контактных схем, реализующих попарно ортогональные функции алгебры логики. В кн.: *Дискретный анализ*, в. 2. Новосибирск, 1964; Мур Э. Ф. Минимальные полностью декодирующие контактные схемы. В кн.: *Кибернетический сборник*, № 6, М., 1963. А. Д. Коршунов.

ДЕСКРИПТОР — единица информационно-поискового языка, соответствующая определенному понятию. Д. используют в составе поисковых образов для описания части основного смыслового содержания документа или запроса. Д. ставится в однозначное соответствие группе *ключевых слов* естественного языка, отобранных из текста определенной области знания для построения дескрипторного языка и эквивалентных по смыслу в пределах сферы действия определенной *информационно-поисковой системы* (такую группу слов наз. *классом условной эквивалентности*). Условия эквивалентности выбирают в зависимости от практических требований к данной информационно-поисковой системе. Д. служит в *языке информационно-поисковом* переводом любого ключевого слова из соответствующего класса условной эквивалентности, поэтому в дескрипторном словаре в качестве имени Д. может быть выбрано любое (предпочтительно наиболее часто используемое или короткое) ключевое слово или словосочетание этого класса или же цифровой код. Многозначному слову естественного языка соответствует несколько Д., а нескольким синонимичным словам и выражениям отвечает один Д. Омонимия ключевых слов в дескрипторных словарях устраняется при помощи отсылочных помет к соответствующим Д. Между Д. в соответствии с объективно существующими отношениями между понятиями устанавливаются *отношения парадигматические* (в частности, родо-видовые и ассоциативные), что указывается в дескрипторных словарях (*информационно-поисковых тезаурусах*) и используется в дескрипторных языках для увеличения семантических возможностей информационно-поискового языка и для уменьшения потерь при информационном поиске. Термин «Д.» предложил и впервые использовал в 1948—50 амер. математик К.-Н. Муэрс.

Н. А. Куземская.



**ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ** — системы, процессы в которых взаимосвязаны так, что можно проследить цепь причин и следствий. Детерминизм тесно связан со степенью организации системы. К Д. с. относятся, напр., системы автомат. управления, состоящие из элементов, у которых каждому значению входных воздействий отвечают вполне определенные значения выходных переменных, скорости и ускорения их изменения. Такие элементы описываются в статическом режиме — алгебраическими, а в динамических режимах — дифференциальными или интегральными уравнениями. Противоположными относительно Д. с. являются стохастические (вероятностные) системы, в которых нет определенного соотношения между входами и выходами, а можно установить только некоторые вероятностные соотношения между ними. Многие «сложные» системы, состоящие из большого числа детерминированных подсистем со случайными связями между ними, должны быть отнесены к классу индетерминированных.

А. Г. Ивахненко.

**ДЕШИФРАТОР** (и з б р а т е л ь н а я с х е м а) — логическое устройство, которое преобразует (расшифровывает) код числа, поступившего на его входы, в сигнал на одном из его выходов. Если число представлено в виде  $n$  двоичных разрядов, то Д. должен иметь  $m = 2^n$  выходов. Д. используются в *цифровых вычислительных машинах* (ЦВМ) и устройствах для выдачи сигналов в различные цепи управления в зависимости от комбинаций входных сигналов (напр., для преобразования кода операции в управляющий сигнал). С помощью Д. производится расшифровка *адресов* ячеек запоминающих устройств, входных и выходных каналов устройств связи с объектами цифровых управляющих машин, каналов связи в автоматизированных системах передачи информации и т. д.

Д. принято характеризовать экономичностью, определяемой методом построения его схемы и типами составляющих его элементов, временем, затрачиваемым на расшифровку кода числа, и надежностью работы. Для построения Д. используются полупроводниковые диоды (см. *Диодные логические элементы*), триоды, ферритовые сердечники с прямоугольной петлей гистерезиса, а также логические элементы различных систем (феррит-транзисторные, диодно-трансформаторные, потенциальные и др.). В зависимости от типа используемых элементов различают Д. потенциальные (статические) и импульсные (динамические). Д. любой сложности могут быть собраны из логических элементов трех основных типов — «И», «ИЛИ», «НЕ». При построении схем Д. следует стремиться к минимизации количества логических элементов и усилителей, а также к обеспечению нужного быстродействия электронного блока данного функционального назначения. По принципу действия Д. могут быть параллельными, последовательными либо параллельно-последовательными. Такая классификация учитывает способ

подачи на входы Д. кодов чисел. Д., расшифровывающие параллельный код, строятся по линейной «прямоугольной» или «пирамидальной» схеме. Указанные типы схем различаются количеством используемых элементов и нагрузкой на различных входах. Две последние разновидности схем являются двух- или многоступенчатыми, они более экономичны и их целесообразно использовать при большом количестве входных переменных. Последовательные Д. обычно используются при ограниченном количестве комбинаций входных

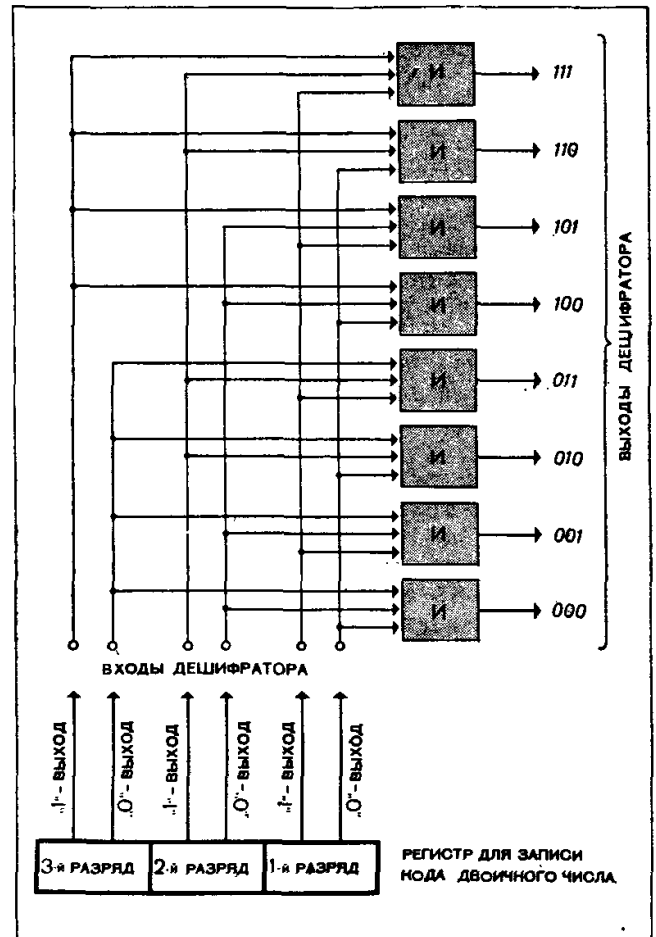


Схема дешифратора для расшифровки кодов трехразрядных двоичных чисел.

переменных, т. к. при большом количестве переменных их схемы очень сложны и громоздки. Параллельно-последовательные Д. строят в тех случаях, когда одна часть входных переменных запоминается на триггерах, а другая поступает непосредственно на входы схем совпадений (элемент «И» на рисунке). См. также *Блоки ЦВМ типовые*.

Лит.: Дроздов Е. А., Пятибратов А. П. Автоматическое преобразование и кодирование информации. М., 1964 [библиогр. с. 539—541]; Анисимов Б. В., Четвериков В. Н. Основы теории и проектирования цифровых вычислительных машин. М., 1965 [библиогр. с. 480]; Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [библиогр. с. 299—301].

В. М. Египко.

**ДЕШИФРОВКА ТЕКСТОВ** — определение неизвестной системы письма и содержания представленных на этом языке текстов.

Различают Д. т., написанных на известном языке, когда тексты специально зашифрованы, и дешифровку исторических письменностей на неизвестных языках. В первом случае поиск ключа к коду основывается на сравнении статистики знаков в тексте и в известном языке; во втором — используются принципиально иные методы, опирающиеся на общелингвистические принципы и сравнение с предполагаемыми родственными языками.

Д. т. исторических письменностей — это восстановление понимания забытых письменностей и языка. Она заключается в определении системы письма, фонематической и грамматической структур, а также содержания исторических текстов. При этом возникают ситуации, когда письмо не известно, но известно позднейшее состояние языка дешифрованного текста (древне-персидская клинопись, древнеегипетское иероглифическое письмо, майяское иероглифическое письмо). В других случаях тексты известного письма составлены на неизвестном языке (этруские тексты, хеттские клинописные тексты, клинописные надписи Урарту). Известные Д. т. 19 в. были основаны на использовании билингвы — двуязычного текста. Наиболее известные Д. т. 20 в.: хеттская клинопись (Б. Грозный, 1915), крито-микенское линейное слоговое письмо класса Б (М. Вентрис, Дж. Чедвик, 1952), иероглифическое письмо майя (Ю. В. Кнорозов, 1955) были осуществлены без билингвы. В последних двух случаях для анализа неизвестной письменности были разработаны и применены статистико-позиционные методы, позволяющие разделить служебные и корневые морфемы по их взаимной сочетаемости и тем самым получить существенную информацию о грамматическом строе языка и о возможных языках-аналогах, которые могут помочь определить содержание текстов. Статистико-позиционный метод, как основа машинной дешифровки, систематически изложен в монографии Ю. В. Кнорозова. Осуществлен машинный анализ киданьской письменности и протоиндийских надписей (М. А. Пробст). Для первой получены важные грамматические характеристики и установлена аналогия с урало-алтайскими языками. Для второй — машинная обработка текстов помогла лингвистам установить аналогии с дравидийскими языками.

Лит.: Кнорозов Ю. В. Письменность индейцев майя. М. — Л., 1963 [библиогр. с. 638—653]; Шрейдер Ю. А. Значение методов формального исследования исторических письменностей. «Проблемы передачи информации», 1967, т. 3, в. 4; Пробст М. А. О точных методах исследования конструкции текста. «Кибернетика», 1966, № 1; Шеворошкин В. В. Звуковые цепи в языках мира. М., 1969.

А. А. Белецкий, Ю. А. Шрейдер.

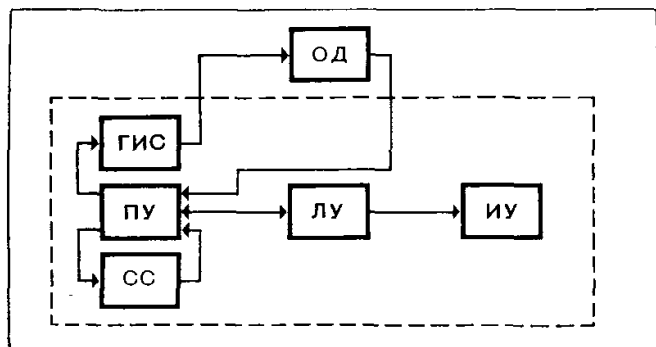
**ДИАГНОСТИКА АВТОМАТИЧЕСКАЯ** — автоматическое получение и обработка информации о состоянии технических систем с целью обнаружения их неисправностей и выявления тех элементов, ненормальное функционирование которых привело (или может привести) к возникновению неисправностей. Рост сложности современных тех. систем значительно

опережает по темпам рост их надежности, и это приводит к снижению среднего времени между отказами и к увеличению времени вынужденного простоя, поэтому проблема создания общих методов синтеза систем автомат. диагностики (САД) и разработки оптим. алгоритмов их функционирования является актуальной. Осн. задачами, возникающими при этом, являются: разработка принципов анализа тех. систем с точки зрения диагностики их состояния; разработка методов построения оптим. программ диагностики состояния сложных тех. систем; разработка принципов конструирования и реализации САД. Первая задача предполагает эмпирическое исследование реальных тех. систем, выступающих в качестве объектов диагностики, с целью выделения возможных неработоспособных состояний, возможных проверок и нахождения связи между возможными состояниями и исходами отдельных проверок, сбора статистических материалов о распределении вероятностей отдельных состояний системы, о затратах на выполнение проверок и т. д. Полученные сведения служат исходными данными при решении задачи построения оптим. программ диагностики. Решение этой задачи предполагает выделение некоторой миним. совокупности проверок, достаточной для различения всех состояний (построение теста), и составления определенной последовательности (программы) проведения проверок, входящих в тест. При решении этих задач широко используется матем. аппарат алгебры логики, вероятностей теории, различные методы принятия решений и направленного поиска (линейное и динамическое программирование, игра теория и т. п.).

Оптим. программа диагностики служит основой при проектировании САД, т. к. программа определяет в основном структуру и алгоритм функционирования этой системы. От выбранной программы существенно зависят такие осн. показатели САД, как сложность, надежность, габариты, вес, стоимость, достоверность результатов диагностики, а также время, затрачиваемое на диагностику состояния обследуемой тех. системы. Полная автоматизация процесса диагностики позволяет повысить готовность диагностируемых систем, сократить количество обслуживающего персонала и снизить требования к его квалификации. К осн. принципам конструирования САД относятся еще такие два: универсальность, т. е. возможность применения одних и тех же САД для диагностики целых классов тех. систем, и самопроверка САД, поскольку современные САД являются достаточно сложными и, следовательно, могут оказаться неисправными. Чтобы обеспечить универсальность диагност. систем, делают стандартные узлы и подсистемы, из которых можно создавать САД с различными характеристиками. Помимо этого универсальность достигается преобразованием контролируемых сигналов в дискретную форму, что позволяет осуществлять их дальнейшую переработку посредством ЭЦВМ. Применение принципа универсальности позволяет

снизить количество возможных САД и их стоимость.

В качестве примера на рис. представлена одна из возможных блок-схем САД для автомат. диагностики объекта диагностики ОД. Программное устройство ПУ в соответствии с заложенной в него программой диагностической в определенные моменты времени выдает сигнал в блок генераторов испытательных сигналов ГИС, вследствие чего срабатывает один из генераторов. Вырабатываемый в ГИС калиброванный испытательный сигнал поступает



Блок-схема системы автоматической диагностики.

в соответствующую цепь обследуемой системы ОД. Логич. устройство ЛУ, работающее по командам ПУ, обеспечивает: сравнение с учетом допусков сигнала, характеризующего ответную реакцию ОД, с его номинальным значением; анализ результатов сравнения и выработку сигналов типа «в норме», «не в норме»; определение места неисправности; подачу сигналов на продолжение или прекращение проверок и на индикаторное устройство ИУ, служащее для индикации результатов диагностики. Исправность САД определяется с помощью входящей в нее системы самопроверки СС, которая выдает заранее известные выходные сигналы реакции на типовые входные сигналы. В логич. устройстве эти сигналы сравниваются со стандартными сигналами, задаваемыми программным устройством.

Существующие САД различаются: по целевому назначению — системы для контроля работоспособности ОД, поиска неисправностей в ОД и для диагностики состояния (т. е. и для контроля работоспособности, и для поиска неисправностей ОД); по возможности изменения алгоритма функционирования — системы с жесткой программой и с гибкой программой; по виду обрабатываемой информации — аналоговые и дискретные; по воздействию на ОД — активные, использующие ГИС для получения диагностической информации, и пассивные, использующие датчики, встроенные в ОД; по конструктивной связи с ОД — внешние САД, конструктивно не связанные с ОД, и встроенные САД, конструктивно связанные с ОД (отдельные элементы и блоки САД могут быть встроены в ОД). См. также *Диагностика неисправностей ЦВМ, Диагностирование сложных технических комплексов, Тесты*.

Лит.: Мозгалецкий А. В. [и др.]. Автоматический поиск неисправностей. Л., 1967 [библиогр.

с. 262—263]; Вержаков Г. Ф. [и др.]. Введение в техническую диагностику. М., 1968 [библиогр. с. 220—223]; Гайденоко В. С. [и др.]. Основы построения автоматизированных систем контроля сложных объектов. М., 1969 [библиогр. с. 471—476]; Пархоменко П. П. О технической диагностике. М., 1969; Кузнецов П. И., Пчелинцев Л. А., Гайденоко В. С. Контроль и поиск неисправностей в сложных системах. М., 1969 [библиогр. с. 233—238]. Г. Ф. Вержаков.

**ДИАГНОСТИКА НЕИСПРАВНОСТЕЙ ЦВМ** — методы обнаружения неисправностей в цифровой вычислительной машине (ЦВМ) по признакам, характеризующим те или иные нарушения правильности ее функционирования. Обнаружение неисправностей в ЦВМ осуществляется путем контроля правильности работы ее оборудования с использованием соответствующих алгоритмов поиска неисправностей.

Различают следующие виды диагностического контроля: программный (ПДК), аппаратный (АДК) и программно-аппаратный (ПАДК). Каждый вид диагностического контроля с различной эффективностью позволяет локализовать неисправности, возникающие в ЦВМ, и, в общем случае, является продолжением контроля работоспособности ЦВМ.

При программном диагностическом контроле (см. *Контроль программный*) методы обнаружения неисправностей в ЦВМ реализуются программными средствами. Этот контроль осуществляется с помощью испытательных программ, которые располагаются в запоминающем устройстве контролируемой машины и обеспечивают поиск неисправностей путем выполнения команд ЦВМ и анализа получаемых при этом результатов. Испытательная программа вместе с соответствующими исходными данными позволяет с определенной вероятностью обнаружить элемент машины, обладающий физ. неисправностью, или группу элементов, среди которых находится неисправный элемент. В такой программе команды, при выполнении которых работают элементы контролируемой схемы и по результатам выполнения которых выявляется неисправность, принято считать основными. Все остальные команды рассматриваются как вспомогательные. Надежность испытательной программы представляется вероятностью того, что любая неисправность из числа обнаруживаемых программой не повлияет на выполнение вспомогательных команд программы и на работу элементов, функционирующих при ее выполнении, но не относящихся к контролируемой схеме.

Для поиска неисправностей в ЦВМ обычно применяют систему испытательных программ, включающую две системы подпрограмм: контролирующие и диагностические. Осн. назначение контролирующей подпрограммы — обнаружение неисправности в контролируемой схеме. Если на основании информации, полученной в результате выполнения контролирующей подпрограммы, можно установить местонахождение неисправного элемента, производится устранение неисправности. Если же эта информация оказывается недостаточной для нахождения места неисправности, осуществляется

переход к выполнению диагностической подпрограммы, реализующей алгоритм поиска неисправностей и предназначенной для определения и указания того элемента, в котором имеется физ. неисправность (см. *Программа диагностическая*). Опыт показывает, что диагностические подпрограммы обладают низкой надежностью, т. к. позволяют обнаружить место только тех неисправностей, которые не приводят к ошибкам, влияющим на правильность выполнения собственно диагностической подпрограммы. Доля оборудования, отказы которого приводят к ошибкам, влияющим на правильность выполнения диагностической программы, при этом бывает весьма значительной.

Достоинства ПДК — отсутствие необходимости изменения структуры ЦВМ и дополнительного контролирующего оборудования. Осн. недостатки ПДК: невысокая точность нахождения места неисправности и недостаточный охват контролем узлов ЦВМ, значительный объем испытательных программ, вызывающий трудности при их вводе в машину и хранении.

При аппаратном диагностическом контроле методы обнаружения неисправностей в ЦВМ реализуются с помощью специального контролирующего оборудования. Примером АДК является использование модуля с индикацией неисправностей, который представляет собой электронную схему, способную осуществлять индикацию собственного отказа в работе. Простейшим примером модулей с индикацией неисправностей являются зарезервированные функциональные элементы, имеющие схему сравнения вых. величин. Недостатки средств АДК, в которых применяются модули с индикацией неисправностей, заключаются в трудностях технической реализации их. Другим видом АДК является аппаратно-логический контроль, при котором контролируемое оборудование разделяется на группы, для каждой из которых разрабатывается методика проверки и контролирующая схема, реализующая эту методику. В соответствии с выбранной методикой контролирующая схема обеспечивает выработку и подачу на контролируемую схему необходимых входных сигналов, а также прием и анализ выходных сигналов контролируемой схемы и индикацию номера неисправного элемента при обнаружении неисправности. Аппаратно-логический контроль является эффективным, поскольку он охватывает значительную часть оборудования ЦВМ и обладает высокой точностью нахождения места неисправности в контролируемых узлах. Недостатком этого вида АДК является необходимость введения новых элементов и связей в структуру ЦВМ. Аппаратный контроль применяется также для проверки правильности вычислений в процессе работы ЦВМ (напр., контроль по модулю) и позволяет с определенной эффективностью обнаруживать возникающие неисправности. При контроле по модулю в разрядную сетку машины вводятся дополнительные разряды, которые служат для хране-

ния информации, позволяющей обнаружить ошибки в словах машины. Простейшим видом контроля по модулю является контроль по четности: к двоичному коду слова прибавляется 1 или 0 (помещаемые в дополнительный разряд) так, чтобы сумма цифр всех разрядов нового кода по модулю 2 была равна нулю. Неравенство нулю этой суммы свидетельствует о наличии ошибки в коде слова.

Программно-аппаратный диагностический контроль представляет собой сочетание двух предыдущих видов диагностического контроля. ПАДК считается наиболее эффективным и перспективным. Он обеспечивается с помощью диагностических программ, расположенных в памяти машины, и дополнительного (по отношению к основной структуре ЦВМ) оборудования. В некоторых вариантах ПАДК аппаратная часть осуществляет обнаружение неисправностей с точностью до узла или блока цифровой машины, а диагностические программы — поиск неисправностей в отказавшем узле или блоке. В других вариантах ПАДК в структуру ЦВМ вводятся дополнительные элементы и связи, обеспечивающие расширение исходного перечня команд и создание в ЦВМ спец. режимов работы. При этом аппаратные средства обеспечивают возможность работы ЦВМ обычного (макропрограммного) типа в режиме микропрограммного управления. Использование микропрограммных режимов работы позволяет расширить область применимости диагностических программ и довести точность нахождения места неисправности до отдельных функциональных элементов. Недостатки этого вида контроля связаны с необходимостью учета требований диагностического контроля к структуре машины и ее конструкции. ПАДК может быть осуществлен также с помощью оборудования, автономного по отношению к основному машинному оборудованию. Средством автономного контроля может служить вычислительная машина, анализирующая правильность работы другой машины. Автономный контроль можно осуществлять и с помощью специализированных контролирующих устройств, реализующих определенную методику проверки правильности работы узлов контролируемой ЦВМ. Примером такого устройства может служить устройство контроля и автоматического поиска неисправности логических схем, реализующее метод диагностики таблиц. Согласно этому методу анализ схемы производится путем сравнения ее реакций на различные комбинации входных сигналов с реакциями исправной схемы и последующего сопоставления всех результатов сравнения. Схема ЦВМ разбивается на ряд контролируемых участков. Для каждого участка составляются тест, диагностическая таблица и обеспечивается возможность подключения контролирующего устройства к входам и выходам (контрольным точкам) соответствующего узла машины. Проверка узла сводится к выполнению теста. При обнаружении отказа неисправная часть узла определяется по диагностической таблице.

Лит.: К л я м к о Э. И. Схемный и тестовый контроль автоматических цифровых вычислительных машин. М., 1963 [библиогр. с. 191]; М и р о н о в Г. А. Испытательные программы для контроля электронных цифровых машин. М., 1964 [библиогр. с. 266—267]; Диагностика неисправностей вычислительных машин. М., 1965; П у т и н ц е в Н. Д. Аппаратный контроль управляющих цифровых вычислительных машин. М., 1966 [библиогр. с. 417—418]; С и д о р о в А. М. Методы контроля электронных цифровых машин. М., 1966 [библиогр. с. 160]; В о л к о в А. Ф., В е д е ш е н к о в В. А., З е н к и н В. Д. Автоматический поиск неисправностей в ЦВМ. М., 1968 [библиогр. с. 144—146]. Л. А. Корытная.

**ДИАГНОСТИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ**, техническая диагностика — контроль, проверка и прогнозирование технического состояния, как правило, сложных технических комплексов, функционирование которых происходит в пределах заданного класса режимов или алгоритмов, и аппаратная реализация этих процедур. Диагностирование состояний и неисправностей во всевозможных мех., энерг., радиотех. и радиоэлектронных устройствах, блоках автомат. телеф. станций, ЦВМ и вычисл. комплексах — характерные примеры диагн. процедур. Решение задачи диагностирования в сложных системах предусматривает в каждом конкретном случае построение модели математической объекта, выбор и оптимизацию диагн. процедур, а также реализацию их в виде тех. устройств либо программ для ЦВМ.

Класс методов, разработанных для решения осн. задач диагностирования в сложных тех. системах, основывается на различных разделах матем. и дискретного анализа, операций исследования, программирования математического, статистической динамики и эвристических приемов. Осуществимость диагн. процедур и средств их реализации потребовала разработки спец. разделов современной математики — теории тестов, теории вопросников и др.

Исходной задачей в разработке оптимальных диагн. процедур является построение матем. модели проверяемого тех. комплекса (объекта). Для определенного класса тех. комплексов модель объекта контроля может быть представлена как автомат конечный

$$\begin{aligned} Z^{\tau} &= f(X^{\tau}, Y^{\tau}), \\ Y^{\tau+1} &= h(W^{\tau}, Y^{\tau}), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $X$  — входные,  $Y$  — внутренние,  $Z$  — выходные векторы координат;  $\tau$  определяет момент времени (такт). По описанию модели объекта строится таблица переходов (рис. 1). Внешний входной набор  $x_1^{\tau}, \dots, x_n^{\tau}$  при внутреннем входном состоянии  $y_1^{\tau}, \dots, y_m^{\tau}$  переводит конечную динамическую систему в состояние, представленное внутренним входным состоянием  $y_1^{\tau+1}, \dots, y_m^{\tau+1}$ , которому предшествовал внешний выходной набор  $z_1^{\tau}, \dots, z_k^{\tau}$  и внутреннее выходное состояние  $w_1^{\tau}, \dots, w_l^{\tau}$  в момент  $\tau$ . Построение программ проверки выполняется по результатам анализа объекта в исправном и неисправном состоянии. Как состояние (1), так и неисправности  $s_j$  задаются

формальным способом. В результате строятся ф-ции

$$\Psi_0 = \Psi_0(\Lambda, \tau) \text{ и } \Psi_i = \Psi_i(\Lambda, \tau),$$

реализуемые соответственно исправным и неисправным (в  $i$ -неисправном состоянии) тех. комплексами. Аргумент  $\Lambda$  представляет собой управляющие воздействия на объект, а сама ф-ция  $\Psi$  — выполняемые объектом действия. Когда в объекте имеется неисправность вида  $s_i$ , он реализует известную ф-цию  $\Psi_i = \Psi_i(\Lambda, \tau)$ , заданную в том же множестве  $T$

$Z^{\tau}, W^{\tau}, Y^{\tau+1}$	$Y^{\tau}$			1
	...	$y_1^{\tau}, \dots, y_m^{\tau}$	...	
$X^{\tau}$	$x_1^{\tau}, \dots, x_n^{\tau}$	...	$z_1^{\tau}, \dots, z_k^{\tau}; w_1^{\tau}, \dots, w_l^{\tau}; y_1^{\tau+1}, \dots, y_m^{\tau+1}$	...
$Y^{\tau}$	$y_1^{\tau}, \dots, y_m^{\tau}$	...	$z_1^{\tau}, \dots, z_k^{\tau}; w_1^{\tau}, \dots, w_l^{\tau}; y_1^{\tau+1}, \dots, y_m^{\tau+1}$	...

$R$	$E$					2
	$\Psi_0$	...	$\Psi_i$	...	$\Psi_M$	
$t_1$	$r_{01}$	...	$r_{i1}$	...	$r_{M1}$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
$t_j$	$r_{0j}$		$r_{ij}$		$r_{Mj}$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
$t_{(T)}$	$r_{0(T)}$		$r_{i(T)}$		$r_{M(T)}$	

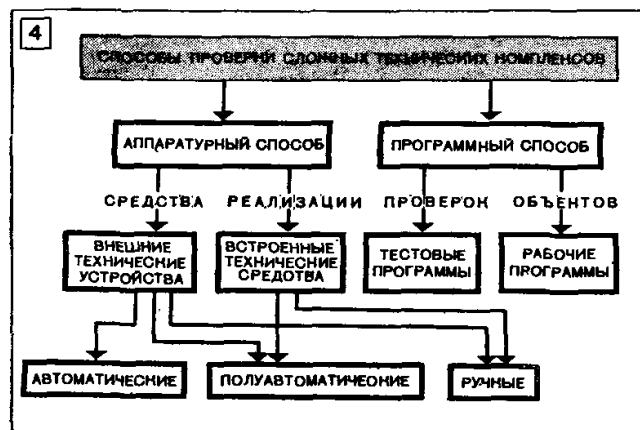
$A$	$p$			3
	...	$p_{ik}$	...	
$t_1$	...	$a_{ik,1}$	...	
$\vdots$				
$t_j$	...	$a_{ik,j}$	...	
$\vdots$				
$t_{(T)}$	...	$a_{ik,(T)}$	...	

и принимающую значения из того же мн-ва  $R$ ,  $r_{ij} = \Psi_i(t_j)$ , что и ф-ция  $\Psi_0$ , реализуемая исправным объектом. Отдельные проверки объекта  $t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, |T|$  и их результаты  $r_{ij} \in R$  однозначно соответствуют ф-циям  $\Psi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, M$ , и это дает возможность строить таблицы функций неисправностей (рис. 2). Следующим этапом является построение формального решающего правила проверки работоспособности объекта и локализации неисправностей. Оно строится на различии пары ф-ций  $\Psi_i$  и  $\Psi_k$ ,  $i, k = \{0, 1, \dots, M\}$ ,  $i \neq k$

при данной проверке  $t_j$  по соотношению  $a_{ik}$ ,  $i \in A$ , принимающему два значения

$$a_{ik,j} = \begin{cases} 1, & \text{для } \Psi_i(t_j) \neq \Psi_k(t_j) \\ 0, & \text{во всех др. случаях.} \end{cases}$$

Из мн-ва  $M$  ф-ций  $\Psi_i$  для всех возможных пар  $p_{ik} \in P$  строится таблица покрытий (рис. 3), в которой различающими элементами (относительно пар  $\Psi_i$  и  $\Psi_k$ ) являются проверки  $t_j \in T$ . Различающая совокупность элементов



мн-ва  $T$  определяет класс безусловных программ проверки тех. комплекса.

Для решения задач диагностирования в непрерывных системах, их матем. описание необходимо представить в виде модели конечной динамической системы. Разработанные программы являются основой для выбора или разработки тех. средств реализации программ проверки.

Реализация программ проверки наиболее эффективна при использовании автомат. (специализированных или универсальных) средств проверки объекта контроля и представляет диагностику автоматическую. Универсальные автомат. средства, работающие по сменной программе, пригодны для проверки определенного класса объектов контроля. Одним из таких средств является универсальная машина «ПУМА», охватывающая несколько десятков тысяч точек связи с объектом контроля. Одна из возможных классификаций способов и средств проверки сложных тех. комплексов приведена на рис. 4. Диагностирование состояний и неисправностей в сложных тех. комплексах является неотъемлемой частью их функционирования. Поэтому оптимизация диагн. процедур и их эффективная реализация автомат. средствами могут быть решены комплексно в процессе синтеза самого объекта.

Лит.: Чергис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т 51; Пархоменко П. П. О технической диагностике. М., 1969; Гайденов В. С. [и др.]. Основы построения автоматизированных систем контроля сложных объектов. М., 1969 [библиогр. с. 471—476]; Кузнецов П. И., Пчелинцев Л. А., Гайденов В. С. Контроль и поиск неисправностей в сложных системах. М., 1969 [библиогр. с. 233—238].

К. Д. Жуук.

**ДИАЛОГА РЕЖИМ** — режим работы человека с вычислительной машиной, для которого характерным является периодическое повторение цикла, включающего выдачу машине задания, получение ответа и анализ ответа. Д. р. обеспечивается работой человека с вычислительной машиной посредством индивидуальных пультов. Д. р. предполагает решение таких задач, программа которых в момент начала решения может быть не полностью известна; человек следит за осуществлением процесса обработки в вычисл. машине, фиксирует те или иные промежуточные результаты и по ходу решения задачи выдает машине инструкции, управляя ее работой. Таким образом, Д. р. реализует наиболее естественное, с психологической точки зрения, взаимодействие человека с вычислительной машиной.

Для эффективной реализации Д. р. необходимо, чтобы среднее время реакции машины, т. е. среднее время между вводом задания и получением ответа, было достаточно малым (обычно оно составляет от долей секунды до нескольких секунд). Д. р. применим при использовании средств вычислительной техники пользователями — специалистами различных областей науки и техники, т. к. в этом случае пользователь решает свою задачу сам, без помощи посредника-программиста. Д. р. особенно эффективен при решении творческих задач, таких как доказательство теорем, игровые задачи, аналитические преобразования и др., требующих эвристического подхода. К этому же типу задач можно отнести отладку программ (см. Отладочные программы), различные проектно-конструкторские работы и др. Разработаны спец. языки для Д. р., включающие как средства обычных алгоритмических языков, так и средства для выдачи машине задания. Наиболее распространенными из этих языков являются JOSS и BASIC. Обычно Д. р. реализуется в системах разделения времени (см. Обработка информации в режиме разделения времени). Наиболее употребительными тех. средствами, обеспечивающими обмен информацией между человеком и машиной в процессе диалога (т. н. терминальными устройствами) являются клавишные устр-ва и устр-ва визуального отображения со световым карандашом (см. Экранный пульт). В перспективе эффективный Д. р. будет, по-видимому, базироваться на устр-вах визуального отображения в сочетании с устр-вами ввода речевой информации и найдет широкое применение в машинах 4-го поколения.

А. И. Никитин, А. Н. Чадов.

**ДИЗЬЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА** (ДНФ) — форма высказывания, имеющая вид дизъюнкции конъюнкций, при этом каждый член конъюнкции представляет собой элементарное высказывание или его отрицание. ДНФ двойственна к конъюнктивной нормальной форме. Та или иная ф-ла алгебры логики приводится к ДНФ на основе преобразований, определяемых равносильностями алгебры логики. С помощью ДНФ можно установить, является ли та или иная ф-ла всегда ложной.



Если каждый член дизъюнкции является всегда ложным, то и вся дизъюнкция является ложной. Для выяснения же, является ли каждый член дизъюнкции всегда ложным или нет, достаточно посмотреть, встречается ли в каждой конъюнкции элементарное высказывание и его отрицание. Если да, то конъюнкция будет всегда ложной.

**ДИЗЬЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА МИНИМАЛЬНАЯ** — *дизъюнктивная нормальная форма тупиковая*, имеющая наименьшую сложность. Задачу о поиске Д. н. ф. м. наз. задачей минимизации *дизъюнктивной нормальной формы* (ДНФ). Эта задача всегда имеет тривиальное решение, которое состоит в построении всех тупиковых ДНФ, в сравнении их сложности и выборе тупиковой ДНФ, имеющей наименьшую сложность. Однако на практике этот метод не применим. Поиск практических методов минимизации привел к созданию сложного матем. аппарата, значение которого выходит за пределы минимизации ДНФ. Изученные метрические свойства *дизъюнктивных нормальных форм* дают представление о трудностях построения простых алгоритмов минимизации ДНФ (см. *Алгоритм локальный*). Процесс минимизации состоит из ряда последовательных этапов. На первом этапе по произвольной ДНФ *булевой функции* или по ее таблице истинности строится сокращенная ДНФ  $\mathcal{N}_f = \mathcal{X}_1 \vee \mathcal{X}_2 \vee \dots \vee \mathcal{X}_n$ . Применяв локальные алгоритмы, из  $\mathcal{N}_f$  можно удалить некоторые элементарные конъюнкции и таким образом перейти к некоторой более простой ДНФ  $\mathcal{N}'_f$ . По  $\mathcal{N}'_f$  можно построить Д. н. ф. м. путем перебора некоторого мн-ва тупиковых ДНФ. Этот перебор можно направлять так, чтобы уменьшать общее число искомых тупиковых ДНФ. Однако существуют булевы ф-ции, для которых сокращенная ДНФ не может быть упрощена никаким локальным алгоритмом из довольно общего класса. Более того, никакой локальный алгоритм для этой ф-ции не может дать полезной информации о Д. н. ф. м. Это означает, что Д. н. ф. м. для этих булевых ф-ций можно найти лишь путем перебора в некотором мн-ве тупиковых ДНФ. Для уменьшения перебора при поиске Д. н. ф. м. в этом случае можно использовать методику *последовательного анализа вариантов*.

Лит.: Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики. «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8; Андон Ф. И. Алгоритм упрощения д. н. ф. булевых функций. «Кибернетика», 1966, № 6; Андон Ф. И. Минимизация д. н. ф. функций алгебры логики методом последовательного анализа вариантов. «Теория автоматов и методы формализованного синтеза вычислительных машин и систем», 1968, в. 3.

**ДИЗЬЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ТУПИКОВАЯ.** Пусть  $\mathcal{N}_f = \mathcal{X}_1 \vee \mathcal{X}_2 \vee \dots \vee \mathcal{X}_n$  — сокращенная *дизъюнктивная нормальная форма* (ДНФ) *булевой функции*  $f$ . Элементарная конъюнкция  $\mathcal{X}_i$  поглощается *дизъюнкцией*  $\mathcal{N}_1 = \mathcal{X}_{i1} \vee \dots \vee \mathcal{X}_{im}$ , если  $(\mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{N}_1) = 1$ . Если из  $\mathcal{N}_f$  последовательно удалять по одной элементарной конъюнкции

$\mathcal{X}_i$ , поглощающейся оставшимися до тех пор, пока это возможно, то в результате получим Д. н. ф. т. Из  $\mathcal{N}_f$  можно построить несколько Д. н. ф. т. Та из Д. н. ф. т., которая содержит миним. число элементарных конъюнкций, наз. *кратчайшей*. Д. н. ф. т., имеющая наименьшую сложность, наз. *минимальной*. Если каждую Д. н. ф. т. можно найти сравнительно простым методом, указанным в определении Д. н. ф. т., то *дизъюнктивную нормальную форму минимальную* можно найти лишь в результате сравнения Д. н. ф. т. Среди методов поиска Д. н. ф. т. можно выделить два осн. направления. Первое — методы поиска индивидуальных Д. н. ф. т., обладающих некоторыми свойствами (напр., близких в том или ином смысле к минимальным, достаточно простых и т. д.). Второе — целенаправленное упрощение сокращенной ДНФ, с тем, чтобы в результате упрощения не потерять Д. н. ф. т., обладающую интересующими нас свойствами. Первым методом такого рода был *Квайна метод минимизации*, по которому в сокращенной ДНФ отмечаются элементарные конъюнкции, входящие во все Д. н. ф. т. Множество их обозначают  $\mathcal{N}_{\cap T}$  и называют *ядром*.

Из  $\mathcal{N}_f$  удаляют элементарные конъюнкции, поглощаемые ядром. В результате сокращения ДНФ преобразуется в более простую, но обладающую теми же свойствами, что и сокращенная ДНФ. Было доказано необходимое и достаточное условие невхождения элементарной конъюнкции в мн-во  $\mathcal{N}_{\cap T}$ , содержащее все элементарные конъюнкции, которые входят хотя бы в одну Д. н. ф. т., и предложен *алгоритм локальный* получения сильно сокращенной ДНФ более простой, чем сокращенная, но содержащей информацию о всех Д. н. ф. т. Исследована вычислимость *предикатов*, дающих информацию о некоторых других свойствах Д. н. ф. т. (См. также *Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм*).

Лит.: Яблонский С. В. Функциональные построения в  $k$ -значной логике. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51; Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики. «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8; Журавлев Ю. И. Оценки сложности алгоритмов построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики. «Дискретный анализ», 1964, в. 3.

И. И. Брона.

**ДИЗЬЮНКЦИЯ** — общее название для операций *дизъюнкция слабая* и *дизъюнкция строгая*. Часто термин Д. употребляют вместо термина *дизъюнкция слабая*.

**ДИЗЬЮНКЦИЯ СЛАБАЯ** — *булева функция* двух аргументов. Обозначают ее знаком  $\vee$  и задают следующей таблицей истинности:

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Д. с. соответствует в разговорном языке не-исключающему союзу «или». Она коммутативна, ассоциативна, дистрибутивна по отношению к конъюнкции. Д. с., как и конъюнкция и отрицание используют в нормальных формах представления булевых ф-ций. Д. с. и отрицание составляют функционально полную систему булевых ф-ций.

**ДИЗЬЮНКЦИЯ СТРОГАЯ**, антиэквивалентность, сложение по модулю 2 — булева функция двух аргументов. Обозначают ее знаком  $\vee\vee$ ,  $\vee$  или  $+$  и задают следующей таблицей истинности:

X	Y	$X \vee\vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Д. с. соответствует в разговорном языке разделительному союзу «либо». Она коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна по отношению к конъюнкции. Д. с. вместе с конъюнкцией и ф-цией-константой  $\bar{z}$  являются операциями Жегалкина алгебры и составляют функционально полную систему булевых ф-ций.

**ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ТЕОРИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ** — раздел теории автоматического управления, изучающей влияние вариаций параметров на динамические свойства систем. Под вариацией параметров понимают любые отклонения их от значений, принятых за исходные. Эти отклонения могут быть известны полностью и описаны некоторыми ф-циями времени или же известны только с точностью до принадлежности к определенному классу (напр., ограничены по модулю или другой нормой, или же известны некоторые статистические характеристики их). Вариации параметров могут быть конечные или же бесконечно малые, при этом порядок дифф. ур-ния, описывающего их, может оставаться неизменным или же изменяться. В теории чувствительности исходной динамической системой принято называть такую систему, параметры которой равны заданным и не претерпевают изменения; движение в ней принято называть тогда основным движением. Ту же систему при измененных значениях параметров наз. варьированной, а движение в ней — варьированным. Разность между варьированным и осн. движением наз. дополнительным движением.

Осн. задача теории чувствительности — анализ дополнительного движения, вызванного вариацией параметров. Он включает количественные оценки, исследование устойчивости, моделирование, синтез систем с учетом заданных требований к качеству дополнительного движения, разработку методов активного воздействия на параметры системы управления с целью достижения заданного качества дополнительного движения. Осн. положения теории разработали М. Л. Быховский, Р. Томович,

П. В. Кокотович и др. Г. Боде ввел понятие чувствительности как отношение относительной вариации параметра  $q_i$  к вызванной им относительной вариации передаточной ф-ции  $W(s)$  (применительно к линейным системам):

$$S_{q_i}^{q_i} = \frac{\partial q_i / q_i}{\partial W / W} = \frac{\partial \ln q_i}{\partial \ln W}.$$

Чаще применяется обратная величина

$$S_{q_i}^W = \frac{\partial \ln W}{\partial \ln q_i}.$$

В качестве прямых оценок чувствительности принято использовать т. н. ф-ции чувствительности  $u(t; q_i)$ , играющие большую роль в количественной оценке степени влияния вариаций параметров  $q_i$  на динамические свойства системы. Ф-ции чувствительности в случае бесконечно малых вариаций параметров определяют следующим образом. Пусть исходная динамическая система описывается дифф. ур-нием

$$F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t, q_0) = 0, \quad (1)$$

где ф-ция  $x = x(t; q_0)$  — решение ур-ния,  $q_0$  — параметр. При изменении  $q_0$  на величину  $\Delta q$  соответствующим образом изменится ур-ние

$$F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t; q_0 + \Delta q) = 0$$

и его решение  $x = x(t; q_0 + \Delta q)$ , описывающее варьированное движение. Разность  $x(t; q_0 + \Delta q) - x(t; q_0)$  описывает дополнительное движение. Предел отношения этой разности

$$\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{x(t; q_0 + \Delta q) - x(t; q_0)}{\Delta q} = \frac{\partial x(t; q_0)}{\partial q_0} = u(t; q_0)$$

наз. ф-цией чувствительности  $u(t; q_0)$ . Если в исходной динамической системе, а, следовательно, и в описывающем ее дифф. ур-нии изменяются несколько параметров, то ф-ция чувствительности определяется точно так же, как и ф-ция нескольких параметров:  $u(t; q_0, q_1, \dots, q_i)$ . Ф-ции чувствительности можно определить в результате решения дифф. ур-ний, называемых ур-ниями чувствительности, которые легко получить из исходных ур-ний (1), если решения их являются непрерывными ф-циями параметров. Действительно, если определить частные производные ф-ции  $F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t, q_0)$  по  $q_0$ , то на основании ур-ния (1)

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial q_0} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_0} + \frac{\partial F}{\partial x} \times \times \frac{\partial x}{\partial q_0} + \frac{\partial F}{\partial q_0} = 0, \quad (2)$$

где

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_0} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial q_0}, \quad \frac{\partial \ddot{x}}{\partial q_0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial q_0}.$$

И если теперь учесть, что согласно определению коэфф. чувствительности

$$\frac{\partial x}{\partial q_0} = u(t, q_0), \quad \frac{\partial u(t, q_0)}{\partial t} = \dot{u}(t, q_0), \\ \frac{\partial^2 u(t, q_0)}{\partial t^2} = \ddot{u}(t, q_0),$$

то из выражения (2) получим ур-ние чувствительности

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \ddot{u} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{u} + \frac{\partial F}{\partial x} u = - \frac{\partial F}{\partial q_0}. \quad (3)$$

Особенностью этих ур-ний является то, что они всегда линейны, даже если исходное ур-ние (1) является нелинейным, потому что производные  $\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}$  не зависят от  $u(t, q_0)$ .

Если исходное ур-ние (1) линейно относительно  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$ , то левая часть ур-ния чувствительности имеет такую же структуру и такие же коэфф., как и исходное ур-ние. Действительно, в этом случае  $\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}$  равны коэфф. при переменных  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$  и  $x$  в исходном уравнении. Если исходное ур-ние (1) зависит от двух и более параметров  $q_0, q_1, \dots, q_i$ , ур-ния чувствительности определяются аналогично.

Методы решения ур-ния чувствительности средствами вычисл. техники для малых возмущений параметров в достаточной степени развили Г. Майсингер и др. Их широко применяют для определения ф-ций чувствительности. Часто для определения этих ф-ций, особенно линейных систем, используют структурные методы. Метод варьируемого звена, разработанный М. Л. Быховским, удобен тем, что для получения ф-ции чувствительности достаточно лишь располагать входными и выходными величинами исходной системы и варьируемого звена и моделью зависимости характеристик только этого звена от вариации параметров. П. В. Кокотович распространил этот метод на более широкий класс систем, включая нелинейные и нестационарные.

Для определения ф-ции чувствительности требуется две модели: исходной системы и системы, подобной исходной, объединенные связывающим звеном с передаточной функцией  $\partial W / \partial q$ . Если в системе изменяются  $k$  параметров, то для определения ф-ций чувствительности необходимо иметь  $k$  моделей, подобных исходной. Это неудобно, вследствие чего на практике прибегают к поочередному определению ф-ций чувствительности с помощью одной модели путем коммутации связывающих цепей для каждой вариации  $\Delta q_k$ . П. В. Кокотович, используя понятие логарифмической чувствительности

$$S_{W_a}^W = \frac{\partial \ln W(s)}{\partial \ln W_a(s)}$$

и теорию графов, разработал метод определения ф-ций чувствительности на одной модели, выделяя в ней т. н. точки чувствительности. Однако этот метод в общем применим не ко всем системам. Для анализа чувствительности, помимо непосредственного определения функций чувствительности, применяются различные косвенные оценки, например частотные оценки:

$$S_W^k(j\omega) = \frac{\partial \ln K(j\omega)}{\partial \ln W(j\omega)};$$

$$S_q^k(j\omega) = \frac{\partial \ln K(j\omega)}{\partial \ln q},$$

где  $K(j\omega)$  — амплитудно-фазовая характеристика всей системы,  $W(j\omega)$  — амплитудно-фазовая характеристика варьируемого звена. Однако непосредственное вычисление дополнительного движения по ним затруднительно. Часто применяются квадратичные показатели (напр., дисперсия  $\sigma_{\Delta x}^2$ ) дополнительного движения, вызванного вариацией параметров. Достаточно полно разработаны и др. косвенные оценки — корневые, или алгебраические, напр., коэфф. чувствительности нулей и полюсов передаточной ф-ции системы  $K$  вариации параметров  $q_i$ . Осн. положения теории чувствительности непрерывных систем распространены и на разрывные системы.

Теорию чувствительности все шире применяют в системах автомат. управления. Ф-ции чувствительности несут в себе чрезвычайно ценную информацию для решения задач синтеза динамических систем. Одной из важнейших задач является синтез систем, обладающих миним. чувствительностью к вариации параметров. Такой синтез можно осуществить на основе определенных условий, налагаемых на некоторый функционал  $I\{\Delta x(t)\}$ , характеризующий дополнительное движение. На основе требования равенства нулю этого функционала синтезируются системы, обладающие свойством параметрической инвариантности, т. е. нечувствительные к вариациям параметров. Разработаны методы синтеза оптимальных по нечувствительности систем на основе минимизации функционала  $I\{\Delta x(t)\}$ . В работах некоторых авторов, напр., предлагается рассматривать задачу чувствительности как теоретико-игровую задачу автомат. управления в предположении, что возмущение, вызванное изменением параметров, является антагонистическим по отношению к динамическим свойствам объекта и управляющему воздействию. Такое применение методов *игр теории* в теории чувствительности — перспективно, в особенности для синтеза оптим. систем управления, нечувствительных к вариации параметров объекта и к тому же обладающих минимаксными свойствами. Вследствие того, что теор. фундаментом теории чувствительности являются классические методы теории малых возмущений, существует определенная связь между чувствительностью и теорией устойчивости в малом по Ляпунову. Показано, что

ур-ния, определяющие ф-ции чувствительности по отношению к малым изменениям начальных условий дифференциальных ур-ний, совпадают с ур-ниями первого приближения в теории устойчивости А. М. Ляпунова. Эта связь имеет не только теор., но и важное практическое значение.

Теорию чувствительности применяют при построении беспойсковых самонастраивающихся систем. Используя определенную аналитическую зависимость между сигналами осн. системы и модели чувствительности, вычисляют ф-ции чувствительности, на основе которых определяют некоторый функционал  $I = \int_0^T F(u_1, u_2, \dots, u_n, t) dt$ , зависящий от изменяющихся параметров. Процесс самонастройки производится так, чтобы этот функционал стремился к нулю. Осн. трудностью при построении таких систем является вычисление ф-ций чувствительности, связанное с необходимостью решения интегр. ур-ний типа свертки. В работах ряда авторов предлагаются методы приближенного определения свертки, и это значительно упрощает вычисление ф-ций чувствительности.

Большое практическое значение имеет т. н. обратная задача чувствительности, которая заключается в оценке вариаций параметров по наблюдению вызванного ими возмущения выходного сигнала. Вычисленные вариации параметров по отклонению выходного сигнала можно использовать для активного воздействия на параметры системы управления с целью улучшения качества работы системы в целом. Хотя матем. фундамент для решения обратной задачи уже имеется, однако вопросы практического применения ее еще недостаточно разработаны.

Лит.: Быховский М. Л. Основы динамической точности электрических и механических цепей. М., 1958 [библиогр. с. 153—156]; Чувствительность автоматических систем. М., 1968; Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем автоматического управления. Л., 1969 [библиогр. с. 205—207]; Tomovic R. Sensitivity analysis of dynamic systems. Belgrade, 1963.

А. Г. Шевелев.

**ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УСЛОВИЯ ГРУБОСТИ** — условия, при выполнении которых динамическая система является грубой, т. е., если достаточно малые изменения ее параметров не нарушают топологическую структуру ее фазового пространства (см. *Нелинейных систем автоматического управления анализ*). Точнее, динамическая система наз. грубой, если при достаточно малом изменении ее параметров сохраняется топологическая структура разбиения на траектории фазового пространства, причем каждая точка любой траектории испытывает сколь угодно малый сдвиг. Т. к. параметры реальных систем можно определить лишь приближенно, то только грубые системы могут служить математическими моделями, у которых топологическая структура фазового пространства находится в соответствии с физическими явлениями.

Рассмотрим систему двух уравнений с аналитическими правыми частями

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (1)$$

в области  $G$  плоскости  $x, y$ , ограниченной циклом без контакта  $g$  ( $g$  — простая замкнутая кривая, имеющая непрерывно вращающуюся касательную и пересекающая все проходящие через нее траектории, не касаясь ни одной из них). Рассмотрим также систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) + p(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) + q(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Система (1) называется грубой в области  $G$ , если для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при аналитических  $p(x, y), q(x, y)$ , удовлетворяющих в  $G$  условиям

$$|p(x, y)| < \delta, \quad |q(x, y)| < \delta,$$

$$|p'_x(x, y)| < \delta,$$

$$|p'_y(x, y)| < \delta, \quad |q'_x(x, y)| < \delta,$$

$$|q'_y(x, y)| < \delta,$$

существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение области  $G$  в себя, при котором каждая траектория системы (1) переходит в траекторию системы (2) и обратно, причем соответствующие друг другу точки находятся на расстоянии, меньшем  $\varepsilon$ . Для того, чтобы система (1) была грубой в области  $G$ , необходимо и достаточно, чтобы в этой области: состояниям равновесия соответствовали корни характеристического ур-ния системы первого приближения с отличными от нуля вещественными частями; для каждого периодического решения периода  $\tau$   $x = \varphi(t), y = \Psi(t)$  соблюдалось неравенство:

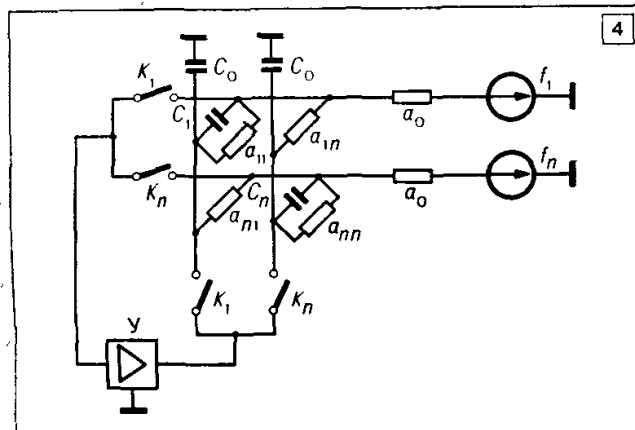
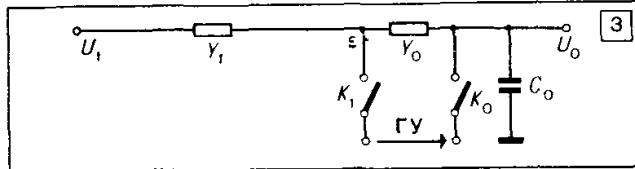
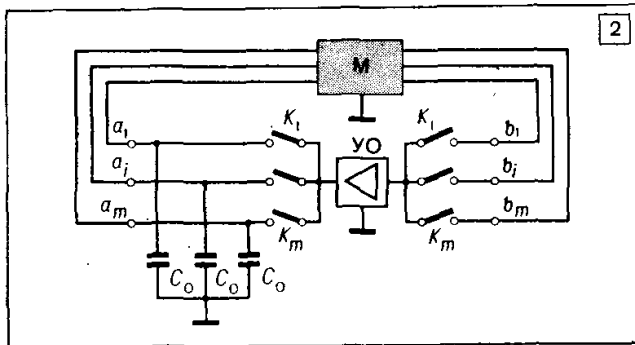
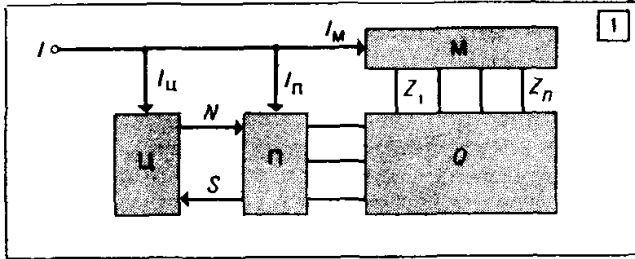
$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau [P'_x(\varphi, \Psi) + Q'_y(\varphi, \Psi)] dt \neq 0;$$

состояния равновесия, соответствующие вещественным разным знакам корней характеристического ур-ния системы первого приближения, не соединялись интегр. кривыми. Пространство параметров (коэффициентов) динамической системы разбивается на области, в каждой точке которых система является грубой; границами между этими областями служат бифуркационные поверхности, на которых система — не грубая.

Лит.: Андронов А. А. [и др.]. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., 1967 [библиогр. с. 484—485]. Р. А. Нелепин.

**ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕТОД** — метод моделирования алгебраических и дифференциальных объектов, при котором желаемое распределение токов и напряжений в моделирующем многополюснике постоянной

структуры получают циклическим подключением к нему при помощи ключевой матричной схемы другого многополюсника (в общем случае нелинейного и переменной структуры) и запоминанием уравнивающих напряжений на конденсаторах достаточно большой емкости. Модели, построенные в соответствии с Д. м. м., наз. динамическими моделями. Подключение многополюсника переменной структуры П к многополюснику постоянной структуры М посредством ключевой матричной схемы Q и управление его параметрами



1. Блок-схема динамической модели.
2. Схема группового усилителя.
3. Схема динамического операционного элемента.
4. Схема динамической модели системы алгебраических дифференциальных уравнений.

и структурой осуществляется по программе, которую заносят в цифровую часть Ц динамической модели (рис. 1). Во время работы цифровая часть служит для запоминания  $I_{Ц}$  —

цифровой части полной исходной информации  $I$ , управления при помощи кодов  $N$  многополюсником П и ключами матричной схемы Q, а также для вывода в форме кодов  $S$  получаемых результатов. Части  $I_M$  и  $I_P$  исходной информации  $I$  вводятся соответственно в многополюсники М и П непосредственно, минуя цифровой блок Ц. В динамических моделях процесс уравнивания не может быть остановлен, так как при остановке достигнутое распределение токов и напряжений в моделирующей цепи начнет изменяться из-за разрядки конденсаторов. Структура динамической модели на любом шаге переключения определяется ключевой матрицей Q, каждая из компонент которой может принимать только два значения «0» и «1» ( $q_{ij} = 0$  соответствует разомкнутому положению ключа между  $i$ -й горизонтальной и  $j$ -й вертикальной шинами, а  $q_{ij} = 1$  — замкнутому). В общем случае матрица Q может быть ф-цией времени и получаемых величин Z, т. е.  $Q = Q(t, Z)$ , где Z — вектор с компонентами  $Z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Некоторые частные случаи этой общей схемы динамической модели приводят к т. н. групповым элементам электр. цепи. На рис. 2 приведена схема группового усилителя (ГУ) с присоединенным к нему многополюсником М. Схема ГУ состоит из усилителя отапливающего УО, запоминающих конденсаторов  $C_0$  и пар ключей  $K_1, \dots, K_m$ . При поочередном замыкании их с относительно большой частотой и выполнении некоторых других условий устр-во будет эквивалентно обычным усилителям, включенным между точками  $a_1 - b_1, \dots, a_m - b_m$ . Схема динамического операционного элемента, являющегося по существу динамическим аналогом обычного операционного усилителя, приведена на рис. 3. В общем случае двухполюсники  $Y_0$  и  $Y_1$  имеют любую сложность.

При выполнении определенных условий относительная погрешность  $v$ -й гармоники может быть определена по ф-ле

$$\delta_v = \frac{\dot{U}_{0v} - (\dot{U}_{0v})_{\text{точн}}}{(\dot{U}_{0v})_{\text{точн}}},$$

где  $(\dot{U}_{0v})_{\text{точн}}$  и  $U_{0v}$  — точные и реальные комплексные амплитуды  $v$ -х гармоник выходного напряжения. Относительная погрешность

$$\delta_v = 1 -$$

$$1 - \frac{NY_{0v}}{KG_0}$$

$$1 + \frac{1}{K} \left[ \frac{NY_{1v}}{G_0} + \left( 1 + \frac{Y_{1v}}{Y_{0v}} \right) \left( 1 + j \frac{2\pi v NC_0}{TG_0} \right) \right]$$

зависит от параметров усилителя, параметров операционного элемента ( $G_0$  — выходная проводимость,  $N$  — число точек, обрабатываемых групповым усилителем,  $T$  — интервал времени).

Это выражение написано в предположении режима холостого хода элемента. При увеличении коэфф.  $K$  метод. погрешность стремится к 0. Из анализа относительной погрешности следует, что приближенный расчет динамических электронных цепей с групповым усилителем может производиться, как и для обычных цепей с одновременно включенными усилителями, но имеющих увеличенные проводимости согласно выражению  $Y_v \approx G_0 \frac{h}{T_0} = \frac{G_0}{N}$ .

Применяя динамические операционные элементы, можно построить динамические модели систем алгебр. и дифф. ур-ний. На рис. 4 показана принципиальная схема модели с групповым усилителем для решения систем ур-ний вида  $Ax = F$  (при этом  $C_1, \dots, C_n$  должны

быть равны 0) и ур-ний вида  $\frac{dx}{dt} + Ax = F$ .

В этом случае начальные условия необходимо задавать не только на конденсаторах  $C_1, \dots, C_n$ , но и на конденсаторах  $C_0$ . Оригинальные динамические модели можно построить, применяя групповые сопротивления. Принципиальная схема группового сопротивления получается из схемы *группового источника напряжения* путем замены преобразователя кода в напряжение преобразователем кода в сопротивление. В качестве такого преобразователя могут быть применены известные *сопротивления цифровые управляемые* и проводимости. Работа схемы группового сопротивления основана на возможности отключения на короткое время сопротивления, если параллельно ему была присоединена некоторая емкость и, вследствие этого, на возможности использования одного переключаемого переменного сопротивления в различных ветвях цепи. В динамических цепях переключаемыми могут быть не только источники напряжения, усилители и омические сопротивления, но и *преобразователи функциональные*, множительные устр-ва и др. сложные цепи.

В динамических моделях по сравнению с обычными моделями значительно сокращено к-во счетно-решающего оборудования. В некоторых случаях они уступают им в быстродействии и точности получаемых решений, но надежность динамических моделей более высокая. Это обусловлено тем, что в динамических моделях уменьшено к-во усилителей постоянного тока, функциональных преобразователей и др. Вместо них введены элементы дискретного действия — ключевые элементы и устр-во управления, надежность которых высока, а к-во элементов — меньшее. Д. м. м. позволяет построить легко управляемые, экономичные, надежные, малогабаритные *квазианалоговые модели* для решения систем обыкновенных дифф. ур-ний, ур-ний в частных производных в конечноразностной постановке, задач *программирования линейного и программирования нелинейного*, задач *игр теории*; машины для расчета сетевых графиков, машины для расчета статически неопределимых систем. Этот метод можно применять при моделировании объек-

тов, состояние и работа которых описывается обыкновенными дифф. или алгебр. ур-ниями и неравенствами. Естественно, динамические модели можно применять не в любом случае. Их лучше всего применять тогда, когда уменьшение к-ва оборудования, малый вес, малые габариты, малая потребляемая мощность и высокая надежность имеют большее значение, чем высокая точность и быстродействие.

Лит.: Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. К., 1967 [библиогр. с. 560—564]; Моделирующие математические машины с переменной структурой. К., 1970 [библиогр. с. 243—246]. Г. Е. Пухов, А. Ф. Катков.

**ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПАМЯТИ** — см. *Памяти распределение*.

**ДИОД ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЙ** — двухполюсный прибор, действие которого основано на принципе использования нелинейных свойств электронно-дырочного перехода в полупроводниках или контакта полупроводник — металл, а также на зависимости этих свойств от воздействия света, т-ры или радиоактивного излучения. Наиболее применяемы для изготовления Д. п. — германий, кремний, селен, арсенид галлия, карбид кремния.

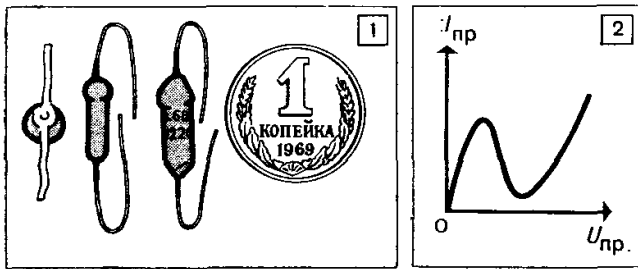
По конструктивно-технологич. признаку Д. п. подразделяются на точечные и плоскостные (рис. 1). Точечные диоды изготавливаются путем приведения в соприкосновение металлической иглы с поверхностью полупроводникового кристалла. Для улучшения их электр. параметров и стабилизации используют процесс электроформовки. Технологич. методы изготовления плоскостных Д. п. весьма разнообразны: выращивание из расплава, сплавление, диффузия, эпитаксиальное осаждение и т. п. Интенсивно развиваются новые, перспективные методы создания  $p-n$  переходов, использующие для легирования полупроводника электронную и ионную бомбардировку. Д. п. широко применяют в вычисл. технике при построении, напр., логических схем (см. *Диодные логические элементы*), дешифраторов, пассивных запоминающих устройств (импульсные диоды), для ввода и отображения информации (светодиоды, фотодиоды) и т. д.

Свойства Д. п. описываются системой электр. параметров, которая характеризует работу прибора в схеме и используется при инженерных расчетах соответствующих цепей. Для импульсных диодов, напр., вводятся следующие параметры: постоянное прямое падение напряжения при заданной величине прямого тока, постоянный обратный ток при заданной величине обратного напряжения, время восстановления обратного сопротивления  $\tau_{\text{восст}}$ , максимальное импульсное прямое падение напряжения на диоде при заданной величине импульса тока, емкость  $C$  диода.

Предельные электр. режимы работы импульсного диода определяются максимально допустимыми обратным напряжением, средним прямым током, импульсным током. Наиболее типичные для импульсных диодов (типа Д9Д, Д310, Д311, Д219, КД503А и т. д.) значения  $\tau_{\text{восст}}$  лежат в диапазоне 5—300 нсек, а  $C = 0,5—15$  пф.



Особенность импульсных диодов заключается в необходимости уменьшения времени жизни неосн. носителей тока  $\tau_{\text{нн}}$  в полупроводнике и емкости диода для достижения высокого быстродействия. Пути снижения  $\tau_{\text{нн}}$  — термозакалка, легирование золотом (напр., в диодах Д311, Д219, КД503А и др.), облучение потоком электронов, нейтронной радиацией и т. д. Применение этих спец. приемов в сочетании с прогрессивными технологич. методами (диффузионная меза-технология, планарно-эпитаксиальная технология и т. д.) позволяет



1. Внешний вид полупроводниковых диодов.  
2. Вольт-амперная характеристика туннельного диода.

изготавливать импульсные диоды, которые по совокупности электр. параметров приближаются к идеальным ключевым элементам. Дальнейшее снижение инерционности импульсных Д. п. тесно связано с микроминиатюризацией приборов и использованием новых полупроводниковых материалов (напр., интерметаллических соединений).

Уровень развития технологии интегральных схем позволяет в настоящее время создавать многокомпонентные диодные схемы (диодные линейки и матрицы) в микроэлектронном исполнении. Замена ими аналогичных диодных структур, собираемых из отдельных Д. п. путем ручной пайки, даст возможность резко повысить быстродействие и надежность, а также уменьшить габариты, вес и стоимость соответствующих узлов ЭВМ.

В радиоэлектронике Д. п. применяют для детектирования, преобразования и модулирования СВЧ колебаний (СВЧ диоды), выпрямления переменного тока (выпрямительные диоды), стабилизации постоянного напряжения (стабилитроны) и т. д.

В параметрических усилителях и системах автоматики применяют Д. п., называемый варикапом, в котором используется зависимость емкости  $p-n$  перехода от приложенного к нему напряжения. Особое место среди Д. п. занимают туннельные диоды, действие которых основано на квантово-мех. туннельном эффекте. Прямая ветвь их вольт-амперной характеристики (рис. 2) имеет падающий участок, которому соответствует отрицательная дифф. проводимость. На туннельных диодах строят простые схемы генераторов, усилителей, преобразователей частоты, переключателей и т. д. Малые габариты, вес, потребляемая мощность и высокое быстродействие способствуют применению туннельных диодов в узлах ЭВМ.

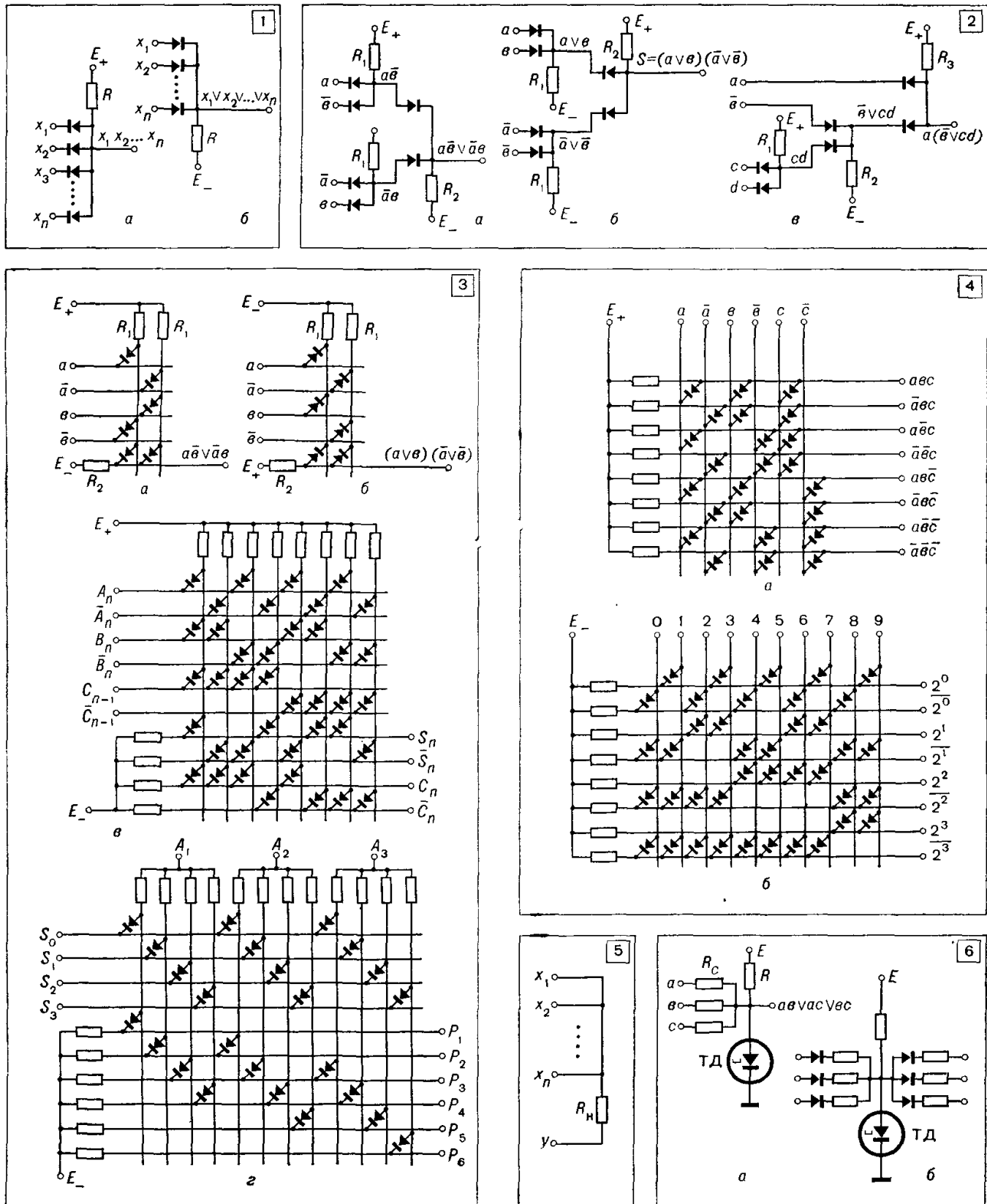
Лит.: Справочник по полупроводниковым диодам и транзисторам. М.—Л., 1964; Полупроводниковые диоды. Параметры, методы измерений. М., 1968 [библиогр. с. 289].  
С. Л. Сидоренко.

**ДИОДНАЯ ЛИНЕЙКА** — см. Диодные логические элементы.

**ДИОДНАЯ МАТРИЦА** — см. Диодные логические элементы.

**ДИОДНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ** — электронные цепи, построенные из диодов и резисторов и предназначенные для реализации логических функций. Д. л. э. были первыми полупроводниковыми логическими элементами и применялись уже в ламповых ЦВМ. В Д. л. э. используется свойство полупроводникового диода оказывать различное сопротивление протекающему через него току в зависимости от полярности приложенного напряжения. Электр. схемы простейших Д. л. э. изображены на рис. 1. Если потенциал  $V_1$  на входе, соответствующий логической «1», превышает потенциал  $V_0$ , соответствующий логическому «0», то говорят, что в схеме используются «положительные» сигналы, а если  $V_1 < V_0$ , — то «отрицательные». Для схем с положительными сигналами источники питания выбирают так, чтобы выполнялось условие:  $E_+ > V_1 > V_0 > E_-$ , причем одно из напряжений питания  $E_+$  или  $E_-$  может быть равно нулю. Сопротивление  $R$  всегда намного больше прямого, но меньше обратного сопротивления диода. При этих условиях на выходе схемы «И» (рис. 1, а) потенциал, близкий к  $V_1$ , устанавливается только в том случае, если на все  $n$  входов поданы сигналы «1». Если хотя бы один из входов находится под потенциалом  $V_0$ , то соответствующий диод открыт и, поскольку его прямое сопротивление мало, на выходе также устанавливается потенциал, близкий к  $V_0$ . На выходе схемы «ИЛИ» (рис. 1, б) такой потенциал получается лишь тогда, когда на все входы подан сигнал «0». Если хотя бы на одном из входов появляется сигнал «1», то соответствующий диод открывается, и потенциал на выходе схемы возрастает до значения, близкого к  $V_1$ . При работе изображенных на рис. 1 схем с отрицательными сигналами выполняемые ими логические функции меняются: схема рис. 1, а реализует функцию «ИЛИ», а схема рис. 1, б — функцию «И». При этом должно выполняться условие:  $E_+ > V_0 > V_1 > E_-$ . Для реализации логических функций, являющихся суперпозицией функций «И» и «ИЛИ», описанные Д. л. э. можно комбинировать между собой, подсоединяя выходы одних ко входам других. В результате получают многоступенчатые Д. л. э., состоящие из ряда последовательно включенных схем «И» и «ИЛИ» (рис. 2).

Логические переменные в ЦВМ чаще всего формируются триггерами, которые могут одновременно выдавать и прямые и инвертированные сигналы. При наличии таких сигналов произвольную логическую функцию в принципе можно реализовать с помощью Д. л. э. «И» и «ИЛИ», в частности, с помощью двухсту-



пенчатых Д. л. э. типа «И/ИЛИ» либо «ИЛИ/И». Д. л. э. типа «И/ИЛИ» реализуют логические функции, представленные в дизъюнктивной, а Д. л. э. типа «ИЛИ/И» — в конъюнктивной нормальной форме. В двухступенчатых Д. л. э. все пути прохождения сигнала аналогичны, между каждым входом и выходом последовательно включено одинаковое число диодов,

чем обеспечивается равенство задержек и ослаблений сигналов.

При описании двухступенчатых Д. л. э. часто используют матричные схемы (рис. 3, а и б). Матричная форма особенно удобна для представления Д. л. э., реализующих одновременно несколько различных функций от общих логических переменных (рис. 3, в и г). Частным

случае таких Д. л. э. являются диодные дешифраторы и преобразователи кодов (рис. 4). Если в Д. л. э. «И» или «ИЛИ» (см. рис. 1) напряжение питания заменить напряжением одного из сигналов, то получим Д. л. э. «с управлением по напряжению питания». Такие Д. л. э. использованы, например, в схеме двигателя, изображенной на рис. 3, г. Вместо источника  $E_+$  на них прикладывается напряжение с регистра исходного кода. Д. л. э. этого типа часто называют клапанами, рассматривая сигнал, заменяющий источник питания, как основной, а сигналы на входах  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — как управляющие.

В ряде случаев в Д. л. э. «И» и «ИЛИ» вместо резистора  $R$  можно подключить нагрузку. В результате получаются Д. л. э. «с логикой нагрузки». Подобная схема «ИЛИ» с управлением по напряжению питания изображена на рис. 5. Если схема работает с положительными сигналами и большое напряжение в нагрузке интерпретируется как  $F = 1$ , то  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \bar{y}$ , т. е. Д. л. э. реализует функцию «ИЛИ» с запретом. Такой Д. л. э. можно использовать, напр., на выходе логической цепи, где нагрузка представляет собой некий исполнительный орган. Д. л. э. можно собирать из отдельных диодных линеек (полосок, сборок), представляющих собой совокупность нескольких диодов с общим анодом или катодом (т. е. имеющих гальваническую связь между всеми  $p$ - или  $n$ -областями полупроводника соответственно). Д. л. э. для реализации систем логических функций (дешифраторы, преобразователи кодов и т. п.) удобнее собирать из диодных матриц — устройств, состоящих из двух перекрещивающихся систем проводящих шин, между которыми в заданных местах включены полупроводниковые диоды. Быстродействие Д. л. э. определяется импульсными характеристиками диодов, суммарной емкостью нагрузки запертых диодов и монтажа, а также максимальными токами, которые может отбирать Д. л. э. в режиме переключения от источников питания и источников входных сигналов. Будучи пассивными элементами, диоды не могут усиливать сигнал. По мере прохождения через цепь из Д. л. э. сигналы ослабевают: уменьшается перепад между уровнями  $V_1$  и  $V_0$  и особенно резко — ток, который можно отбирать с выхода логической цепи по сравнению с токами на входе. С увеличением числа ступеней становятся все более жесткими допуски на сопротивление и требования к величине токов, отбираемых от источников сигналов и источников питания. Для повышения эффективности Д. л. э. желательны большие питающие напряжения сравнительно с перепадом потенциалов  $|V_1 - V_0|$ , но при этом возрастает и может стать чрезмерной мощность, рассеиваемая резисторами. Из-за влияния перечисленных факторов число ступеней в Д. л. э. обычно ограничивают двумя-тремя. При построении более длинных логических цепей Д. л. э. комбини-

руют с усилительными элементами на триодах полупроводниковых, магнитных сердечниках, лампах ит.д. Преимуществом чисто диодных логических схем являются меньшие габариты их, низкая стоимость, более высокая надежность.

В последние годы быстро совершенствуется технология изготовления Д. л. э. Начинают выпускать микроэлектронные диодные линейки и матрицы, в которых все диоды и соединения сформированы на одном кристалле полупроводника и заключены в общий корпус, а также Д. л. э. в интегральном исполнении, в которых на одном кристалле или на одной подложке формируют не только диоды и межсоединения, но и резисторы. В таких элементах наряду с резким увеличением плотности компоновки достигаются более высокая надежность и быстродействие при снижении стоимости. Переход на микроэлектронное исполнение вызывает изменения в подходе к проектированию логических цепей с Д. л. э. Если раньше при проектировании схем стремились минимизировать число используемых диодов, то теперь может оказаться более целесообразным минимизировать, напр., число «корпусов» (т. е. диодных матриц или линеек) независимо от заполнения их диодами.

Быстродействующие Д. л. э. можно строить на туннельных диодах (см. Диод полупроводниковый), которые в отличие от обычных диодов являются активными приборами и позволяют усиливать сигналы. Схемы на туннельных диодах реализуют пороговые логические

функции  $\prod^n (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , принимающие зна-

чение «1», если  $n$  и более аргументов одновременно равны «1». На рис. 6, а для примера показана схема простейшего логического мажоритарного элемента на туннельном диоде с тремя входами. С выхода снимается большой ток («1»), если не менее чем на два входа действует сигнал «1». Д. л. э. на туннельных диодах отличаются высоким быстродействием (тактовая частота порядка 100 МГц и выше), малой потребляемой мощностью и богатыми логическими возможностями. Основной их недостаток — отсутствие внутренней развязки между входом и выходом, что затрудняет объединение схем в узлы. Для обеспечения направленности потока информации приходится использовать многофазные системы импульсного питания. Более просто направленность передачи сигнала обеспечивается применением в цепях связи обычных или обращенных диодов (рис. 6, б). Д. л. э. на туннельных диодах целесообразно использовать для построения быстродействующих узлов ЦВМ, в которых допустимо применение логических элементов с небольшим коэффициентом разветвления. Дальнейшее совершенствование Д. л. э. указанного типа, повышение их надежности и расширение области применения связано с улучшением воспроизводимости и стабильности параметров туннельных диодов, а также с развитием интегральной технологии изготовления соответствующих схем.

Лит.: Котт В. М., Гаврилов Г. К., Баваров С. Ф. Туннельные диоды в вычислительной технике. М., 1967 [библиогр. с. 212—214]; Ричардс Р. К. Элементы и схемы цифровых вычислительных машин. Пер. с англ. М., 1961; Прессман А. И. Расчет и проектирование схем на полупроводниковых приборах для цифровых вычислительных машин. Пер. с англ. М., 1963; Харли Р. Б. Логические схемы на транзисторах. Пер. с англ. М., 1965 [библиогр. с. 423]. В. М. Корсунский.

**ДИРАКА ФУНКЦИЯ** — то же, что и *дельта-функция*.

**ДИСК МАГНИТНЫЙ** — устройство, предназначенное для регистрации, хранения и использования информации, записываемой на магнитный носитель, покрывающий поверхность диска.

Развитие цифровых вычислительных машин (ЦВМ) привело к необходимости создания *запоминающих устройств* (ЗУ) большой емкости и со сравнительно небольшим временем выборки информации. В качестве таких ЗУ служат *накопители* на Д. м. (НМД), основные элементы которых — вращающиеся диски ( $D = 300 \div 1000$  мм), покрытые с обеих сторон ферромагнитным слоем, над которым расположены магнитные головки (МГ), производящие запись информации в виде концентрических дорожек на рабочей поверхности диска и аналогично считывающие ее. Обычно НМД состоит из нескольких (до 50) жестких дисков, насаженных на общий вал, вращающийся с постоянной скоростью ( $n = 900 \div 3000$  об/мин). В промежутки между дисками на спец. подвижных рычагах вводятся МГ. Рычаг, перемещающийся вдоль радиуса диска, осуществляет выбор заданной дорожки. В другом типе НМД рычаги, кроме того, могут перемещаться вдоль оси вращения дисков (выбор диска); из-за своей сложности такая конструкция не получила широкого применения. Перемещение рычагов осуществляется при помощи пневматических, гидравлических или электр. приводов. Кроме НМД с перемещающимися МГ, получили распространение и конструкции с фиксированными неподвижными МГ. В этом случае каждая магнитная дорожка обслуживается своей МГ, выбор дорожки осуществляется при помощи электронного коммутатора.

В настоящее время в НМД, как правило, применяются «плавающие» магнитные головки, которые автоматически поддерживают величину зазора между МГ и рабочей поверхностью диска (порядка 5—10 мк), при этом продольная плотность записи достигает порядка  $80 \div 130$  бит/мм. Емкость Д. м. в одном устройстве достигает 12 500 млн. двоичных знаков (тип 2600-6М фирмы Bryant Computer Products). За последнее время широкое применение получили НМД со сменным носителем — сменяющимися дисковыми пакетами. В системах, где требуется повышенная надежность и устойчивость работы, применяются гибкие диски. Здесь гибкий Д. м. (напр., из магнитной пленки, применяемой для изготовления *лент магнитных*) вращается над ровной полированной плитой с смонтированными в нее МГ. Под действием увлекаемого быстро вращающимся диском воздуха между его рабочей по-

верхностью и МГ устанавливается требуемый воздушный зазор. Р. Я. Черняк.

**ДИСКРЕТИЗАЦИЯ** — преобразование непрерывной функции в дискретную. Применяется в системах передачи, хранения и обработки информации и является неотъемлемой операцией при использовании цифровых вычислительных устройств для обработки информации, поступающей в виде непрерывных сигналов. Так, передача фототелеграфных (функция двух аргументов) и телевизионных (функция трех аргументов) изображений осуществляется путем разбивки их на дискретные строки и соответственно дискретные кадры. Передача речи (функция одной переменной) с помощью импульсно-кодовой модуляции сопряжена с Д. непрерывного сигнала и последующим кодированием. См. также *Квантование*.

М. Ф. Бейко.

**ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ** — приближенное представление непрерывной функции, описывающей яркость изображения, ее значениями в отдельных точках. Д. и. осуществляют для удобства ввода информации об изображении в специализированное распознающее устройство или в ЦВМ. В распознающих устройствах изображения воспринимаются некоторым множеством светочувствительных элементов, называемых рецепторами. Сигнал на выходе каждого рецептора характеризует яркость изображения в одной его точке. По аналогии с механизмом восприятия зрительных изображений глазом человека множество рецепторов наз. *сетчаткой* или рецепторным полем. См. также *Квантование изображений*.

В. И. Васильев.

**ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛИРУЮЩАЯ СРЕДА** — см. *Квазианалоговая моделирующая среда*.

**ДИСКРЕТНАЯ СИСТЕМА** — система, которая функционирует в дискретном временном пространстве и определяется дискретными состояниями. Дискретность временного пространства означает, что явления, сопровождающие изменения состояния системы, могут происходить лишь в моменты времени, образующие некоторое дискретное множество. В частности, переходы системы из одного состояния в другое могут осуществляться в целочисленные моменты времени. Общий случай сводится к этому частному посредством введения целочисленной нумерации моментов возможного изменения состояния системы. Условие дискретности состояния указывает на дискретность множеств допустимых значений всех временных характеристик системы, т. е. всех компонент марковского вектора, в каждый момент времени вполне определяющего состояние системы. Простейший пример Д. с. — последовательность испытаний с несколькими возможными исходами. При этом роль времени играет номер испытания, роль состояния — номер исхода данного испытания. Непрерывная система в некоторых случаях может рассматриваться как дискретная. Это достигается путем учета ее состояний лишь в отдельные моменты времени и округления их значений до целых единиц.

Описание и исследование Д. с. осуществляется с помощью дискретных *Маркова цепей*, разностных уравнений, стохастических матриц, полумарковских процессов с дискретным пребыванием в каждом из возможных состояний и *автоматов вероятностных*. На практике весьма распространены системы, для которых дискретным является или только время, или только состояние. Важным классом систем являются т. н. системы с дискретным вмешательством случая, которые почти всегда ведут себя как непрерывные и только в дискретные моменты испытывают случайные воздействия.

Н. В. Яровицкий.

**ДИСКРЕТНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ**, импульсная система управления — система, в которой между двумя или больше ее элементами информация передается с помощью временной последовательности импульсов. Такая последовательность несет полезную информацию лишь в том случае, когда она промодулирована входным сигналом. Эту функцию *модуляции* в импульсных системах (см. *Модуляция импульсная*) выполняют импульсные модуляторы или преобразователи «аналог-код». Простейшая типичная структурная схема Д. с. у. приведена на рис., где ОУ — объект управления, УУ — управляющее (импульсное или цифровое) устройство, ИМ — импульсный модулятор (преобразователь «аналог-код»). В тех случаях, когда объект управления не обладает свойствами, необходимыми для выполнения функций импульсного *демодулятора* (ДМ), на входе его в качестве промежуточного звена устанавливают специальный ДМ (преобразователь «код-напряжение»).

Если наряду с *квантованием* по времени осуществляется квантование и по уровню, такие системы наз. цифровыми системами управления, наиболее характерная особенность их (с точки зрения исследования динамики Д. с. у.) заключается в том, что они, строго говоря, всегда — *нелинейные системы управления*. Поведение Д. с. у. в дискретные моменты вре-

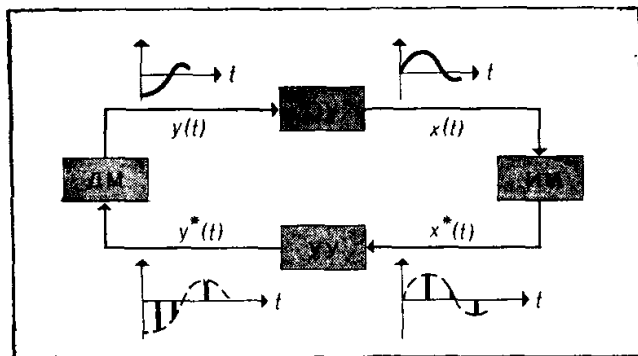
личивается, а область их применения непрерывно расширяется. См. также *Автоматического управления теория*, *Дискретных систем автоматического управления анализ*, *Дискретных систем автоматического управления синтез*.

В. М. Кунцевич.

**ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ** — раздел математики, занимающийся изучением свойств структур финитного (конечного) характера, которые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях. К числу таких конечных структур могут быть отнесены, например, конечные группы, конечные графы, а также некоторые математические модели преобразователей информации, такие как *автоматы конечные*, *Тьюринга машины* и т. п. Иногда допускают расширение предмета Д. а. до произвольных дискретных структур и приходят к дискретной математике, отождествляя ее с Д. а. К числу таких структур могут быть отнесены некоторые алгебр. системы, бесконечные графы, некоторые виды вычисл. сред такие, как клеточные автоматы и т. д. В качестве синонима понятий Д. а. и дискретной математики иногда употребляют термин «конечная математика». Ниже термин Д. а. понимается в широком смысле, включающем дискретную математику.

В отличие от Д. а. классическая математика, в основном, занимается изучением свойств объектов непрерывного характера. Использование классической или дискретной математики как аппаратов исследования связано с задачами, которые ставит перед собой исследователь, и с тем, какую модель изучаемого явления он рассматривает — дискретную или непрерывную. Так, например, при нахождении массы радиоактивного вещества в данный момент с определенной точностью можно считать, что процесс изменения массы при радиоактивном распаде носит непрерывный характер, и в то же время ясно, что на самом деле этот процесс дискретен. Само деление математики на классическую и дискретную в значительной мере условно, поскольку, например, с одной стороны, происходит активная циркуляция идей и методов между ними, а с другой стороны, часто возникает необходимость исследования моделей, обладающих как дискретными, так и непрерывными свойствами одновременно. Следует отметить также, что в математике существуют направления, использующие средства дискретной математики для изучения непрерывных моделей и, наоборот, часто средства и постановки задач классического анализа используются при исследовании дискретных структур. Это указывает на известное слияние рассматриваемых областей.

Специфика методов и задач Д. а. обусловлена, в первую очередь, необходимостью отказа от основополагающих понятий классической математики — предела и непрерывности — и в связи с этим тем, что для многих задач Д. а. сильные средства классической математики оказываются, как правило, малоприменимыми. К подразделам Д. а. относят *комбинаторный анализ*, *графов теорию*, *кодирования теорию*, *теорию функциональных систем* и некоторые



Структурная схема дискретной системы управления.

мени описывается разностными уравнениями, причем для цифровых систем эти уравнения всегда нелинейны.

В связи с расширением сферы применения ЦВМ, выполняющих во многих случаях функции УУ, удельный вес Д. с. у. в технике уве-

другие. Часто под термином Д. а., предполагая, что его предмет исчерпывается конечными структурами, понимают именно совокупность перечисленных дисциплин. С точки зрения расширения понимания этого предмета к Д. а. можно также отнести как целые разделы математики, например, *логику математическую*, так и части таких разделов, как теория чисел, алгебра, *вычислительная математика*, *вероятностей теория*, и некоторые другие, в которых изучаемый объект носит дискретный характер.

Элементы Д. а. возникли в глубокой древности и, развиваясь параллельно с другими разделами математики, в значительной мере являлись их составной частью. Типичными для того периода являлись задачи, связанные со свойствами целых чисел и приведшие затем к созданию теории чисел. К их числу могут быть отнесены задачи отыскания алгоритмов сложения и умножения натуральных чисел у древних египтян (2 тысячелетие до н. э.), задачи о суммировании и о делимости натуральных чисел в пифагорейской школе (5—4 в. до н. э.) и т. п. Позже, в основном, в связи с игровыми задачами, появились элементы комбинаторного анализа и дискретной теории вероятностей, а в связи с общими проблемами теории чисел, алгебры и геометрии (18—19 в.) возникли важнейшие понятия алгебры, такие как группа, поле, кольцо и др., определившие развитие и содержание алгебры на много лет вперед и имевшие, по существу, дискретную природу. Стремление к строгости матем. рассуждений и анализ рабочего инструмента математики — логики — привели к выделению еще одного важного раздела математики — математической логики (19 в.). Однако наибольшего развития Д. а. достиг в связи с запросами практики, приведшими к появлению новой науки — *кибернетики* и ее теоретической части — теор. кибернетики (20 в.). Теор. кибернетика, непосредственно изучающая с позиций математики самые разнообразные проблемы, которые ставит перед кибернетикой практическая деятельность человека, является мощным поставщиком идей и задач для Д. а. Так, прикладные вопросы, требующие большой числовой обработки, стимулировали появление сильных численных методов решения задач, оформившихся затем в вычисл. математику, а анализ понятия «вычислимость» и «алгоритм» привели к появлению важного раздела математической логики — *алгоритмов теории*. Растущий поток информации и связанные с ним задачи хранения, обработки и передачи ее привели к возникновению теории кодирования; эконом. задачи, задачи электротехники, равно как и внутренние задачи математики, потребовали разработки теории графов; задачи конструирования и описания работы сложных управляющих систем привели к теории функциональных систем. Теор. кибернетика широко использует результаты Д. а. при решении задач.

Наряду с уже отмеченными, Д. а. имеет еще ряд особенностей. Так, вместе с задачами типа существования, имеющими общематематический характер, важное место в Д. а. занимают

задачи типа алгоритмической разрешимости и построения конкретных решающих *алгоритмов*. Другой особенностью Д. а. является то, что он, по существу, первым столкнулся с необходимостью глубокого исследования т. н. дискретных многоэкстремальных задач, особенно часто возникающих в теор. кибернетике. Соответствующие методы классической математики для поиска *экстремумов*, существенно использующие определенную гладкость ф-ций, в этих случаях оказываются мало эффективными. Типичными задачами такого рода в Д. а. являются, например, задачи об отыскании в некотором смысле *стратегий оптимальных* в шахматной партии при ограниченном числе ходов, а также важный вопрос матем. кибернетики о построении *дизъюнктивных нормальных форм минимальных* для *булевых функций*, т. е. так называемая проблема минимизации булевых функций (см. *Алгебра логики*). Особенностью Д. а., связанной уже с задачами для конечных структур, является и то, что для многих из этих задач, как правило, существует алгоритм решения, в то время как в классической математике полное решение задачи часто возможно лишь при весьма жестких ограничениях. Примером такого алгоритма может служить алгоритм просмотра всех возможных вариантов, т. е. алгоритм типа «полного перебора». К числу задач указанного вида могут быть отнесены, например, упомянутые задачи о стратегиях в шахматной партии, о минимизации булевых функций и др. Однако методы решения типа «полного перебора» очень трудоемки и практически малопримемлемы, в связи с чем возникает ряд новых задач, связанных с условиями, ограничивающими перебор и приводящими к сведению индивидуальных задач, характеризующихся конкретными значениями параметров, к массовой проблеме, характеризующейся бесконечным множеством значений параметров; возникают задачи в наложении ограничений, естественных для этого класса задач, на средства решения и т. п. Постановка такого рода вопросов и разработка методик осуществляется на конкретных моделях, представляемых различными разделами математики. К их числу относятся, например, модели минимизации булевых функций и синтеза управляющих систем из теор. кибернетики.

**ЛИТ.:** Яблонский С. В. Обзор некоторых результатов в области дискретной математики. «Информационные материалы Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР», 1970, № 5; Дискретный анализ, № 1—22. Новосибирск, 1963—73; Проблемы кибернетики, № 1—26. М., 1958—73; Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. Пер. с англ. М., 1965. В. Б. Кудрявцев.

**ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ТЕОРИЯ** — раздел теоретической кибернетики, в котором методами *автоматов теории* исследуется функционирование устройств, выполняющих преобразование информации в соответствии с заданными алгоритмами. Осн. областями приложения Д. п. т. являются теоретические вопросы программирования, а также алгоритмическое и логическое проектирование структур вычисл. машин.



Пусть  $A$  — инициальный  $X$ - $Y$ -Мили автомат, в котором выделено заключительное состояние  $a^*$ . В отличие от абстрактной теории автоматов, где алфавиты  $X$  и  $Y$  рассматриваются как абстрактные мн-ва, в Д. п. т. элементам этих алфавитов приписывается некоторый смысл (интерпретация). Для этого зафиксируем бесконечное мн-во  $B$ . Элементы этого мн-ва наз. и н ф о р м а ц и о н н ы м и о б ъ е к т а м и, а само мн-во — и н ф о р м а ц и о н н ы м м н о ж е с т в о м. Полагая, что в  $B$  выделено некоторое подмн-во  $B_0$  начальных информационных объектов. Каждому выходному сигналу  $y \in Y$  автомата  $A$  поставим в соответствие (частичное) преобразование  $f_y$  мн-ва  $B$  в себя, а некоторым элементам  $b$  мн-ва  $B$  поставим в соответствие выходной сигнал  $x = \mu(b)$  автомата  $A$ . Если задано такое соответствие между выходными сигналами автомата  $A$  и преобразованиями мн-ва  $B$ , а также между элементами мн-ва  $B$  и входными сигналами автомата  $A$ , то говорят, что задана интерпретация входных и выходных сигналов автомата  $A$ . Инициальный автомат Мили с заключительным состоянием наз. дискретным преобразователем, если для его входных и выходных сигналов задана интерпретация. При этом говорят, что дискретный преобразователь действует на мн-ве  $B$ , а преобразования  $f_y$  наз. элементарными операторами дискретного преобразователя. Информационное мн-во рассматривают как  $Y$ - $X$ -автомат Мура (см. *Мура автомат*) с выделенным мн-вом  $B_0$  начальных состояний, если ф-цию переходов определить равенством  $by = f_y(b)$  и взять  $\mu$  в качестве ф-ции выходов. Полученный таким образом автомат  $B$  наз. *автоматом операционным*, а дискретный преобразователь при таком рассмотрении — *автоматом управляющим*.

Каждый дискретный преобразователь  $A$  определяет некоторое частичное преобразование  $f_A$  мн-ва  $B$  состояний операционного автомата (информационного мн-ва). Это преобразование наз. оператором, представленным дискретным преобразователем  $A$ . Для того, чтобы вычислить  $f_A(b)$ , следует операционный автомат установить в состояние  $b$  и соединить его с дискретным преобразователем  $A$ , установленным в начальное состояние. Получится система из двух автоматов (Илл. см. в ст. *Автомат управляющий*), которая начнет функционировать. Если через конечное число тактов автомат  $A$  перейдет в заключительное состояние  $a^*$ , то  $f_A(b)$  считается определенным и равным состоянию автомата  $B$ , в которое он перейдет в этот момент времени. В противном случае  $f_A(b)$  считается неопределенным. Говорят также, что  $A$  применим (не применим) к состоянию  $b$  автомата  $B$ . Очевидно,  $f_A(b)$  определено тогда и только тогда, когда существуют слова  $p \in F(X)$  и  $q \in F(Y)$  такие, что

$$\varphi_A^*(p) = q; \quad \varphi_b(q) = p, \quad (1)$$

где  $\varphi_A^*$  — ограничение автоматного отображе-

ния  $\varphi_A$ , представленного автоматом  $A$  на мн-во таких слов  $p$ , что  $a_0 p = a^*$ . Если слова, удовлетворяющие системе ур-ний (1) существуют, то они определены единственным образом и  $f_A(b) = bq$ .

В качестве примеров дискретных преобразователей рассматривают головки *Тьюринга машин*, интерпретированные *алгоритмы граф-схемы*, логические *операторные схемы* алгоритмов, *схемы алгоритмов над памятью*, *программы*, *микропрограммы* и *устройства управления ЦВМ*. Исследована структура операционных автоматов, наиболее часто встречающихся в современных тем вычисл. машинах (см. *Автомат регистровый*). Одной из осн. задач Д. п. т. является изучение структуры преобразований, которые они представляют. Для этой цели был построен класс спец. алгебр (см. *Алгебра алгоритмов*). Исследование соотношений в конкретных алгебрах этого класса и преобразование выражений, соответствующих операторам, представляемым дискретными преобразователями, позволяет решать задачу синтеза дискретных преобразователей, удовлетворяющих тем или иным критериям оптимальности. Большое значение имеет также изучение различных видов эквивалентности дискретных преобразователей.

Лит.: Глушков В. М. Теория автоматов и вопросы проектирования структур цифровых машин. «Кибернетика», 1965, № 1; Глушков В. М., Лetichevский А. А. Теория дискретных преобразователей. В кн.: Избранные вопросы алгебры и логики. Новосибирск. 1973.

А. А. Летичевский.

**ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ АНАЛИЗ** — раздел автоматического управления теории, изучающий процессы в дискретных (импульсных) системах (ДС) автоматического управления, а также их различные качественные и количественные характеристики (устойчивость, точность, качество переходных процессов и т. п.).

Процесс управления в ДС сопровождается *квантованием* по времени, поэтому движение таких систем обычно описывают разностными уравнениями.

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n); \quad \sigma_n = \varphi(x_n), \quad (1)$$

где  $x_n = x(t_n) = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)})$  — вектор фазовых координат  $x_n^{(i)}$ , однозначно определяющих динамическое состояние ДС в момент времени  $t = t_n$ , соответствующий появлению  $n$ -го импульса;  $m$  — порядок ДС;  $u_n = u(t_n)$  — внешнее воздействие (вход ДС);  $f(x, u) = (f^{(1)}(x, u), f^{(2)}(x, u), \dots, f^{(m)}(x, u))$  — вектор-функция  $x$  и  $u$ , равная нулю при  $x = 0$  и  $u = 0$ ;  $\sigma_n = \sigma(t_n)$  — выход ДС (регулируемая величина, ошибка регулирования и т. п.);  $\varphi(x)$  — скалярная функция фазовых координат ДС;  $n = 0, 1, 2, \dots$  — номер импульса (независимая переменная системы разностных уравнений (1)).

Анализ ДС заключается в исследовании свойств решений разностных уравнений (1).

При  $u_n \equiv 0$  решения системы (1) описывают свободные движения ДС, а при  $u_n \neq 0$  — вынужденные. В соответствии с этой классификацией и задачи анализа ДС подразделяются на задачи анализа свободных и вынужденных движений. В зависимости от характера правой части системы уравнений (1) различают линейные и нелинейные ДС. Нелинейные ДС отличаются от линейных значительно большим разнообразием и сложностью форм возможных движений, поэтому осн. задачи и особенно методы анализа линейных и нелинейных ДС оказываются существенно различными.

**Анализ устойчивости** ДС заключается в определении таких соотношений между параметрами системы, при которых исследуемая ДС обладает той или иной формой устойчивости. Для линейных стационарных ДС эта задача решена до конца, поскольку для них получены *устойчивости критерии*, устанавливающие необходимые и достаточные условия устойчивости. Для нелинейных и линейных нестационарных ДС такого «окончательного» решения не существует; для них известны только общие методы решения задачи (см., напр., *Ляпунова методы*), которые, как правило, дают лишь достаточные условия устойчивости. Для некоторых наиболее простых классов нелинейных ДС (напр., ДС, состоящие из соединенных между собой линейных и нелинейных блоков) получены критерии устойчивости, которые в явном виде накладывают ограничения на параметры системы; однако эти критерии в общем случае также определяют лишь достаточные условия устойчивости. Нелинейные ДС (в отличие от линейных) могут быть устойчивыми не при всех начальных состояниях. В связи с этим возникает задача об устойчивости в области, заключающаяся в том, чтобы в пространстве фазовых координат  $x$  отыскать область таких начальных состояний, из которых ДС приходит в заданное равновесное (стационарное) состояние (см. *Устойчивости дискретных систем теория*).

**Анализ качества процесса регулирования** представляет собой исследование реакции ДС автомат. управления на различного рода типовые воздействия. В качестве таких воздействий применяют:

1) функции ступенчатые

$$u_n = \begin{cases} \text{const} & \text{при } n \geq 0 \\ 0 & \text{при } n < 0; \end{cases} \quad (2)$$

2) гармонические ф-ции

$$u_n = A_0 \sin(\bar{\omega}n + \alpha_0), \quad (3)$$

где  $A_0$  и  $\alpha_0$  — амплитуда и начальная фаза гармонического воздействия,  $\bar{\omega} = \omega T$  — относительная частота (в радианах),  $T$  — шаг квантования по времени, а  $\omega$  — частота; и 3) стационарные случайные ф-ции, заданные своей спектральной плотностью или корреляционной функцией и т. п.

Для линейных ДС задачи анализа качества процесса регулирования (см. *Критерии качества систем автоматического управления*), как правило, могут быть решены точно, поскольку в этом случае при детерминированных пробных воздействиях решения системы уравнений (1) можно найти аналитически в виде явных ф-ций независимой переменной  $n$ , а при стационарных случайных пробных воздействиях можно определить статистические характеристики (спектральную плотность и корреляционную ф-цию) реакции ДС. Для нелинейных ДС эти задачи удается решить только в наиболее простых случаях и притом лишь приближенно (на уровне оценок). Наиболее удобным матем. аппаратом, применяемым для решения подобных задач, является *Лапласа дискретное преобразование* (или преобразование Фурье). Для приближенного анализа качества процессов в нелинейных ДС широко применяется также аппарат гармонической или статистической линеаризации.

**Анализ периодических процессов** (автоколебаний). Система разностных уравнений (1) может иметь незатухающие колебательные (периодические) решения, удовлетворяющие соотношению

$$x_n = x_{n \pm N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где  $N \geq 2$  — период колебаний. В линейных ДС таким решениям соответствуют колебательные процессы, находящиеся на грани устойчивости (консервативные системы). В нелинейных ДС процессы вида (4) могут быть устойчивыми; в этом случае они наз. *автоколебаниями*. Задача анализа автоколебаний заключается в определении параметров (амплитуды, периода и т. п.) периодических процессов и в отыскании условий, при которых эти процессы обладают той или иной формой устойчивости. Параметры периодических процессов можно определять как точными (метод припасовывания), так и приближенными (метод гармонической линеаризации) методами. Точные методы, хотя и дают возможность отыскать истинные значения параметров процесса, требуют выполнения громоздких и трудоемких вычислений. Вопрос об устойчивости найденных периодических процессов в этом случае может быть решен строго, на основе 1-го метода Ляпунова. Приближенные методы приводят, как правило, к гораздо менее громоздким вычислениям, но полученные при этом оценки параметров периодических процессов и особенно оценки их устойчивости не обладают достаточной строгостью. Однако как точные, так и приближенные методы обычно требуют априорной информации о возможных формах периодических процессов (число импульсов на период —  $N$ , число перемен знака импульсов на период и т. п.), что существенно затрудняет их практическое применение и снижает пенность результатов исследования.

**Анализ диссипативности нелинейных ДС.** Нелинейная ДС наз. диссипативной (иногда — предельно ограниченной), если существ.

вует такое число  $\mu > 0$  и для любого начального состояния  $x_0$  — такое достаточно большое число  $N(x_0)$ , что для всех  $x_0$  (или для всех  $x_0$  из некоторой ограниченной области)

$$\|x_n\| \leq \mu \text{ при всех } n \geq N(x_0), \quad (5)$$

где символ  $\|x\|$  означает норму вектора  $x$ . Практически это означает, что из любых начальных состояний (или из некоторой ограниченной области) ДС стремится в некоторую окрестность (5) начала координат (точка  $x_n = 0$ ) фазового пространства и при всех  $n \geq N$  не покидает эту окрестность. Задача анализа диссипативности нелинейных ДС заключается в определении условий (ограничений на параметры ДС), при которых ДС стремится в указанную окрестность, а также в определении ее размеров (числа  $\mu$ ). ДС может иметь устойчивые или неустойчивые точки равновесия и устойчивые или неустойчивые предельные циклы, соответствующие различным периодическим процессам; но если эта система диссипативна, то все указанные точки и циклы принадлежат окрестности (5). Таким образом, анализ диссипативности позволяет получить оценку точности ДС в установившемся режиме, но не позволяет сделать каких-либо выводов о длительности и качестве переходного процесса. Анализ диссипативности целесообразно производить в тех случаях, когда в ДС могут существовать многие различные формы периодических процессов, но априорной информации об их числе и формах нет. В этих случаях анализ диссипативности позволяет получить некоторые оценки точности процесса регулирования, не прибегая к трудоемким вычислениям, связанным с детальным анализом всех возможных форм периодических процессов. Для анализа диссипативности применяется матем. аппарат функций Ляпунова, а в тех случаях, когда система ур-ний (1) содержит линейную часть, применяются также и частотные методы. Конкретный вид системы разностных ур-ний (1), а следовательно, и конкретные методы решения различных задач анализа ДС существенно зависят от вида модуляции импульсной (способа квантования) — АИМ, ШИМ или ЧИМ, — примененного в системе.

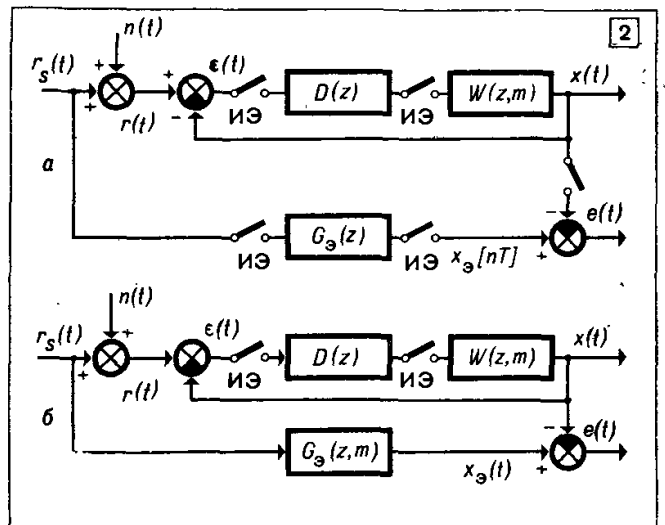
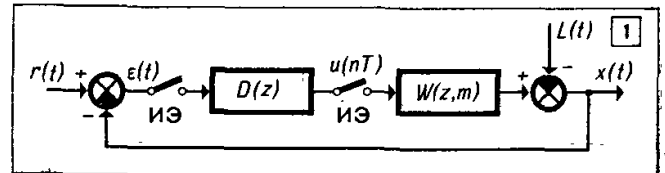
Лит.: Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [библиогр. с. 926—963]; Проблемы теории импульсных систем управления. Итоги науки. М., 1966 [библиогр. с. 173—174]; Кунцевич В. М., Чеховой Ю. Н. Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. К., 1970 [библиогр. с. 330—336].

В. М. Кунцевич, Ю. Н. Чеховой.

**ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ СИНТЕЗ** — определение структуры и значений параметров дискретной системы управления (ДСАУ), при которых система удовлетворяет предъявляемым к ней требованиям. Обычно при Д. с. а. у. с. объект управления бывает задан. В этом случае задача синтеза сводится к определению структуры и параметров управляющей части ДСАУ. В одной из частных, но важных задач Д. с. а. у. с. (т. н. задача параметрического синтеза) структура управляющей части

ДСАУ также бывает задана заранее, и необходимо определить лишь значения ее параметров (см. *Оптимальных параметров системы выбор*). В общем случае ДСАУ имеет заданную (неизменяемую) часть и необходимо определить структуру и значение параметров изменяемой части.

Конкретная постановка задачи синтеза и методы ее решения существенно зависят от характера требований, предъявляемых к ДСАУ. Во многих практических задачах эти требования имеют вид ограничений, налагаемых на



1. Схема осуществления последовательной дискретной коррекции.

2. Расчетные схемы для синтеза систем с «эталонной моделью»: а — схема, использующая оценки в дискретные моменты времени; б — схема, использующая оценки в непрерывном времени.

систему (напр., устойчивости критерии, динамических систем условия грубости, наблюдаемости и управляемости условия, требования астатизма  $n$ -го порядка и т. п.). Такие задачи, как правило, имеют неединственное решение и позволяют выделить класс систем, удовлетворяющих предъявленным требованиям. В других задачах синтеза требуется построить ДСАУ таким образом, чтобы обеспечить минимизацию некоторого критерия (см. *Критерии качества систем автоматического управления*). ДСАУ, синтезированные при таких условиях, наз. оптимальными в смысле минимума выбранного критерия.

Решение многих задач синтеза плохо поддается формализации, поэтому некоторые методы его осуществления представляют собой итерационный процесс (или последовательность проб и ошибок), включающий в себя дискретных систем автоматического управления анализ.

Наиболее разработаны и формализованы методы синтеза линейных ДСАУ. В зависимости

от формы математического описания ДСАУ различают методы синтеза в частотной или временной области.

В частотной области задача состоит в определении оптим. (в смысле выбранного критерия) характеристик замкнутой ДСАУ — передаточной функции  $K_{з.опт.}(z, m)$  или частотной характеристики  $K_{з.опт.}(j\omega, m)$  (см. Частотные характеристики систем автоматического управления) и далее в их реализации путем коррекции систем автоматического управления.

корректирующего устр-ва;  $K_z(z, m)_x = \frac{x(z, m)}{r(z)}$  — передаточная функция замкну-

той системы;  $K_z(z, m)_\varepsilon = \frac{\varepsilon(z, m)}{r(z)}$  — переда-

точная функция замкнутой системы относительно ошибки;  $r(t)$  — входной сигнал системы (задающее воздействие);  $x(t)$  — выходной сигнал системы (управляемая координата);  $u(t)$  — управляющее воздействие;  $L(t)$  — возмущающее воздействие (приведенное к выходу системы);  $\varepsilon(t)$  — ошибка системы;  $r(z, m)$ ,

Т а б л и ц а 1

Требования, предъявляемые к системе	Требования, которым должна удовлетворять при этом передаточная функция замкнутой системы $K_{з.опт.}(z)$
Физическая реализуемость	Разность степеней знаменателя и числителя $K_{з.опт.}(z)$ должна быть больше $\tau/T$ ( $\tau$ — время чистого запаздывания неизменяемой части системы)
Устойчивость	Все полюсы $K_{з.опт.}(z)$ должны быть расположены внутри окружности единичного радиуса
Грубость	$K_{з.опт.}(z)_x$ должна содержать множитель $[P(z)]_-$ (если неизменяемая часть устойчива) и, кроме того, $K_{з.опт.}(z)_\varepsilon$ должна содержать множитель $[Q(z)]_-$ (если неизменяемая часть неустойчива)
Астатизм $k$ -го порядка	$K_{з.опт.}(z)_x$ должна содержать множитель $(z-1)^k$
Отсутствие скрытых колебаний	$K_{з.опт.}(z)_x$ должна содержать множитель $P(z)$ .

Пр и м е ч а н и е. Операция представления полинома  $A(z)$  в виде произведения двух сомножителей  $A(z) = [A(z)]_+ [A(z)]_-$ , из которых первый —  $[A(z)]_+$  имеет все нули внутри окружности единичного радиуса, а второй —  $A(z)_-$  — вне ее, наз. операцией факторизации

Т а б л и ц а 2

Вид функции $F(e)$ и дополнительные условия	Показатели качества системы $I(m)$
$F(e) = 1$	$I(m) = \sum_{n=0}^{s-1} 1 = s$ — время переходного процесса
$F(e) = e[nT, m]$ $s = \infty$	$I(m) = \sum_{n=0}^{\infty} e[nT, m]$ — суммарная ошибка
$F(e) = e^2[nT, m]$ $s = \infty$	$I(m) = \sum_{n=0}^{\infty} e^2[nT, m]$ — суммарная квадратичная ошибка
$F(e) = e^2[nT, m]$ , $e[nT, m] \equiv 0$ при $n \geq s$	$I(m) = \sum_{n=0}^{s-1} e^2[nT, m]$ — суммарная квадратичная ошибка при конечной длительности переходного процесса

В значительном числе методов Д. с. а. у. с. в такой постановке задачи рассматривают схему последовательной дискретной коррекции одноконтурной линейной ДСАУ (рис. 1). Здесь  $W(z, m) = \frac{x(z, m)}{u(z)} = \frac{P(z, m)}{Q(z)}$  — передаточная функция неизменяемой части системы;  $D(z) = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)}$  — передаточная функция

$x(z, m), \dots$  — Лапласа дискретные преобразования сигналов  $r(t), x(t)$  и т. д.; ИЭ — импульсные элементы;  $T$  — период ИЭ. Передаточную функцию дискретного корректирующего устр-ва  $D(z)$  находят после определения оптим. передаточной функции замкнутой системы по формуле:

$$D(z) = \frac{1}{W(z)} \cdot \frac{K_{з.опт.}(z)_x}{1 - K_{з.опт.}(z)_x}$$

или

$$D(z) = \frac{1}{W(z)} \cdot \frac{1 - K_{3.опт.}(z)_\varepsilon}{K_{3.опт.}(z)_\varepsilon}.$$

Различные требования, предъявляемые к системе и ее передаточной ф-ции  $K_{3.опт.}(z)$  при использовании методов Д. с. а. у. с. этого класса, приведены в таблице 1.

Рассмотрим более подробно некоторые постановки задач Д. с. а. у. с. и методы их решения.

Синтез по условиям конечной длительности процессов. Задача синтеза систем, обладающих свойством конечной длительности процессов, ставится для полиномиальных входных воздействий

$$r_k(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i t^i,$$

где  $t$  — непрерывное время,  $a_i = \text{const}$ ,  $k \geq 1$ . В линейных ДСАУ имеет место процесс конечной длительности, если  $K_{3.опт.}(z)$  является конечным полиномом по степеням  $z^{-1}$ . Разработаны также методы синтеза систем с конечной длительностью процессов при наличии ограничений (типа насыщение) на управляющее воздействие, а также с учетом возмущающих воздействий; в последнем случае система синтезируется таким образом, чтобы выполнялись условия конечной длительности как по отношению к воздействию  $r(t)$ , так и к возмущающему воздействию  $L(t)$ .

Синтез систем с «эталонной моделью». Часто как показатель качества системы принимают функционал  $I(m)$  функции решетчатой, представляющей разность между желаемым  $x_\varepsilon[nT, m]$  и действительным  $x[nT, m]$  выходными сигналами:

$$e[nT, m] = x_\varepsilon[nT, m] - x[nT, m].$$

При этом применяют расчетные схемы с т. н. «эталонной моделью» (рис. 2). Здесь  $G_\varepsilon(z, m)$  — передаточная функция эталонной модели, осуществляющей заданное преобразование полезного сигнала  $r_s$  в требуемый  $x_\varepsilon$ ;  $n(t)$  — помеха; остальные обозначения соответствуют принятым на рис. 1.

В довольно общем случае функционал  $I(m)$  можно представить в виде

$$I(m) = \sum_{n=0}^{s-1} F(e[nT, m]), \quad (1)$$

где  $F(e)$  — некоторая функция. Частные случаи  $F(e)$  и соответствующие показатели качества приведены в таблице 2.

Для оценки поведения системы между дискретными моментами времени рассматривается среднее значение функционала (1)

$$\overline{I(m)} = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{s-1} \int_0^T F(e[nT, m]) dm.$$

При этом, как и в рассмотренных выше в табл. случаях, в зависимости от вида  $F(e)$  получают различные показатели качества системы. Если входной сигнал системы  $r(t)$  представляет собой стационарный случайный процесс, в качестве показателей, аналогичных приведенным выше, принимают

$$I(m) = M \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} F(e[nT, m]) \right\} \quad (2)$$

и

$$\begin{aligned} \overline{I(m)} &= \frac{1}{T} M \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T F(e[nT, m]) dm \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} M \left\{ \int_0^T F(e[nT, m]) dm \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

соответственно [для дискретного и непрерывного времени, где  $M$  — символ математического ожидания].

Для случая, когда  $F(e) = e^2$ , а неизменяемая часть системы  $W(z)$  устойчива и не содержит запаздывания, передаточная функция системы, оптим. в смысле минимума функционалов (2) или (3), определяется соотв. формулами

$$\begin{aligned} K_{3.опт.}(z)_x &= \frac{1}{[\Phi_{rr}(z)]_+} \times \\ &\times \left\{ \frac{G_\varepsilon(z) [\Phi_{r_s r_s}(z) + \Phi_{nr_s}(z)]}{[\Phi_{rr}(z)]_-} \right\}_+; \\ K_{3.опт.}(z)_x &= \frac{W(z)}{[K_1(z)]_+ [\Phi_{rr}(z)]_+} \times \\ &\times \left\{ \frac{K_2(z^{-1}) [\Phi_{r_s r_s}(z) + \Phi_{nr_s}(z)]}{[K_1(z)]_- [\Phi_{rr}(z)]_-} \right\}_+, \end{aligned}$$

где

$$K_1(z) = \int_0^1 W(z, m) W(z^{-1}, m) dm;$$

$$K_2(z^{-1}) = \int_0^1 \hat{W} G_\varepsilon(z, m) dm;$$

$$\hat{W} G_\varepsilon(z, m) = Z_m \{ W(-s) G_\varepsilon(s) \},$$

$s$  — параметр обычного преобразования Лапласа,  $Z_m$  — символ модифицированного  $z$ -преобразования,  $\Phi_{r_s r_s}(z)$ ,  $\Phi_{rr}(z)$ ,  $\Phi_{nr_s}(z)$  — спектральные плотности ( $z$ -преобразования автокорреляционных функций сигналов  $r_s$  и  $r$  и взаимной корреляционной функции сигналов  $n$  и  $r_s$ );  $\{A(z)\}_+ + \{A(z)\}_- = A(z)$  — операция расщепления, т. е. представления полинома  $A(z)$  в виде суммы двух полиномов, из которых первый  $\{A(z)\}_+ -$

содержит полюсы внутри окружности единичного радиуса, а второй  $\{A(z)\}$  — вне ее.

При статистическом Д. с. а. у. с. получены решения большого числа задач, отличающихся видом неизменяемой части  $W(z)$  (неустойчивая, с запаздыванием), выбранных функционалов и ограничений. Расчетные процедуры для детерминированных воздействий  $r(t)$  во многом подобны приведенным выше.

В ряде случаев эталонную модель можно задать другими характеристиками (напр., расположением их полюсов, частотной характеристикой); при этом находят применение также *корневого годографа метод*, метод логарифм. частотных характеристик и др.

При решении задачи Д. с. а. у. с. во временной области широкое распространение получил метод аналитического конструирования регуляторов. Для линейного полностью управляемого объекта, описываемого разностным уравнением

$$x[(n+1)T] = Ax[nT] + Bu[nT],$$

этот метод позволяет определить такое управление  $u[nT] = U(x[nT])$ , при котором наряду с обеспечением асимптотической устойчивости системы управления минимизируется функционал

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \omega(x[nT], u[nT]). \quad (4)$$

Здесь  $x[nT]$  —  $m$ -мерный вектор фазовых координат;  $u[nT]$  —  $q$ -мерный вектор управляющих воздействий;  $A, B$  — числовые матрицы;  $\omega(x[nT], u[nT]) = x'[nT] Q x[nT] + 2x'[nT] B u[nT] + u'[nT] R u[nT]$ ,  $Q > 0$ ;  $B > 0$ ;  $R > 0$  — заданные числовые матрицы, удовлетворяющие условию  $\begin{vmatrix} Q & B \\ B' & R \end{vmatrix} > 0$ ; ' — знак транспонирования.

Известно несколько различных методов решения этой задачи, дающих одинаковые конечные результаты; наиболее простой из них основан на использовании ф-ций Ляпунова. При выборе положительно определенной функции Ляпунова  $v[nT] = V(x[nT], u[nT])$ , первая разность которой принимается равной  $-\omega(x[nT], u[nT])$ , получим

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} (-\Delta v[nT]) = v(x[0], u[0]).$$

Показано, что при выборе  $v(x[nT])$  в виде  $v(x[nT]) = x'[nT] P x[nT]$  управление, оптимальное в смысле минимума функционала (4), имеет вид

$$u(x[nT]) = -(R + B'PB)^{-1}(B'PA + B')x[nT],$$

где положительно определенная матрица  $P$  определяется из уравнения

$$P - A'PA - Q + (A'PB + B)(R + B'PB)^{-1}(A'PB + B)' = 0.$$

Многие рассмотренные выше методы Д. с. а. у. с. распространены также на случай дискретных *многомерных систем автоматического управления*. При синтезе таких систем применяются и некоторые специфические методы, напр., синтез по условиям *автономности* или инвариантности (см. *Инвариантность систем автоматического управления*). Для нелинейных объектов в общем случае не удается получить решение задачи управления в виде  $u = L(x)$  ( $L$  — в общем случае нелинейный оператор), т. е. в классе систем с обратной связью. Известны лишь методы определения оптим. программного управления, т. е. управления, отыскиваемого в виде  $u = \varphi[nT]$ . Так, напр., для объектов, описываемых нелинейным разностным уравнением

$$x[(n+1)T] = F(x[nT], u[nT], nT),$$

где  $u \in R$ ;  $R$  — замкнутое ограниченное мн-во допустимых управлений, последовательность управления  $u[nT]$ , минимизирующую выбранный функционал, можно определить либо с помощью дискретного аналога принципа максимума, либо с помощью методов *программирования динамического*.

Наряду с рассмотренными методами в последнее время значительное внимание уделяют синтезу дискретных систем управления объектами со случайными параметрами; синтез таких систем базируется на применении идей и методов *дуального управления и управления с адаптацией*. См. также *Непрерывных систем автоматического управления синтез*.

Лит.: Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [библиогр. с. 926—963]; Проблемы теории импульсных систем управления. Итоги науки. М., 1966 [библиогр. с. 173—174]; Катковник В. Я., Ползунов Р. А. Многомерные дискретные системы управления. М., 1966 [библиогр. с. 410—413]; Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. М., 1968 [библиогр. с. 347—381]; Чанг Ш. С. Л. Синтез оптимальных систем автоматического управления. Пер. с англ. М., 1964. Ю. В. Крементуло, В. М. Кунцевич.

**ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМА** — набор логических элементов, обеспечивающий построение сложнейших логических устройств цифровых вычислительных машин. Это построение осуществляется на основе подстановки ф-ции любого логического элемента ЦВМ в качестве аргумента ф-ции другого элемента и восстановления заданного качества информационных сигналов. Для соблюдения условий функциональной полноты Д. э. с. должна реализовать функционально полную систему *переключательных функций*. Для выполнения условий тех. полноты Д. э. с. достаточно иметь один элемент, восстанавливающий величины информационных сигналов в пределах их областей отражения. Для элементов отдельных Д. э. с. характерны согласованность параметров и многие общие особенности в отношении быстродействия, надежности, конструкции, технологии производства.

Простейшим типом Д. э. с. является универсальный логический элемент, реализующий ф-цию  $x \cdot y$  или  $x \vee y$ , сделанный, напр., в виде совокупности диодной схемы совпадения



или разделения и транзисторного инвертора, который, кроме инвертирования, выполняет ф-ции восстановления уровней информационных сигналов. Имеется много разновидностей универсальных элементов. Их различают в зависимости от типа компонентов (напр., диодная логика, резисторно-транзисторная логика, транзисторная логика и т. д.), связей между компонентами, выполняющими логические операции (непосредственные, резисторные, транзисторные связи и др.), от режима работы активных элементов (насыщенные, ненасыщенные) и т. п.

Практически Д. э. с. выполняют чаще всего избыточными по функциональному составу, чтобы обеспечить простоту и гибкость при синтезе логических схем. Примером такой избыточной Д. э. с. является набор, включающий элемент с повышенной нагрузочной способностью, несколько разновидностей триггеров, ряд универсальных элементов с различным количеством логических входов. Кроме универсальных элементов с одной ступенью комбинационной логики, в Д. э. с. часто входят также элементы с двумя ступенями логики. В наборе имеется и элемент для расширения количества входов 1-й или 2-й степени некоторых универсальных элементов.

Если Д. э. с. расширяют за счет специализированных элементов для выполнения различных логических ф-ций, эту систему трудно унифицировать и стандартизировать (а это имеет особенно важное значение, если элементы изготавливают в виде интегральных схем). Оптим. разрешение противоречивых требований специализации и универсализации к набору Д. э. с. достигается в многофункциональных больших интегр. схемах, которые при несложной предварительной настройке без изменения структуры и топологии схемы могут реализовать любую требуемую логическую ф-цию. В Д. э. с. из интегр. схем стираются грани между логическими, запоминающими, восстанавливающими элементами, а большое значение приобретают упрощение и однородность междуэлементных связей. См. также *Импульсная элементная структура ЦВМ, Потенциальная элементная структура ЦВМ, Потенциально-импульсная элементная структура ЦВМ, Элементная структура ЦВМ*.

Лит.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]; Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [библиогр. с. 299—301]; Микроэлектроника и большие системы. Пер. с англ. М., 1967. Э. И. Комухав.

**ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ** — один из основных методов математической статистики, применяемый для анализа результатов наблюдений, зависящих от различных одновременно действующих факторов, выбора наиболее важных факторов, оценки их влияния и т. п. Д. а. развивался гл. обр. в связи с приложениями в сельскохозяйственной статистике. В настоящее время Д. а. применяется при анализе самых разнообразных экспериментов. Одним из первых вопросов, рассматриваемых Д. а., есть вопрос о том, является ли совокуп-

ность наблюдений эксперимента набором наблюдений одной нормально распределенной случайной величины или смесью наблюдений нормально распределенных случайных величин, различающихся только сред. значениями. Типичным примером применения Д. а. являются сельскохозяйственные эксперименты по сравнению действия различных удобрений, способов обработки почвы, сортов семян на урожайность культур.

Простейшую из задач Д. а. можно описать следующим образом. Предположим, что полученные в эксперименте наблюдения разбиты на  $r$  групп, причем  $i$ -я группа содержит  $n_i$  величин, предположительно нормальных, со ср. значением  $m_i$  и дисперсией  $\sigma^2$ , постоянной для всех групп. Требуется проверить гипотезу (см. *Статистическая проверка гипотез*) о том, что все значения  $m_i$  равны друг другу, или оценить изменчивость средних  $m_i$ . Пусть  $x_{ij}$  —

$j$ -я величина в  $i$ -й группе,  $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$  — ср. арифметическое наблюдений  $i$ -й группы, а

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \left( n = \sum_{i=1}^r n_i \right) —$$

ср. арифмет. всех наблюдений. Равенство

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^r n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

представляет полную сумму квадратов отклонений наблюдений от общего среднего  $\bar{x}$  в виде суммы двух частей, из которых первая дает сумму квадратов отклонений каждого наблюдения от соответствующего группового сред. значения («сумма квадратов внутри групп»), а вторая — сумму квадратов отклонений групповых сред. значений от общего сред. значения («сумма квадратов между группами»). Величины

$$Q_1 = \sum_{i=1}^r n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

и

$$Q_2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

связаны с оценкой дисперсии внутри групп и оценкой дисперсии между группами и обладают следующими свойствами. Если случайные величины  $x_{ij}$  независимы и имеют нормальное распределение с общей дисперсией  $\sigma^2$ , то величины  $Q_1$  и  $Q_2$  независимы. При предположении, что  $m_i = m$  для всех  $i$ , величины

$\frac{Q}{\sigma^2}$ ,  $\frac{Q_1}{\sigma^2}$ ,  $\frac{Q_2}{\sigma^2}$  ( $Q = Q_1 + Q_2$ ) имеют распределение  $\chi^2$  с  $n - 1$ ,  $r - 1$ ,  $n - r$  степенями

свободы соответственно. Если величина  $S_1^2 = \frac{1}{r-1} Q_1$  немного отличается от величины  $S_2^2 = \frac{1}{n-r} Q_2$ , то нет оснований считать сред.

значения в группах различными. Однако, если  $S_1^2$  значительно превосходит  $S_2^2$ , то возникает подозрение, что ср. значения групп различны.

Более обоснованные выводы получают следующим образом. Отношение  $\frac{S_1^2}{S_2^2}$  наз. дис-

персионным отношением и имеет распределение (распределение  $F$ ), определяемое числами  $r$  и  $n$ . Вместо дисперсионного отношения часто используется величина  $z$ , определяемая равенством  $e^{2z} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ .

Распределе-

ние величины  $z$  также известно; имеются таблицы распределений величин  $e^{2z}$  и  $z$ . Для проверки гипотезы о том, что  $m_i$  одинаковы при всех  $i$ , пользуются «критерием  $z$ ». «Критерий  $z$ » состоит в том, что предположение о равенстве средних отвергается при уровне значимости  $\varepsilon$ , если для полученного в эксперименте значения  $z$  выполняется неравенство  $|z| > z_\varepsilon$ , где  $z_\varepsilon$  определяется так, что вероятность  $P\{|z| > z_\varepsilon\} = \varepsilon$ . Если сред. значения  $m_i$

не равны друг другу, то величина  $\frac{r-1}{n} (S_1^2 - S_2^2)$  является несмещенной оценкой (см. Статистические оценки) для значения

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i (m_i - \bar{m})^2, \quad \left( \text{здесь } \bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i m_i \right),$$

которое можно рассматривать как меру изменчивости неизвестных сред. значений  $m_i$ . Величина

$$t = \sqrt{\frac{n_i n_j}{n_i + n_j}} \cdot \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j - (m_i - m_j)}{S_2}, \quad i \neq j$$

имеет распределение Стьюдента с  $n - r$  степенями свободы. Интервал

$$\left( \bar{x}_i - \bar{x}_j - t_\varepsilon S_2 \sqrt{\frac{n_i + n_j}{n_i n_j}}, \bar{x}_i - \bar{x}_j + t_\varepsilon S_2 \sqrt{\frac{n_i + n_j}{n_i n_j}} \right)$$

является доверительным интервалом для разности между неизвестными сред.  $m_i - m_j$ , соответствующим доверительному уровню  $\varepsilon$ , число  $t_\varepsilon$  взято так, что  $P\{|t| > t_\varepsilon\} = \varepsilon$ . Рассмотренный метод Д. а. наз. также однофакторным анализом или классификацией по одному признаку. Метод Д. а. может быть обобщен на случай, когда наблюде-

ния являются независимыми  $k$ -мерными случайными векторами или когда наблюдаемые случайные величины разбиваются на группы более сложным образом, напр., по нескольким признакам (многофакторный анализ) и т. п.

Важный класс задач Д. а. связан с анализом моделей со случайными факторами. В простейшем случае рассматривается схема, в которой наблюдения  $x_{ij}$  имеют структуру  $x_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}$ , где величины  $a_i$ ,  $e_{ij}$  независимы в совокупности и имеют нулевые математические ожидания, причем  $a_i$  одинаково распределены с дисперсией  $\sigma_a^2$ , а  $e_{ij}$  — одинаково распределены с дисперсией  $\sigma_e^2$ . Наблюдения  $x_{ij}$ , относящиеся к  $i$ -й группе, зависимы; эта зависимость характеризуется коэфф. внутригрупповой корреляции  $\rho$  величин  $x_{ij_1}$  и  $x_{ij_2}$

$$(j_1 \neq j_2): \rho = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2 + \sigma_e^2}. \quad \text{В предположении, что}$$

$a_i$  и  $e_{ij}$  — нормальные случайные величины, построены доверительные интервалы для  $\rho$ , доверительные интервалы и оценки для  $\sigma_a^2$  и  $\sigma_e^2$ , критерии для проверки гипотезы о том, что  $\sigma_a^2 = 0$ , и т. п.

Лит.: Шеффе Г. Дисперсионный анализ. Пер. с англ. М., 1963 [библиогр. с. 616—625].

А. Я. Дороговцев.

**ДИСПЕРСИЯ** (от лат. *dispersio* — рассеяние)  $D\xi$  случайной величины  $\xi$  есть характеристика рассеивания, разброса значений этой случайной величины около ее математического ожидания. Д. определяется формулой

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2,$$

где  $M$  — символ математического ожидания. Величина  $\sqrt{D\xi}$  наз. стандартным отклонением случайной величины и является мерой, характеризующей разброс возможных значений относительно ее среднего значения  $M\xi$ . Если  $\xi$  — дискретная случайная величина, принимающая значение  $x_k$  с вероятностями  $p_k$ , то Д. можно вычислить по формуле

$$D\xi = \sum_k x_k p_k - \left( \sum_k x_k p_k \right)^2,$$

а если  $\xi$  обладает плотностью распределения  $p(x)$ , то

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \right)^2.$$

Основные свойства Д.: Д. постоянной равна нулю; Д. не изменится, если к случайной величине прибавить постоянную; при умножении случайной величины на постоянный множитель  $k$  Д. умножается на  $k^2$ ; Д. суммы независимых случайных величин равна сумме Д.; если  $D\xi = 0$ , то  $P\{\xi = c\} = 1$  для некоторой постоянной  $c$ .

Приведем значение Д. для наиболее важных распределений (при этом для дискретных распределений положим  $p_k = P\{\xi = k\}$ ):

1) биномиальное распределение  $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $D\xi = np(1-p)$ ;

2) гипергеометрическое распределение  $p_k = C_L^k \cdot C_{N-L}^{n-k} (C_N^n)^{-1}$ ,  $k \leq \min(n, L)$ ,  $n \leq N$ ,  $D\xi = (N-n)(N-1)^{-1} np(1-p)$  ( $Np = L$ );

3) распределение Пуассона  $p_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ ,  $D\xi = a$  (т. е. Д. пуассоновского распределения совпадает с его средним значением);

4) распределение Гаусса  $p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$ ,  $D\xi = \sigma^2$ ;

5) равномерное распределение в интервале  $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ ,  $p(x) = \frac{1}{a} \left(|x| < \frac{a}{2}\right)$ ,  $D\xi = \frac{a^2}{12}$ ;

6) показательное распределение  $p(x) = ae^{-ax}$  ( $x \geq 0$ ),  $D\xi = \frac{2}{a^2}$ ;

7) гамма-распределение  $p(x) = \frac{x^{\mu-1} e^{-x}}{\Gamma(\mu)}$ ,  $D\xi = \mu = M\xi$ ;

8) распределение Стюдента  $D\xi = \frac{n}{n-2}$ , где  $n$  — число степеней свободы;

9) логнормальное распределение  $p(x) = a(V2\pi x)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(b + a \ln x)^2\right\}$ ,  $x \geq 0$ ,  $D\xi = \omega^2 \rho^2 (\omega^2 - 1)$ ,  $\omega = \exp\left(\frac{1}{2} a^2\right)$ ,  $\rho = \exp\left(-\frac{b}{a}\right)$  (см. *Распределение вероятностей*).

Чтобы определить Д. по ряду  $x_1, x_2, \dots, x_n$  независимых результатов измерений случайной величины, полагают  $D\xi \approx s^2$ , где  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ ,  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ . Величина  $s^2$  является состоятельной оценкой  $D\xi$ , т. е. при  $n \rightarrow \infty$   $s^2$  сходится по вероятности к  $D\xi$ ; более того, величина  $\sqrt{n}(s^2 - D\xi)$  при  $n \gg 1$  имеет распределение, близкое к нормальному со средним значением нуль и Д.  $\mu_4 = (D\xi)^2$ , где  $\mu_4 = M(\xi - M\xi)^4$ . Более полную информацию о величине  $s^2$  можно получить при конкретных предположениях о распределении величины  $\xi$ . Напр., если  $\xi$  имеет нормальное распределение с параметрами  $(a, \sigma^2)$ , то

$\frac{\sqrt{n-1} s^2}{\sigma^2}$  имеет распределение, не зависящее от  $a$  и  $\sigma$  ( $\chi^2$ -распределение с  $n-1$  степенью свободы), что позволяет строить для Д. *доверительные интервалы*. И. И. Гихман.

**ДИСПЕТЧЕР** в программировании — то же, что *программа-диспетчер*.

**ДИСПЕТЧЕРСКОГО УПРАВЛЕНИЯ АВТОМАТИЗАЦИЯ** — применение комплексной системы (класс систем «человек — машина») для автоматизации процесса управления с учетом оптимальных режимов работы управляемого объекта. С помощью Д. у. а. осуществляется сбор и обработка информации о ходе управляемого процесса, оперативное планирование работы объекта в оптим. режиме, контроль за выполнением оперативных планов путем выдачи диспетчеру сигналов (на световых табло, печатных бланках и т. п.), получение текущей информации о ходе процесса и выполнение оперативных приказов, получение данных о состоянии объектов и т. д. В систему Д. у. а. входят: оператор (диспетчер), *управляющая вычислительная машина* (УВМ), средства связи оператора с УВМ и управляемыми объектами (включая телесвязь), системы датчиков и исполнительных устр-в, которые осуществляют контроль и исполнение приказов непосредственно на объекте. Иногда систему, включающую в себя УВМ и средства связи с оператором, наз. *автoдиспетчером*. Имеется две ступени Д. у. а.: на первой ступени система работает как «советчик», УВМ разрабатывает оперативные планы работы объекта и снимает соответствующую информацию, а исполнение их производит диспетчер (оператор); на второй ступени все функции управления берет на себя УВМ, обладающая *обратной связью*. С помощью такой системы полностью осуществляется планирование, контроль и анализ работы объекта. В этом случае система функционирует как самоприспосабливающаяся. Вмешательство оператора требуется только в особо сложных случаях. Д. у. а., в основном, применяют при управлении транспортом, энергообъединениями, металлургическими и химическими предприятиями, в системах связи и т. д. В СССР с помощью Д. у. а. впервые была осуществлена стыковка космических аппаратов в межпланетном пространстве, а также управление космическим аппаратом «Луноход-1». На Украине комплексная Д. у. а. применяется на Ворошиловградском теплово-зостроительном заводе, Львовском телевизионном заводе и на др. машиностроительных и приборостроительных заводах.

На железных дорогах применяют участковые, станционные и комплексные автоматизированные системы диспетчерского управления. УВМ осуществляет здесь сбор и обработку информации о движении поездов, составляет и корректирует планы-графики движения поездов и оперативный контроль за их выполнением. За диспетчером сохраняется общее руководство и функции, которые трудно алгоритмизировать. При Д. у. а. машина с помощью

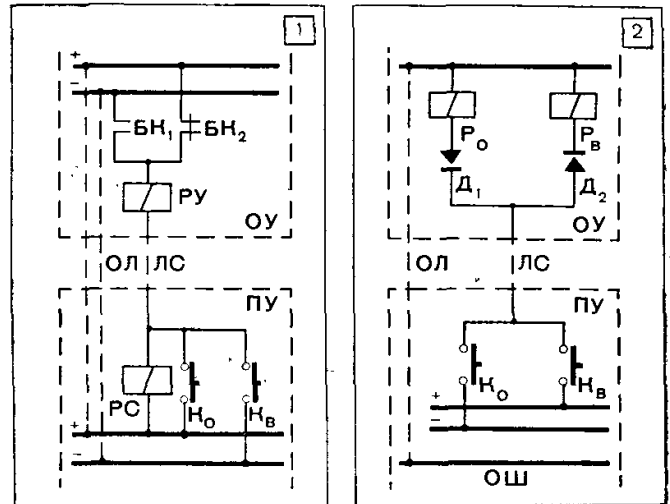
комплекса программ выдает план-график движения поездов на 2—4 ч. Для осуществления функции управления движением (корректировок графика) в машину с дорожного участка поступает информация о движении поездов по участку. При отправлении каждого поезда с очередной  $k$ -й станции с помощью Д. у. а. автоматически устанавливается маршрут на прохождение следующей  $k+1$ -й станции, а иногда и двух станций, с учетом поездной обстановки на участке. Д. у. а. на участках железных дорог позволяет рационально вести график движения грузовых и пассажирских поездов в зависимости от их числа на участке, веса, местонахождения и т. д.; обеспечивает централизованное управление на однопутных и двухпутных с двухпутными вставками участках протяженностью до 600 км с  $k$ -вом поездов в сутки до 100—150, при скоростях свыше 150 км/ч. Экономическим эффектом применения Д. у. а. на железных дорогах является повышение участковой скорости движения поездов на 5—10%. Д. у. а. широко применяют на крупных сортировочных и узловых станциях и при планировании работ. Здесь осн. экон. эффект состоит в улучшении оборота вагонов и локомотивов, уменьшении  $k$ -ва маневровых средств. Первая автоматизированная система диспетчерского управления в СССР разработана в 1959—63 гг.

Д. у. а. энергосистемами широко применяют в СССР, что дает значительный эконом. эффект: напр., благодаря уменьшению расхода условного топлива на 1% можно сэкономить более 30 млн. руб. Д. у. а. энергосистемами дает возможность выполнять осн. функции по планированию длительных и суточных режимов, оперативную корректировку режима энерг. объединения, предупреждение, распознавание и ликвидацию предаварийных и аварийных ситуаций. С помощью Д. у. а. осуществляется сбор и обработка поступающих от потребителей, а также от электростанций и энергосистем статистических данных о расходах энергии; о состоянии стационарного оборудования, высоковольтных линий передач, запасов воды в водохранилищах гидростанций и др. На основе составленных планов ведется автомат. расчет суточных графиков распределения нагрузок между электростанциями и крупными агрегатами. В процессе реализации суточного графика осуществляется автомат. корректировка режима функционирования энергосистем.

В США Д. у. а. применяют в управлении Калифорнийской энергосистемой. Подобное управление энергосистемами применяют во Франции, Англии, ФРГ, Японии и др. странах. Лит.: Буданцев Ю. Ю. Электронные помощники диспетчера. М., 1963; Островский А. С. Техника связи, диспетчеризации и оперативного управления в промышленности. М.—Л., 1964 [библиогр. с. 223—224]; Лившиц С. Б. Организация диспетчерской службы отраслевого производственного объединения. Л., 1965; Завьялов Б. А. Участковый автодиспетчер. М., 1967 [библиогр. с. 220]; Петров А. П. Эксплуатация железных дорог с применением электронной вычислительной техники. М., 1969 [библиогр. с. 187—189].

А. А. Бакаев, В. В. Шкурба.

**ДИСТАНЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ** — процесс выполнения оператором или автоматическим устройством операций изменения состояния технических объектов на расстоянии передачей сигналов по линиям связи. Как правило, в процессе Д. у. осуществляют также передачу сигналов о выполнении указанных операций (дистанционный контроль). При Д. у. обычно выполняются простейшие операции — включение или отключение объекта, передача сигналов о его состоянии и др. Д. у. получило широкое применение в диспетчерских системах



1. Схема дистанционного управления двухпозиционным объектом с сигнализацией его состояния.  
2. Схема дистанционного управления двухпозиционным объектом с разделением команд управления диодами.

пром. предприятий, электр. станций и сетей, гидротех. сооружений, шахт, железнодорожных узлов и т. п. Объектами управления являются выключатели, разъединители, контакторы для пуска электр. двигателей, задвижки, вентили и пр. Для управления каждому объекту выделяется самостоятельная линия связи. В системах с Д. у., как правило, используют проводные (обычно кабельные) линии связи. Поскольку при таком управлении не используются методы уплотнения линий связи, то передаваемые сигналы имеют простую форму и обычно представляют собой импульсы (или непрерывные сигналы) постоянного тока, различающиеся в некоторых случаях по интенсивности и полярности. Системы с Д. у. отличаются простой структурой и высокой надежностью. Влияние внешних электр. и магн. полей ослабляется экранированием многожильных кабельных линий связи и повышением мощности сигналов управления.

Эконом. эффективность использования систем с Д. у. определяется числом объектов управления и длиной линии связи. Использовать эти системы целесообразно при относительно небольших расстояниях — до 2—4 км, при 20—30 объектах управления.

При больших расстояниях для управления объектами используются средства телемеханики.

Известно много вариантов схем Д. у. При разработке таких схем особое внимание уделяют защите от ложных операций, обусловленных помехами или повреждениями аппаратуры. На рис. 1 показана электр. схема управления объектом, который может пребывать в двух состояниях (двухпозиционным объектом). Объект управления ОУ соединяется с пунктом управления ПУ линией связи ЛС. Питание схемы на ОУ и ПУ осуществляется от одного источника постоянного тока через общую линию ОЛ. В нормальном (нерабочем) состоянии обмотки реле управления РУ и реле сигнализации положения объекта РС обтекаются током, величина которого определяется сопротивлением обмоток РУ и РС, а полярность — состоянием объектов управления. Если объект включен, то его блок-контакты БК<sub>1</sub> замкнуты, а БК<sub>2</sub> — разомкнуты. Величина тока, протекающего по линии связи, ограничивается сопротивлением обмотки реле РС и недостаточна для срабатывания реле РУ. Включение (отключение) объекта осуществляется нажатием кнопки включения К<sub>в</sub> (кнопки отключения К<sub>о</sub>) на ПУ. При этом обмотка реле РС замыкается накоротко, и ток в цепи резко увеличивается, реле РУ срабатывает и его контактами совместно со вспомогательными блок-контактами объекта осуществляется операция управления.

В приведенной схеме команды управления и сигналы положения объекта передаются по однопроводной линии. Для повышения надежности работы схем Д. у. используют двухпроводные линии, в которых передача команд управления и сигналов положения объектов производится по отдельным линиям. В схеме управления двухпозиционным объектом (рис. 2) разделение команд управления осуществляется диодами по полярности тока управления. При нажатии К<sub>в</sub> в линию связи поступает ток, полярность которого принимается положительной, а на ОУ через диод Д<sub>2</sub> включается обмотка реле включения Р<sub>в</sub>, реле срабатывает и объект включается контактами этого реле. Для отключения объекта нажимается кнопка К<sub>о</sub> и током обратной полярности через диод Д<sub>1</sub> включается реле отключения Р<sub>о</sub>, контактами которого объект отключается.

Лит.: Райнес Р. Л. Дистанционное управление. В кн.: Автоматизация производства и промышленная электроника, т. 1. М., 1962; Райнес Р. Л., Горьянов О. А. Телеуправление. М.—Л., 1965 [библиогр. с. 531—536]. А. М. Лучук.

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ** — система автоматического управления с законом регулирования, при котором информация о возмущении вводится с помощью дифференциальных обратных связей по входной и выходной координатам звена, подверженного действию возмущения. Такие системы называются также системами с косвенным или дифференциальным измерением возмущения (по аналогии с мех. дифференциалом, где производится вычитание мех. вращательных движений). В Д. с. а. у. величину, численно равную возму-

щению или находящуюся в неизменной и достаточно простой зависимости от него, можно выделить сравнением величин  $\lambda_y$  и  $\lambda_z$ , полученных преобразованием координат  $y$  и  $z$  замкнутого контура (соответствующий участок схемы на рис. обведен пунктиром). Эти координаты следует выбирать так, чтобы возмущение  $\lambda$  находилось между ними. Рассмотрим линейную систему автомат. регулирования (см. рис.). При нулевых начальных условиях

$$\begin{aligned}\lambda_d(p) &= \lambda_y(p) - \lambda_z(p) = \\ &= [Y_{п1}(p) - Y_{п2}(p) Y_1(p) Y_2(p)] y(p) - \\ &\quad - Y_{п2}(p) Y_2(p) \lambda(p),\end{aligned}\quad (1)$$

где  $p$  — параметр преобразования Лапласа. Если выполняется равенство

$$Y_{п1}(p) = Y_{п2}(p) Y_1(p) Y_2(p), \quad (2)$$

часто называемое условием эквивалентности, то

$$\lambda_d(p) = -Y_{п2}(p) Y_2(p) \lambda(p). \quad (3)$$

Если, кроме этого,  $Y_{п2}(p) = Y_2^{-1}(p)$  и  $Y_{п1}(p) = Y_1(p)$ , то  $\lambda_d = -\lambda$ . Следовательно, при выполнении условий (2, 3) величина  $\lambda$  является аналогом возмущения  $\lambda$ . Это свойство можно использовать для создания компаундирующей связи КС (см. рис.). Передаточная функция системы относительно возмущения  $\lambda$

$$\begin{aligned}Y_{\text{возм}}(p) &= \frac{\Phi(p)}{\lambda(p)} = \\ &= \frac{Y_2(p) Y_5(p) [1 - Y_3(p) Y_{п1}(p) Y_K(p)]}{1 + Y_1(p) Y_2(p) Y_3(p) Y_4(p) Y_5(p) - \\ &\quad - Y_3(p) Y_K(p) [Y_{п1}(p) - \\ &\quad - Y_2(p) Y_1(p) Y_{п2}(p)]}\end{aligned}\quad (4)$$

Если выполняется условие (2), то

$$Y_{\text{возм}} = \frac{Y_2(p) Y_5(p) [1 - Y_3(p) Y_{п1}(p) Y_K(p)]}{1 + Y_1(p) Y_2(p) Y_3(p) Y_4(p) Y_5(p)}. \quad (5)$$

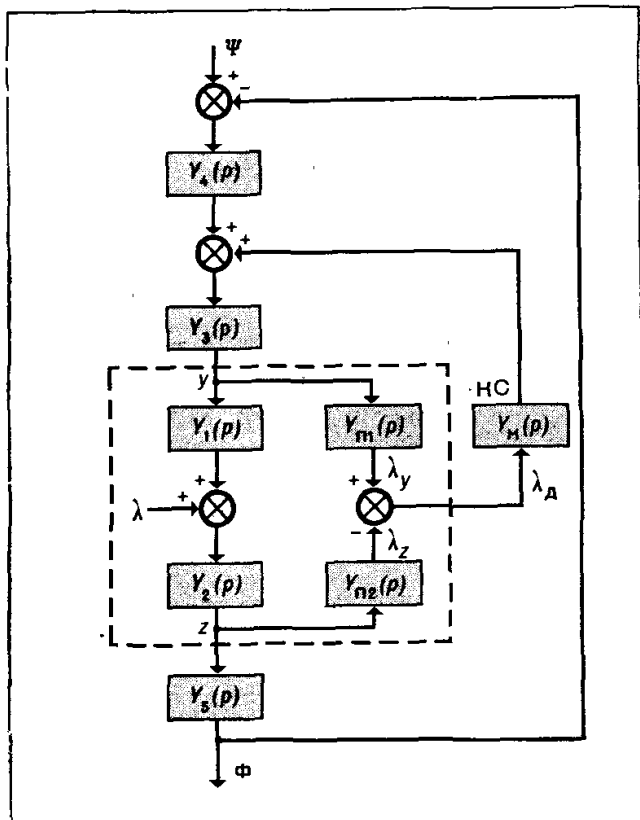
Знаменатель ур-ния (5) не содержит передаточных ф-ций элементов, при помощи которых осуществляется дифф. измерение возмущения. Следовательно, при точном выполнении оно не влияет на устойчивость системы. Звено  $Y_K(p)$  в сочетании с элементом  $Y_{п1}(p)$  создает положительную обратную связь, а в сочетании с элементом  $Y_{п2}(p)$  — отрицательную. При выполнении условия (2) влияние этих связей на устойчивость взаимно уничтожается. Отключение от условия (2) эквивалентно обратной связи (положительной или отрицательной). Из ур-ния (5) можно сделать вывод, что для обеспечения абс. инвариантности  $\Phi$  относительно  $\lambda$  необходимо, чтобы

$$Y_K(p) = Y_3^{-1}(p) \cdot Y_{п1}^{-1}(p). \quad (6)$$

Это условие трудно выполнимо в общем случае, т. к. при этом требуется реализовать обратные передаточные функции

$$Y_3^{-1}(p) \text{ и } Y_{п1}^{-1}(p).$$

Таким образом, в Д. с. а. у. возможна лишь инвариантность до  $\varepsilon$  и условие (6) указывает лишь предел, к которому нужно стремиться  $Y_K(p)$ . Вместе с тем в Д. с. а. у. можно осуществлять инвариантность в установившемся режиме, более того, эта система, будучи замк-



Структурная схема дифференциальной системы автоматического управления:  $\Psi$  — задающее воздействие;  $\Phi$  — регулируемая величина;  $\lambda$  — возмущение;  $\lambda_d$  — косвенно измеренное возмущение;  $Y(p)$  — передаточные функции элементов системы.

нутой, позволяет обеспечить не только компенсацию, но и перекомпенсацию действия возмущения (отрицательный статизм регулирования), как и системы с компаундирующими связями по возмущению. Для этого необходимо, чтобы

$$Y_K(0) > \frac{1}{Y_3(0) Y_{п1}(0)}. \quad (7)$$

Принцип дифф. измерения возмущения может быть использован в некоторых нелинейных системах. Примером Д. с. а. у. является система стабилизации напряжения генератора, в этом случае объект управления — генератор — охватывается дифф. связью (вилкой). Дифф. измерение возмущений находит применение также в следующих системах, системах стабили-

зации летательных аппаратов, системах экстремального регулирования и др.

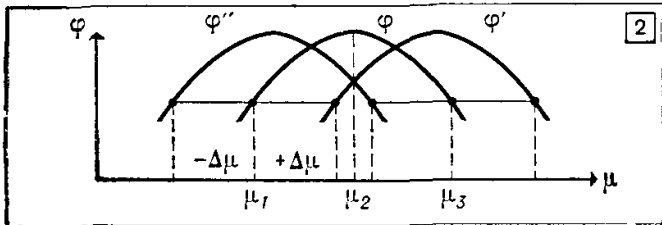
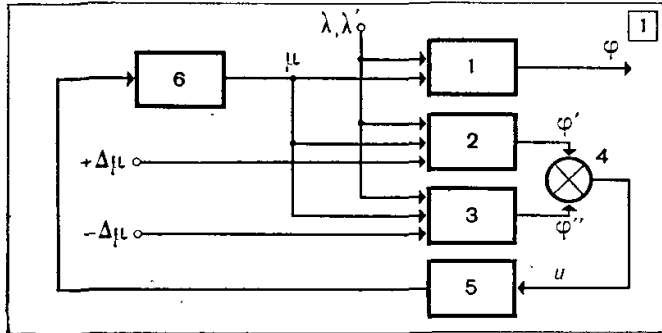
Лит.: Костюк О. М. Умова еквівалентності систем диференціального керування та систем керування за збуреннями. «Автоматика», 1961, № 1; Менский Б. М. К вопросу о реализации принципа инвариантности. «Известия АН СССР. Энергетика и автоматика», 1961, № 5; Кухтенко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. К., 1963 [библиогр. с. 364—371]; Ивахненко О. Г. Кибернетичні системи з комбінованим керуванням. К., 1963 [библиогр. с. 471—479]. В. И. Костюк.

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ — БЕСПО-

ИСКОВАЯ СИСТЕМА ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ, в которой при помощи смещения экстремальных характеристик в пространстве регулирующих воздействий, в любой момент времени наблюдается одновременно два режима работы (две точки экстремальной характеристики). Многие реальные объекты не допускают специальных поисковых колебаний, поэтому для управления ими не могут быть применены обычные принципы построения систем экстремального регулирования. Д. с. э. р. может быть применена там, где удастся построить модель экстремального объекта управления и ввести в нее осн. возмущающие воздействия, которым подвергается объект. Примером этого могут быть некоторые объекты хим. пром-сти, поддающиеся моделированию физическому. Структурная схема Д. с. э. р. приведена на рис. 1. На вход двух моделей (2 и 3) непрерывно подаются одинаковые по величине, но обратные по знаку регулирующие воздействия  $\Delta\mu$ , под влиянием которых экстремальная характеристика в одной модели смещается влево, а в другой — вправо относительно характеристики  $\phi$  объекта управления (рис. 2). Если на входе (1) объекта действует регулирующее воздействие  $\mu_1$ , то показатель качества  $\phi'$  на выходе первой модели будет определяться воздействием  $\mu_1 + \Delta\mu$ , а показатель качества  $\phi''$  на выходе второй модели —  $\mu_1 - \Delta\mu$ . То же самое относится и к точке  $\mu_3$ : Рассмотрев, таким образом, ряд значений регулирующего воздействия, можно убедиться в том, что экстремальные характеристики моделей будут сдвинуты относительно характеристики объекта регулирования  $\phi$ . Так как обе модели испытывают все те возмущения  $\lambda, \lambda'$ , которые действуют и на объект, и перемещают экстрем. характеристику соответственно в горизонтальном и вертикальном направлениях, то при перемещении характеристики объекта характеристики моделей также перемещаются, не изменяя своего положения ни относительно характеристики объекта, ни относительно друг друга. Измеренные значения показателей качества  $\phi'$  и  $\phi''$  подаются на устройство вычитания (4), а результат вычитания после усиления устройством (5) управляет исполнительным двигателем (6). Дифференциальная система поддерживает равенство  $\phi' - \phi'' = 0$  при любых возмущениях, действующих на объект и на модели. Это равенство удовлетворяется только при значении регулирующего воздействия  $\mu_2$  (рис. 2), которое соответствует экстремуму характеристики объекта управления.



Если в дифференциальной системе характеристики моделей полностью идентичны, то для пропорциональной системы регулирования закон будет иметь вид  $u = \alpha \Delta \mu \varepsilon$ , где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности (усиления);  $\Delta \mu$  — постоянное смещение моделей;  $\varepsilon$  — отклонение от экстремума;  $u$  — напряжение, управляющее исполнительным двигателем. Д. с. э. р. является единственной из известных экстрем. систем, которая обеспечивает абсолютную инвариантность к возмущениям  $\lambda'$ . Д. с. э. р. мало чем отличается от



1. Структурная схема дифференциальной системы экстремального регулирования.  
2. Статические экстремальные характеристики моделей ( $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ) и объекта ( $\varphi$ ).

обычных следящих систем, и для определения ее динамических свойств можно применить методы исследования таких систем.

Несмотря на то, что область применения дифференциальных систем ограничена необходимостью создания моделей объекта, практика показала, что существует много промышленных объектов, в которых эта задача решается сравнительно просто.

Лит.: Кунцевич В. М. Системы экстремального управления. К., 1961 [библиогр. с. 145—149]; Васильев В. И. Дифференциальные системы экстремального регулирования. К., 1963 [библиогр. с. 70—71]; Васильев В. И. Экстремальные системы керования без пошукочных колебаний. К., 1966 [библиогр. с. 172—175].

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ** — класс уравнений в математике. См. Уравнений классификация.

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ КЛАССИФИКАЦИЯ.** Дифференциальное уравнение, содержащее, кроме независимых переменных и искомой функции, также и частные производные этой функции, наз. дифференциальным уравнением с частными производными. Наивысший порядок частных производных, входящих в ур-ние, наз. порядком дифф. ур-ния. Дифф. ур-ние наз. линейным, если оно линейно относительно искомой ф-ции и всех ее производных.

Дифф. ур-ние 2-го порядка

$$A_{11}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2A_{12}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{22}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \Phi \left( x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \quad (1)$$

в данной точке  $x = (x_1, x_2)$  наз. эллиптическим, параболическим и гиперболическим, если в этой точке соответственно

$$\Delta > 0; \quad \Delta = 0; \quad \Delta < 0, \quad (2)$$

где  $\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2$ .

Классификация дифф. ур-ний 2-го порядка

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \Phi \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), \quad (3)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , основана на приведении

квадратичной формы  $\sum_{i,j=1}^n A_{ij} \alpha_i \alpha_j$  к каноническому виду. Выбрав надлежащие преобразования  $\xi_k = \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i$ ,  $k = 1, \dots, n$ , приведем

(3) к виду

$$\sum_{i=1}^m \left( \pm \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} \right) = F \left( \xi, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n} \right), \quad (4)$$

где  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

Дифф. ур-ние (3) наз. эллиптическим в данной точке, если  $m = n$  и все знаки в левой части (4) одинаковы, гиперболическим в данной точке, если  $m = n$  и все знаки, кроме одного, в левой части (4) одинаковы, и параболическим в узком смысле, если в левой части (4) все члены имеют одинаковые знаки,

один член, напр.  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}$ , отсутствует, а правая часть содержит соответственно производную  $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}$ .

Дифф. ур-ние (3) наз. параболическим (в широком смысле), если  $m < n$ , оно наз. ультрагиперболическим в данной точке, если  $m = n$  и в левой части (4) имеется больше чем по одному положительному и отрицательному знаку.

Система ур-ний

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \sum_{j=1}^N A_{ij}(x_1, x_2) \frac{\partial u_j}{\partial x_2} + \Phi_i(x_1, x_2, u_1, \dots, u_N) \quad (5)$$

наз. гиперболической системой (г. с.) в данной точке, если в этой точке определитель матрицы

$$(A_{ij} - \lambda \delta_{ij}), \quad (6)$$

где  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ , имеет вещественные и различные корни. Если указанный определитель не имеет в точке действительных корней, то система (5) наз. эллиптической системой (э. с.) в точке. Примером э. с. 1-го порядка является система Коши—Римана

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Система ур-ний

$$\sum_{j=1}^N \sum_{0 \leq k \leq n_j} A_{ij}^{(k_1, \dots, k_n)}(x) \frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \Phi_i(x), \quad (7)$$

$$i = 1, \dots, N,$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad k = \sum_{s=1}^n k_s,$$

наз. эллиптической в точке, если при любых значениях вещественных переменных  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , для которых  $\sum_{s=1}^n \alpha_s^2 > 0$ , определитель порядка  $N$ , у которого элемент на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -ого столбца имеет вид

$$\sum A_{ij}^{(k_1, \dots, k_n)} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n} \quad (8)$$

и отличен от нуля в этой точке. Примером э. с. 2-го порядка является система ур-ний Ламе:

$$\left\{ \begin{aligned} & \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + \\ & + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0, \\ & \mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + \\ & + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\text{при } \frac{1}{2} \neq \sigma \neq 1, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Дифф. ур-ние  $2m$ -ого порядка

$$\sum_{1 \leq k \leq 2m} A^{(k_1, \dots, k_n)}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \Phi(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (9)$$

где коэфф.  $A$  не меняются ни при какой перестановке индексов  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , наз. эллиптическим в точке, если в этой точке для любых вещественных чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ,

$\sum_{s=1}^n \alpha_s^2 > 0$  выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=2m} A^{(k_1, \dots, k_n)}(x) \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n} \right| \geq \mu(x) \sum_{s=1}^n \alpha_s^{2m}, \quad \mu(x) > 0. \quad (10)$$

Примером эллиптического ур-ния 4-го порядка является бигармоническое ур-ние

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0.$$

Э. с. и эллиптические ур-ния высокого порядка являются обобщением эллиптического ур-ния 2-го порядка

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + \Phi = 0,$$

$$\left| \sum_{i,j=1}^n A_{ij} t_i t_j \right| \geq \mu \sum_{s=1}^n t_s^2, \quad \mu > 0, \quad A_{ij} = A_{ji}. \quad (11)$$

Система ур-ний

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^N \sum_{2pk_0+k \leq 2pn_j} A_{ij}^{(k_0, k_1, \dots, k_n)}(t, x) \times \frac{\partial^{k_0+k} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \Phi_i(t, x), \quad (12)$$

$$k_0 < n_j, \quad k = \sum_{s=1}^n k_s,$$

$$i = 1, \dots, N, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

где  $p$  — целое число, наз. параболической системой (п. с.) (в смысле Петровского) в точке  $(t, x)$ , если для любых вещественных  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

$\alpha_n, \sum_{s=1}^n \alpha_s^2 = 1$ , корни определителя порядка

$N$ , у которого элемент на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -ого столбца имеет вид

$$\sum_{2pk_0+k=2pn_j} A_{ij}^{(k_0, k_1, \dots, k_n)}(t, x) \lambda^{k_0} (i\alpha_1)^{k_1} \dots \dots (i\alpha_n)^{k_n} - \lambda^{n_j} \delta_{ij} \quad (13)$$

и удовлетворяет в этой точке неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda \leq -\delta \quad (14)$$

с некоторой положительной постоянной  $\delta$ . П. с. являются обобщением одного параболического ур-ния 2-го порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu(t, x). \quad (15)$$

Система ур-ний

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^N \sum_{k_0+k_1 \leq n_j} A_{ij}^{(k_0, k_1, \dots, k_n)}(t, x) \times \\ \times \frac{\partial^{k_0+k_1} u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \Phi_i(t, x), \quad (16) \\ k_0 < n_j, \quad k = \sum_{s=1}^n k_s, \\ i = 1, \dots, N, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

наз. г. с. (в смысле Петровского) в точке  $(t, x)$ , если при любых действительных  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ,  $\sum_{s=1}^n \alpha_s^2 > 0$ , определитель порядка  $N$ , у которого элемент на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -ого столбца имеет вид

$$\begin{aligned} \sum A_{ij}^{(k_0, k_1, \dots, k_n)}(t, x) \lambda^{k_0} \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n} - \\ - \lambda^{n_j} \delta_{ij}, \quad (17) \end{aligned}$$

имеет в этой точке только действительные и различные корни. Г. с. являются обобщением одного гиперболического ур-ния 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu(t, x). \quad (18)$$

Дифф. ур-ние или система ур-ний принадлежат к данному типу в некоторой области, если они принадлежат к данному типу в каждой точке этой области. Если дифф. ур-ние в одной части области принадлежит к одному типу, а в другой — к другому, то во всей области оно наз. ур-нием смешанного типа; то же относится и к системам ур-ний.

Имеется классификация и более сложных дифф. уравнений, напр., нелинейных, но эту классификацию в наст. время нельзя считать установившейся.

Лит.: Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961; Бабиш В. М. [и др.]. Линейные уравнения математической физики. М., 1964 [библиогр. с. 343—362]. В. Г. Приказчиков.

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ РЕНТ МЕТОД** — метод решения транспортной задачи линейного программирования. В основу метода положена идея рассмотрения процесса решения задачи как процесса стабилизации эконом. системы. Метод как бы имитирует формирование дифф. ренты в модели транспортных перевозок и увязки спроса и предложения. В отличие,

напр., от решения транспортной задачи методом потенциалов, где с самого начала производится распределение всей продукции, которое затем последовательно улучшается, в случае применения Д. р. м. вначале распределяется часть продукции, но зато оптимально: «потребители» прикрепляются к «поставщикам» наиболее экономичным, в смысле стоимости перевозок. Дальнейшие этапы прикрепления потребителей к поставщикам связаны с условным повышением стоимости перевозок за счет присвоения поставщикам дополнительной стоимости — ренты — и повышения «кредитоспособности» не вошедших в план потребителей. В момент полного распределения продукции и окончательного расчета полученный план прикрепления потребителей к поставщикам оптимален. А. А. Бакаев.

**ДИФФЕРЕНЦИАТОР** — устройство для получения производной входной переменной. Для

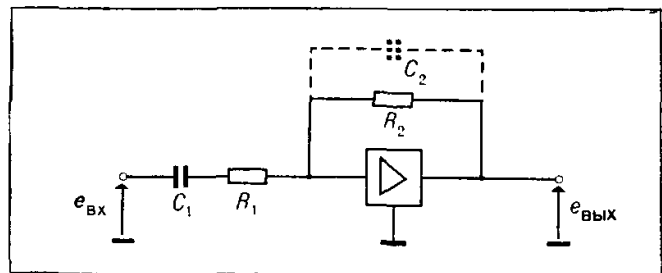


Схема дифференциатора.

получения производной по времени в АВМ и устр-вах управления обычно применяют схемы, реализующие не идеальный оператор дифференцирования  $p$ , а операторы  $\frac{ap}{T_0 p + 1}$  или

$\frac{ap}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$ , с помощью которых операция дифференцирования выполняется приближенно (см. рис.). Основным достоинством таких Д. является их способность частично сглаживать паразитные высокочастотные помехи в выходном сигнале  $e_{\text{вых}} = \frac{R_2 C_1 p}{(R_1 C_1 p + 1)(R_2 C_2 p + 1)} e_{\text{вх}}$ , которые были бы

существенно усилены идеальным Д. Существуют и Д., приближенно реализующие операцию дифференцирования и построенные на RC-цепях или трансформаторах. В. Ф. Евдокимов.

**ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ** — операция получения производной сигнала. При решении задач на аналоговых вычислительных машинах производные машинных переменных по времени обычно воспроизводятся методом неявных ф-ций без использования дифференциаторов, применения которых по возможности избегают из-за ограниченности их рабочего частотного диапазона и из-за существенного усиления ими паразитных высокочастотных помех. Однако часто в устройствах управления или для целей измерения требуется выполнить непосредственное Д. с. В этих случаях применяют дифференциаторы. В. Ф. Евдокимов.

**ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СИМВОЛЬНОЕ**, дифференцирование аналитическое — получение при помощи ЦВМ производной данной функции в аналитическом виде. Эта операция была одним из первых примеров использования ЦВМ для нечисловой математики и до сих пор является самой характерной процедурой при автоматизации аналитических преобразований на вычислительных машинах. Начиная с 1953 г., разработано и внедрено большое к-во различных алгоритмов дифференцирования. В основе этих алгоритмов лежит общий принцип — последовательное выполнение на каждом этапе работы следующих двух действий: выбор подвыражения, подлежащего обработке на данном этапе и замена выбранного подвыражения другим с помощью соответствующего правила дифференцирования.

**Пример.** Если требуется найти производную  $\frac{d}{dx} (\sin x + \cos x)$ , то в качестве первого подвыражения выбирается оно само. В этом случае из мн-ва правил дифференцирования применяется правило  $\frac{d}{dx} (F_1 + F_2) = \frac{d}{dx} F_1 + \frac{d}{dx} F_2$ , преобразующее данное выражение к виду  $\frac{d}{dx} \sin x + \frac{d}{dx} \cos x$ . Затем для преобразования выбирается либо подвыражение  $\frac{d}{dx} \sin x$ , либо  $\frac{d}{dx} \cos x$ . Соответственно применяются правила  $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$  и  $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ . В результате получится выражение  $\cos x - \sin x$ .

Характерными свойствами каждой программы дифференцирования являются форма задания входного выражения, способ представления этого выражения внутри машины, к-во выполняемых упрощений и к-во применяемых правил дифференцирования.

В первых программах выражения задавались в виде последовательности условных кодов, где каждый код соответствовал одной операции. Напр., ф-ция  $V = x^2$  записывалась как  $E00\ 00x\ 002\ 00N$ , где  $E00$  обозначает операцию возведения в степень. Результат выводился в таком же виде. Последующие программы приближали форму записи выражений к общепринятой в математике. В наст. время программы воспринимают исходное выражение в сложившейся линеаризованной записи, принятой в языках программирования типа АЛГОЛ, ФОРТРАН. Так, выражение  $A + x^2$  запишется как  $A + x \uparrow 2$  или  $A + x ** 2$  в зависимости от того, какими символами обозначается операция возведения в степень. Внутр. представление выражений для первых программ мало чем отличалось от внешн. представления. Теперь в качестве внутр. представления

используются в основном различные модификации записи Лукасевича и схем Канторовича.

Многие из программ используют в различной степени средства упрощения выражений, полученных в результате дифференцирования. Это обеспечивает более наглядную запись результата, а также значительно ускоряет повторное дифференцирование. Так, напр., неупрощенный результат дифференцирования по  $x$  выражения  $ax + xe^{x^2}$  имеет вид  $0 \cdot x + a \cdot 1 + 1 \cdot e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot 2 \cdot x$ . После упрощения получим выражение  $a + e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$ . Эффективность программ зависит также от к-ва используемых правил дифференцирования. Напр., кроме общего правила  $(u^v)'$ , где  $u$  и  $v$  рассматриваются как ф-ции, можно использовать еще два правила, на те случаи, когда либо  $u$ , либо  $v$  не зависят от переменной дифференцирования. Можно пойти дальше и использовать еще два правила на тот случай, когда либо  $u$ , либо  $v$  являются числами. Увеличение к-ва правил ускоряет процесс дифференцирования, но усложняет саму программу.

Программы дифференцирования вначале создавались как самостоятельные программы. В дальнейшем они, как правило, стали входить в большие системы, предназначенные для проведения аналитических преобразований на машинах, в виде либо операторов, либо операций входного языка таких систем. Так, в наиболее распространенной зарубежной системе FORMAC введена операция FMCD/F. Выражение  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  в этой системе записывается как FMCD/F (z, x, 2). В СССР самыми мощными системами для аналитических преобразований являются машина «МИР-2» и система СИРИУС. Во входном языке машины «МИР-2» АНАЛИТИКе приведенная выше производная запишется в виде  $\partial/\partial x \uparrow 2 (z)$ , а в системе СИРИУС — в виде  $\partial (2, x) z$ .

Пример производной, полученной на машине «МИР-2»:

$$\begin{aligned} d/dx (5 \times x \uparrow \text{SIN} (x + 2) + \text{EXP} (\text{LN} (x - 3)) + \\ + \text{LN} (\text{CTG} (x + \text{SIN} (x))) \times \text{ARC SIN} (4 \times x) = \\ = 5 \times ((\text{SIN} (2 + x) \times x \uparrow (-1 + \text{SIN} (2 + \\ + x)) + \cos (2 + x) \times x \uparrow \text{SIN} (2 + x) \times \\ \times \text{LN} (x)) \times \text{EXP} (\text{LN} (-3 + x)) + 1/(-3 + \\ + x) \times \text{EXP} (\text{LN} (-3 + x)) \times x \uparrow \text{SIN} (2 + \\ + x)) - ((1 + \cos (x)) (\text{SIN} (x + \text{SIN} (x)) \uparrow 2 \times \\ \times \text{ARC SIN} (4 \times x)) + 4/\sqrt{1 - ((4 \times x) \uparrow 2)}) \times \\ \times \text{LN} (\text{CTG} (x + \text{SIN} (x))). \end{aligned}$$

Лит.: Белоус Л. Ф. Аналитическое дифференцирование в системе СИРИУС. «Автоматизация программирования», 1969, в. 2; Гринченко Т. А., Царюк Н. П. Аналитическое дифференцирование в машине «Мир-2». «Математическое обеспечение ЭЦВМ», 1970, в. 2; Sammet J. E. Survey of formula manipulation. «Communications of the Association for Computing Machinery», 1966, v. 9, № 8. Т. А. Гринченко.

**ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЕ** — приближенное вычисление значений производных указанных порядков от функции, заданной таблично или аналитически. Один из методов вычисления производных от ф-ции  $f(x)$ , заданной таблицей ее значений в  $n+1$  узлах  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , ( $x_0 \leq x_i \leq x_n$ ), заключается и следующем: ф-цию  $f(x)$  на интересующем нас отрезке заменяют интерполирующей ф-цией  $P(x)$  (чаще всего многочленом  $n$ -ой степени) и считают, что  $m$ -я производная

$$f^{(m)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(m-1)}(x+h) - f^{(m-1)}(x)}{h} \approx \\ \approx P^{(m)}(x)$$

при  $x_0 \leq x \leq x_n$ . Выбор интерполяционной ф-лы  $P(x)$  зависит от того, какая дана система узлов сетки для  $f(x)$  и при каких значениях  $x$  нужно вычислить производные. Напр., если значения  $f(x)$  заданы для равноотстоящих значений аргумента с шагом  $h$  и значение производной  $m$ -го порядка нужно вычислить для  $x$ , лежащих вблизи узла  $x_0$ , то в качестве интерполяционного многочлена  $P(x)$  (см. *Интерполирование функций*) выбирают многочлен Ньютона для интерполирования вперед. Тогда ф-лы Д. ч. будут иметь вид

$$f^{(m)}(x) \approx \frac{1}{h^m} \frac{d^m P(x_0 + ht)}{dt^m} = \\ = \frac{1}{h^m} \sum_{k=m}^n \frac{d^m C_t^k}{dt^m} \Delta^k f(x_0), \quad (1)$$

где  $\Delta^k f(x_0) = \Delta^{k-1} f(x_0 + h) - \Delta^{k-1} f(x_0)$  — восходящая конечная разность  $k$ -го порядка от функции  $f(x)$ ,  $x = x_0 + ht$ ,  $C_t^k = \frac{t(t-1) \dots (t-k+1)}{k!}$ . В частности,

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h} \left( \Delta f(x_0) - \frac{1}{2} \Delta^2 f(x_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \Delta^3 f(x_0) + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Delta^n f(x_0) \right).$$

Аналогично, если воспользоваться интерполяционными ф-лами Ньютона для интерполирования назад и ф-лами Бесселя, можно найти производные  $m$ -го порядка для  $x$ , расположенных соответственно вблизи конца и середины табл. В частности,

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{h} \left( \nabla f_n + \frac{1}{2} \nabla^2 f_n + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{n} \nabla^n f_n \right),$$

где  $\nabla^k f(x_n) = \nabla^{k-1} f(x_n) - \nabla^{k-1} f(x_{n-1})$  — нисходящая конечная разность  $k$ -го порядка.

Приближенное дифференцирование с использованием интерполяционных многочленов —

менее точная операция, чем интерполирование, так как близость друг к другу двух ординат кривых  $y = f(x)$  и  $y = P(x)$  на отрезке  $[x_0, x_n]$  еще не гарантирует близости на этом отрезке их производных. Особо важное значение при вычислении производных имеют вопросы оценки погрешностей. Погрешность метода, или остаточный член, при использовании интерполяционных ф-л имеет вид

$$R_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!(n+k+1)!} \times \\ \times f^{(n+k+1)}(\xi_k) \frac{d^{m-k} \omega(x)}{dx^{m-k}},$$

где  $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)$ ,  $\xi_k \in [x_0, x_n]$ ,  $m < n$ . Выражение для остаточного члена значительно упрощается, если  $x$  находится вне отрезка  $[x_0, x_n]$ . Тогда, если  $f(x) — (n+1)$  раз дифференцируемая ф-ция на наименьшем отрезке  $[a, b]$ , содержащем узлы интерполирования и точку  $x$ , то

$$R_m(x) = \frac{\omega^{(m)}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Для получения практической оценки модуля остаточного члена  $f^{(n+1)}(\xi)$  оценивают макс. значение  $|f^{(n+1)}(x)|$  на  $[a, b]$ . В некоторых случаях выгоднее выражать значение производных в узле сетки  $x_i$  непосредственно через значения ф-ции. Построить такие ф-лы можно, пользуясь интерполяционным многочленом Лагранжа или разложением в ряд Тейлора выражения  $A = \sum_{k=1}^q C_k f(x_i + \alpha_k h)$  в окрестности

точки  $x_i$ . При этом коэффициент  $C_k$  подбирают так, чтобы разложение  $A$  в ряд Тейлора не содержало  $f^{(l)}(x_i)$  ( $0 \leq l < m$ ,  $m+1 \leq l \leq m+r$ , где  $r$  — целое положительное число) и содержало значение  $f^{(m)}(x_i)$  с множителем, равным единице. Тогда

$$\sum_{k=1}^q C_k f(x_i + \alpha_k h) = f^{(m)}(x_i) + R_m(x_i). \quad (2)$$

Чтобы определить  $C_k$ , сначала надо получить систему  $q$  ( $q = m+r+1$ ) ур-ний, решение которой находится в замкнутом виде. Оценка остаточного члена имеет вид

$$|R_m(x_i)| \leq \frac{h^q}{q!} |f^{(q)}|_{\max} \sum_{p=1}^q |\alpha_p^q C_p|.$$

В случае, когда точки сетки равноотстоящие, сравнение различных ф-л вида (2) показывает, что наиболее простыми и точными из них будут ф-лы, когда производная вычисляется в среднем узле  $x_i$ , причем выражение  $A$  строится по нечетному числу узлов, лежащих по обе сто-

роны от  $x_i$ . Приведем некоторые из таких формул:

$$f'(x_i) = \frac{1}{2h} (f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad \xi \in [x_{i+1}, x_{i-1}],$$

$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2} (f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})) - \frac{h^2}{12} f^{(IV)}(\xi_1), \quad \xi_1 \in [x_{i-1}, x_{i+1}],$$

$$f'''(x_i) = \frac{1}{2h^3} (f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})) - \frac{h^2}{4} f^{(V)}(\xi_2), \quad \xi_2 \in [x_{i-2}, x_{i+2}].$$

Выражение вида А можно составить не только для представления производной заданного порядка  $m$  в узле  $x_i$ , но и для представления любого линейного дифф. агрегата  $\sum_{k=0}^m \varphi_k(x_i) f^{(k)}(x_i)$ , где  $\varphi_k(x)$  — заданные непрерывные ф-ции. Это используют при численном решении краевых задач для обыкновенных дифф. ур-ний.

При Д. ч. по ф-лам (1), (2) нужно принимать во внимание также величину неустранимой погрешности, возникающей за счет того, что нам известны не точные значения ф-ции  $f(x_i)$  в узлах сетки, а приближенные  $\tilde{f}(x_i)$ . В случае дифференцирования по ф-лам (2) абс. неустранимая погрешность

$$\varepsilon^*(x_i) \leq \sum_{k=1}^q \varepsilon_k |C_k|, \quad \varepsilon_k \leq |f(x_i + \alpha_k h) - \tilde{f}(x_i + \alpha_k h)|.$$

Задача отыскания производной  $f'(x)$  по экспериментальной случайной функции  $\tilde{f}(x)$  значительно отличается от задачи дифференцирования ф-ции, для которой известны точные данные. В этом случае наблюдения не свободны от случайных значительных ошибок, а отношение  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  очень чувствительно даже к небольшим ошибкам, если  $\Delta x$  становится весьма малым. Поэтому обычные ф-лы Д. ч. могут сильно исказить результаты. Для решения такой задачи при достаточно плотном ряде исходных значений  $\tilde{f}(x)$  можно воспользоваться сглаживанием эмпирических данных с использованием метода наименьших квадратов (см. *Аппроксимация функции среднеквадратичная*). Предположим, что точные данные  $f(x_i)$  на протяжении нескольких равноотстоящих измерений мало отличаются от соответствующих ординат параболы  $y = ax^2 + bx + c$ . Пусть, напр., это имеет место, если комбини-

ровать измерение в точке  $x = 0$  с двумя соседними (слева и справа). Чтобы подобрать три параметра к пяти исходным данным, пользуются *наименьших квадратов методом*, т. е. находят

минимум величины  $\sum_{i=-2}^2 (\tilde{f}(x_i) - ax_i^2 - bx_i - c)^2$  выбором параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

Если нужно исправить значение  $\tilde{f}(0)$ , находят лишь значение параметра  $c$ . Аналогично находят исправленное значение производной в точке  $x = 0$ . При этом надо иметь искомое значение параметра  $b$ . В результате

$$f'(x_i) \approx \frac{-2\tilde{f}(x_{i-2}) - \tilde{f}(x_{i-1}) + \tilde{f}(x_{i+1}) + 2\tilde{f}(x_{i+2}))}{10h}.$$

Если использовать не две, а  $2j$  соседних точек с обеих сторон от точки  $x_i$ , то ф-лы Д. ч. для  $x_i$ , лежащих внутри промежутка  $[x_0, x_n]$ , имеют вид

$$f'(x_i) \approx \frac{\sum_{k=-j}^j k \tilde{f}(x_i + kh)}{2h \sum_{k=1}^j k^2}.$$

Аналогичный прием применяют для построения значений производных в крайних узлах интерполяции, но сглаживание эмпирических данных происходит только за счет точек, лежащих слева (или справа) от соответствующих крайних точек. Если, напр., сглаживание в начале кривой производить по четырем точкам, лежащим справа от точки  $x_0$ , то

$$f'(x_0) \approx \frac{-21\tilde{f}(x_0) + 13\tilde{f}(x_1) + 17\tilde{f}(x_2) - 9\tilde{f}(x_3))}{20h}.$$

Для вычисления значений второй производной производят сглаживание значений первой производной по методу наименьших квадратов и, приняв их за исходные, находят выражение для второй производной. В последнее время указанный метод получил дальнейшее развитие на основе теории сплайновой *аппроксимации функций*.

Задача восстановления производной по ф-ции, заданной экспериментально, принадлежит к числу некорректно поставленных задач. Поэтому восстанавливать производную можно, используя метод регуляризации Тихонова (см. *Некорректно поставленные задачи способы решения*). Пусть  $f(x)$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $[x_0, x_n]$ . Тогда ее производная, по определению, удовлетворяет интегр. ур-нию Вольтерры 1-го рода

$$f(x) = \int_d^x f'(s) ds + f(d), \quad x_0 \leq x, \quad d \leq x_n, \quad (3)$$

для решения которого и применяют метод регуляризации. Отыскание производной можно



также свести к решению интегрального уравнения вида

$$\int_{x_0}^{x_n} K(x, s) f'(s) ds = \Phi(x)$$

с непрерывным ядром

$$K(x, s) = \begin{cases} x_n - x & x_0 \leq s \leq x \\ x_n - s, & x < s \leq x_n \end{cases}$$

и правой частью

$$\Phi(x) = \int_x^{x_n} f(s) ds - f(x_0)(x_n - x).$$

Решение этого уравнения находят также методом регуляризации. Для отыскания производных высших порядков можно поступить аналогично. Метод регуляризации может быть применен для устойчивого нахождения линейной комбинации вида  $f''(x) + c_1 f'(x) + b_1 f(x)$  ( $c_1, b_1 = \text{const}$ ) по экспериментальным данным  $\tilde{f}(x)$ . Результаты вычислений подтверждают преимущества метода регуляризации, когда погрешность данных сравнима по порядку с шагом сетки.

В практических приложениях важным является следующий способ Д. ч.: если найдена  $g(x)$ , для которой  $|f(x) - g(x)| \leq \delta$ , и известно, что  $|f'(x) - [f(x+h) - f(x)]/h| \leq ch$ , то

$$\left| f'(x) - \frac{g(x \pm \sqrt{2\delta/c}) - g(x)}{\pm \sqrt{2\delta/c}} \right| \leq 2\sqrt{2\delta/c}.$$

Знак «+» или «-» и значения  $h$  и  $\delta$  должны быть выбраны так, чтобы аргументы  $f$  и  $g$  попали в области определения этих ф-ций. В общем случае неправильно полагать, что  $f'(x) \approx g'(x)$ . Но если  $f(x)$  — периодическая ф-ция на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , а  $g(x)$  — тригонометрический многочлен порядка  $n$ , то  $f'(x) \approx g'(x)$ , причем

$$|f'(x) - g'(x)| \leq \delta n + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \times \times \left(\frac{4}{\pi^2} \ln 2 + \pi e + 4\right) E_n(f'),$$

где  $E_n(f')$  — величина наилучшего приближения тригонометрическими многочленами  $n$ -го порядка (см. *Аппроксимация функций равномерная*). В частности, для любой ф-ции  $\varphi$

$$E_n(\varphi) \leq \frac{\pi}{2} \frac{\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |\varphi^{(k)}(x)|}{(n+1)^k},$$

если существует  $k$ -я производная  $\varphi^{(k)}(x)$  на  $[-\pi, \pi]$ . Возьмем за  $g(x)$  многочлен тригонометрической интерполяции  $f(x)$ :

$$g(x) = \sum_{k=-n}^n a_k t^k$$

$$a_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f\left(\frac{2\pi}{2n+1} j\right) t_j^{-k},$$

$$t = e^{ix}, \quad t_j = e^{\frac{2\pi i}{2n+1} j}.$$

Тогда

$$|f(x) - g(x)| \leq \leq \left\{1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \left| \frac{2}{\pi} (2n+1) \right| \right\} E_n(f).$$

Допустим еще, что значения  $f\left(\frac{2\pi}{2n+1} j\right)$  известны с абс. погрешностью, не превышающей  $\varepsilon$ . В таком случае

$$|f(x) - g(x)| \leq \delta \leq \leq \left\{ \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \left| \frac{2}{\pi} (2n+1) \right| \right\} [E_n(f) + \varepsilon] + + E_n(f).$$

Во всех приведенных выше ф-лах для получения полной погрешности Д. ч. необходимо учитывать и погрешность реализации ф-л на вычисл. машинах (см. *Погрешностей вычислений теория*).

В инженерной практике для Д. ч. применяют различные моделирующие приборы.

Лит.: Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1. М., 1966; Иванов В. В. Анализ точности вычислительных алгоритмов. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1970, т. 10, № 2; Численный анализ на ФОРТРАНе, в. 6. М., 1974; Ландош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. Пер. с англ. М., 1961.

В. В. Иванов, А. А. Скоробогатко.

**ДИФФУЗИОННЫЙ ПРОЦЕСС** — марковский процесс с непрерывным множеством состояний. Для таких марковских процессов существует плотность вероятности перехода  $p(t, x, s, y)$ , где  $t$  — начальный момент времени,  $s$  — конечный момент времени,  $x$  и  $y$  — состояния процесса в моменты  $s$  и  $t$  соответственно. Пусть  $X$  —  $n$ -мерное евклидово пространство и  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  — координаты точки  $x$ ,  $(y^1, y^2, \dots, y^n)$  — координаты точки  $y$ , а  $|x - y|$  — евклидово расстояние между этими точками. Предполагается, что при всяком  $\Delta > 0$  существуют пределы

$$\lim_{h \downarrow 0, h_1 \downarrow 0} \frac{1}{h + h_1} \int_{|x-y| \leq \Delta} (y^i - x^i) p(t - h, x,$$

$$t + h_1, y) dy = a_i(t, x);$$

$$\lim_{h \downarrow 0, h_1 \downarrow 0} \frac{1}{h + h_1} \int_{|x-y| \leq \Delta} (y^i - x^i) (y^j - x^j) \times$$

$$\times p(t - h, x, t + h_1, y) dy = b_{ij}(t, x);$$

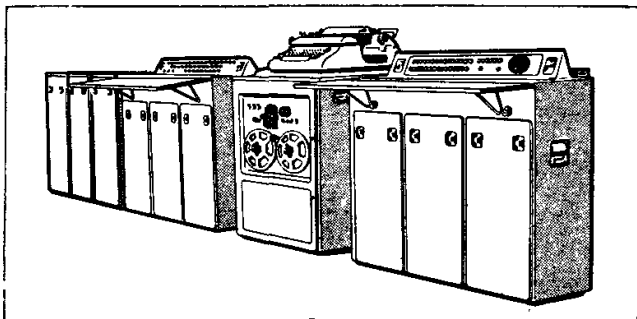
$$\lim_{h \downarrow 0, h_1 \downarrow 0} \frac{1}{h + h_1} \int_{|x-y| > \Delta} p(t - h, x, t + + h_1, y) dy = 0.$$

Коэфф.  $a_i(t, s)$  наз. коэфф. переноса, а вектор  $a(t, x)$  с координатами  $a_i(t, x)$  — вектором переноса,  $b_{ij}(t, x)$  — коэфф. диффузии, матрица  $B(t, x)$  с элементами  $b_{ij}(t, x)$  — матрицей диффузии. Такие марковские процессы наз. диффузионными, поскольку их можно интерпретировать как вероятностное описание явления диффузии. При изучении диффузионных марковских процессов существенную помощь может оказать аппарат стохастических дифференциальных ур-ний. См. также *Случайных процессов теория*. А. В. Скороход.

**ДЛИНА ОЧЕРЕДИ** — количество требований, находящихся в данный момент времени в очереди в *массового обслуживания системе*. В вероятностных системах и в системах со случайным входящим потоком Д. о. — *случайная величина*. Примеры Д. о.: к-во судов, ожидающих обработки у причалов; заготовок, находящихся в бункере перед станком; объем информации, подлежащей обработке на вычисл. устройстве. Д. о. — важная временная характеристика системы, позволяющая судить о длительности простоев транспортных средств, о залеживаемости товаров. На основании распределения Д. о. (или моментов этого распределения) можно рассчитать рациональный объем склада, емкость ассоциативного запоминающего устройства и т. д. Иногда в Д. о. включают также требования, находящиеся в данный момент на обслуживании. Для однолинейной системы обслуживания с пуассоновским входящим потоком и произвольно распределенным временем обслуживания распределение Д. о. вычисляется по *Хинчина — Полачека формулам*. Н. В. Яровицкий.

**ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ОЖИДАНИЯ** — то же, что *время ожидания*.

**«ДНЕПР»** — первая отечественная цифровая управляющая вычислительная машина широкого назначения на полупроводниковых элементах. Создана в Ин-те кибернетики АН УССР в 1961. «Д.» состоит (рис.) из центральной вычислительной части и устройства связи с объектом.



Управляющая машина широкого назначения «Днепр».

Вычислительная часть представляет собой самостоятельную универсальную цифровую вычислительную машину средней производительности (время выполнения операции сложения  $29,5 \div 57,5$  мксек). Объем оперативного запоминающего устройства ма-

шины (см. *Память ЦВМ*) — переменный (ОЗУ комплектуется блоками по 512 слов), всего может быть использовано до восьми блоков. Алгоритмическая полнота используемых в машине операций позволяет запрограммировать алгоритм управления для многих современных технологических процессов. Система команд «Д.» — двухадресная, форма представления чисел — с запятой, фиксированной перед старшим разрядом, длина слова (включая знаковый разряд) — 26 разрядов, система элементов — импульсно-потенциальная.

Устройство связи с объектом обеспечивает автоматический ввод в машину показаний 250 программно-опрашиваемых датчиков непрерывного сигнала, до 192 частотных датчиков, до 1344 сигналов релейного типа 0—12 в. «Д.» имеет 60 каналов для выдачи аналоговых и 480 каналов для выдачи релейных сигналов управления, содержит пульт оператора, снабженный регистром визуальной индикации и клавиатурой ввода информации управления процессом. К машине можно добавлять дополнительные устройства, позволяющие использовать ее в *обработке данных системах* и как вычислительную машину средней производительности: *накопитель* на магнитной ленте (рассчитан на запись 1 500 000 слов, скорость записи — 5650 слов в 1 сек); *быстродействующее цифронечающее устройство* (скорость печати  $1200 \pm 50$  шестизначных чисел в 1 мин); *ленточный перфатор* (скорость вывода данных на 5-дорожечную телеграфную перфоленту  $1200 \pm 50$  строк в 1 мин).

«Д.» используется в качестве центрального звена системы автоматизации непрерывных процессов. Машина автоматически опрашивает датчики процесса, вычисляет оптимальный режим управления и выдает соответствующие задания локальным регуляторам (их *исполнительным механизмам*). Задания либо печатаются (в системе, замкнутой через человека-оператора), либо реализуются автоматически (через блоки выдачи сигналов управления). «Д.» может рассчитывать технико-экономические показатели процесса и печатать их через заданные интервалы времени (час, смену, сутки). «Д.» применяют также в системах обработки данных физического эксперимента, т. к. эта машина имеет устройство, облегчающее связь ее с измерительными приборами и схемами управления экспериментом. Структура системы обработки данных на базе «Д.» зависит от характера эксперимента. При локальном эксперименте целесообразно непосредственно подключать машину к датчикам исследуемого объекта. Из-за специфики датчиков машина подключается к ним через блок усилителей. К машине придается устройство графического воспроизведения результатов эксперимента и быстродействующее *алфавитно-цифровое печатающее устройство*. В экспериментах, проводимых на удаленных друг от друга установках, систему необходимо разделить на две части: *съем* и *обработки информации*. В качестве буферного устройства связи между ними используется накопитель на перфоленте. Данные

от отдельных объектов исследования записываются на перфоленту, затем информация вводится в вычислительную часть «Д.» для соответствующей обработки.

В процессе усовершенствования в «Д.» включена система прерывания по 28 причинам, добавлен ряд блоков ввода с бумажной перфоленты и вывода информации (быстродействующее цифровое печатающее устройство). «Д.» можно использовать в цифро-аналоговых комплексах для изучения и моделирования производственных процессов.

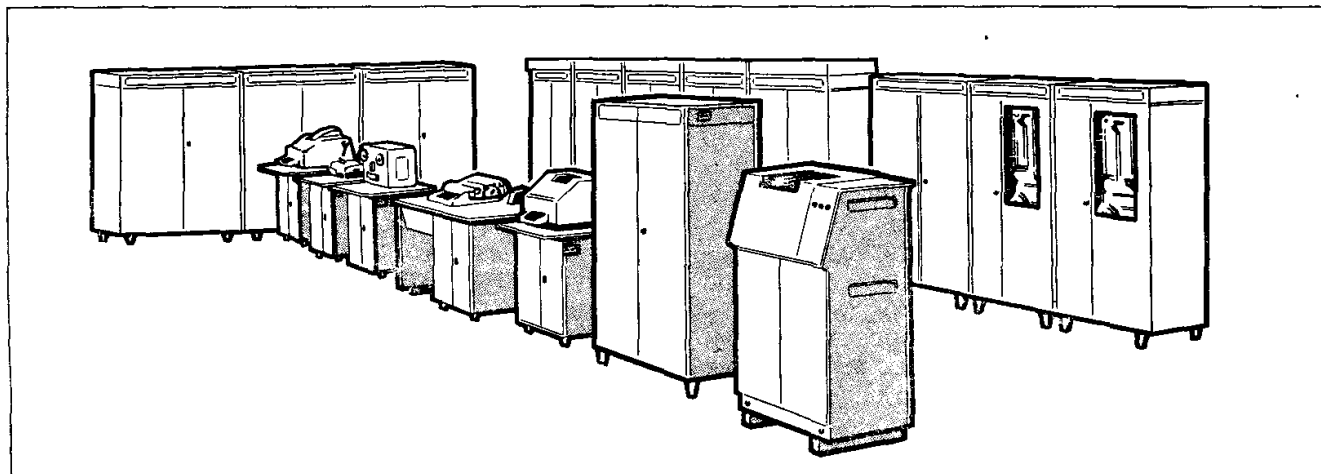
Лит.: М а л и н о в с к и й Б. Н. Цифровые управляющие машины и автоматизация производства. М., 1963 [библиогр. с. 285—286]; Г р у б о в В. И., К и р д а н В. С. Электронные вычислительные машины и моделирующие устройства. Справочник. К., 1969 [библиогр. с. 179—181]. Б. Н. М а л и н о в с к и й. «ДНЕПР-2» — управляющая вычислительная система, ориентированная на применение в качестве центрального звена в информационно-управляющих системах на промышленных предприятиях. Состоит из двух основных частей (рис.) — вычислительного комплекса ВК «Днепр-21» и управляющего комплекса УК «Днепр-22».

В ы ч и с л и т е л ь н ы й к о м п л е к с предназначен для обработки информации, поступающей от *внешних устройств*, а также от УК. ВК может быть применен как самостоятельная вычислительная машина для обработки эконом. данных и решения инженерно-тех. задач. Оперативное запоминающее устройство (ЗУ) ВК на ферритовых кольцах имеет до 32К 42-разрядных ячеек. Предусмотрено подключение долговременного ЗУ также до 32К ячеек. Система счисления — двоичная. Среднее быстродействие машины — 20 тысяч операций в сек. В состав ВК входит один мультиплексный и два селекторных канала, автономно работающих с памятью машины. Предусмотрено подключение перфолентных и перфокартных

держат переменное число 9-разрядных символов: числа — до 8, буквенно-цифровая информация — до 127 символов. В памяти адресуется каждый символ.

Команды содержат одно или несколько *машинных слов* в зависимости от типа команды и количества адресов, содержащихся в ней. В машине имеются 0-адресные, 1-адресные, 2-адресные и, в некоторых случаях, многоадресные команды. Адреса могут быть одно-, двух- и трехсимвольными. В командах допускается как прямая и косвенная адресации, так и непосредственное задание операндов. Мультиплексный канал, обеспечивая автономный обмен информацией внешних устройств с памятью машины, осуществляет редактирование информации при вводе и выводе, которое аналогично редактированию по шаблону, принятому в языке КОБОЛ. Система прерывания основана на схемно-программном принципе и обеспечивает обработку сигналов прерывания, поступающих от УК, внешних устройств и накопителей, а также внутренних сигналов прерывания, информирующих о сбоех в центральном процессоре (ЦП) и об особых ситуациях, возникающих при регулярном выполнении программы (переполнение, защита памяти и т. д.). Гибкая структура системы прерывания позволяет организовать любую логику многопрограммной обработки информации.

У п р а в л я ю щ и й к о м п л е к с (УК) предназначен для приема информации от управляемого объекта, выдачи управляющих воздействий на объект, а также первичной обработки информации. Кроме того, УК осуществляет обмен между оператором, следящим за технологическим процессом, и ВК. Основные функции УК: автоматический сбор информации от датчиков управляемого объекта (автономно и по командам УК); сглаживание текущих значений сигналов аналоговых датчи-



Управляющая вычислительная система «Днепр-2».

устр-в ввода — вывода, быстродействующего *алфавитно-цифрового печатающего устройства, телетайпов* и пишущих машинок (всего до 96 внешних устройств). Внешним ЗУ машины являются накопители на магнитной ленте (до 16 лентопротяжных устройств). Слова со-

ков; автоматическое слежение за нахождением сигналов аналоговых датчиков в заданных пределах; автоматическое слежение за состоянием датчиков двухпозиционного типа (обнаружение момента и знака их переключения); автоматическое слежение за появлением

сигналов от датчиков число-импульсного типа и накопление числа импульсов по каждому из них; выдача сведений об аварийном состоянии объекта управления, аппаратуры комплекса, датчиков и линий связи. Входные сигналы, общим количеством свыше 1600, могут поступать от датчиков тока, частоты, потенциала, число-импульсных и двухпозиционных датчиков. Выходные сигналы, общим количеством свыше 1000, могут выдаваться на реле и различные регуляторы.

Широкие логические возможности и гибкая структура «Д.-2» дополняется развитой системой математического обеспечения. Внешние языки, специализированные программы-диспетчеры и наборы стандартных *подпрограмм* позволяют организовать эффективный вычисл. процесс на «Д.-2» в системах различных назначений. Числовой код (ЧКД) предназначен для программирования любых задач, включая задачи управления технологическими процессами, стандартные подпрограммы и системные программы. Транслятор ЧКД переводит программы в машинные коды, ретранслятор дает возможность напечатать в ЧКД любую машинную программу. Автокод АКД-1 предназначен для программ, включаемых в библиотеку и для других программ, требующих широкого использования возможностей системы машинных команд. Автокод включает как средства для программирования — внешний язык и транслятор, так и средства отладки во внешнем языке — язык отладки и программу — автоотладчик (АОД).

Автокод в реальном масштабе времени (АКДРВ) предназначен для программ управления технологическими процессами и техническими объектами. Язык АКДРВ включает все средства АКД-1, содержит дополнительно макрокоманды обмена «Днепра-21» с «Днепром-22», с системой прерывания и часами. Программы, записанные в АКДРВ, наглядно отражают функционирование машины в реальном масштабе времени, связь ее с внешними объектами.

Транслятор с АЛГОЛ'-а-60 позволяет производить отладку программ непосредственно во внешнем языке в режиме диалога программиста с машиной. Транслятор с КОБОЛ'а является необходимой частью математического обеспечения систем управления производственными процессами, вычислительных центров торгового и экономического профиля.

Программа-диспетчер ДД-1 организует вычислительный процесс в системах управления технологическими процессами на базе модификаций машины с малым объемом оперативного ЗУ и малым числом внешних устройств.

Программа-диспетчер ДД-2 организует процесс отладки программ (записанных в числовом коде) одновременно с трех телетайпов.

Программа-диспетчер ДД-3 организует вычислительный процесс в информационно-управляющих системах, системах управления технологическими процессами, вычислительных центрах, системах обработки экспериментальных данных. ДД-3 работает на расширен-

ных модификациях машины, обеспечивая удобную работу оператора и программиста при отладке и решении задач в мультипрограммном режиме; программа-диспетчер ДД-3 включает блоки управления данными.

Лит.: Управляющая система «Днепр-2». К., 1968; Никитин А. И. Применение УВС «Днепр-2» в качестве базовой машины в системах комплексной автоматизации на предприятиях. В кн.: VII-ая Всесоюзная сессия семинара «Управляющие машины и системы». К., 1970; Управляющая вычислительная система «Днепр-2». К., 1972.

А. Г. Кухарчук, А. И. Никитин, А. А. Стогний.

**ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ОБЛАСТЬ** — обобщение понятия *доверительного интервала* на случай многомерного параметра. Для  $k$ -мерного параметра  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$  Д. о., соответствующая доверительному уровню  $\varepsilon$  или коэффициенту доверия  $1 - \varepsilon$ , — случайное множество  $D$  точек  $k$ -мерного пространства, определяемое по  $\varepsilon$  и наблюдениям *случайной величины* с зависящим от параметра  $\theta$  распределением и такое, что  $D$  содержит значение  $\theta$  с вероятностью  $1 - \varepsilon$  при каждом  $\theta$ . Наибольший интерес представляют Д. о., которые являются выпуклыми, связными и, в каком-то смысле, наименьшими множествами. Известны методы приближенного построения таких Д. о. при большом числе наблюдений, а для некоторых практически интересных случаев Д. о. построены и при фиксированном числе наблюдений.

А. Я. Дороговцев.

**ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ** — вычисляемые по выборочным данным концы интервала, зависящего от результатов наблюдений, который с заданной заранее вероятностью содержит в себе неизвестное значение параметра распределения *случайной величины*. См. также *Доверительный интервал* для параметра  $\theta$ , соответствующий доверительному уровню  $\varepsilon$ , *Доверительная область*.

**ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ** для параметра  $\theta$ , соответствующий доверительному уровню  $\varepsilon$ , — интервал со случайными концами  $c_1$  и  $c_2$ , содержащий с вероятностью  $1 - \varepsilon$  значение параметра  $\theta$  при каждом  $\theta$ .  $c_1$  и  $c_2$  являются известными функциями  $\varepsilon$  и наблюдений *случайной величины* с распределением, зависящим от неизвестного параметра  $\theta$ , и наз. *доверительными пределами*, соответствующими доверительному уровню  $\varepsilon$ . Число  $1 - \varepsilon$  наз. *коэфф. доверия*. Для построения Д. и. для параметра  $\theta$  обычно используют статистики (функции наблюдений), которые являются «хорошими» (см. *Статистические оценки*) оценками неизвестного параметра  $\theta$  и имеют распределение, зависящее только от  $\theta$  (в том случае, когда распределение случайной величины зависит и от других неизвестных параметров). Кратчайшие и асимптотически кратчайшие Д. и. строятся с использованием эффективных и асимптотически эффективных оценок параметра  $\theta$ . Напр., Д. и. для среднего значения  $m$ , построенный по  $n$  независимым наблюдениям нормально распределенной случайной величины с неизвестным средним  $m$  и

неизвестной дисперсией, имеет вид

$$\left( \bar{x} - t_\varepsilon \frac{s}{\sqrt{n-1}}, \bar{x} + t_\varepsilon \frac{s}{\sqrt{n-1}} \right), \quad (1)$$

где  $\bar{x}$  и  $s^2$  — соответственно выборочные математическое ожидание и дисперсия (см. *Эмпирическая функция распределения*), а  $t_\varepsilon$  определяется по  $n$  и  $\varepsilon$  как значение  $t$ , для которого выполняется равенство

$$\int_{-t}^t s_{n-1}(x) dx = 1 - \varepsilon, \quad (2)$$

$$\text{где } s_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \times \\ \times \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\left(\frac{n}{2}\right)} - \text{плотность распределе-}$$

ния Стюдента с  $n-1$  степенями свободы. Д. и. (1) строится на основании того, что статистика

$\sqrt{n-1} \frac{\bar{x}-m}{s}$  имеет плотность распределе-

ния вероятности  $s_{n-1}(x)$ . Для определения

$t_\varepsilon$  имеются таблицы. Теорию Д. и. разработал в 1934 г. амер. математик Ю. Нейман. См. также *Доверительная область*.

*Лит.:* Крамер Г. Математические методы статистики. Пер. с англ. М., 1948; Уилкс С. Математическая статистика. Пер. с англ. М., 1967 [библиогр. с. 601—619]. А. Я. Дороговцев.

**ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ** — заранее задаваемая вероятность, с учетом которой строят доверительный интервал или доверительную область.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРИЯ**, математика — наука, изучающая формализованные математические теории и доказательства в них. Ввел ее нем. математик Д. Гильберт (1862—1943) в рамках предложенной им программы обоснования математики путем доказательства непротиворечивости. В настоящее время Д. т. изучает более широкий круг вопросов, относящихся к структуре формализованных доказательств. Центральным для Д. т. является установленное Гильбертом различие между «действительными» матем. предложениями, имеющими содержательный смысл, и «идеальными» предложениями, которые сами по себе не обязательно допускают истолкование, но позволяют сокращать доказательства действительных предложений. В качестве действительных предложений Гильберт выделял финитные предложения, т. е. утверждения о равенстве и различии конструктивных объектов (результатов конструктивных процессов). Отличительным признаком финитных предложений является отсутствие в них конструкций, связанных с актуальной (завершенной) бесконечностью, т. н. трансфинитных конструкций, напр., «для каждого натурального числа», «существует натуральное число», «то натураль-

ное число, которое обладает свойством  $S$ » и т. п. Проблема обоснования математики была бы решена, если бы удалось указать общий метод исключения идеальных предложений из доказательства действительных предложений. Гильберт заметил, что для этого, в свою очередь, достаточно финитными средствами доказать непротиворечивость математики, т. е. утверждение о том, что ни для какого предложения  $A$  нельзя доказать как  $A$ , так и отрицание  $A$  (или утверждение о недоказуемости  $0 = 1$ ). Он указал и подход к решению этой задачи, остающийся до сих пор основным методом Д. т.: следует сделать объектом изучения саму рассматриваемую матем. теорию и установить, что среди ее теорем нет ф-лы  $0 = 1$ . С этой целью теория формализуется: перечисляются ее исходные понятия и матем. аксиомы (это же делается и при использовании аксиоматического метода в др. областях математики), а также осн. логические понятия и допустимые правила перехода. Такое перечисление определяет формальную систему или *формализм*. Изучаемая средствами Д. т. формальная система наз. предметной теорией, а относящаяся к ней часть Д. т. — ее метатеорией. С точки зрения метатеории, предметная теория является набором бессодержательных символов, аналогичных, напр., позициям в шахматной игре. Классическим примером применения этого способа рассмотрения является теорема двойственности в проективной геометрии: из каждой теоремы снова получается теорема после взаимной замены слов «точка» и «прямая». Гильберт надеялся на возможность полной формализации всей математики (или значительной ее части) и финитного доказательства непротиворечивости полученной формальной системы. Эти надежды были опровергнуты (1931) двумя теоремами австр. математика К. Гёделя (р. 1906), являющимися осн. результатами Д. т.: 1) в любой достаточно богатой непротиворечивой формальной системе найдется формально неразрешимое предложение, т. е. ф-ла, которую нельзя ни доказать, ни опровергнуть средствами этой системы; 2) при несколько более сильных предположениях такой ф-лой является утверждение о непротиворечивости системы. В частности, если считать, что средствами формализованной арифметики можно провести все финитные рассуждения, то непротиворечивость арифметики не доказуема финитными средствами. Вслед за теоремами Гёделя был получен другой важный результат Д. т. — теорема Чёрча о существовании неразрешимых систем, т. е. таких систем, для которых невозможен единый общий метод (*алгоритм*), который по каждой ф-ле в конечное число шагов решает, является ли она теоремой рассматриваемой системы.

Теоремы Гёделя выявили, во-первых, необходимость рассмотрения иерархий формальных систем, т. к. в каждой конкретной формальной системе есть формально неразрешимые предложения, и, во-вторых, неизбежность различных методов доказательства непротиворечивости. Вопросы, связанные с доказательства-

ми непротиворечивости, занимают в современной Д. т. центр. место, т. к. результаты, полученные при их изучении, и используемые при этом методы находят приложение как в самой Д. т., так и в др. областях матем. логики. В частности, многие доказательства непротиворечивости решают задачу приписывания смысла некоторым идеальным предложениям. Один из осн. методов доказательства непротиворечивости состоит в том, что естественная формализация рассматриваемой системы заменяется искусственной (см. *Генцена формальные системы*), содержащей выделенное правило (сечение), причем вид остальных правил таков, что невозможен вывод противоречия  $0 = 1$ , не содержащий сечения. После этого доказывают, что из выводов числовых равенств можно устранить сечение, откуда и следует непротиворечивость. Трансфинитный элемент (он должен быть в силу второй теоремы Гёделя) появляется в доказательстве устранимости сечения следующим образом: каждому выводу сопоставляется некоторое трансфинитное порядковое число; определяется операция, сопоставляющая любому выводу числового равенства, содержащему сечение, некоторый вывод того же равенства, имеющий меньшее порядковое число. После этого устранимость сечения получается применением правила трансфинитной индукции (к финитному предикату). Доказательство непротиворечивости некоторой системы  $S$  генценовским методом обычно выявляет порядковое число  $\alpha$ , характеризующее  $S$  в следующем смысле: можно таким образом конструктивно определить вполне-упорядочение  $R$  натуральных чисел по типу  $\alpha$ , что в  $S$  доказуема вполне-упорядоченность любого собственного отрезка  $R$ ; непротиворечивость  $S$  доказуема трансфинитной индукцией по  $\alpha$ ; ни для какого вполне-упорядочения натуральных чисел по типу  $\geq \alpha$  в  $S$  не доказуема вполне-упорядоченность. Доказательство непротиворечивости классической арифметики, которое предложил нем. математик Г. Генцен (1936), дает для этой системы характеристику  $\varepsilon_0$ ; для предикативного анализа (см. *Предикативность*) характеристическим оказывается  $\kappa_0$  — первое сильно критическое порядковое число. Важным способом применения генценовских методов является использование полуформальных систем, содержащих т. н. неэлементарные правила вывода, напр., правило бесконечной индукции (правило Карнапа): если для любого натурального  $N$  выводимы  $A(0), A(1), \dots, A(N)$ , то выводимо и  $\forall x A(x)$ . В полуформальных системах сечение часто устранимо не только из выводов числовых равенств, но и из выводов произвольных ф-л.

Второй метод доказательства непротиворечивости, который сформулировал К. Гёдель в 1941 (опубликовано 1958), вводит трансфинитный элемент не в виде трансфинитной индукции, а через употребление конструктивных функционалов конечных типов. Функционалы типа «0» — это натуральные числа, функционалы типа  $(0 \rightarrow 0)$  — это числовые ф-ции, а функционалы типа  $(0 \rightarrow 0) \rightarrow 0$  — это отобра-

жения числовых ф-ций в натуральные числа; вообще функционалы типа  $(\sigma \rightarrow \tau)$  перерабатывают функционалы типа  $\sigma$  в функционалы типа  $\tau$ . Гёдель описывает перевод арифм. формул в ф-лы типа  $\exists \varphi \forall \psi M(\varphi, \psi)$  (или более простого вида), где  $\varphi, \psi$  — переменные для функционалов, и доказывает, что для каждой выводимой в арифметике ф-лы можно указать такой примитивно рекурсивный функционал  $\Phi$ , что формула  $M(\Phi, \psi)$  со свободной переменной  $\psi$  выводима в бескванторной системе  $T$ , правилами которой являются правила вычисления значений примитивно рекурсивных функционалов и индукция. Так как переводами числовых равенств являются они сами, отсюда и из непротиворечивости системы  $T$  следует непротиворечивость арифметики. Американский математик К. Спектор (1930—61) дал доказательство непротиворечивости классического анализа методом Гёделя; при этом было использовано новое правило определения функционалов — правило бар-рекурсии. Однако обоснование этого правила проводится средствами, приемлемыми далеко не для всех математиков. Метод Гёделя был применен для вычисления характеристического числа подсистемы интуиционистского анализа с бар-индукцией типа 0.

Для арифметики результаты, аналогичные результатам, получаемым методом Гёделя, можно получить с помощью гильбертовского метода  $\varepsilon$ -подстановок. Этот метод, позволяющий строить модель не для всей теории в целом, а для каждого отдельного доказательства данной теории, расширяет область приложимости традиционного метода доказательства непротиворечивости путем построения моделей. Именно гильбертовским методом было получено первое финитное доказательство непротиворечивости ограниченной арифметики — арифм. системы, где индукция допускается лишь по бескванторным ф-лам.

Доказательство непротиворечивости обычно дает интерпретацию некоторых классов ф-л рассматриваемой системы  $S$  в более простой системе  $C_0$ , т. е. операцию  $\pi$ , сопоставляющую каждой ф-ле  $A$  рассматриваемого класса «бесконечную дизъюнкцию» (последовательность) ф-л  $\pi_i(A)$  системы  $C_0$ , такую, что, во-первых, финитные предложения не меняются; во-вторых, для любых  $A$  и  $B$  по любому выводу  $B$  из  $A$  в  $S$  и по любому  $i$  можно указать такое  $j$ , что  $\pi_j(B)$  выводимо из  $\pi_i(A)$  в  $C_0$ . Второе условие соответствует рассуждению: если верно  $\bigvee_i A_i \rightarrow \bigvee_j B_j$ , то при любом  $i$  верно  $A_i \rightarrow \bigvee_j B_j$ , а поэтому при каждом  $i$  найдется такое  $j$ , что верно  $A_i \rightarrow B_j$ . В частности, если в качестве  $A$  взять стандартное выводимое предложение  $0 = 0$ , получаем: если  $B$  выводимо в  $S$ , то для некоторого  $j$   $B_j$  выводимо в  $C_0$ . Если взять в качестве  $B$  стандартное ложное предложение  $0 = 1$ , то получим, что противоречивость  $C_0$  влечет противоречивость  $S$ . Если ф-лы системы  $C_0$  считаются действительными предложениями, то интерпретация решает задачу приписывания смысла доказуемым ф-лам систе-



мы  $C$ . Самый характерный пример интерпретации — гёделевская интерпретация  $\phi$ -л арифметики, играющей роль  $C$ ,  $\phi$ -лами бескванторной системы  $T$ , играющей роль  $C_0$ . Аналогичные интерпретации дают и др. доказательства непротиворечивости методом Гёделя. Доказательства непротиворечивости методом Генцена дают интерпретацию экзистенциальных  $\phi$ -л в бескванторной арифметике ординально рекурсивных функций. Метод  $\varepsilon$ -подстановок дает интерпретацию отсутствием контрпримера, отличающуюся от гёделевской интерпретации употреблением функционалов лишь типа  $(0 \rightarrow 0) \rightarrow 0$ , которые можно определять с помощью не только примитивных, но и трансфинитных рекурсий. Один из первых примеров интерпретации дает теорема Эрбрана: каждая  $\phi$ -ла классического исчисления предикатов разлагается, согласно этой теореме, в «бесконечную дизъюнкцию»  $\phi$ -л классического исчисления высказываний. Сравнивая конструктивные (см. *Логика конструктивная*) и неконструктивные системы, используют интерпретацию классических систем в конструктивных путем вставки двойного отрицания. Имеется также интерпретация конструктивного (интуиционистского) исчисления высказываний в модальном исчислении Льюиса  $S_4$ . Для анализа структуры конструктивных систем используют интерпретацию реализуемости, позволяющую сводить конструктивные системы к классическим. Модификации этой интерпретации дают возможность устанавливать необходимые условия выводимости существования и дизъюнкции (если в конструктивной арифметике выводима дизъюнкция замкнутых  $\phi$ -л, то выводима и одна из этих  $\phi$ -л). Многие метаматем. теоремы легко доказуемы для систем без сечения, поэтому представляют интерес доказательства устранимости сечения и др. метаматем. результатов, не являющиеся сами метаматематическими. Одним из первых примеров такого рода было доказательство теоремы Эрбрана, содержащееся в доказательстве теоремы Гёделя о полноте. В последнее время такой подход был применен для анализа конструктивных, интуиционистских и модальных систем, а также для доказательства устранимости сечения из простой теории типов. В приложениях к др. областям матем. логики оказались полезными обобщения метаматем. результатов на бесконечно длинные формулы.

В конце 60-х — начале 70-х годов возникло новое направление Д. т. — редуцирующая Д. т., изучающая доказательства и их преобразования (редукции) сами по себе, а не только в связи с множеством доказуемых теорем и отношением следования.

В последнее время, особенно после исследований амер. математика П. Коэна, доказавшего (1963) независимость континуум-гипотезы и аксиомы выбора от остальных аксиом *множества теории*, возрос интерес к проблеме независимости аксиом. Методы Д. т. широко применяют в теор. обоснованиях алгоритмов *доказательства теорем на ЭВМ*. Здесь существенную роль играют теоремы о специали-

зации формы доказательства и о перестройках доказательств, напр., дедукционная теорема и интерполяционная теорема.

*Лит.*: Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1973; Клини С. К. Математическая логика. Пер. с англ. М., 1973 [библиогр. с. 451—465]; Schütte K. Beweistheorie. Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1960; Kreisel G. Mathematical logic. В кн.: Lectures on modern mathematics, v. 3. New York, 1965; Cohen P. J. Set theory and the continuum hypothesis. New York — Amsterdam, 1966; Математическая теория логического вывода. М., 1967; Kreisel G. A survey of proof theory. «The journal of symbolic logic», 1968, v. 33, № 3; Hilbert D., Bernays P. Grundlagen der Mathematik, Bd. 1—2. Berlin — Heidelberg — New York, 1968—70.

Г. Е. Минц.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ НА ЭВМ**, машинный поиск логического вывода — направление в теоретической кибернетике, изучающее возможности моделирования на электронной вычислительной машине мыслительной деятельности математика. Важность этого направления обусловлена тем, что в математике легче, чем в других видах творчества, формализовать и условие решаемой задачи, и элементарные шаги, допустимые при ее решении, и проверку результата (как и во всех областях творчества, сам процесс мышления поддается формализации с огромным трудом и потерями).

Теоретической предпосылкой для Д. т. на ЭВМ явилось создание *логики математической*, формализовавшей понятие логического вывода теоремы из аксиом. Еще до появления ЭВМ в работах классиков матем. логики были разработаны методы, составившие реальную базу практ. *алгоритмов* поиска вывода. Первые попытки практически построить машинные программы установления выводимости были сделаны в США в начале 50-х гг. Программа «логик-теоретик» работала с распространённой, но крайне неудобной для поиска вывода формулировкой одной простой теории (см. *Исчисление высказываний*). Поэтому практические результаты этой программы были очень незначительны. Однако использованная в ней методика оказалась полезной и имела принципиальное значение для формирования направления, получившего название *программирование эвристическое*. Существенно более интересные логич. теоремы были доказаны с помощью программы Хао Вана, легшей в основу другого направления в автоматизации доказательств. В дальнейшем первое направление было продолжено (напр., Гелернтер использовал анализ чертежей для организации процесса доказательства геом. теорем). Однако подавляющее большинство работ по Д. т. на ЭВМ вслед за Хао Ваном базируется, в первую очередь, на разработке методов матем. логики. Объединение достижений теории логич. вывода и эвристического программирования пока не осуществлено.

Круг теорем, реально доказанных на ЭВМ, ограничен, и теоремы эти не очень сложны. Соответствующие доказательства часто опирались на существенную помощь со стороны человека либо в виде «подсказывающей» формулировки исходной задачи, либо даже в виде

указаний по ходу ее решения (напр., «использовать такую-то лемму», «провести индукцию по такой-то ф-ле» и т. п.). Помимо ряда логич. теорем были доказаны некоторые теоремы элементарной алгебры, элементарной и проективной геометрии, а также элементарной теории чисел. Напр., такие: «если квадрат каждого элемента равен единице, то группа коммутативна», «квадратный корень из простого числа иррационален», «простых чисел бесконечно много». Сложность доказательства двух последних теорем, по-видимому, приближается к границам современных возможностей маш. поиска вывода. Т. о., пока мало надежд на машинное доказательство по-настоящему сложных теорем, тем более теорем, которые не удастся доказать человеку. Поэтому больший интерес представляют не достигнутые практические результаты, а постановки задач и методы. Имеется несколько способов Д. т. на ЭВМ. При доказательстве теоремы значительную часть тех. работы математик может поручить ЭВМ, если по ходу доказательства возникает большой объем вычислений или множество вариантов, каждый из которых легко рассматривается. Этим способом получены, напр., некоторые результаты по теории чисел. Хотя проведение таких доказательств часто требует от математика специальной ориентировки хода своих рассуждений на использование ЭВМ, но этот способ выпадает, строго говоря, из проблематики маш. поиска вывода. Способ перспективен, но пока его возможности использованы мало. Другой способ — это кооперирование математика и ЭВМ, при котором человек определяет принципиальное направление доказательства и высказывает гипотезы, а машина прорабатывает все промежуточные логич. переходы и выкладки, проверяет гипотезы и выдает материал для формирования дальнейших гипотез. Это направление только начинает развиваться и требует, помимо теор. разработок, дальнейшего совершенствования систем связи человека с ЭВМ. К этому направлению примыкают задачи корректирования гипотез и естественного поиска вывода.

Наиболее распространена следующая постановка проблемы автоматизации доказательства: матем. теория формализуется (базой для формализации служит исчисление предикатов), теоремы теории превращаются в ф-лы, выводимые из тех или иных аксиом, требуется построить алгоритм установления выводимости, т. е. алгоритм, который дает правильный ответ на вопрос о выводимости ф-лы и должен кончать работу для всех выводимых ф-л, но для некоторых (или для всех) невыводимых ф-л может работать бесконечно долго. Такая постановка связана с неразрешимостью подавляющего большинства интересных теорий (т. е. принципиально невозможно построить алгоритм, распознающий выводимость для всех ф-л в языке теории). Существуют и др. постановки проблемы. 1) Поиск высококачественного вывода. Качественность вывода не уточняется, но имеются в виду выводы возможно более компактные (недопустимы излишние

применения правил), как можно более «склеенные» (одно и то же вспомогательное утверждение не следует выводить дважды на разных этапах доказательства), записанные в естественном, привычном для математика виде. В Ленинградском отделении Матем. института им. В. А. Стеклова был разработан и запрограммирован алгоритм, который находил в рамках исчисления высказываний естественный вывод утверждения из списка гипотез и записывал этот вывод в виде логико-матем. текста на русском языке. 2) Корректирование гипотез и усиление теорем. Разрабатываются методы, позволяющие вводить в заданную ф-лу небольшие исправления так, чтобы она стала теоремой или (если исходная ф-ла выводима) превратилась в более сильную теорему. Исследуются критерии качества исправлений. 3) Полуразрешающие алгоритмы. Опираясь на наличие у неразрешимых теорий значительных разрешимых фрагментов, разрабатывают разрешающие процедуры для этих фрагментов, а также алгоритмы установления выводимости, кончающие работу для возможно более широких классов ф-л. В качестве основы почти всех предлагавшихся алгоритмов установления выводимости можно рассматривать аппарат секвенциальных исчислений (см. *Генцена формальные системы*). Эти исчисления часто позволяют организовать процесс поиска вывода «снизу вверх» — путем определения по каждой ф-ле  $F$  сравнительно небольшого числа ее возможных «непосредственных предшественников», т. е. ф-л, из которых  $F$  может быть выведена. В простейших случаях уже одно это дает реальную возможность установления выводимости. Однако для исчисления предикатов такой поиск часто приводит к огромному к-ву «лишних» ф-л, что делает невозможным непосредственное применение этого метода. Был предложен способ, в соответствии с которым ищется «снизу вверх» не сам вывод, а некоторая его «заготовка» с неуточненными значениями используемых переменных. На определенных этапах построения заготовки проверяется, нельзя ли так уточнить значения переменных, чтобы получить уже настоящий вывод. Этот метод позволяет избавиться от излишеств в выводе и приблизиться к практическим алгоритмам, но проверка сложной заготовки представляет собой непомерно трудную задачу. Поэтому более перспективны методы, сочетающие неуточненность значений переменных со сравнительной простотой каждого шага работы: метод резолюций, применимый к классическому исчислению предикатов, и обратный метод, применимый почти ко всем секвенциальным исчислениям. Для повышения практической эффективности этих методов решающее значение имеет изучение т. н. «стратегий», накладывающих те или иные ограничения на процесс установления выводимости. Рассматриваются способы включения в схему этих методов специфических механизмов аксиоматических теорий, правил для равенства и индукции, более сложных формальных языков и др.

Проблемой автоматизации доказательств занимаются в СССР, США, Великобритании, Швеции, ФРГ, Польше и др. странах. Спец. международные симпозиумы «Машинный разум» происходят ежегодно в Эдинбурге (Великобритания). Два всесоюзных симпозиума по машинному поиску вывода состоялись в Тракее (Лит. ССР). См. также *Автоматизированный поиск доказательств теорем.*

Лит.: Ш а н и н Н. А. [и др.]. Алгоритм машинного поиска естественного логического вывода в исчислении высказываний. М.—Л., 1965; М а с л о в С. Ю. Обратный метод установления выводимости для логических исчислений. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1968, т. 98; Вычислительные машины и мышление. Пер. с англ. М., 1967 [библиогр. с. 491—546]; Кибернетический сборник. Новая серия, в. 7. М., 1970; Machine intelligence. Edinburg, 1971.

С. Ю. Маслов.

**ДОКУМЕНТ НАУЧНЫЙ** — разновидность материального носителя с закрепленной на нем *информацией научной*, обладающей определенной логической завершенностью. Д. н. обязательно должен быть соотнесен со временем и местом его подготовки, а также с именем его индивидуального или коллективного автора. Совокупность опубликованных Д. н. составляет науч.-тех. литературу, которая является материальной формой существования науки. Д. н. — это результат завершения науч. исследования, средство распространения науч. информации в пространстве и времени, осн. способ реализации преемственности, интернационального характера и др. закономерностей науки, средство утверждения приоритета ученого, оценки продуктивности его труда и т. д. Таким образом, Д. н. является органической частью социального механизма науки. См. также *Информатика, Информация документальная, Научно-информационная деятельность.*

Р. С. Гуляревский, А. И. Черный.

**ДОКУМЕНТАЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИОННО-ПОИСКОВАЯ СИСТЕМА** — см. *Информационно-поисковая система документальная.*

**ДОКУМЕНТАЛЬНО-ФАКТОГРАФИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ** — специфический класс информационно-справочных и информационно-поисковых систем, осуществляющих поиск, переработку и хранение документальной и фактографической информации. Интерес к такого рода системам особенно возрос в связи с проблемой информационного обеспечения управления научными, производственными и административными организациями, а также управления отраслями, ведомствами и территориальными объединениями. Для такого управления характерно использование одновременно документов и сведений фактического характера; причем информация одного вида может генерироваться из информации другого вида.

Д.-ф. и. с. строят как кооперированные или как интегрированные системы. В кооперированных системах процессы переработки документальной и фактографической информации четко разграничены в рамках соответствующих каналов обработки. Каждый канал опирается на свою информационную

базу и разобщен с другим по решаемым задачам или сообщениям на изменение содержания хранимой информации. В то же время оба канала могут иметь общие технические средства, общее управление функционированием, использовать одни и те же элементы матем. обеспечения и даже источники информации. Поэтому Д.-ф. и. с. кооперированного типа можно рассматривать как совокупность фактографической и документальной систем с обобществлением управления, используемых средств тех. и матем. обеспечения, а также источников поступления информации.

**Интегрированные Д.-ф. и. с.** имеют полностью или частично совмещенную информационную базу для обоих каналов обработки. Это совмещение может быть сравнительно простым, когда, напр., показатели фактографических массивов сопровождаются ссылками на хранящиеся документы-источники. В других случаях совмещение предполагает непосредственное извлечение фактографической информации при ответах на запросы, применяя семантический анализ текста документов и различных правил логического вывода.

Большое внимание в настоящее время уделяется разработке и внедрению автоматизированных Д.-ф. и. с. Построение автоматизированных систем кооперированного типа обычно предполагает независимую разработку фактографического и документального каналов с применением соответствующих методов и средств. Однако такие вопросы, как организация функционирования системы, использование обобществленных ресурсов, совмещение отдельных информационных процессов и т. д. рассматриваются для всей системы в целом.

При построении автоматизированных Д.-ф. и. с. интегрированного типа основные трудности связаны с созданием *алгоритмов*, которые обеспечивают автомат. пополнение и обновление фактографических массивов информационной базы путем анализа поступающих документов, а также эффективное извлечение отдельных сведений из текста документов при ответе на поступающие запросы. Ключевыми вопросами здесь являются: разработка эффективных алгоритмов семантического анализа текстовой информации; создание достаточно мощной дедуктивной системы, позволяющей делать нетривиальные выводы о фактическом содержании анализируемого текста или группы показателей; разработка эффективных процедур и критериев оценки содержательной достоверности результатов анализа и логического вывода. Необходимыми условиями решения указанных проблем являются, в частности, создание формализованного языка, обеспечивающего адекватное описание объектов и ситуаций; разработка эффективных алгоритмов грамматического анализа текстов на естественном языке; разработка методов оптим. организации массивов данных со сложной внутренней структурой и т. д. Тех. предпосылками создания автоматизированных Д.-ф. и. с., пригодных для практического применения, является наличие запоминающих устройств с произ-

вольным доступом и большой емкостью, а также реализация автоматич. ввода текста непосредственно с первичных документов в ЦВМ. Было построено несколько экспериментальных автоматизированных Д.-ф. и. с., на которых исследовались отдельные вопросы построения и применения таких систем. Создание Д.-ф. и. с., рассчитанных на широкое применение, затрудняется тем, что пока нет эффективных методов семантического анализа и дедуктивных систем, пригодных к практическому использованию. Однако, несмотря на эти затруднения, интерес к изучению Д.-ф. и. с. интегрированного типа не ослабевает, т. к. применение таких систем является наиболее перспективным путем повышения эффективности применения автоматизированных информационных систем для обеспечения научных исследований, управления в экономике и т. п. Лит.: Глушков В. М. Введение в АСУ. К., 1972 [библиогр. с. 304—308]; Сэлтон Г. Автоматическая обработка, хранение и поиск информации. Пер. с англ. М., 1970.

В. Н. Афанасьев, А. А. Стогний.

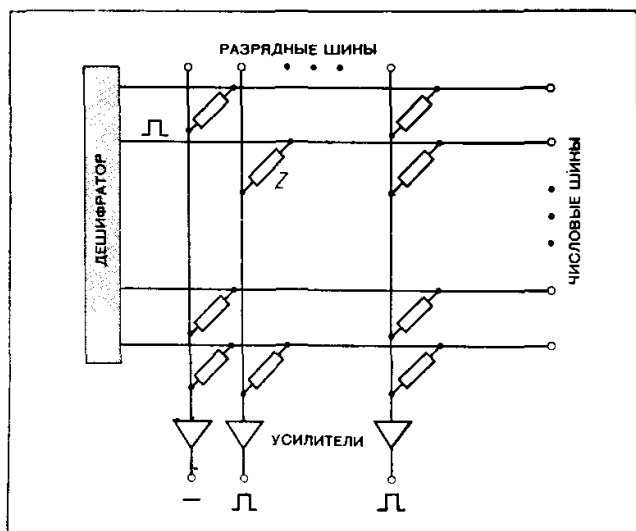
**ДОЛГОВРЕМЕННОЕ ЗАПОМИНАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО (ДЗУ)**, постоянное ЗУ, пассивное ЗУ — запоминающее устройство, в котором отсутствуют средства записи, позволяющие изменять информацию с помощью команд в процессе работы цифровой вычислительной машины, и предназначенное для длительного хранения и выдачи информации в другие устройства. Обычно в ДЗУ хранятся часто встречающиеся в вычислениях константы, подпрограммы, табличные данные, тестовые программы, программы специализированных ЦВМ и др., т. е. информация, не требующая чрезмерно частых изменений. В общем случае ДЗУ представляет собой преобразователь кодов с постоянным соотношением между

с линейными элементами имеет *накопитель* матричной формы (рис.). Сигнал выборки определенной числовой шины поступает в разрядную лишь в том случае, если имеется элемент связи в соответствующем пересечении. Обычно применяются резистивные, конденсаторные или индуктивные матрицы. Резистивные и конденсаторные матрицы изготавливаются напылением или печатью на бумажных или пластмассовых картах элементов связи и проводников. Нанесение информации осуществляют последующей перфорацией (разрушением соответствующих связей) или использованием масок в процессе изготовления. Трудности построения ДЗУ большой емкости, связанные со значительным потреблением энергии при макс. частоте обращения, с большими разбросами величин сопротивлений или емкости конденсаторов, ухудшающими соотношение сигнал/помеха, снижают интерес к таким ДЗУ.

Большое распространение получили индуктивные матрицы с воздушной связью, с разомкнутым или замкнутым магнитопроводом. В первом случае числовые и разрядные шины прокладываются способом печати с двух сторон тонкой изоляционной пластины или на двух пластинах, между которыми вставляется экранирующая карта либо карта, увеличивающая индуктивную связь за счет вихревых токов, с перфорацией в местах, определенных кодом хранимой информации. В случае применения разомкнутого магнитопровода для усиления индуктивной связи между числовыми и разрядными шинами вставляют ферритовый стержень. Широко известны трансформаторные ДЗУ, использующие индуктивные матрицы с замкнутым магнитопроводом. При этом числовые шины пронизывают сердечники с выходной обмоткой тех разрядов, в которых по данному адресу следует записать код «1».

ДЗУ с нелинейными элементами имеют важные преимущества, заключающиеся в ограничении паразитных связей, улучшении отношения сигнал/помеха и смягчении требований к цепям выборки числа. В этих ДЗУ используются диодные матрицы или магнитные элементы с прямоугольной петлей гистерезиса. Среди магнитных элементов наибольшее распространение при построении ДЗУ получили замкнутые ферритовые сердечники различной конфигурации, *твисторы* с постоянными магнитами и плоские магнитные пленки.

В оптических ДЗУ информация хранится в виде узора, состоящего из непрозрачных и прозрачных участков на плоской поверхности типа карты, пластинки или диска. Считывание информации осуществляется световым лучом, проходящим через носитель. Поиск информации осуществляется перемещением луча, перемещением носителя или одновременно перемещением луча и носителя относительно друг друга. Возможность построения ДЗУ более быстродействующих, надежных и с меньшими затратами, чем оперативные ЗУ (в силу ограничения функций ДЗУ в процессе работы лишь ф-цией выдачи информации) и наличие больших массивов информации,



Накопитель долговременного запоминающего устройства с линейными элементами.

входными кодами (адресами слов) и выходными кодами (словами). В зависимости от типа запоминающего элемента, применяемого в устройстве, различают ДЗУ с линейными или нелинейными элементами и оптические. ДЗУ

остающихся неизменными в течение длительного времени эксплуатации машины (константы, стандартные и тестовые программы и т. д.), делают применение ДЗУ перспективным для частичной замены ОЗУ не только в специализированных, но и в универсальных ЦВМ.

Ф. Н. Зыков.

### ДОМИНИРОВАНИЕ в теории игр.

1) В игре антагонистической с выигрыша функцией  $H(a, b)$  стратегия  $a_1$  первого игрока доминирует его стратегию  $a_2$ , если при любой стратегии  $b$  второго игрока  $H(a_1, b) \geq H(a_2, b)$ . Симметрично определяется Д. стратегий второго игрока. 2) В игре кооперативной дележ  $x$  доминирует дележ  $y$ , если найдется такая коалиция  $k$ , которая может обеспечить своим членам выигрыши, являющиеся соотв. компонентами вектора  $x$  (точный смысл этого обеспечения определяется *характеристической функцией* игры), и каждый член коалиции  $k$  в условиях дележа  $x$  получает больше, чем в условиях дележа  $y$ .

Н. Н. Воробьев.

**ДОПУСТИМАЯ ОБЛАСТЬ** — то же, что и *допустимое множество*.

**ДОПУСТИМАЯ ТОЧКА** — то же, что и *допустимый вектор*.

**ДОПУСТИМОЕ МНОЖЕСТВО** — множество *допустимых векторов* в задачах программирования математического. Д. м. может быть ограниченным либо неограниченным, открытым либо замкнутым, выпуклым либо невыпуклым. От перечисленных свойств Д. м. зависит существование, единственность и характеристические свойства *экстремума*.

**ДОПУСТИМОЕ УПРАВЛЕНИЕ** — значение *управляющего воздействия* или управляющего параметра, находящееся в пределах некоторых ограничений, обусловленных конкретными особенностями управляемого объекта. Физ. смысл или происхождение этих ограничений может быть разнообразным (конструктивные ограничения, эксплуатационные). Напр., одним из параметров управления движением автомобиля, является угол поворота руля. Конструктивные особенности автомобиля таковы, что этот параметр подчинен ограничениям вида  $\alpha \leq u \leq \beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  характеризуют два крайних положения руля. Эксплуатационными ограничениями для автомобиля является, напр., т-ра воды или масла в двигателе, которая не должна подниматься выше определенного уровня.

В случае управляемого объекта, содержащего несколько управляющих параметров  $u_1, \dots, u_r$ , полагают, что конструкцией объекта и условиями эксплуатации в пространстве переменных  $u_1, \dots, u_r$  задано некоторое множество  $U$ . Управляющие параметры в каждый момент времени должны принимать только такие значения, чтобы точка  $u = (u_1, \dots, u_r)$  принадлежала множеству  $U$ . Мн-во  $U$  называют *областью управления*. В простейшем случае управляющие параметры могут независимо один от другого меняться в некоторых пределах:  $\alpha_i \leq u_i \leq \beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . При этом эти неравенства определяют область

управления в виде  $r$ -мерного параллелепипеда. В общем случае в силу конструкции объекта между управляющими параметрами  $u_1, \dots, u_r$  могут существовать связи, выражаемые, напр., уравнениями вида  $\varphi_p(u_1, \dots, u_r) = 0$  ( $p = 1, \dots, m$ ;  $p < r$ ), или неравенствами  $\Psi_q(u_1, \dots, u_r) \leq 0$  ( $q = 1, \dots, k$ ). При этом область управления может иметь геометрически более сложный характер. Так, напр., если параметры  $u_1$  и  $u_2$  связаны соотношением  $(u_1)^2 + (u_2)^2 - 1 \leq 0$ , то область управления представляет собой круг.

Для приложений особенно важен случай замкнутой области управления, т. е. случай, когда точка  $u$  может находиться внутри множества  $U$  или на его границе. При определении Д. у. учитывают также характер изменения управления во времени  $u(t)$ . При этом рассматривают управления как в виде непрерывных, так и кусочно-непрерывных функций времени. Предположение о кусочно-непрерывных управлениях обусловлено тем, что оптимальные управления во многих случаях оказываются разрывными. Это требует скачкообразного, мгновенного изменения управляющих параметров, что, как правило, не противоречит физ. свойствам управляемого объекта. Для матем. описания объекта управления необходимо задать не только его матем. модель, но и Д. у. См. также *Оптимального управления теория*. Лит.: Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М., 1969.

В. И. Иваненко.

**ДОПУСТИМЫЙ ВЕКТОР** — вектор, удовлетворяющий всем ограничениям в задачах математического программирования. Итерационные процессы, как правило, начинаются с некоторого Д. в. Для отыскания Д. в. часто применяются общие *оптимизации методы*. Так, исходный *опорный план* в задаче математ. программирования *линейного* может быть найден *симплекс-методом*, примененным к некоторой новой задаче, эквивалентной исходной. При этом Д. в. новой задачи очевиден. Поиск Д. в. обычно может быть сведен к некоторой задаче *программирования математического*, для которой в качестве Д. в. выбирается произвольный вектор в пространстве переменных исходной задачи.

Для отыскания Д. в. множества  $\Omega = \{x : f_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m\}$  достаточно в задаче отыскания  $\min \{\xi : f_j(x) \leq \xi (j = 1, \dots, m)\}$  проделать некоторое количество шагов, отправляясь от вектора  $(x^0; \xi^0) = (x^0; \max_{1 \leq j \leq m} f_j(x^0))$ ,

где  $x^0$  — произвольно. Приближение  $x^h$ , соответствующее значению  $\xi_h \leq 0$ , является Д. в. множества  $\Omega$ .

Методы матем. программирования, основанные на теории двойственности, позволяют строить последовательность приближений, сходящуюся к оптим. вектору извне *допустимого множества*. Р. А. Поляк, М. Е. Примаков.

**ДОПУСТИМЫЙ ПУТЬ** в теории графов — путь, вдоль которого должны удовлетворяться заданные ограничения. Пусть дан

граф  $(I, U)$ , где  $I$  — множество вершин его, а  $U$  — множество его дуг. В множестве  $I$  выделено некоторое фиксированное подмножество  $A$ . Каждой вершине  $i$  ( $i \in I$ ) графа поставлены в соответствие множество  $\Phi_i$  некоторого пространства  $R$  и  $\phi$ -ция  $f_i(\mu_i)$ , принимающая значения из пространства  $R$  и определенная на множестве путей  $\mu_i$ , выходящих из  $A$  и заходящих в  $i$ .

Путь  $\mu_{i_m} = (i_0, i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_m) = (\mu_{i_k}, i_{k+1}, \dots, i_m)$ ,  $i_0 \in A$  наз. допустимым, если  $f_{i_k}(\mu_{i_k}) \in \Phi_{i_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Пусть в множестве  $I$ , кроме подмножества  $A$ , выделено также подмножество  $B$ . Каждому Д. п.  $\mu$  из  $A$  в  $B$  поставлено в соответствие число  $l(\mu)$ , называемое длиной этого пути. Кратчайшим Д. п. наз. Д. п.  $\mu_{i_m} = (i_0, i_1, \dots, i_m)$ , имеющий минимальную длину и для которого

$$f_{i_m}(\mu_{i_m}) \in \Phi_{i_m}^*, \quad \Phi_{i_m}^* \subseteq \Phi_{i_m}.$$

Многие экстремальные задачи на графах, задачи теории расписаний и дискретного программирования сводятся к отысканию кратчайшего Д. п.

И. М. Мельник.

**ДОПУСТИМЫХ НАПРАВЛЕНИЙ МЕТОД** — один из оптимизации методов.

**ДОСТАТОЧНОСТЬ ПРИЗНАКОВ.** В распознавании образов набор признаков  $x = f(z)$  наз. достаточным по отношению к набору некоторых исходных признаков  $z$ , если  $x$  позволяют получить при любой функции потерь, связанных с ошибочным распознаванием, то же значение риска распознавания, что и признаки  $z$ . Это выполняется тогда и только тогда, когда апостериорные распределения классов при преобразовании признаков  $x = f(z)$  остаются неизменными, т. е.  $P(k/f(z)) = P(k/z)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , где  $k$  — порядковый номер класса,  $n$  — число классов. Термин Д. п. заимствован из матем. статистики, где используется аналогичное понятие достаточной статистики. Д. п.  $x$  означает, в частности, что, пользуясь признаками  $x$ , можно обеспечить ту же минимальную вероятность ошибки распознавания, что и при использовании признаков  $z$ . Достаточными признаками, напр., является набор апостериорных вероятностей  $P(k/z)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Обычно признаки  $x = f(z)$  являются более простыми, чем исходные признаки  $z$ . Поэтому весьма важно найти для данных исходных признаков более простые достаточные признаки  $x$  и тем самым упростить (удешевить) распознающую систему.

При создании распознающего устройства конструктор исследует, являются ли выбранные признаки достаточными по отношению к исходным. Напр., при распознавании изображений непрерывная функция яркости двух переменных преобразуется в набор дискретных величин путем разложения поля изображения на элементы (клеточки) и дискретного измерения средней яркости каждого из них. Требуется выбрать размеры клеточек и число уровней квантования так, чтобы дискретное описание

было минимальным по объему информации и в то же время достаточным. Для выбора достаточных признаков необходимо знать распределения  $P(k/z)$  и  $P(k/x)$ . Они, как правило, неизвестны. Поэтому на практике выбор достаточных признаков осуществляется экспериментально или на основе интуиции. Чаще всего ограничиваются тем, что для различных наборов признаков  $x$  определяют минимальную вероятность ошибки распознавания и выбирают тот набор, который обеспечивает ту же ошибку распознавания, что и исходные признаки.

Т. К. Винцук.

**ДОСТАТОЧНЫЕ СТАТИСТИКИ** — см. Статистические оценки.

**ДОСТУП ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ** — способ организации обращения к памяти ЦВМ, при котором затрачиваемое время на обращение зависит от расположения информации, выбранной или размещенной ранее.

**ДОСТУП ПРОИЗВОЛЬНЫЙ** — способ организации обращения к памяти ЦВМ, при котором затрачиваемое время на обращение не зависит от расположения информации, выбранной или размещенной ранее.

**ДРЕЙФ НУЛЕВОГО УРОВНЯ** операционного усилителя — изменение во времени величины выходного напряжения, определяемое при отсутствии полезного входного сигнала. Д. н. у. является случайным процессом и поэтому наиболее точно может быть охарактеризован вероятностными или статистическими показателями: макс. значением и наиболее вероятным временем его достижения. Путем деления величины Д. н. у. на коэфф. передачи операционного усилителя (ОУ) определяется приведенный ко входу Д. н. у. Его можно представить как ложный случайный входной сигнал, налагаемый на полезный входной сигнал и вызывающий одну из составляющих погрешности выходного сигнала. В процессе проектирования и эксплуатации ОУ величину приведенного Д. н. у. стремятся свести к минимуму. Д. н. у. вызывается флуктуациями физ. процессов. Так, в ОУ с резистивными связями (без промежуточных преобразователей формы сигнала) осн. причинами Д. н. у. являются: нестабильность напряжений источников питания, нестабильность контактных напряжений между электродами ламп, изменение эмиссии катода и сопротивление в анодных цепях, нестабильность сеточного тока, температурная зависимость параметров транзисторов, недостаточная изоляция входной цепи от цепей с высоким напряжением, неодинаковость параметров и старение ламп и транзисторов.

Существуют следующие методы уменьшения величины приведенного Д. н. у.: стабилизация напряжений источников питания; построение входных каскадов ОУ по мостовым и балансным схемам; применение ламп с малым сеточным током, «изоляция земель» входных цепей ОУ. Эти способы позволяют на порядок снизить величину приведенного Д. н. у. Использование дополнительного канала усиления в ОУ с модуляцией и демодуляцией сигнала



(МДМ-усилители) позволяет снизить приведенный Д. н. у. до 25—50 мкв/ч; схемы ОУ с параллельными каналами дают снижение до 10—15 мкв/ч. В усилителях, выполненных по простым схемам, без специальных мер уменьшения Д. н. у. и при существенной величине последнего, применяются элементы регулировки уровня выходного напряжения или т. н. «настройка нуля», осуществляемая периодически в процессе эксплуатации аналогового решающего устройства. Приведенная величина Д. н. у. для некоторых аналоговых вычисл. машин следующая: «МПТ-9-3» — 600 мкв/8 ч; «ЛМУ-1» — 3 мв/10 мин; «МН-7» — 5 мв/10 мин; «МН-10 М» — 2 мв/8 ч; «ЭМУ-10» — 30 мкв/8 ч.

А. Ф. Верлань.

**ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ЗАДАЧА** — задача минимизации (максимизации) дробно-линейной функции

$$R(x) = \frac{L_1(x)}{L_2(x)} = \frac{d_1 + (c_1, x)}{d_2 + (c_2, x)} \quad (1)$$

при линейных ограничениях

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

где  $A$  — матрица  $m \times n$ ,  $c_1$  и  $c_2$  —  $n$ -мерные векторы,  $b$  —  $m$ -мерный вектор,  $d_1, d_2$  — вещественные числа,  $x \geq 0$  означает неотрицательность всех компонент вектора  $x$ .

Один из возможных подходов к исследованию Д.-л. п. з. состоит в следующем: пусть  $X$  — множество, определяемое ограничениями (2). Д.-л. п. з. назовем допустимой, если  $X$  не пусто и  $L_2(x)$  отлично от нуля хотя бы в одной точке этого множества. При решении задачи минимизации рассматриваются две вспомогательные задачи программирования линейного:

$$\begin{aligned} 1. \min \{d_1 z_0 + (c_1, z)\} & \begin{cases} Az = bz_0; \\ d_2 z_0 + (c_2, z) = 1; \\ z_0 \geq 0; \quad z \geq 0; \end{cases} \\ 2. \min \{-d_1 z_0 - (c_1, z)\} & \begin{cases} Az = bz_0; \\ d_2 z_0 + (c_2, z) = -1; \\ z_0 > 0. \quad z \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Доказано, что для того, чтобы Д.-л. п. з. была допустимой, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере у одной из задач — у 1-й или у 2-й — существовал допустимый план с  $z_0 > 0$ ; при этом, если допустимый план у задачи 1-й или 2-й существует, то у соответствующей задачи существует и допустимый план с  $z_0 > 0$ ; если Д.-л. п. з. допустима, а множество допустимых планов одной из задач — 1-й или 2-й — пусто, то  $\inf_X \frac{L_1(x)}{L_2(x)}$  совпадает с оптим. значением целевой ф-ции другой задачи. Если Д.-л. п. з. допустима, а задачи 1-я и 2-я имеют допустимые планы, то  $\inf_X \frac{L_1(x)}{L_2(x)}$  совпадает с минимумом среди оптим. значений целевых ф-ций обеих задач — и 1-й и 2-й. Эти утверждения сводят Д.-л. п. з. к решению двух задач линейного программирования. Переход от переменных  $z_0, z$  к переменным  $x$  осуществ-

ляется по ф-лам

$$z_0 = \frac{-1}{|L_2(x)|}; \quad z = \frac{x}{|L_2(x)|}.$$

Д.-л. п. з. часто возникают в эконом. приложениях, когда в качестве целевой ф-ции принимается «относительная эффективность» (напр., прибыль, отнесенная к единице затрат).

Н. З. Шор.

**ДРОБНЫХ ШАГОВ МЕТОД** — один из экономичных методов решения задач математической физики. При увеличении размерности задачи  $k$ -во операций для получения числ. решения растет вследствие как роста  $k$ -ва точек, так и логич. трудностей составления программы расчета. Для системы дифф. ур-ний

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad (1)$$

где  $L = L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$  — дифф. оператор,  $u = u(x, t)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , схемы простой аппроксимации (см. *Конечноразностные методы*)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_0 u^n, \quad \Lambda_1 + \Lambda_0 \sim L$$

становятся неэффективными в случае многомерных задач. Для нахождения  $u^{n+1}$  необходимо обращение оператора  $E = \tau \Lambda_1$ , что требует  $\text{const } N^{\alpha(m)}$  операций, где  $N$  —  $k$ -во точек на одно измерение,  $m$  —  $k$ -во пространственных измерений, а  $\alpha(m)$  сильно растет с увеличением  $m$ . Так, напр., для ур-ния теплопроводности  $\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 3$ .

Для получения экономичных устойчивых разностных схем предложены методы, основанные на следующих идеях: а) расщепления разностных схем, б) прил. факторизации, в) расщепления (слабой аппроксимации) дифф. ур-ний.

В случае ур-ния (1) соответствующие разностные схемы выглядят следующим образом (для простоты взяты 2 дробных шага):

а) схема расщепления:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_{11} u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{01} u^n, \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \Lambda_{12} u^{n+1} + \Lambda_{02} u^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Lambda_{11} + \Lambda_{12} = \Lambda_1, \quad \Lambda_{01} + \Lambda_{02} = \Lambda_0;$$

б) схема приближенной факторизации:

$$\begin{aligned} (E - \tau \Lambda_{11})(E - \tau \Lambda_{12}) u^{n+1} &= (E + \tau \Omega) u^n, \\ \Lambda_{11} + \Lambda_{12} &= \Lambda_1, \quad \Omega \sim \Lambda_0; \end{aligned} \quad (3)$$

в) схема слабой аппроксимации:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2) u = \tilde{L} u, \quad L = L_1 + L_2,$$



$$\begin{aligned} \alpha_1(t, \tau) &= 2, \quad \alpha_2(t, \tau) = 0 \\ \text{при } t \in \left[ n\tau, \left( n + \frac{1}{2} \right) \tau \right), \\ \alpha_1(t, \tau) &= 0, \quad \alpha_2(t, \tau) = 2 \\ \text{при } t \in \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \tau, (n+1)\tau \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В случае коммутативных операторов схемы (2) и (3) эквивалентны при условии, что  $\Omega = \Lambda_{01} + \Lambda_{02} + \tau\Lambda_{01}\Lambda_{02}$ . И в том и другом случаях обращение оператора  $E - \tau\Lambda_1$  заменяется обращением оператора  $(E - \tau\Lambda_{11})(E - \tau\Lambda_{12})$ , т. е. последовательным обращением операторов  $E - \tau\Lambda_{11}$ ,  $E - \tau\Lambda_{12}$ , вообще говоря, более простой структуры. При условии  $\Lambda_{11} + \Lambda_{12} \sim \Lambda_1$  имеет место соотношение прилб. факторизации

$$E - \tau\Lambda_1 \sim (E - \tau\Lambda_{11})(E - \tau\Lambda_{12}).$$

Трактовка метода в) позволяет рассматривать схему расщепления

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}}, \quad \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \\ &= \Lambda_2 u^{n+1} \end{aligned}$$

как простую аппроксимацию ур-ния (4), слабо аппроксимирующего ур-ние (1):

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\alpha_1\Lambda_1 + \alpha_2\Lambda_2) u^{n+1}.$$

Т. о., в основе метода расщепления лежит представление сложных операторов через простейшие, так что интегрирование исходного ур-ния сводится к интегрированию ур-ний более простой структуры. При этом схемы дробных шагов обязаны удовлетворять условиям аппроксимации и устойчивости только в окончательном итоге (при записи их в «целых» шагах).

Методом расщепления решаются многие сложные задачи матем. физики. К одной из модификаций метода расщепления принадлежит метод «частиц в ячейках», широко используемый при решении задач матем. физики, в котором расщепление не связано с понижением размерности операторов.

Существует связь между схемами расщепления и теорией *полурупп*, а именно: декомпозиция инфинитезимальных операторов полу группы имеет прямое отношение к схемам расщепления. Однако метод расщепления более содержателен не только практически (т. к. он обеспечивает построение экономичных разностных схем), но и теоретически, поскольку декомпозиция операторов в методе расщепления происходит при значительно более слабых предположениях.

Большое развитие получили схемы расщепления повышенного порядка точности, и достигнут определенный прогресс в их эффективной реализации.

Лит.: Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967 [библиогр. с. 189—193]; Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971 [библиогр. с. 538—550]. Н. Н. Яненко.

**ДУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ** — управление, в котором управляющие воздействия имеют двойственный характер; они служат для изучения управляемого объекта (УО) и для приведения его к требуемому состоянию. Д. у. применяют в *системе автоматического управления* (САУ) в том случае, когда априорная информация в управляющем устройстве (УУ) об УО не является достаточной и изучение поведения УО может дать дополнительные сведения о его свойствах. При этом УУ решает две задачи: на основании поступающей информации выясняет свойства и состояние УО и на основании данных об УО определяет, какие действия необходимы для управления. В общем случае в САУ процессы изучения УО и управления им связаны и образуют сложный двойственный или дуальный процесс, развитие которого определяет качество работы системы.

Задача синтеза оптим. алгоритма управления в теории Д. у. для частного случая сводится к следующему. Предположим, что известна *модель математическая* УО, имеющая в дискретном времени вид

$$x_k = f(u_k, z_k), \quad (1)$$

где  $x_k$  — регулируемая величина,  $f(\cdot)$  — оператор УО — конечная и однозначная функция,

$u_k$  — управляющее воздействие, а  $k = \frac{t}{\Delta t}$ .

$\Delta t$  — интервал *квантования* времени  $t$ . *Возмущающее воздействие*  $z_k$ , которое не может быть измерено УУ, будем считать неизвестным постоянным во времени параметром  $z$  с заданной априорной плотностью *распределения вероятностей*  $p_0(z)$ . В  $k$ -й момент времени в УУ известно желаемое значение регулируемой величины  $x_k^*$ . Дополнительная информация о величине  $z$  содержится в векторе наблюдений  $(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_0) = y_{k-1}$  величины  $x$  в предшествующие моменты времени и в векторе управлений  $(u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_0) = u_{k-1}$ , которые могут храниться в памяти УУ и представляют собой наблюдаемую предысторию управляемого процесса. Для практики значительный интерес представляет случай, когда  $y_i = x_i + h_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ , где  $h_i$  — случайная погрешность измерения величины  $x_i$  с известной плотностью распределения вероятностей  $p(h_i)$ .

Отклонение регулируемой величины  $x_k$  от ее желаемого значения  $x_k^*$  приводит к потерям в системе, которые можно оценить *удельной функцией потерь*  $W_k = W(x_k, x_k^*)$ . Система функционирует в течение заданного времени  $n$  и *общая функция потерь* имеет вид

$$W = \sum_{k=0}^n W(x_k, x_k^*).$$

Назовем оптимальной систему, для которой полный риск  $R$  — математическое ожидание ф-ции потерь

$$R = M\{W\} = \sum_{k=0}^n M\{W_k\} = \sum_{k=0}^n R_k \quad (2)$$

минимален. Здесь  $R_k$  — удельный риск, который определяют как

$$R_k = \int_{\omega(y_{k-1}, u_{k-1})} r_k \cdot p(y_{k-1}, u_{k-1}) d\omega. \quad (3)$$

Функционал  $r_k$  в (3), называемый условным удельным риском, представляет собой матем. ожидание удельных потерь  $W_k$  при фиксированных значениях векторов  $y_{k-1}$  и  $u_{k-1}$ . Он определяется в виде

$$r_k = \int_{\omega(z, u_k)} W[x_k(u_k, z), x_k^*] \times \\ \times p(z/y_{k-1}, u_{k-1}) \Gamma_k d\omega, \quad (4)$$

где  $\Gamma_k = p(u_k/y_{k-1}, u_{k-1})$  — условная плотность распределения  $u_k$ , называемая удельной стратегией управления. В (3) и (4) символом  $\omega(\cdot)$  обозначена область интегрирования. Выражение  $p(z/y_{k-1}, u_{k-1})$  представляет собой апостериорную плотность распределения неизвестного параметра  $z$  и при заданных априорных плотностях  $p_0(z)$  и  $p(h_i)$  находится по формуле Байеса

$$p(z/y_{k-1}, u_{k-1}) = \frac{p_0(z) \prod_{i=0}^{k-1} p(y_i/z, u_i) \prod_{i=0}^{k-1} \Gamma_i}{p(y_{k-1}, u_{k-1})}. \quad (5)$$

Условная плотность распределения  $p(y_i/z, u_i)$  определяется с учетом (1) по известной плотности распределения  $p(h_i)$ . Последовательность ф-ций  $\delta = \{\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$  принято называть стратегией управления. Зависимость риска  $R$  от стратегии  $\delta$  обозначают  $R^\delta$ . Стратегия, минимизирующая риск  $R$ , наз. оптимальной. Эта стратегия ищется в классе допустимых стратегий  $\Delta$ . Из (3) — (5) следует, что каждое слагаемое  $R_k$  в (2) зависит от выбора последовательности  $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ . При этом выбор удельной стратегии  $\Gamma_k$  влияет не только на риск  $R_k$  в  $k$ -й момент времени, но и на значения всех будущих удельных рисков  $R_{k+1}, \dots, R_n$ . Это влияние проявляется, как следует из (5), через апостериорную плотность распределения неизвестного параметра и составляет сущность дуальности управления: выбор управления определяет не только поведение величины  $x$ , но и темп накопления информации о возмущении  $z$ .

В 1961 в работах сов. ученого А. А. Фельдбаума (1913—69), положивших начало теории Д. у., дано обобщение приведенной постановки задачи на марковские УО, когда возмущение  $z$  представляет собой случайный марковский процесс, и на многомерные УО с учетом их динамики. Для практики важное значение имеет случай, когда ненаблюдаемое возмущение  $z$  представляет собой стационарный случайный процесс. При этом разумная идеализация задачи состоит в предположении, что время функционирования системы  $n \rightarrow \infty$ . Для оценки качества такой системы вместо (2) следует использовать функционал средних ожидаемых потерь в единицу времени

$$R^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n R_k. \quad (6)$$

Функционал (6) записан в предположении существования предела.

Строгая матем. постановка задачи Д. у. осуществляется методами управления случайными процессами теории по неполным данным. В общем случае для отыскания оптим. стратегии Д. у. используются методы программирования динамического. Для функционала (2) удельные стратегии находят последовательно, начиная с конечного момента  $n$ . Поскольку рассматривается задача Байеса (см. Байесовский метод), то стратегия оптимальная в любой момент времени  $n - s$  ( $s = 0, 1, \dots, n$ ) оказывается детерминированной и при фиксированной наблюдаемой предыстории  $(u_{n-s-1}, y_{n-s-1})$  имеет вид

$$u_{n-s}^* = u_{n-s}^*(u_{n-s-1}, y_{n-s-1}). \quad (7)$$

Эта стратегия определяется из минимизации ф-ции

$$\gamma_{n-s} = \alpha_{n-s} + \int_{\omega(y_{n-s})} \gamma_{n-s+1}(u_{n-s+1}^*, u_{n-s}, y_{n-s}) d\omega. \quad (8)$$

где

$$\alpha_{n-s} = \alpha_{n-s}(u_{n-s}, y_{n-s-1}) = \\ = \int_{\omega(z)} W_{n-s} p_0(z) \left[ \prod_{i=0}^{n-s-1} p(y_i/z, u_i) \right] d\omega. \quad (9)$$

Для больших  $n$  и особенно в случае функционала (6) серьезные трудности в решении задачи Д. у. связаны с ростом размерности векторов  $u_{n-s-1}$  и  $y_{n-s-1}$  в (7). Здесь существенную помощь оказывает введение т. н. марковских достаточных статистик не возрастающей размерности. Определим в пространстве векторов  $u_{n-s-1}, y_{n-s-1}$  ф-цию  $\sigma_{n-s-1}$ . Обозначим  $\Delta^\sigma$  подкласс класса допустимых стратегий  $\Delta$ , зависящих от  $u_{n-s-1}, y_{n-s-1}$  только через

$\sigma_{n-s-1}$ . Ф-ция  $\sigma_{n-s-1}$ ,  $s = 0, 1, \dots, n$  наз. достаточной статистикой, если

$$\min_{\delta \in \Delta} R^\delta = \min_{\delta \in \Delta^\sigma} R^\delta. \quad (10)$$

При этом выражение (7) может быть записано в виде

$$u_{n-s}^* = u_{n-s}^*(\sigma_{n-s-1}). \quad (11)$$

Статистика  $\sigma_{n-s-1}$ ,  $s = 0, 1, \dots, n$  наз. марковской достаточной статистикой, если выполнено равенство (10), и статистика  $\sigma_{n-s}$  может быть вычислена по  $\sigma_{n-s-1}$  и  $u_{n-s}$ ,  $y_{n-s}$ . В рассмотренном выше примере этому удовлетворяет апостериорная плотность распределения  $z$ , которую можно записать в виде рекуррентного соотношения, эквивалентного (5).

Значительный интерес представляет случай, когда марковскую достаточную статистику можно задать конечномерным вектором параметров  $C = (C_1, C_2, \dots, C_m)$ . Однако строго такое представление возможно только в частных задачах. На практике с целью такой «параметризации» задачи используют приближенно достаточные статистики.

Когда возмущение  $z$  представляет собой марковский процесс, введение марковских достаточных статистик позволяет свести задачу Д. у. к исследованию некоторого управляемого марковского процесса. Оптим. стратегия Д. у. в этом случае оказывается стационарной или регулярной, т. е.  $u_{n-s}^* = u^*(\sigma_{n-s-1})$ . Для отыскания такой стратегии применяют итерационные методы поиска в пространстве стратегий. Рассмотренные выше общие методы решения задачи Д. у. связаны со значительными вычислительными трудностями. Поэтому на практике часто ограничиваются отысканием субоптимальных стратегий Д. у., упрощая постановку задачи или сужая класс допустимых стратегий.

Простейшим методом синтеза субоптимального управления можно считать определение стратегии из минимизации удельных рисков  $R_k$  в (2). Так определенная стратегия является в общем случае весьма грубым приближением к оптим. стратегии Д. у.: она направлена в каждый момент времени только на приведение объекта к требуемому состоянию и не несет в себе спец. функций по изучению объекта. Однако, для некоторых объектов такая стратегия оказывается строго оптимальной. Ясно, что в случае безынерционного объекта это имеет место при условии, что темп накопления информации об объекте не зависит от выбора управляющих воздействий. Такого рода систе-

мы Д. у. принято называть нейтральными. С матем. точки зрения это соответствует случаю, когда

$$\min_{\delta} R^\delta = \sum_{k=1}^n \min_{\Gamma_k} R(\Gamma_k). \quad (12)$$

Существенное значение представляет определение условий, при которых имеет место (12), напр., условия приводимости систем управления замкнутых к разомкнутым.

Теорию Д. у. применяют в задачах самообучения, экстремального регулирования, построения оптим. самонастраивающихся моделей и т. д.

Лит.: Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., 1966 [библиогр. с. 594—618]; Живоглядов В. П. Автоматические системы с накоплением информации. Фрунзе, 1966 [библиогр. с. 154—160]; Ширяев А. Н. Некоторые новые результаты в теории управляемых случайных процессов. В кн.: Transactions of the fourth Prague conference on information theory, statistical decision functions, random processes. Prague, 1967. В. И. Иваненко, Д. В. Караченец.

**ДУГА** г р а ф а — направленное ребро, соединяющее две вершины графа.

**ДУЭЛЬ** в т е о р и и и г р — игра антагонистическая, в которой игроки, располагающие ограниченными расходуемыми ресурсами («боеприпасами»), выбирают моменты выстрелов или плотности стрельбы на некотором временном промежутке. Эти выборы являются стратегиями игроков. *Выигрышная функция* определяется как математическое ожидание некоторой случайной величины, соответствующей возможным исходам Д. В зависимости от информации о действиях противника различаются Д. шумные, бесшумные и смешанные. Теория Д. имеет как военные, так и эконом. приложения (конкурентная борьба за рынки, рекламная кампания и т. п.). Пример смешанной Д. Каждый из дуэлянтов располагает одним выстрелом. У 1-го игрока — бесшумное оружие (если 1-й игрок выстрелил, но не попал, то 2-й игрок не знает о произведенном выстреле), а у 2-го игрока — шумное (факт выстрела становится немедленно известным противнику). Если 1-й игрок поражает 2-го игрока, то его выигрыш равен 1, если 2-й игрок поражает 1-го игрока, то 1-й игрок получает — 1, в остальных случаях выигрыш 1-го игрока равен 0. Стратегия оптимальная 1-го игрока описывается плотностью распределения на некотором интервале  $[a, 1]$ , 2-го игрока — плотностью на том же интервале и скачком на правом конце интервала (2-му игроку рекомендуется сохранять угрозу выстрела до самого конца).

Лит.: Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Пер. с англ. М., 1964 [библиогр. с. 798—819].

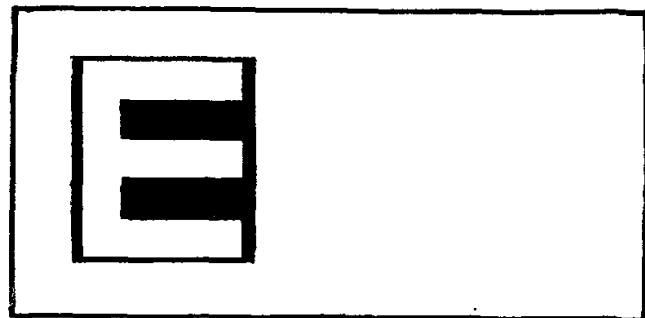
А. С. Михайлова.

## ЕДИНАЯ СИСТЕМА ЭЛЕКТРОННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН (ЕС ЭВМ) —

семейство цифровых вычислительных машин, обладающих широким диапазоном производительности и характеризующихся программной совместимостью машин семейства снизу вверх (т. е. программы, составленные для машин с меньшей производительностью, могут выполняться на машинах с большей производительностью). По конструктивно-технологическому исполнению, логической структуре, номенклатуре устройств ввода — вывода и уровню программного обеспечения ЕС ЭВМ относится к 3-му поколению вычисл. машин. ЕС ЭВМ создал коллектив специалистов н.-и. учреждений и предприятий стран-участниц СЭВ — Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, СССР и Чехословакии. Промышленный выпуск первых машин «ЕС-1020» и «ЕС-1030» начат в 1972 (рис.).

Ядром Единой системы являются 7 процессоров, охватывающих диапазон скоростей вычислений от нескольких тысяч до 2 млн. операций в 1 сек. В процессоре реализуются операции с фиксированной и плавающей запятыми и операции над десятичными числами. Для данных и инструкций принято несколько форматов, в основе которых лежит байт и слово из 4 байт. Операции можно производить над половинными, целыми и двойными словами, а также над полями переменной длины. Система адресации в ЕС ЭВМ обеспечивает формирование прямого адреса для обращения к оперативному запоминающему устройству (ОЗУ) емкостью до 16 Мбайт. Из памяти данные также можно выбирать разными форматами: полусловом, словом, двойным словом и полем переменной длины в пределах  $1 \div 256$  байт. Для удобства составления программ с изменением адреса по двум параметрам предусмотрены инструкции с двойной модификацией адреса. Память всех машин имеет защиту памяти по записи и считыванию, организованную путем проверки принадлежности каждого из блоков по 2048 байт к одному из 16 возможных ключей защиты, которые можно менять с помощью программы.

В процессорах развита система прерываний, которая обеспечивает связь между аппаратными средствами и управляющей программой, быстрый переход от одной программы к другой и эффективную совмещенную работу внешних устройств. Имеется ряд особенностей в структуре процессора, позволяющих строить многомашинные комплексы, взаимодействовать с внешними объектами и работать в реальном масштабе времени. Единообразие структуры (архитектуры) ЕС ЭВМ, в частности состава инструкций (команд) и системы кодирования данных, обеспечивает программную совместимость, что позволяет разрабатывать программы не зависящими от конкретной модели и, следовательно, иметь общую (для большинства машин) операционную систему и прикладные программы. Внутренняя логическая структура и техническая реализация машин семейства различна, а это и приводит к различию в



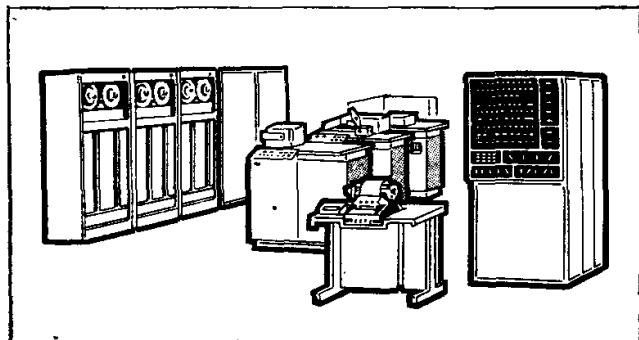
производительности и стоимости. В машинах малой производительности функции нескольких блоков внешней структуры, как правило, реализуются одним аппаратным блоком. Напр., формирование адреса выполняется в блоке операций с фиксированной запятой, функции блоков для операций с фиксированной и плавающей запятыми и для операций над полями переменной длины объединяются в одном аппаратном блоке.

В ЕС ЭВМ используется также и параллельно-последовательный принцип выполнения операций, напр., однокбайтовая обработка данных при двухбайтовой выборке ее из ОЗУ в машине «ЕС-1020». Во всех случаях, когда это допускают требования скорости, используется микропрограммное управление. При побайтовом выполнении простых микроопераций, набор которых невелик, процессор упрощается, одновременно обеспечивается полная программная совместимость благодаря микропрограммной интерпретации полного набора операций, определяемых составом инструкций. Микропрограммы постоянно записаны в спец. быстродействующем ЗУ, допускающем только считывание данных. В наименьшей по производительности модели «ЕС-1010» применена программная интерпретация сложных операций.

Обмен данными между процессором и внешними устройствами (ВУ) осуществляется через каналы и систему стандартного сопряжения с внеш. устройствами. Эта система включает логические и аппаратные средства, обеспечивающие стандартную систему связей с четко сформулированными функциями и сигналами с унифицированными электр. параметрами. После получения от процессора команды начала обмена каналы выполняют основной объем работ по управлению обменом между ВУ и процессором: прием команд процессора и адресацию ВУ, выбор, расшифровку и проверку управляющей информации, посылку управляющих и прием подтверждающих сигналов, обеспечение активных ВУ буферной памятью, проверку правильности передачи, управление запросами на прерывание и т. д. Существующие два типа каналов — селекторный (СК) и мультиплексный (МПК) отличаются по внутренней структуре, режимам работы и назначению (см. Устройство обмена ЦВМ). СК осуществляет обмен данными процессора поочередно только с одним из подключенных к нему ВУ, работающим с относительно высокой скоростью передачи данных (магн. ленты,

диски или барабаны), МПК обеспечивает одновременный обмен данными с несколькими ВУ (ориентировочно до 200), работающими с относительно малой или средней скоростью (напр., перфокартные, перфолентные и печатающие устр-ва).

Вычисл. машины Единой системы построены на унифицированной конструктивно-технологической базе с широким применением монолитных интегральных схем, которые размещаются на типовых элементах замены (ТЭЗах), представляющих собой печатные платы стан-



Цифровая вычислительная машина «ЕС-1020».

дартных размеров. Уровни унифицированной конструкции — панели, несущие до 40 ТЭЗов, рамы и, наконец, стойка с тремя рамами; в ре-

#### Технические характеристики ЕС ЭВМ

Модель	Параметры										
	Время выполнения основных операций, <i>мксек</i>				Особенности состава инструкций	Принцип управления	Емкость основного ОЗУ, <i>кбайт</i>	Каналы		Тип интегральных схем	
								мультиплексный	селекторные		
	короткие операции	сложение (вычитание) с плав. запятой	умножение	умножение для двойных слов					скорость передачи, <i>кбайт/сек</i>		количество
«ЕС-1010»	Программная и микропрограммная интерпретация операций других моделей.				Спец. состав простых команд	микропрограммное управление	8÷64	160	1	240	TTL
		2,1÷3,1	40								
«ЕС-1020»	20÷30	50÷70	320÷350	1200			64÷256	25	2	до 300	TTL
«ЕС-1030»	5÷11	10÷16	32÷38	60			256÷512	40	3		TTL
«ЕС-1040»	0,9÷1,8	2,5÷3,6	7,2÷8,2	12			256÷1024	50÷200	6		TTL
«ЕС-1050»	0,65	1,4	2	3,2			256÷1024	30÷180	6		ECL
«ЕС-1060»	0,5	0,5	1	1,5	1024÷8192	30÷180	6	ECL			
					полная программная совместимость	жесткое управление					

зультате стойка может нести около 50 тыс. интегральных схем, т. е. обеспечивается очень большая плотность конструкции.

В состав внешних устройств ЕС ЭВМ входит комплект накопителей на магн. лентах, дисках и барабанах, комплект перфокартного и перфолентного оборудования ввода—вывода, устройства почтронной печати, пишущие машинки.

экранные пульты и графопостроители разного типа. Предусмотрены и средства передачи данных с разной скоростью по телефонным и телеграфным линиям связи (см. *Устройства ввода — вывода данных ЦВМ*).

Операционные системы ЕС ЭВМ, обеспечивающие автоматизацию подготовки и выполнения программ, высокую производительность труда программистов, операторов и обслуживающего персонала, состоят из управляющих и обслуживающих программ, трансляторов с языков программирования и средств генерации системы для конкретного комплекта тех. средств, установленных у потребителя. Управляющие программы осуществляют первоначальную загрузку основного ОЗУ и управление процессом, включая обработку прерываний, распределение каналов, загрузку программ из библиотеки, параллельное выполнение программ и связь с оператором, а также представляют пользователю широкие возможности в управлении массивами данных. Обслуживающие программы осуществляют объединение отдельно транслируемых модулей в одну или несколько программ, составление перекрывающихся программных фаз и работу с библиотеками программ (копирование, обновление, сжатие и пополнение). В качестве входных языков ЕС ЭВМ приняты автокод (язык ассемблера), АЛГОЛ, ФОРТРАН и КОБОЛ.

Системы программирования снабжены средствами отладки и редактирования программ. Программное обеспечение включает также пакеты различных прикладных программ.

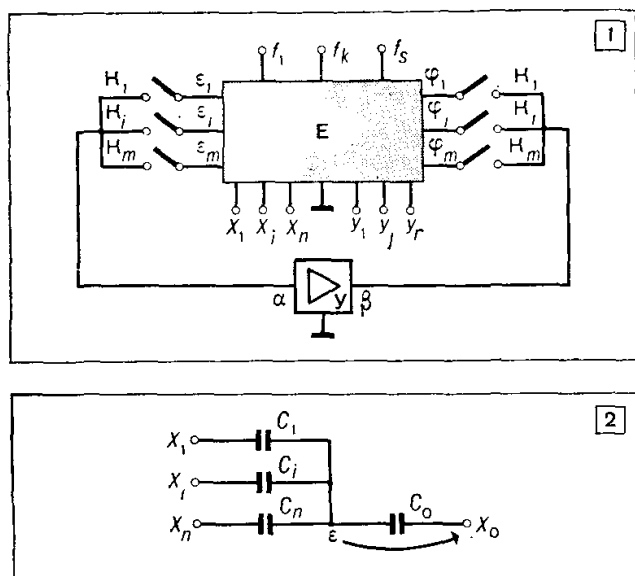
Осн. технические характеристики ЕС ЭВМ приведены в таблице.

А. М. Ларионов, В. К. Левин,  
Ю. П. Селиванов.

**ЕДИНИЦЫ КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ** — см. *Байт, Бит, Информации количество, Информация.*

**ЕМКОСТНАЯ МОДЕЛЬ** — устройство, состоящее из емкостного многополюсника, элементами которого являются только линейные и нелинейные емкости, и одного переключаемого с помощью ключей усилителя постоянного тока или преобразователя функционального.

Схема Е. м. приведена на рис. 1, здесь Е — емкостный многополюсник;  $K_1, \dots, K_m$  — ключи, управляемые так, чтобы вход  $\alpha$  и выход  $\beta$



1. Схема емкостной модели.  
2. Схема емкостного сумматора.

электронного усилителя У с большим отрицательным коэфф. усиления поочередно подключались к полюсам многополюсника с номерами 1, 2, ..., m. Внутренняя схема многополюсника и параметры его элементов следует выбирать так, чтобы при нулевых значениях напряжений  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  напряжения  $X_1, \dots, X_n$  удовлетворяли заданным матем. зависимостям. Полюсы  $f_1, \dots, f_s$  служат для ввода в многополюсник известных потенциалов, а полюсы с напряжениями  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  — для ввода зарядов с выхода усилителя У. В общем случае в многополюснике должны быть еще полюсы для получения некоторых вспомогательных напряжений  $y_1, \dots, y_r$ . Поскольку элементами многополюсника Е являются только емкости, то он одновременно выполняет функции и решающей и запоминающей системы. Схему много-

полюсника надо выбирать так, чтобы процесс его уравнивания, т. е. процесс обращения напряжений  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$  в машинные нули, сходился (см. *Уравнивания методы*). На основе рассмотренной схемы можно построить разнообразные матем. приборы и устр-ва для решения конечных и дифф. ур-ний, а также устр-ва для выполнения отдельных матем. операций (сумматоры, интеграторы, функциональные преобразователи и т. п.). Все такие устр-ва будут квазианалоговыми.

На рис. 2. приведена схема емкостного сумматора. В уравновешенном состоянии напряжение  $X_0$ , если собственный заряд узла  $\varepsilon$  равен нулю, выражается через напряжения

$$X_1, \dots, X_n \text{ как } X_0 = - \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{C_0} X_i. \text{ Стрелкой}$$

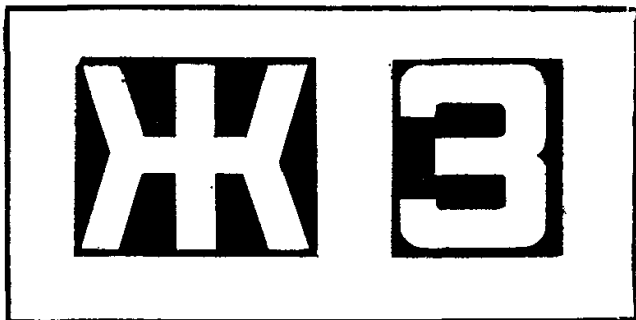
указаны точки, к которым в процессе уравнивания следует присоединять вход  $\alpha$  и выход  $\beta$  усилителя отрабатывающего для обращения напряжения  $\varepsilon$  в машинный ноль. Система таких простых сумматоров образует устр-во для суммирования многомерных векторов. На основе ф-л численного интегрирования система сумматоров может реализовать операцию интегрирования решетчатых ф-ций. Если кулон-вольтные характеристики нелинейных емкостей таковы, что позволяют сформировать на выходе напряжение  $X_0$ , соответствующее желаемым матем. связям его с входными напряжениями  $X_1, \dots, X_n$ , то можно получить емкостный функциональный преобразователь. Более универсальный способ получения требуемых функциональных преобразователей основан на совместном использовании емкостных цепей и стандартных, напр., диодных, преобразователей. Е. м. можно применять и для умножения. Для того, чтобы получить универсальную емкостную машину, достаточно располагать всего тремя электронными усилителями, одним множительным звеном, набором емкостей и ключами.

Подобно квазианалоговым моделям алгебр. ур-ний  $\alpha, \rho, \sigma$  и др. типов можно получить аналогичные емкостные схемы, если заменить омические проводимости емкостями, а систему одновременно работающих усилителей — одним переключаемым. В практике моделирования Е. м. находят пока ограниченное применение из-за малой точности получаемых результатов.

Лит.: Пухов Г. Е. Теория емкостных математических машин. «Математическое моделирование и теория электрических цепей», 1965, в. 3.

В. К. Белик.





**ЖЕГАЛКИНА АЛГЕБРА** — одна из разновидностей алгебры логики. Названа по имени советского математика И. И. Жегалкина. В Ж. а. используются следующие теоретико-высказывательные связки: логич. умножение (конъюнкция, знак  $\cdot$ ), сложение по модулю 2 (исключающее «или», знак  $+$ ) и константа 1 («истина»). Набор этих операций полный, т. е. всякая ф-ция алгебры логики может быть представлена суперпозицией указанных операций. Более того, в Ж. а. всякая ф-ция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  алгебры логики однозначно представима как многочлен, в котором каждая переменная  $x_i$  входит не выше чем в 1-й степени, а коэфф. явл. элементами поля из двух элементов, т. е. либо нулем, либо единицей. Возможность такого представления «приведенными» многочленами вытекает из существования интерполяционной ф-лы Лагранжа, которая в данном случае приобретает простой вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n)} f(a_1, a_2, \dots, a_n) (x_1 + a_1 + 1) \dots (x_n + a_n + 1).$$

Булевы связки, *дизъюнкция* и отрицание в Ж. а. записываются как

$$x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2; \quad \bar{x} = x + 1.$$

Ж. а. наз. иногда **булевым кольцом** (не смешивать с термином «булева алгебра»). Операции над приведенными многочленами производятся, как над обычными многочленами с целочисленными коэфф., затем в полученном результате все переменные  $x_i^m$ , у которых  $m > 0$ , заменяются на  $x_i$ , а коэфф. при одночленах заменяются их наименьшими вычетами по модулю 2. Именно эта близость Ж. а. к привычной элементарной алгебре многочленов объясняет ее преимущество с методической точки зрения. Некоторые авторы использовали Ж. а. в исследованиях по матем. логике и в вычисл. технике. В частности, сам И. И. Жегалкин применил ее в исследованиях *исчисления предикатов узкого*. Он распространил положения этой алгебры на исчисление матриц с коэфф. 0 и 1 и нашел решение проблемы разрешения на конечных классах для некоторых типов формул узкого исчисления предикатов. Ж. а. с успехом применяют в *релейно-контактных схем теории*. Ж. а. допускает естественное обобщение на случай  $k$ -значных логик, если  $k$  — степень простого числа. Действительно,

в этом случае ф-ции соответствующей алгебры логики согласно интерполяционной формуле Лагранжа допускают однозначное представление приведенными полиномами (т. е. такими, в которых каждая переменная входит в степени, не выше чем  $k - 1$ ) с коэфф. из конечного поля (поля Галуа) с  $k$  элементами. Это позволяет применить аппарат теории полиномов над конечными полями к исследованиям по *логикам многозначным*.

Лит.: Жегалкин И. И. Арифметизация символической логики. «Математический сборник Московского математического общества», 1929, т. 36, в. 3—4; Жегалкин И. И. К проблеме разрешимости. «Математический сборник. Новая серия», 1939, т. 6, в. 2; Жегалкин И. И. Проблема разрешимости на конечных классах. «Ученые записки Московского государственного университета», 1946, т. 1, в. 100; Костырко В. Ф. Об ошибке в статье И. И. Жегалкина «Проблема разрешимости на конечных классах». В кн.: Алгебра и логика. Семинар т. 1, в. 5. Новосибирск, 1962.

Л. А. Калужнин.

**ЗАГРУЗЧИК** в программировании — программа, которая объединяет полученные в результате трансляции модули, размещает их в памяти, настраивает адреса команд и реализует связи между этими модулями. При составлении программ выделяются логически самостоятельные блоки, каждый из которых выполняет некоторую ф-цию или ряд взаимосвязанных ф-ций. Блоки могут программироваться и транслироваться отдельно и независимо, образуя при этом модули. Модуль, полученный после трансляции, кроме команд и данных, содержит дополнительную информацию, необходимую для реализации связей между модулями и настройки адресов команд при размещении программы в памяти. Язык представления программ в виде модулей загрузки наз. языком загрузки; последний, как правило, является выходным языком ассемблера и компиляторов и используется для объединения блоков программ, написанных, возможно, на разных языках, для программ сегментации и для включения программ в библиотеки. Объединение программ на уровне языка загрузки позволяет избежать повторной трансляции ранее составленных и отлаженных блоков программ.

З. иногда выполняет две ф-ции — редактирование связей и размещение программы в памяти ЦВМ. В др. случаях выделяются две самостоятельные программы — редактор связей и собственно З. Редактор связей объединяет независимо полученные модули в один модуль загрузки. При редактировании связей реализуются межмодульные связи и, кроме того, к программе подключаются необходимые модули из общей библиотеки или личных библиотек (по запросу или автоматически). Редактор связей может конструировать также сегменты, загружаемые динамически и сменяющие друг друга в памяти машины, с целью ее экономии. З. работает в составе управляющей программы операционной системы. Его ф-ции сводятся к размещению отредактированного модуля в памяти и настройке адресов, зависящих от местоположения программы. Разделение ф-ций редактора связей и З. исключает

повторное редактирование связей при многократном использовании программы.

**ЗАДАЧА О КОММИВОЯЖЕРЕ** — одна из комбинаторных задач дискретного программирования. Общая формулировка З. о к.: торговец, выезжающий из некоторого города, должен посетить каждый из  $(n - 1)$  других городов только один раз и вернуться в исходный город. Матрица расстояний  $A = \{a_{ij}\}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) известна. Требуется определить, в каком порядке торговец должен посещать города, чтобы общее пройденное расстояние было минимальным. Если  $a_{ij}$  рассматривать как время, издержки или другой показатель, то к З. о к. сведется ряд прикладных задач, связанных с обходом ряда пунктов, проведением коммуникаций между ними, составлением расписания выполнения работ, оптимизацией программ для ЭВМ и др. Решение З. о к. может быть найдено путем перебора  $(n - 1)!$  возможных маршрутов. Однако с ростом  $n$  число вариантов быстро достигает астрономических цифр, что вынуждает отказаться от прямого их перебора.

Один из способов решения З. о к. состоит в сведении ее к задаче целочисленного программирования линейного, состоящей в минимизации линейной формы затрат  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij}$  при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (1)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$0 \leq x_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$(n - 1) x_{ij} + u_i - u_j \leq n - 2, \quad (3)$$

$$i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n - 1,$$

где  $u_i$  — некоторые специально подобранные вспомогательные целые числа. Условие (1) выражает однократность посещения городов, (2) — неотрицательность переменных, (3) — односвязность маршрута.

Использование идеи программирования динамического состоит в том, что З. о к. представляют в виде многошагового процесса наращивания звеньев пути, минимизируя затраты. Основное рекуррентное уравнение при этом имеет вид:

$$f_i(e_1, e_2, \dots, e_k) = \min_{1 \leq m \leq k} [a_{ie_m} + f_{e_m}(e_1, e_2, \dots, e_{m-1}, e_{m+1}, \dots, e_k)],$$

где  $f_i(e_1, e_2, \dots, e_k)$  — длина оптим. пути возврата от  $i$ -го до исходного города через оставшиеся города  $e_1, e_2, \dots, e_k$ ;  $e_m$  — следующий за  $i$ -тым городом пути. Решение достигается перебором  $n^2 \cdot 2^{n-1}$  вариантов. Наиболее эффективным из известных способов получения точного решения З. о к. считается ветвей и границ метод.

Л. Л. Закашанский.

**ЗАДАЧА О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ** — задача о нахождении на направленном графе пути наименьшей длины между двумя заданными его вершинами. Пусть задан направленный граф, каждой дуге которого поставлено в соответствие неотрицательное число, которое наз. длиной дуги. Длиной пути такого графа наз. сумма длин дуг, составляющих этот путь.

З. о к. п. возникает во многих приложениях, особенно при решении транспортных задач, дискретных задач программирования динамического и пр. В задачах сетевого планирования и управления алгоритмы решения З. о к. п. используются для нахождения критического пути. Известно несколько эффективных методов решения З. о к. п. Наиболее употребительны алгоритмы Минти, Беллмана — Шимбела и Форда. В СССР широкое применение для анализа транспортных сетей получил алгоритм, основанный на методе последовательного анализа вариантов, близкий к алгоритму Форда.

Н. З. Шор.

**ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ** — задача о наилучшем распределении  $n$  работ между  $n$  исполнителями в предположении, что каждый исполнитель назначается только на одну работу и каждая работа предназначается только для одного исполнителя. Исполнители различаются по своим способностям выполнять ту или иную работу. Пусть  $a_{ij} \geq 0$  — производительность  $i$ -го исполнителя на  $j$ -й работе. Наилучшим считается распределение работ, максимизирующее эффективность, измеряемую суммой производительностей всех  $n$  исполнителей. Обозначим через  $x_{ij}$  переменную, равную единице, если  $i$ -й исполнитель назначен на  $j$ -ю работу, и нулю, если для  $j$ -й работы выбран другой исполнитель. Задача сводится к задаче программирования линейного, заключающейся в нахождении  $x_{ij}$ , которые максимизируют

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Задача максимизации линейной формы (1) при условиях (2—4) всегда имеет целочисленное решение, поэтому в силу условий (2—3) каждое  $x_{ij}$  будет нулем или единицей. З. о н. представляет собой частный случай транспортной задачи. Наиболее эффективным методом для решения З. о н. является венгерский метод. Другими примерами могут служить задачи распределения работ по механизмам, распределение целей между огневыми средствами и т. п.

Лит. см. к ст. Программирование линейное.

Л. Н. Комзакова.

**ЗАДАЧА О ПЕРЕВОЗКАХ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ПУНКТАМИ** — обобщенная транспортная задача, когда для каждого пункта потребления составляется уравнение материального баланса. Это уравнение отражает тот факт, что для каждого пункта объем вывезенного продукта минус к-во завезенного продукта равен чистому объему продукта, произведенного в этом пункте (если разность положительна), или чистому объему потребляемого в нем продукта (если разность отрицательна).

Уравнение материального баланса для каждого пункта имеет вид:

$$\sum_{i \neq j} x_{ij} + a_j^* = \sum_{k \neq j} x_{jk} + b_j^*,$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $x_{ij}$  — общий объем перевозки из  $i$  в  $j$ ,  $i \neq j$ ,  $a_j^*$  — производство в пункте  $j$ ,  $b_j^*$  — потребление в пункте  $j$ . Долю продукта местного производства, предназначенную для внутреннего потребления, можно исключить из модели. При этом символы  $a_j^*$  и  $b_j^*$  заменяются символами  $a_j$  (чистое производство) и  $b_j$  (чистое потребление), которые определяются как

$$a_j = a_j^* - \min(a_j^*, b_j^*),$$

$$b_j = b_j^* - \min(a_j^*, b_j^*).$$

З. о. п. с. п. п. заключается в нахождении чисел  $x_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), удовлетворяющих уравнению материального баланса и минимизирующих целевую функцию  $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ , ( $i \neq j$ ),

где  $c_{ij}$  — затраты на транспортировку единицы продукта из пункта  $i$  в пункт  $j$ . Задачу можно представить в сетевом виде (см. *Сетевые методы планирования и управления*).

З. о. п. с. п. п. является прикладной задачей программирования линейного. Для ее решения применяются симплекс-метод, методы графов теории. В некоторых частных случаях решение ее может быть сведено к решению транспортной задачи. З. о. п. с. п. п. применяется при решении задач транспортировки грузов через промежуточные базы либо транспортировки сырья с промежуточной переработкой, напр., заготовка металлолома у поставщиков, перевозка, переработка его на пунктах промежуточной обработки (прессование и вывоз потребителям — металлургическим заводам). А. А. Бакаев.

**ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОСТАВОК** — одна из задач оперативного оптимального управления в системах, связанных с накоплением запасов на складах и их расходом. Пусть на всех  $n$  складах системы создается запас однородного товара. Товар периодически заказывается у изготовителей централизованно и одновременно для всех складов системы. Заказанное к-во товара  $Q$  предполагается известным. Заказ может выполняться с задержкой во времени. Наличие товара на каждом

складе в момент выполнения заказа также известно. Требуется решить, как распределить количество товара  $Q$  между  $n$  складами после выполнения заказа. Предполагается, что в течение времени  $T$ , до реализации следующего заказа, склады ниоткуда товар не получают. Заказ должен быть распределен между складами так, чтобы минимизировалась сумма затрат на перевозки и ожидаемых штрафных затрат, обусловленных неудовлетворением спроса в течение периода времени  $T$ .

Пусть  $C_j(x_j)$  — транспортные затраты по перевозке  $x_j$  единиц продукта от отправителя до  $j$ -го склада;  $y_j$  — величина запаса этого продукта в  $j$ -м складе в момент, когда осуществляется распределение;  $\pi_j$  — отнесенные к единице требуемого продукта штрафные затраты, когда запас в  $j$ -м складе отсутствует;  $p_j(v_j)$  — вероятность того, что на  $j$ -м складе в течение времени  $T$  возникает спрос на  $v_j$  единиц продукта. Тогда, пренебрегая временем транспортировки, функцию затрат для  $j$ -го склада можно определить так:

$$f_j(x_j) = C_j(x_j) + \pi_j \sum_{v_j=y_j+x_j}^{\infty} (v_j - y_j - x_j) p_j(v_j).$$

Задача состоит в определении неотрицательных целых чисел  $x_j$ , удовлетворяющих условию

$$\sum_{j=1}^n x_j = Q \text{ и минимизирующих функцию } z = \sum_{j=1}^n f_j(x_j).$$

З. о. р. п. является задачей программирования математического, решать ее приходится при оперативном управлении на транспорте, в сфере материально-технического снабжения и в различных производственных системах.

А. А. Бакаев.

**ЗАДАЧА О РЮКЗАКЕ** — задача о наилучшем выборе предметов из общего числа предметов  $n$  таким образом, чтобы суммарный вес (объем, габариты и пр.) выбранных предметов не превышал указанного предела  $b$ , а их суммарная полезность была максимальной. Каждый из предметов имеет вес  $a_j$  и характеризуется коэфф. полезности  $c_j$ . Пусть  $x_j$  равно единице, если  $j$ -й предмет принимается к укладке, и  $x_j$  равно нулю в противном случае. Тогда задача представляет собой задачу целочисленного программирования линейного, заключающуюся в нахождении целых  $x_j$ , которые максимизируют  $\sum_{j=1}^n c_j x_j$  при условиях:

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b; \quad (1)$$

$$0 \leq x_j \leq 1.$$

К 3. о р. сводятся многие задачи размещения оборудования на самолете или ракете, загрузки судов, компактной укладки оборудования и т. д. В различных конкретных задачах коэфф. полезности может описывать различные качества предметов — стоимость, эффективность, калорийность и др. Неравенство (1) может обозначать ограничение на вес, объем, отдельные размеры и др. З. о р. как задачу целочисленного программирования можно решить *Гомори методом*, однако наиболее эффективными методами для нее являются *ветвей и границ метод* и метод функциональных ур-ний программирования динамического.

Лит. см. к ст. Программирование линейное.

Л. Н. Комзакова.

**ЗАДАЧА О СКЛАДЕ** — одна из задач оптимального планирования в системах, связанных с закупками и сбытом однородного продукта. З. о с. является прикладной задачей программирования линейного. Пусть в начальный момент времени на складе, вместимость которого  $k$  единиц продукта, имеется в наличии  $k_0$  таких единиц. В каждый из  $n$  дискретных моментов времени  $(1, 2, 3, \dots, n)$  производится закупка и продажа некоторого количества единиц продукта. В момент времени  $n$  наличный запас его должен оказаться равным  $k_1$ . Общее количество продукта, которое может быть закуплено за все  $n$  единиц времени, равно  $R$ . Исходными данными служат следующие величины: стоимость  $p_i$  продажи единицы продукта, реализованного в момент времени  $i$ , затраты  $q_i$  на покупку единицы продукта, закупленного в момент времени  $i$ , затраты  $c_i$  на хранение единицы продукта в течение промежутка времени  $(i - 1, i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Обозначим через  $\alpha_i$  к-во продукта, реализованное в момент времени  $i$ ;  $\beta_i$  — к-во продукта, закупленного в момент времени  $i$ ;  $\gamma_i$  — остаток продукта, хранившегося на складе в промежутке  $(i - 1, i)$  и нереализованного в момент времени  $i$ ;  $\delta_i$  — общее к-во продукта на складе после закупок в момент времени  $i$ . В результате решения задачи должны быть получены такие значения  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ , при которых общая

прибыль  $\sum_{i=1}^n (p_i \alpha_i - q_i \beta_i - c_i \delta_{i-1})$  оказывается максимальной при ограничениях  $\gamma_i + \beta_i = \delta_i$ ,  $\delta_{i-1} - \alpha_i = \gamma_i$ ,  $\sum_{i=1}^n \beta_i \leq R$ ,  $0 \leq \delta_i \leq k$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$ ,  $\gamma_i \geq 0$ ,  $\delta_0 = k_0$ ,  $\delta_n = k_1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Решение задачи сводится к определению оптим. однородного потока в сети.

И. М. Мельник.

**ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ БЫСТРОДЕЙСТВИИ** — одна из основных задач теории оптимального управления, в которой критерием качества управления является время перехода из одной точки в другую. Формально соответствует случаю в общей задаче оптимального управления теорией, когда  $f_0(x, u) \equiv 1$ . Общая постановка З. об о. б. такова. Имеется объект

управления, закон движения которого описывается системой дифф. ур-ний

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  —  $n$ -мерный вектор фазовых координат,  $u$  — управление, которое является  $r$ -мерным вектором, меняющимся в некотором множестве  $U$   $r$ -мерного простр., ф-ции  $f_i(x, u)$  непрерывны и непрерывно дифференцируемы по  $x$ . Заданы точки  $x^0$  и  $x^1$ . Требуется выбрать такую измеримую ограниченную ф-цию  $u(t)$  и моменты времени  $t_0$  и  $t_1$ , что  $u(t) \in U$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , траектория  $x(t)$  систем (1), соответствующая управлению  $u(t)$  и точке  $x^0$ , проходит в момент  $t_1$  через точку  $x^1$ , т. е. удовлетворяются соотношения

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1$$

и разность  $t_1 - t_0$  минимальна. Принцип максимума (см. *Понтрягина принцип максимума*) для этой задачи формируется следующим образом. Пусть  $u^0(t)$  — оптим. управление, являющееся решением поставленной задачи оптим. быстрогодействия, а  $x^0(t)$  — соответствующая ему траектория. Тогда найдется такая  $n$ -мерная вектор-функция  $\Psi(t) = \{\Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t)\}$ , что:

а) справедлива система ур-ний

$$\frac{d\Psi_i(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(x^0(t), u^0(t))}{\partial x_i} \Psi_j(t);$$

б)  $H(\Psi(t), x^0(t), u^0(t)) = M(\Psi(t), x^0(t))$ .

где  $H(\Psi, x, u) = \sum_{i=1}^n \Psi_i f_i(x, u)$ ,  $M(\Psi, x) = \sup_{u \in U} H(\Psi, x, u)$ ;

в) ф-ция  $M(\Psi(t), x^0(t))$  — постоянна на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$  и неотрицательна.

Наиболее развита теория З. об о. б. для линейных систем дифф. ур-ний, т. е. для случая, когда ф-ции  $f_i(x, u)$  линейны по  $x$  и по  $u$ . В этом случае система (1) может быть записана

в векторной форме  $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ , где  $A$  — матрица с элементами  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , а  $B$  — матрица с элементами  $b_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, r$ . Для линейной З. об о. б. принцип максимума приобретает следующий вид: для того, чтобы управление  $u^0(t)$  было оптим., необходимо, чтобы существовала такая вектор-функция  $\Psi(t) = \{\Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t)\}$ , которая удовлетворяет системе дифференциальных

уравнений:  $\frac{d\Psi(t)}{dt} = -A^* \Psi(t)$  и  $(\Psi(t), Bu^0(t)) = \sup_{u \in U} (\Psi(t), Bu)$ , где  $A^*$  — матрица,

транспортированная к  $A$ , а  $(x, y)$  — скалярное произведение векторов  $x$  и  $y$ . Допустим, что область  $U$  — параллелепипед, т. е. определяется неравенствами  $|u_i| \leq 1, i = 1, \dots, r$ . Говорят, что выполнено условие общности положения, если для всех  $j = 1, \dots, r$  системы векторов  $b^j, Ab^j, \dots, A^{n-1}b^j$  — линейно независимы. Здесь вектор  $b^j$  имеет компоненты  $b_{ij}, i = 1, \dots, n$ . Все приводимые ниже результаты справедливы при выполнении этого предположения. Пусть  $u^0(t)$  — решение задачи линейного оптим. быстродействия. Тогда каждая из ф-ций  $u_j^0(t), j = 1, \dots, r$  кусочно постоянна, имеет лишь конечное число разрывов и  $u_j^0(t)$  равно  $+1$  или  $-1$ . Моменты времени  $t$ , в которые происходит смена значения  $u_j^0(t)$  с  $+1$  на  $-1$  или наоборот, наз. моментами переключения. Т. о., оптим. управление имеет лишь конечное число моментов переключения. Если все собственные значения матрицы  $A$  действительны, то число моментов переключения каждой из компонент  $u_j^0(t)$  в оптим. управлении не превосходит  $n - 1$ . Последнее утверждение носит название теоремы об  $n$  интервалах.

Лит. см. к ст. *Оптимального управления теория*. Б. Н. Пшеничный.

**ЗАДАЧА ОБ УЗКИХ МЕСТАХ** — задача о выявлении наиболее перегруженных ресурсов, предусматривающая разработку способов устранения такой перегрузки. В качестве таких ресурсов могут выступать оборудование, оснастка, людские резервы и т. д. Поскольку производственная программа предприятия изменяется во времени как по объему, так и по качеству, то изменяется и потребность в ресурсах каждого вида. При этом может резко увеличиваться потребность в отдельном виде ресурсов и перегруженность его. Чаще всего в качестве ресурса выступает оборудование. При этом перегруженным оказывается, как правило, наиболее дефицитное оборудование — дорогостоящее, крупногабаритное, выпускаемое в небольшом к-ве и т. д. В этом случае для устранения «узкого места» увеличивают к-во единиц оборудования «узкого места», перемещают (если это не нарушает технологии) часть операций с узкого места на рабочие места менее загруженных групп оборудования (напр., на штамповочных участках — на прессы большей мощности), вводят сверхурочные работы и т. д. Узким местом на предприятии могут оказаться и людские резервы — люди определенной профессии или разряда. Выявление заблаговременно такого рода узких мест позволяет своевременно принять нужные организационные меры по их устранению.

З. об у. м. относится к задачам *календарного планирования* и решается как составная часть более широкой проблемы — оценки и сравнения наличных ресурсов и ресурсов, необходимых для выполнения фиксированной (заданной) производственной программы. Решение этой задачи необходимо также при построении календарного плана-графика работы цеха (участка).

Т. П. Подчасова.

**ЗАДАЧА С ЗАКРЕПЛЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ** — задача теории оптимального управления, в которой моменты начала  $t_0$  и конца  $t_1$  процесса фиксированы. Вводя дополнительную переменную  $x_{n+1}$ , удовлетворяющую ур-нию  $\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$  и граничным условиям  $x_{n+1}(t_0) = t_0, x_{n+1}(t_1) = t_1$ . З. с з. в. сводят к общей задаче *оптимального управления теорией*.

Б. Н. Пшеничный.  
**ЗАДАЧА С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ** — одна из задач *вариационного исчисления*. Формулируется так: пусть в  $(n + 1)$ -мерном пространстве переменных  $(x, y) = (x, y_1, \dots, y_n)$  заданы поверхности  $S_1$  и  $S_2$  соответственно ур-ниям

$$\varphi_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad k \leq n + 1 \quad (1)$$

$$\eta_j(x, y) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad m \leq n + 1 \quad (2)$$

и функционал

$$I = g_1(x_1, y(x_1)) + g_2(x_2, y(x_2)) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx. \quad (3)$$

Назовем кривую  $y(x)$  допустимой, если на ней функционал  $I$  определен, а концы ее лежат на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$ . З. с п. к. заключается в отыскании среди всех допустимых кривых такой, которая обеспечивает минимум функционалу  $I$ .

Для получения тех или иных условий, характеризующих эту кривую, на ф-ции  $g_1, g_2, f, y, \varphi_i, \eta_j$  (как обычно в вариационном исчислении) налагают определенные ограничения (непрерывность, дифференцируемость и т. д.). В случае, если одна из поверхностей  $S_1$  или  $S_2$  вырождается в точку пространства  $(x, y)$ , получаем задачу с одним подвижным и одним фиксированным концом; если обе поверхности  $S_1$  и  $S_2$  вырождаются в точки, получаем задачу с фиксированными концами.

Поскольку задача с фиксированными концами является частным случаем З. с п. к., то кривая, доставляющая минимум функционалу  $I$  в задаче (1—3), должна удовлетворять всем известным для задачи с фиксированными концами необходимым условиям минимума. В частности, в случае достаточной гладкости, она должна удовлетворять ур-ниям Эйлера

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Интегральные кривые системы (4) наз. э к с т р е м а л я м и. Однако в рассматриваемой задаче нужно дополнительно определять положение концов кривой на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$ . Это достигается с помощью *условий трансверсальности*. Говорят, что допустимая кривая удовлетворяет условиям трансверсальности, если для любых векторов  $(dx_\alpha, dy(x_\alpha)), \alpha =$

$= 1, 2$ , касательных к поверхностям  $S_\alpha$ , выполняются условия

$$\left[ \left( f - \sum_{i=1}^n y'_i \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) dx + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y'_i} dy_i \right]_{x=x_\alpha} + dg_\alpha \Big|_{x=x_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (5)$$

Для того, чтобы кривая  $y(x)$  доставляла минимум функционалу  $I$ , необходимо, чтобы она удовлетворяла условиям трансверсальности.

Каждая точка поверхности  $S_1$  характеризуется  $n+1-k$  параметрами. Следовательно, если в условии (5) при  $\alpha = 1$  подставить  $(n+1-k)$  линейно независимых векторов  $(dx_1, dy(x_1))$ , касательных к поверхности  $S_1$ , то полученная система уравнений позволит определить положение конца кривой  $(x_1, y(x_1))$ , доставляющей минимум  $I$ . Аналогично определяется положение конца минимизирующей кривой на поверхности  $S_2$ .

Приведем некоторые частные случаи условий трансверсальности. Пусть в 3-мерном пространстве поверхности  $S_\alpha$  заданы уравнениями  $x = \varphi_\alpha(y, z)$ ,  $g_\alpha \equiv 0$ ,  $f = f(x, y, z, y'_1, z')$ . Тогда, если выбрать в качестве линейно независимых векторов, касательных к поверхности  $S_\alpha$ , векторы  $\left( \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y}, 1, 0 \right)$  и  $\left( \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z}, 0, 1 \right)$ , условия трансверсальности примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} \left( f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} - z' \frac{\partial f}{\partial z'} \right) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z'} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z} \left( f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} - z' \frac{\partial f}{\partial z'} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Если  $x_1 = \text{const}$ ,  $x_2 = \text{const}$ , а  $g_\alpha = 0$ , условия трансверсальности приобретают вид

$$\frac{\partial f}{\partial y'_i} \Big|_{x=x_\alpha} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Лит. см. к ст. Вариационное исчисление.

Ю. М. Данилин.

**ЗАМКЫВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА** — упорядоченное множество соотношений, получаемое предельным переходом из соотношений, составляющих *вычислительный алгоритм*. Понятие З. в. а. было введено акад. АН СССР С. Л. Соболевым.

Пусть требуется решить уравнение

$$Lu = f, \quad (1)$$

где  $u \in U$ ,  $f \in F$ ;  $U, F$  — функциональные пространства, а  $L$  — оператор, переводящий  $U$  в  $F$ . Заменим уравнение (1) приближенным уравнением

$$L^{(h,q)} u^{(h,q)} = f^{(h,q)}. \quad (2)$$

заданным в конечномерном пространстве, где  $h = (h_1, \dots, h_n)$ ,  $q = (q_1, \dots, q_k)$  — параметры, определяющие качество приближения (размеры сетки, к-во итераций, число неизвестных, величину допустимой погрешности счета

и т. п.). Пусть  $u$  и  $u^{(h,q)}$  — решение соответственно уравнений (1) и (2) и пусть  $u^{(h,q)} \rightarrow u$  в некоторой естественной норме при стремлении этих параметров к предельным значениям, которые, не уменьшая общности, можно принять за нулевые. Вычисл. алгоритм решения уравнения (2) состоит в последовательном получении совокупности соотношений

$$L_m^{(h,q)} u^{(h,q)} = \varphi_m^{(h,q)}, \quad \varphi_m^{(h,q)} = D_m^{(h,q)} f^{(h,q)}, \\ m = 1, 2, \dots, M, \quad M = M(h, q), \quad (3)$$

в которой  $L_M^{(h,q)} = I$  — тождественный оператор. Это значит, что на  $M$ -м шаге преобразований (3) мы получим точное решение уравнения (2):  $u^{(h,q)} = D_M^{(h,q)} f^{(h,q)}$ . Совокупность (3) вместе со способом аппроксимации (2) составляет вычисл. алгоритм  $T$  решения уравнения (1). Пусть можно ввести параметр  $z = z(m, h, q)$ , монотонно зависящий от  $m$ , и такой, что при фиксированном  $z$ ,  $0 \leq z \leq z_0 = \lim_{h \rightarrow 0} z(M, h, q)$ ,

и некотором способе стремления к нулю параметров  $h$  соотношения (3) переходят в

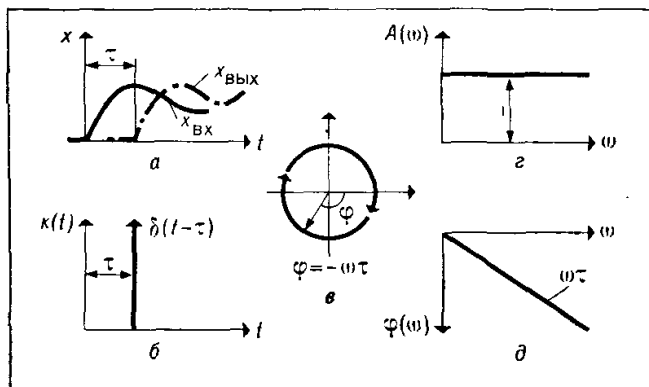
$$L_z^q u^q = \varphi_z^q, \quad \varphi_z^q = D_z^q f^{(0,q)}, \quad (4)$$

причем  $L_{z_0}^q = I$ ; тогда  $u^q = \varphi_{z_0}^q$ . Соотношения (4), если они имеют смысл, наз. З. в. а.  $T$ . Если операторы  $L_z^q$ ,  $D_z^q$  и функция  $\varphi_z^q$  равномерно по  $z$  ограничены в некоторой естественной норме, то говорят, что алгоритм  $T$  имеет регулярное замыкание. В противном случае говорят, что алгоритм  $T$  имеет нерегулярное замыкание (тогда при повышении точности исследования уравнения (1) в реализации алгоритма  $T$  могут возникнуть затруднения, связанные или с потерей знаков в вычислениях или с выходом за разрядную сетку ЭВМ). Элементы матриц систем типа (2), возникших из аппроксимации задачи матем. анализа, обычно построены некоторым регулярным образом. Поэтому можно предполагать, что такие системы со многими неизвестными окажутся подчас по своим свойствам ближе к своему замыканию, чем к своим конечномерным аналогам. Это обстоятельство дает возможность изучать свойства вычисл. алгоритмов, исследуя свойства их замыканий приемами и методами матем. анализа. Пример З. в. а.: уравнение (1) — *краевая задача* для линейного обыкновенного дифф. уравнения 2-го порядка; уравнение (2) — разностная аппроксимация уравнения (1) на сетке с шагом  $h$ ; совокупность (3) — ф-лы факторизации, полученные на основе применения метода Гаусса к системе (2). Тогда соотношение (4) есть *краевая задача* для системы трех обыкновенных нелинейных дифф. уравнений 1-го порядка, операторы которой факторизуют оператор задачи (1).

В. И. Лебедев.

**ЗАПАЗДЫВАНИЯ БЛОК** — устройство для воспроизведения функций времени с запаздывающим аргументом. З. б. осуществляет следующее временное преобразование сигнала:  $x_{\text{вых}}(t) = x_{\text{вх}}(t - \tau)$ , где  $t$  — текущее время,

$\tau$  — время запаздывания,  $x_{вх}$ ,  $x_{вых}$  — соответственно входной и выходной сигнал З. б. (рис., а). Различают блоки постоянного запаздывания, в которых в процессе работы  $\tau = \text{const}$ , и блоки переменного запаздывания, в которых  $\tau = \text{var}$ . В последнем случае  $\tau$  может быть ф-цией времени  $t$  или (и) какой-нибудь другой переменной. Временные и частотные характеристики (см. *Импульсная переходная функция, Частотные характеристики систем автоматического управления*) идеального З. б. (для случая  $\tau = \text{const}$ ) показаны на рис., а-д.



Характеристики блока запаздывания: а — временная; б —  $k(t)$  — импульсная переходная функция ( $\delta(t - \tau)$  — дельта-функция); в — амплитудно-фазовая характеристика; г — фазо-частотная характеристика.

По характеру сигналов З. б. делят на блоки, предназначенные для воспроизведения непрерывных (кусочно-непрерывных) сигналов и дискретных (импульсных) сигналов. В З. б. для получения временного сдвига используются магн. ленты, запоминающие конденсаторы, линии задержки, регистры сдвига и фильтры, аппроксимирующие передаточную функцию идеального З. б.  $e^{-p\tau}$ . З. б. применяют в моделирующих установках, корреляторах, устройствах, использующих корреляционные методы определения параметров движения, системах автоматического управления и контроля и т. п. Лит.: Жовинский В. Н. Схемы запоминания напряжений и блоки запаздывания. М.—Л., 1963 [библиогр. с. 76—78]; Догановский С. А., Иванов В. А. Устройства запаздывания и их применение в автоматических системах. М., 1966 [библиогр. с. 272—278]; Козубовский С. Ф., Хартеброт Г. Блок регулируемого запаздывания для дискретных сигналов. «Автоматика», 1967, № 1. Ю. В. Кременчуло.

**ЗАПАСОВ ТЕОРИЯ**, теория управления запасами — раздел прикладной математики, изучающий системы, связанные с накоплением, выдачей и пополнением запасов. З. т. органически входит в *операций исследование*. Являясь матем. теорией, она решает насущные проблемы экономики и орг-ции производства. Вначале решаемые задачи носили чисто утилитарный характер, постановка задач до предела упрощалась, применяемые матем. методы были приближенными, теор. обобщения отсутствовали. В 50-х гг. быстрое развитие матем. методов (теория вероятностных процессов, массового обслуживания теории, линейное

и нелинейное программирование) и применение ЭВМ способствовали развитию З. т. Известно, что всякий производственный процесс сопряжен с необходимостью накопления и расходования запасов материалов, оборудования, запасных частей, готовой продукции. Отсутствие запасов или их нехватка приводят к непроизводительным потерям. С другой стороны, чрезмерное накопление запасов связано с омертвлением ресурсов, порчей при хранении, переполнением складских помещений. Поэтому ставится задача определения наиболее рационального к-ва запасов, наивыгоднейшей стратегии их пополнения и расходования. З. т., опираясь на положения современной математики и особенно таких ее разделов, как *вероятностная теория, программирование математическое, вычислительная математика* и др., находит решение подобных задач и дает конкретные рекомендации по их практическому применению. В настоящее время область применения результатов, полученных в З. т., вышла далеко за пределы задач, связанных с орг-цией складского хоз-ва, отпуском и хранением продукции. Эти результаты успешно применяются в различных задачах производственной и тех. деятельности: при проектировании электронной аппаратуры, в задачах оптимального транспортного обеспечения, в теории надежности, в задачах эксплуатации водохранилищ и т. п.

Задачи З. п. можно классифицировать либо по содержательным свойствам изучаемых систем, либо по методам исследования. С этой точки зрения системы З. т. можно разделить на системы с простой структурой (единственный склад или база) и системы со сложной структурой (сеть последовательных или параллельных баз). Задачи, решаемые в З. т., могут быть однономенклатурными (управление запасами однородной продукции) и многономенклатурными (взаимосвязанное снабжение продукцией нескольких различных видов). Всякая система З. т. может функционировать в непрерывном или в дискретном времени. Осн. временной характеристикой системы З. т. является уровень запаса, т. е. к-во продукции, имеющееся на складе в данный момент времени. В зависимости от особенностей продукции уровень запасов может быть либо дискретным, либо непрерывным. В некоторых задачах уровень запаса может принимать отрицательные значения — накапливается неудовлетворенный спрос. В многономенклатурных системах и системах со сложной структурой уровень запаса — векторная величина, компоненты которой представляют собой уровень запасов по различным видам продукции на различных складах.

Осн. понятиями З. т., характеризующими каждую из рассматриваемых систем, являются спрос, пополнение запасов и заказ на пополнение. Каждое из этих понятий включает в себя временные и количественные показатели. Из них первые характеризуют множество моментов времени, в которые появляется спрос, происходит пополнение запасов, производится



заказ на пополнение. Вторые ставят в соответствие каждому такому моменту времени некоторое к-во продукции. Каждый из показателей может быть либо строго детерминированным (выбираться всегда по одному и тому же заранее определенному закону), либо случайным (носить вероятностный характер), либо управляемым (зависеть от к.-л. мгновенных характеристик). Детерминированность временных и количественных показателей, их случайность, способы осуществления управления ими в различных системах могут проявляться по-разному. Так, детерминированность спроса по времени может иметь непрерывный характер (за равные промежутки времени отпускается определенное к-во продукции) или дискретный (отпуск продукции происходит лишь в отдельные моменты времени, чередующиеся по определенному закону). Случайный спрос может быть непрерывным во времени, напр., описываться некоторым известным непрерывным случайным процессом. При дискретном случайном спросе моменты отпуска продукции наступают через случайные промежутки времени, и каждый раз отпускается случайное к-во продукции. Спрос может иметь и переменную интенсивность, изменяющуюся в зависимости от наличия продукции на складе. В этом случае спрос наз. управляемым. Спрос имеет управляемый характер, когда при накоплении неудовлетворенного спроса до определенного уровня дальнейшее поступление заявок прекращается. Величина спроса также может быть управляемой, зависеть или от наличия запасов, или от к-ва заказанной, но еще не поступившей на склад, продукции. Примерно так же можно охарактеризовать детерминированные, случайные и управляемые показатели, относящиеся к пополнению запаса и заказу на пополнение.

Целью исследования систем З. т. является определение оптимального режима работы системы или изучение отдельных неслучайных характеристик системы, являющихся показателями ее эффективности. В задачах оптимизации обычно оцениваются расходы, связанные с хранением продукции, издержки, возникающие при истощении запасов, и затраты, вызванные оформлением и получением заказа. При решении задач З. т. применяют различные матем. методы: методы матем. программирования, методы теории массового обслуживания, корреляционные методы, методы статистического моделирования. В настоящее время в З. т. довольно полно изучены одноименклатурные системы с простой структурой и получены некоторые результаты в исследовании систем со сложной структурой и многоименклатурных систем.

Схемы З. т., исследованные аналитическим путем, как правило, характеризуются марковским характером поступления заявок и пополнения запасов.

Лит.: Рыжиков Ю. И. Управление запасами. М., 1969 [библиогр. с. 325—343]; Хэнсменн Ф. Применение математических методов в управлении производством и запасами. Пер. с англ. М., 1966 [библиогр. с. 277—279]; Букан Дж., Кенигс-

берг Э. Научное управление запасами. Пер. с англ. М., 1967 [библиогр. с. 404—423]; Праху Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами. Пер. с англ. М., 1969 [библиогр. с. 352]. Т. И. Фурсова.

**ЗАПИСЬ** — в задачах автоматической обработки данных — логическая порция информации, являющаяся объектом или результатом одного шага обработки. Аналогом З. при ручной обработке является документ. Обычно родственные по структуре и способу использования З. объединяют в массивы.

**ЗАПИСЬ БЕССКОБОЧНАЯ**, польская запись — представление выражения, при котором порядок выполнения операции определяется ее контекстом и ее позицией в формуле. З. б. ввел польский логик Я. Лукасевич (1878—1956). При З. б. отпадает необходимость в скобках и в учете старшинства операций. Разновидности З. б.: прямая — операции выполняются справа налево, инверсная — операции выполняются слева направо и др. Для преобразования арифм. выражения в прямую (инверсную) З. б. необходимо выписать слева (справа) операции в том порядке, в котором они должны быть выполнены, а справа (слева) — их операнды. Напр., преобразование выражения  $a + (b + c) \times d$  в З. б. можно представить в следующем виде:

выражение	прямая запись	инверсная запись
$b + c$	$+ bc$	$bc +$
$(b + c) \times d$	$\times + bcd$	$bc + d \times$
$a + (b + c) \times d$	$+ a \times + bcd$	$abc + d \times +$

Исключение скобок и игнорирование старшинства операций значительно упрощает обработку таких выражений трансляторами, поэтому З. б. широко применяют в языках машинно-ориентированных и языках промежуточных.

С. Н. Берестовая.

**ЗАПОМИНАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ЕМКОСТЬ** — наибольшее количество закодированной информации, которое можно одновременно хранить в этом устройстве (ЗУ). Емкость выражают количеством чисел или слов определенной разрядности, чаще — к-вом байтов (килобайтов). Так как в большинстве цифровых вычислительных машин принято двоичное кодирование информации, в том числе и адресов, то обычно количество слов выражают степенью двойки:  $2^{10}$ ,  $2^{11}$  и т. д. Количество разрядов определяется разрядностью вычислительной машины. Чаще встречаются ЗУ с разрядностью 18, 36 и 72. Емкость ЗУ иногда характеризуют числом хранимых двоичных разрядов, или бит. Для оперативных ЗУ характерна емкость от 2 до 64 тыс. слов или байтов, что соответствует примерно  $10^4 \div 2 \times 10^6$  бит. Емкость внешних ЗУ, как правило, больше и, в случае использования накопителей на магнитных дисках, составляет  $10^6 \div 2 \cdot 10^9$  бит, а в случае использования большого количества бобин с лентами магнитными — еще больше.

Ф. Н. Зыков.

**ЗАПОМИНАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ЗОНА** — область в ЗУ, предназначенная для хранения некоторого ограниченного объема информации

(обычно в накопителях на *лентах магнитных*). На магнитной ленте размещается от нескольких десятков до нескольких сотен зон (в зависимости от плотности записи, размеров зон и ленты) с небольшими промежутками между ними. Границы зон обозначаются обычно записью импульсов на специальной дорожке ленты. Размещение зон производится или путем предварительной разметки ленты с записью их номеров в промежутках, или без такой разметки, последовательным заполнением ленты в процессе записи. Соответственно, поиск осуществляется либо посредством считывания номеров, либо последовательным счетом зон; в этом случае номер текущей зоны должен храниться в ЦВМ. Группирование информации по зонам ускоряет запись и выборку ее, поскольку при обращении к ленте ищется лишь один адрес, общий для всей группы записанных в зону слов — номер зоны. И. Т. Пархоменко.

**ЗАПОМНИАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО (ЗУ)** — устройство, выполняющее функции приема, хранения и выдачи закодированной информации в системах и машинах, предназначенных для ее передачи и обработки.

Применение первых тех. устройств хранения дискретной информации относится к 19 ст.: телеграфную ленту при приеме на аппарате Морзе можно рассматривать как средство хранения информации. Затем была разработана система автоматического телеграфирования, при которой производится предварительная заготовка ленты путем ее перфорации и с последующей ускоренной передачей заготовленной на *перфорационной ленте* телеграммы при помощи транзиттера. Подобные ЗУ на перфорационных лентах до сих пор находят применение в *вычислительной технике*. Необходимость повысить скорость и надежность передач в технике связи привели к созданию ЗУ с использованием записи на магнитной ленте, получивших распространение также в связи с созданием станков с программным управлением. Развитие вычислительной техники, вначале использовавшей имеющиеся устройства хранения информации (*перфорационные карты* и перфоленты, *ленты магнитные*, электро-механические реле и т. д.), потребовало разработки ЗУ с автоматическим занесением и выдачи информации по адресу, являющемуся закодированным номером запоминающей ячейки, за очень короткое время — от сотен до единиц микросекунд и менее. При этом объем хранимой информации составляет десятки и сотни тысяч слов (чисел). Так появились ЗУ на ультразвуковых линиях задержки, на электроннолучевых трубках, а позднее — на ферритовых сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса, ферромагнитных пленках и т. д. Расширение ассортимента и качественных показателей ЗУ, разработанных для удовлетворения нужд вычислительной техники, привело к интенсивному внедрению ЗУ как автономного устройства в другие области техники (связь, автоматическое управление и регулирование, измерения и т. д.) и повышению их тех. уровня.

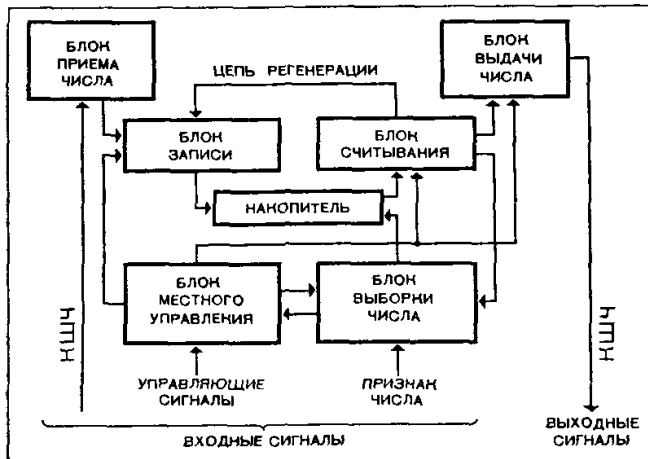
Основными показателями ЗУ являются: *запоминающего устройства емкость*; быстродействие, характеризующееся временем обращения к ЗУ; надежность работы, определяемая нечувствительностью к изменениям условий окружающей среды и напряжения питания; экономичность, характеризующаяся отношением затрат на изготовление ЗУ к емкости ЗУ.

Требования вычислительной техники к ЗУ в части повышения быстродействия и емкости при минимальных затратах носят противоречивый характер и, как правило, сочетать их в одном устройстве не удается. Поиски приводят к построению многоуровневой памяти — иерархии запоминающих устройств, в которую включаются ЗУ различных типов, и используются они так, чтобы можно было свести к минимуму их недостатки и максимально использовать преимущества.

Различают ЗУ следующих типов: по характеру обращения к ЗУ — *запоминающее устройство адресное* и *запоминающее устройство ассоциативное* (в первом обращении производится к ячейке, номер которой содержит код адреса, т. е. по адресу, во втором — по некоторой информации, содержащейся в самом слове, числе, т. е. по содержанию); по способу выборки информации из отдельных ячеек — *запоминающие устройства с произвольным обращением*, *запоминающие устройства с последовательным обращением* и *запоминающие устройства с циклическим обращением* (последние два типа, как правило, связаны с применением накопителя с перемещением информации относительно ее носителя — различные линии задержки, с перемещением носителя относительно средств считывания — ленты, карты, барабан и т. п. или с необходимостью периодического восстановления информации — электроннолучевые трубки); по функциональному назначению — *оперативные запоминающие устройства*, которые непосредственно связаны с арифметическим устройством и используются для запоминания промежуточных результатов вычисления и информации из внешнего ЗУ для текущих вычислений; *долговременные запоминающие устройства* — используются для длительного хранения неизменяемой в процессе работы ЦВМ информации (программы, константы), информация обычно записывается вне машины; *запоминающие устройства внешние* — предназначены для хранения всей вводимой в машину информации, отличаются большой емкостью при сравнительно небольшом быстродействии; *запоминающие устройства буферные* — для согласования скоростей работы отдельных устройств ЦВМ или внешних объектов между собой и ЦВМ; и как разновидность буферных ЗУ — *запоминающие устройства магазинные*, или стековые, предназначенные для согласования скоростей арифм. устройства и оперативного ЗУ.

Несмотря на многообразие типов ЗУ их функциональные особенности можно отобразить обобщенной блок-схемой (рис.), включающей следующие блоки: 1) *накопитель* — предназначен непосредственно для хранения зако-

дированной информации; 2) блок приема числа — предназначен для приема и, в случае необходимости, кратковременного хранения кода числа; 3) блок записи — преобразовывает код числа в сигналы, способные вызвать соответствующие изменения в состоянии запоминающей среды накопителя; 4) блок выборки — предназначен для преобразования признака числа в сигнал считывания его из накопителя; 5) блок считывания — преобразует сигналы накопителя в сигналы, стандартные для машины; 6) блок выдачи числа — предназначен для



Блок-схема запоминающего устройства.

кратковременного хранения кода числа; 7) блок местного управления — преобразует управляющий сигнал обращения к запоминающему устройству в последовательность сигналов, управляющих работой блоков ЗУ. В зависимости от типа ЗУ или принципов его построения возможны отклонения от приведенной схемы. Так, напр., в быстродействующих ЗУ иногда целесообразно не применять блоки приема или выдачи числа, в долговременных ЗУ отсутствует блок записи и т. д. ЗУ работает в режиме считывания определенного числа или в режиме записи. Запись числа производится подачей в ЗУ по кодовым шинам числа (КШЧ) кода числа, управляющего сигнала в блок местного управления и признака числа, в большинстве случаев являющегося кодом адреса запоминающей ячейки, в которую следует записать число. Координаты этой ячейки находятся блоком выборки числа методом расшифровки кода адреса, сравнением кода задаваемого адреса с кодом номера ячейки или выработкой признака свободной ячейки. Этим же блоком производится очистка ячейки и совместно с блоком записи — запись кода числа в накопитель. Считывание отличается от записи тем, что код числа, считанный из ячейки, передается через блок считывания в блок выдачи и, если необходимо, в блок записи для восстановления разрушенной при считывании информации. Физический адрес ячейки находят или по коду адреса, или по другим признакам, являющимся чаще всего кодом числа или его частью в случае ассоциативных ЗУ.

Развитие ЗУ идет по пути создания высокоэкономичных, надежных, малогабаритных

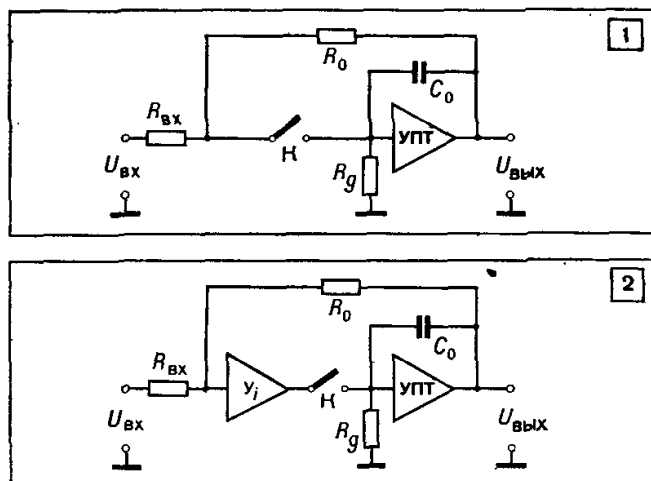
устройств большого быстродействия и емкости. Конечно, все эти качества не объединяются в одном ЗУ. В конце 60-х гг. выполнялись работы по созданию ЗУ с матрицами на монолитных интегральных схемах емкостью от 12 до 400 тыс. бит с циклом  $50 \div 200$  нсек. Разрабатывают ЗУ на тонких ферромагнитных пленках (плоских и цилиндрических) емкостью от 25 тысяч до 200 млн. бит с временем обращения 75 нсек  $\div$  1 мсек. Разработаны внешние ЗУ на дисках магнитных с плавающими головками емкостью до 10 млрд. бит.

Лит.: Крайзер Л. П. Быстродействующие ферромагнитные запоминающие устройства. М.—Л., 1964 [библиогр. с. 349—371]; Китович В. В. Оперативные запоминающие устройства на ферритовых сердечниках и тонких магнитных пленках. М.—Л., 1965 [библиогр. с. 233—236]; Запоминающие устройства современных ЭЦВМ. Пер. с англ. М., 1968. Ф. Н. Зыков.

**ЗАПОМИНАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО АВМ (ЗУ АВМ)** — комплекс технических средств, предназначенных для запоминания и воспроизведения машинных переменных. ЗУ АВМ бывают электромех., емкостные (конденсаторные) и ЗУ с магнитными носителями записи информации. В электромеханических ЗУ АВМ используются делители напряжения (потенциометры), в которых запоминаемым напряжениям соответствуют положения подвижного контакта (движка). Для приведения в действие движка делителя применяют непрерывные следящие системы и реверсивный шаговый двигатель, обеспечивающий длительное неизменное положение движка при отсутствии импульсов управления. Соединение приводного двигателя следящей системы с ведомыми осями потенциометров осуществляется по сигналам управления через электромагнитные муфты. Электромех. ЗУ характеризуются высокой точностью ввода-вывода запоминаемой информации (порядка сотых долей процента) и практически неограниченным временем запоминания при отключении аппаратуры от источников питания. Сопряжение таких ЗУ с АВМ производится подключением делителей напряжения к решающим цепям без промежуточных преобразователей. Оsn. недостатки этих ЗУ — малое быстродействие и сравнительно большой расход аппаратуры на единицу хранимой информации.

Чаще всего применяются емкостные ЗУ, в которых используется свойство конденсатора сохранять поданное на него напряжение. Подключение конденсаторных ячеек памяти к решающим цепям АВМ производится электромеханическими (релейными) или электронными коммутаторами. Чтобы предотвратить искажение хранимой информации вследствие разрядки конденсаторов на внешнюю нагрузку, в ЗУ АВМ вводятся развязывающие электронные усилители (повторители) с большим входным и небольшим выходным сопротивлением. Для этого используются решающие усилители постоянного тока (УПТ). Ячейка ЗУ АВМ показана на рис. 1. Время хранения конденсатором напряжения  $U_{\text{вых}}$  (ключ К разомкнут) обеспечивается в этой схеме за счет большой величины постоянной времени

разряда, равной  $T_p = C_0 R_g (1 + k)$ , где  $k$  — коэфф. усиления УПТ без обратной связи. Время запоминания напряжения  $U_{вх}$  определяется постоянной времени зарядки конденсатора  $T_3 = C_0 R_0$  и ограничивает быстродействие и точность работы схемы. Введение усилителя тока (повторителя)  $Y_i$  с коэфф. усиления по току  $k_i$  (рис. 2) уменьшает постоянную времени заряда  $T_3$  и тем самым — время заряда конденсатора в  $k_i$  раз, не снижая точности работы



1. Ячейка памяти запоминающего устройства АВМ.  
2. Ячейка памяти запоминающего устройства АВМ с усилителем тока.

схемы в режиме запоминания и не уменьшая времени хранения. Такая схема может обеспечить продолжительность времени приема информации в несколько десятков  $\mu\text{сек}$  при погрешности порядка десятых долей процента и длительности времени хранения порядка нескольких десятков  $\text{сек}$ . Общим недостатком конденсаторных ЗУ является ограниченное время хранения информации и относительно большой расход аппаратуры на единицу хранимой информации. Информационную емкость  $C$  ячейки ЗУ АВМ в двоичных единицах ( $\text{бит}$ ) можно оценить по формуле  $C = \log_2 1/\delta$ , где  $\delta$  — относительная погрешность воспроизведения величины хранимого напряжения. Напр., при  $\delta = 0,1\%$   $1/\delta = 10^3$  и  $C = 10$  двоичных единиц.

В ЗУ АВМ с магнитным носителем записи информации обычно используются свойства ферромагнетика с прямоугольной петлей гистерезиса сохранять состояние намагниченности, определяемое запоминаемым электр. сигналом. В ЗУ, предназначенных для запоминания отдельных уровней напряжения без промежуточного преобразования (модуляции), применяются ферритовые сердечники. Запоминание на таких элементах осуществляется путем непосредственного преобразования напряжений постоянного тока в пропорциональные приращения остаточного магнитного потока сердечника, а считываемые электр. сигналы пропорциональны уровню остаточной намагниченности сердечника. Наи-

меньшая погрешность при запоминании и считывании в элементах с тороидальными сердечниками составляет единицы процентов. Погрешности элементов памяти, построенных на сердечниках с разветвленными магнитопроводами (трансфлюксорах) с применением схем обратных связей, составляют десятые доли процента.

ЗУ АВМ на трансфлюксорах и тороидальных сердечниках с использованием метода идеального намагничивания и отрицательных обратных связей отличаются сравнительно небольшим быстродействием: продолжительность времени приема информации составляет десятые доли — единицы  $\text{сек}$ . Существенное повышение точности и емкости ЗУ АВМ на магнитных носителях достигается за счет промежуточного преобразования запоминаемых сигналов посредством модуляции и демодуляции. Преобразование по системе двоичной кодово-импульсной модуляции обеспечивает возможность использования комплекса запоминающих элементов, применяемых в цифровой вычисл. технике: магнитных лент, дисков, барабанов, ферритовых матриц. Погрешности таких ЗУ составляют десятые и сотые доли процента, а их быстродействие обеспечивает запоминание и воспроизведение сигналов с многократным транспонированием спектра сигналов в область высоких частот, что позволяет использовать ЗУ в АВМ с быстрой периодизацией решения. В специализированных АВМ широко используются ЗУ на магнитной ленте (напр., для статистической обработки информации), в которых запоминаемые сигналы предварительно преобразуются посредством какого-нибудь вида модуляции. Погрешности этих ЗУ составляют обычно десятые доли процента.

Лит.: Верлань А. Ф. Запоминающее устройство для электронных моделей. «Автоматика и приборостроение», 1963, № 3; Розенблат М. А. Магнитная память для непрерывных величин. «Вестник АН СССР», 1964, № 11; Зинкевич В. П. Идеальное намагничивание ферритовых сердечников с прямоугольной петлей гистерезиса, используемых в качестве элементов аналоговой памяти. В кн.: Вопросы технической кибернетики. М., 1966; Ламин Е. И. О квантовании информации в запоминающих устройствах аналоговой вычислительной машины. В кн.: Средства аналоговой и аналого-цифровой вычислительной техники. М., 1968.

Е. И. Ламин.

**ЗАПОМИНАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО АДРЕСНОЕ** — запоминающее устройство, в котором запоминающие ячейки или группы их имеют определенный машинный номер (адрес), соответствующий их расположению в запоминающей среде, а обращение к определенному участку этой среды производится в соответствии с кодом его адреса. При адресном обращении код адреса в точности указывает временно-пространственные координаты той части запоминающей среды, в которой находится информация с данным адресом (или в которую нужно ее записать).

Отличительной особенностью З. у. а. является наличие в них блока преобразования кода адреса в сигналы выборки. Этот блок выполняется по-разному в зависимости от типа

накопителя. Если носитель информации перемещается относительно средств считывания или перемещается информация относительно носителя, то З. у. а. называется циклическим, или З. у. а. с последовательной выборкой. ЗУ с дискретными запоминающими элементами, доступ к которым осуществляется с помощью т. н. линий выборки, наз. *запоминающими устройствами с произвольным обращением*. В ЗУ с последовательной выборкой записанная в накопитель информация сопровождается особой меткой — *маркером* (накопитель на магнитном барабане) или своим номером (накопитель на магнитной ленте). Момент выборки информации определяется совпадением числового значения кода адреса с номером, сопровождающим информацию, перемещающуюся относительно средств считывания, или равенством его значению числа, являющегося результатом суммирования маркерных импульсов. В ЗУ с произвольным обращением код адреса преобразовывается в сигналы выборки в определенных линиях выборки, называемых адресными, с помощью дешифраторов и формирующих устройств. Т. о., адресные линии определяют физический адрес запоминающей ячейки, предназначенной для хранения определенного слова. Для записи кода слова в запоминающую ячейку используют разрядные линии, объединяющие элементы накопителя, относящиеся к одному разряду. По разрядным линиям подаются сигналы, соответствующие записываемому коду. Они же служат и для вывода информации. С целью сокращения оборудования линии выборки проводят в нескольких измерениях — по нескольким координатам. Соответствующие линии по каждой координате возбуждаются согласно заданному коду, а выбираемые запоминающие элементы определяются совпадением возбужденных линий.

Многокоординатный принцип поиска базируется на использовании логических элементов совпадения на несколько входов с определенными пороговыми свойствами. При построении последней ступени дешифратора используются свойства самих запоминающих элементов, а также выходных устройств в запоминающем устройстве выполнять логические функции. Технические трудности построения многовходовых запоминающих элементов приводят к ограничению числа используемых координат выборки, поэтому чаще всего строятся двух- и трехкоординатные системы выборки. При считывании информации запоминающие элементы могут сохранять свое состояние, установленное в результате записи. Это ЗУ с неразрушающим считыванием. Если при считывании запоминающие элементы свое состояние не сохраняют, а устанавливаются в некоторое исходное состояние, то такое ЗУ называется ЗУ с разрушающим считыванием. Именно запоминающие элементы в первую очередь определяют технические характеристики ЗУ. Поэтому в названии ЗУ обычно содержится информация об используемых запоминающих элементах: накопитель на магнитной ленте, на

магнитном барабане, дисковое ЗУ, ЗУ на ферритах, ЗУ на тонких пленках и т. д. Чаще всего в З. у. а. используются сравнительно простые запоминающие элементы с разрушающим считыванием.

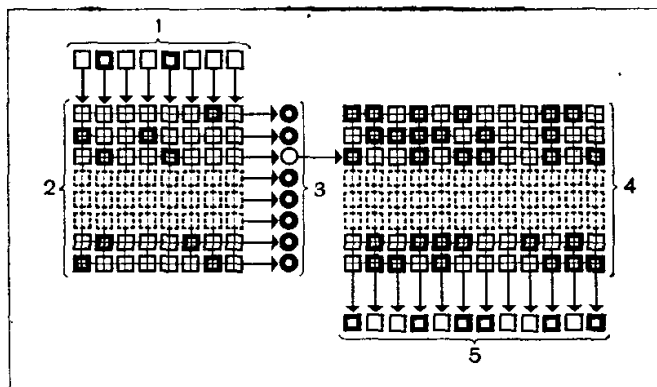
В ЗУ какого-либо одного типа, как правило, не удается получить характеристики, удовлетворяющие всем требованиям, предъявляемым к таким устройствам при использовании их в системах преобразования дискретной информации. Напр., повышение быстродействия ЗУ возможно только при определенном снижении его емкости. Поэтому в большинстве случаев ЗУ в ЦВМ образуют некоторую иерархическую структуру, на верхних ступенях которой находятся ЗУ с высоким быстродействием и сравнительно малой емкостью, на нижних — медленнодействующие ЗУ большой емкости. В зависимости от класса ЦВМ таких уровней бывает 2—4, а в *вычислительных системах* их число достигает 6—7.

Лит.: Гутенмахер Л. И. Электронные информационно-логические машины. М., 1962 [библиогр. с. 198]; Крайзер Л. П. Быстродействующие ферромагнитные запоминающие устройства. М.—Л., 1964 [библиогр. с. 349—371].

Ф. Н. Зыков.

**ЗАПОМНАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО АССОЦИАТИВНОЕ** — запоминающее устройство (ЗУ), информация в котором извлекается не по адресу, а по некоторым признакам этой информации в результате одновременного сравнения всех или группы хранимых слов с заданным признаком. Признак, принадлежащий слову в памяти, называют ассоциативным, а признак, по которому производится поиск, — признаком опроса (см. рис.).

Принципы построения З. у. а. определяются видом поиска информации — простым или сложным. Простой поиск заключается в нахождении слова, ассоциативный признак которого совпадает с признаком опроса. Под сложным поиском подразумевается нахождение экстремума, всех чисел внутри или вне заданных



Упрощенная блок-схема ассоциативного запоминающего устройства: 1 — признак опроса; 2 — ассоциативные признаки слов; 3 — индикаторы совпадения; 4 — основная информация; 5 — выходы основной информации.

пределов, чисел, равных или больших заданного, равных или меньших заданного, ближайших больших, ближайших меньших и т. п. Если при простом поиске признаку опроса всегда соответствует только одно слово в

памяти, причем опрос всегда ведется по одним и тем же разрядам, то такой поиск может выполнять наиболее простое З. у. а. Конструкция З. у. а. усложняется, если опрос ведется по любым разрядам и если признаку опроса соответствует одновременно несколько слов. Разделение многозначного ответа и последовательное извлечение слов производятся либо аппаратными методами, либо алгоритмическими. Возможно и упорядоченное извлечение слов в порядке возрастания или убывания их величин.

Сложный поиск выполним в З. у. а., предназначенном для простого поиска с алгоритмическим разделением многозначного ответа. Если в каждую запоминающую ячейку такого ЗУ ввести еще дополнительные логические, арифметические и *запоминающие элементы* и обеспечить соответствующие соединения между ними не только в пределах запоминающей ячейки, но и с соседними ячейками, то, кроме ассоциативного поиска, появляется возможность выполнения и групповых арифметических и логических операций.

Одновременный просмотр всей информации в З. у. а. требует применения запоминающих элементов с неразрушающим считыванием и реализующих логические функции типа равнозначности или неравнозначности. Наиболее полно этим требованиям отвечают криотроны (см. *Криогенные элементы вычислительной техники*), однако возможно создание З. у. а. и на других элементах — многоотверстных ферритах, биаксах, туннельных диодах, магнитных пленках и транзисторных элементах.

Емкость разработанных З. у. а. — порядка нескольких тысяч слов при цикле обращения от долей до единиц микросекунд. Из-за недостаточной емкости в современных машинах З. у. а. используются в основном в качестве буферных ЗУ. Предполагается, что для пользования З. у. а. в качестве основной памяти машины необходима емкость  $10^7 \div 10^8$  бит. Такое применение З. у. а. может привести к существенному упрощению организации вычислительного процесса и приблизить его к обычному языку математических формул. З. у. а. эффективны при решении информационно-справочных задач, задач распознавания и т. п., когда хранимая информация либо поступающие запросы не являются строго упорядоченными и когда единственным методом поиска нужной информации в адресном ЗУ остается перебор, т. е. поочередный, слово за словом, просмотр всей информации или большей ее части.

З. у. а. может также дать заметный выигрыш в производительности при решении задач, требующих обработки в реальном масштабе времени очень больших массивов неупорядоченной информации и связанных, напр., с телеметрией, с работой систем связи, радиолокационных систем оповещения и наведения, а также с управлением воздушным транспортом и т. п.

Лит.: Краймер Л. П. [и др.]. Ассоциативные запоминающие устройства. Л., 1967 [библиогр.

с. 175—181]; Хэнлон Э. Ассоциативные запоминающие устройства. В кн.: Запоминающие устройства современных ЭЦВМ. Пер. с англ. М., 1968.

И. Д. Войтович, Г. А. Михайлов.

**ЗАПОМИНАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО БУФЕРНОЕ** — запоминающее устройство, предназначенное для согласования скоростей работы различных устройств ЦВМ или внешних объектов между собой и с ЦВМ. Отдельные устройства между собой и с ЦВМ. Отдельные устройства, использующие различные принципы построения (от электронных схем до электромеханических), не могут работать с одинаковой скоростью. Чтобы избежать потерь времени из-за несогласованной (во времени) работы устройств, применяется З. у. б., которое накапливает информацию в темпе медленнее действующего устройства и выдает ее со скоростью быстрого действующего или наоборот. Для согласования скоростей работы внешних устройств с ЦВМ в качестве буферных применяются чаще всего ЗУ на магн. барабанах, дисках или на ферритах, обменивающиеся информацией с осн. оперативным ЗУ машины. Для согласования скоростей работы отдельных устройств машины (чаще всего ОЗУ и арифм. устройства) в качестве буферных применяются более быстродействующие ОЗУ небольшой емкости: ЗУ на тонких магн. пленках, регистрах различной модификации и т. п.

Ф. Н. Зыков.

**ЗАПОМИНАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО ВНЕШНЕЕ**, внешний накопитель — запоминающее устройство (ЗУ) большой емкости, обменивающееся информацией в ходе решения задач с более быстродействующим внутренним запоминающим устройством цифровой вычислительной машины (ЦВМ), напр., с оперативным запоминающим устройством (ОЗУ). Увеличение емкости путем расширения внутренних быстродействующих ЗУ ЦВМ нецелесообразно из-за их высокой стоимости и сравнительной тех. сложности, поэтому осн. объем информации целесообразно хранить в З. у. в., в которых стоимость хранения единицы информации на один — несколько порядков ниже, чем в ОЗУ. Из совр. тех. средств записи и хранения информации указанным требованиям отвечают и широко применяются в качестве З. у. в. следующие устройства магнитной записи: *лента магнитная* (МЛ), *барабан магнитный* (МБ), *диск магнитный* (МД), *карты магнитные* (МК). Эти устройства относятся к группе ЗУ с подвижным носителем. Наличие механически перемещающихся узлов является их основным недостатком. С другой стороны принцип перемещения носителя позволяет (по сравнению с неподвижным носителем) значительно упростить систему выборки информации и при больших емкостях ЗУ резко уменьшить стоимость хранения единицы информации.

В ЗУ на МБ и МД носитель находится в непрерывном вращении (МБ — цилиндрическая поверхность, МД — плоская поверхность диска). Скорость перемещения носителя порядка  $40\text{—}60$  м/сек. Способ записи бесконтактный — между магнитной головкой (МГ) и носителем существует зазор около  $5\text{—}10$  мк для «плаваю-



щих» и  $20 \div 30$  мк для неподвижных МГ. Наличие зазора обеспечивает надежность и долговечность работы ЗУ. В ЗУ на МЛ лентопротяжный механизм включается и перемещает ленту у блока МГ только на время записи (считывания) информации. Скорость перемещения ленты в рабочем режиме — порядка  $1 \div 4$  м/сек. Способ записи, как правило, контактный: лента касается блока МГ. В ЗУ на МК механизм перемещения карты узла записи — считывания находится в постоянном движении, комплект карт находится в покое. При

формации. При последовательной выборке для поиска заданного блока информации производится последовательный перебор адресов всех хранимых блоков вплоть до момента совпадения текущего адреса с заданным. Последовательный способ выборки характерен большим диапазоном времени выборки. Для одного и того же типа устройства время выборки может составлять от нескольких миллисекунд до нескольких минут. В случае произвольной выборки любой заданный блок информации выбирается за постоянный промежуток вре-

Характеристики внешних запоминающих устройств

Тип ЗУ	Емкость, млн. двоичных знаков	Среднее время выработки, сек	Скорость обмена, строк/сек	Скорость вращения, об/мин
Магнитные барабаны	0,17—200	0,00125—0,385	$12 \cdot 10^3$ — $500 \cdot 10^3$	870—24 000
Магнитные барабаны сверхболь- шие	до 7784	0,00125—0,385	$12 \cdot 10^3$ — $500 \cdot 10^3$	870—24 000
Магнитные диски	0,6—12 500	0,008—0,8	$60 \cdot 10^3$ — $100 \cdot 10^4$	900—2400
Магнитные диски со сменными пакетами	4—70	0,065—0,5	$60 \cdot 10^3$ — $80 \cdot 10^4$	2400
Магнитная лента	200—400 (емкость бобины)	от 10 сек до нескольких минут	$20 \cdot 10^3$ — $300 \cdot 10^3$	—
Магнитные карты с произвольной выборкой	5—5400	0,1—0,7	$28 \cdot 10^3$ — $100 \cdot 10^3$	—

выборке карты она транспортируется к узлу записи — считывания и перемещается у блока МГ со скоростью, составляющей для разных типов МК от 1 до 10 м/сек. Способ записи в большинстве случаев контактный. Такой способ является одним из недостатков МЛ и МК, т. к. приводит к быстрому износу носителя и головок. Осн. тех. характеристиками З. у. в. являются: е м к о с т ь устройства — количество двоичных знаков или символов (определенной разрядности), которое одновременно может храниться в ЗУ; в р е м я в ы б о р к и — время, необходимое для отыскания нужной информации и занесения ее в другое ЗУ или в регистр; с к о р о с т ь обмена информацией — количество двоичных знаков или символов, переданных или принятых З. у. в. за одну секунду. С точки зрения накопления информации З. у. в. подразделяются на ЗУ с несменяемым носителем или ЗУ с постоянной емкостью (сюда относятся МБ и МД со стационарными дисками) и ЗУ со сменным носителем (это — МЛ, МК и МД со сменными пакетами). ЗУ со сменным носителем позволяет создать библиотеки, картотеки и архивы и хранить практически неограниченные объемы данных.

По способу выборки информации З. у. в. подразделяются на ЗУ с последовательной выборкой (МЛ и некоторые типы МК) и ЗУ с произвольной выборкой (МБ, МД и МК).

Так как обычно обмен З. у. в. с ОЗУ осуществляется нормированными порциями — блоками (напр., объемом, достаточным для заполнения куба ОЗУ), понятия «последовательная выборка» и «произвольная выборка» в применении к З. у. в. относят к выборке блока ин-

мени. Время выборки при этом для различных типов З. у. в. находится в пределах от нескольких мсек до 0,8 сек. Для оценки возможностей различных типов З. у. в. приведена таблица диапазонов их осн. характеристик. В крупных системах обработки информации одновременно применяются разные типы З. у. в. Сочетание и использование их особенностей позволяет наиболее оптимальным путем организовать работу ЗУ системы. Напр., большие объемы информации выгодно хранить на МЛ, а последующую передачу информации в ЦВМ осуществлять путем предварительной перезаписи группы очередных блоков в более быстродействующие ЗУ на МБ или МД. Кроме рассмотренных, существует ряд других ЗУ, работающих на основе магнитной записи. ЗУ на о т р е з к а х магнитной ленты. На поворачивающейся турели установлено 64 кассеты (катушки) с отрезком ленты шириной 16 мм и длиной 9 м. Механизм выборки подводит нужную кассету и вытягивает из нее отрезок ленты, который перемещается у блока МГ. После окончания считывания (записи) отрезок ленты вытягивается назад в кассету. ЗУ с з а м к н у т ы м и п е т л я м и магнитных лент. В контейнере устройства помещается 16 ведущих узлов, перемещающих каждый петлю замкнутой МЛ. В рабочем режиме осуществляется привод только одной, выбранной, петли. Один блок МГ, перемещающийся дискретным приводным механизмом, обслуживает все петли контейнера. ЗУ на б о л ь ш и х магнитных картах. В поворачивающемся цилиндрическом магазине, разбитом на 20 ячеек, которые в свою очередь разбиты на блоки, хранящие по 10 карт, находится 2000 карт.



Путем поворота магазина и подачи по вертикали соответствующего блока выбранные 10 карт подводятся к исполнительному механизму, который захватывает (за индивидуальный для каждой из 10 карт выступ) нужную карту и перемещает ее у блока МГ, а после окончания записи (считывания) возвращает ее на место.

Проводятся работы по созданию ЗУ, основанных на таких перспективных способах действия, как фотооптический способ с высокоскоростным сканированием при помощи безынерционного оптического преобразователя; способ термопластической записи с применением лазерной техники; ферроэлектрический способ записи; магнитная запись с оптическим воспроизведением и др. Однако на пути практического построения на их базе ЗУ большой емкости возникает ряд ограничений и существенных тех. трудностей. Для одних, напр., механизм с носителем информации должен находиться в вакууме, для других необходима сложная оптическая система и наличие точных узлов механического перемещения.

Лит.: Каган Б. М., Адасько В. И., Пурэ Р. Р. Запоминающие устройства большой емкости. М., 1968 [библиогр. с. 314—317]; Макурович В. Г. Магнитная запись в вычислительной технике. М., 1968 [библиогр. с. 166—167]; Хогленд А. Цифровая магнитная запись. Пер. с англ. М., 1967 [библиогр. с. 270—273]. Р. Я. Черняк.

**ЗАПОМИНАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО ДОЛГОВРЕМЕННОЕ** — см. Долговременное запоминающее устройство.

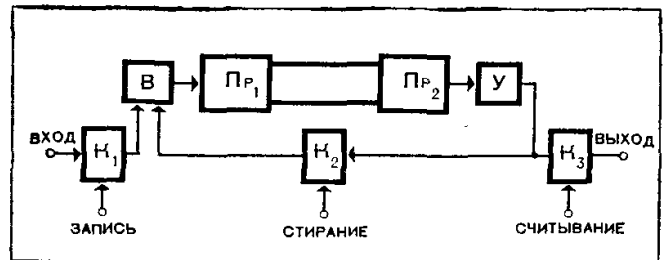
**ЗАПОМИНАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО МАГАЗИННОЕ** — запоминающее устройство, состоящее из нескольких, расположенных друг под другом регистров, соединенных последовательно и работающих таким образом, что только верхний регистр имеет связь с внешней системой. При записи данных в З. у. м. каждое слово вводится в верхний регистр, «проталкивая» вниз содержимое всех регистров. При чтении слова из З. у. м. считывается содержимое только верхнего регистра, при этом содержимое всех остальных перемещается вверх, заполняя освободившееся место. Принцип работы магазинного ЗУ: «первым в З. у. м. — последним из З. у. м.». Описанный режим работы регистров можно обеспечить аппаратным либо программным путем. Обычно этот режим осуществляется не последовательными повторяющимися передачами содержимого регистров, а переадресацией ячеек, используемых в обычном ЗУ в качестве регистров З. у. м. В этом случае адрес последней занятой (или первой свободной) ячейки наз. индикатором З. у. м. и хранится в определенном регистре или ячейке ЗУ.

З. у. м. широко используют для обработки и теор. исследований вложенных друг в друга процессов (трансляция скобочных записей, вычисление выражений в бесскобочной форме записи, обработка сигналов прерывания, адресов возврата, циклов в цикле и т. д.).

Аппаратно реализованное З. у. м. используется, напр., в вычисл. машинах общего назначения «БЭСМ-6», «Днепр-2» и в ряде специализированных машин.

Близкое к З. у. м. запоминающее устройство стекковое отличается от З. у. м. тем, что в нем несколько верхних регистров (в общем случае все регистры) имеют связь с внешней системой. Анализ содержимого этих регистров может предшествовать процессу записи и чтения в стекковом ЗУ (который осуществляется так же как и для З. у. м.). И. В. Вельбицкий.

**ЗАПОМИНАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО НА ЛИНИЯХ ЗАДЕРЖКИ** — запоминающее устройство (ЗУ), хранение информации в котором осуществляется за счет циркуляции информа-



Блок-схема запоминающего устройства на линиях задержки.

ционных сигналов по замкнутому контуру, содержащему линию задержки. Практически запоминание в таком устр-ве обеспечивается подключением выхода линии задержки через усилитель на ее вход, в результате чего несущие информацию импульсные сигналы, поданные на вход линии, могут циркулировать в ней сколь угодно долго. Благодаря свойству линий задержки передавать сигналы со входа на выход с запаздыванием во времени, во много раз превышающим длительность сигналов, существует возможность хранить в таком контуре много бит информации. Емкость З. у. на л. з. определяется количеством импульсов, которые могут одновременно циркулировать в линии. Увеличение емкости такого ЗУ связано с увеличением времени задержки линии и частоты следования сигналов и практически ограничивается величиной затухания сигналов и полосой пропускания линии. Этими характеристиками определяется выбор типа линий задержки для ЗУ. В ЗУ применяют преимущественно ультразвуковые линии задержки, в которых для звуководов используют ртуть, кварц, сплавы магния, никеля и др. материалы с малой скоростью распространения сигналов ( $1 \div 6$ )  $10^3$  м/сек и сравнительно небольшой степенью затухания колебаний.

Информационные сигналы подаются на вход ключа  $K_1$  (рис.) и при наличии сигнала «запись» коммутируются на вход возбуждителя В входного преобразователя  $Пр_1$ , который преобразует электр. сигналы в ультразвуковые. Выходной преобразователь  $Пр_2$  производит обратное преобразование. Сигналы с выхода линии по цепи обратной связи, состоящей из усилителя У и ключа  $K_2$ , коммутируются на вход возбуждителя В. При необходимости полной или частичной очистки З. у. на л. з. на вход ключа  $K_2$  подается на определенное время запрещающий сигнал «стирание», закрывающий ключ и разрывающий тем самым

цепь обратной связи. Вывод информации осуществляется с выхода ключа  $K_3$  при наличии разрешающего сигнала «считывание».

В ультразвуковых линиях задержки используются два способа преобразования сигналов — пьезоэлектр. и магнитострикционный. Применение того или иного типа преобразователя определяется возможностью его согласования со звуководом линии, чтобы потери мощности сигналов в ЗУ были наименьшими. Пьезоэлектрический преобразователь представляет собой пластину из кварца или др. материала, обладающего пьезоэлектр. свойствами, с металлическими обкладками, на которые подаются электр. сигналы. Такие преобразователи используются в ртутных и кварцевых линиях задержки. Магнитострикционный преобразователь — катушка на концах звукопровода в виде проволоки, тонкостенной трубки или ленты из ферромагн. материала с резким проявлением магнитострикции. Емкость ЗУ на ультразвуковых линиях задержки, как правило, составляет от нескольких сот до нескольких тысяч бит. Однако за счет использования новых материалов звуководов и новых конструкций линий возможно увеличение емкости ЗУ до нескольких десятков тысяч бит. Основ. недостатком З. у. на л. з. является большое время выборки — в среднем — половина времени задержки линии.

Несмотря на сравнительно небольшие объемы хранимой информации и малое быстродействие, З. у. на л. з. до настоящего времени находят применение благодаря низкой стоимости, простоте эксплуатации и надежности. Их используют в малых вычисл. машинах с последовательной обработкой информации, в системах связи, телевидении, радиолокационных системах.

Н. К. Бабенко.

**ЗАПОМИНАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО ОПЕРАТИВНОЕ** — см. *Оперативное запоминающее устройство*.

**ЗАПОМИНАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ ОБРАЩЕНИЕМ** — запоминающее устройство (ЗУ), в котором запись или считывание слова (числа) осуществляется последовательно разряд за разрядом. Последовательное обращение большей частью обусловлено использованием в ЗУ накопителей с перемещением носителя информации и средств считывания — записи один относительно другого (накопители на картах, лентах, барабанах, дисках, электроннолучевых трубках и оптические) или с перемещением сигналов, отображающих хранимую информацию, относительно запоминающей среды (различные линии задержки). В большинстве случаев З. у. с п. о. строится по принципу адресной организации обращения (см. *Запоминающее устройство адресное*), т. е. поиск физ. адреса места расположения информации производится в соответствии с кодом адреса. Для реализации адресного обращения записываемая в накопитель информация сопровождается особой меткой-маркером, заносимой в накопитель при записи информации (накопитель на магн. ленте) или предварительной разметкой (накопитель на

магн. барабане). Информация может сопровождаться также своим номером (разметка зон в накопителях на ленте). Момент нахождения физ. адреса определяется совпадением числового значения кода адреса с номером, сопровождающим информацию, или равенством этого значения результату суммирования маркерных импульсов.

Так как З. у. с п. о. работает в последовательном режиме, а большинство ЦВМ работают в параллельном режиме, то возникает необходимость согласования З. у. с п. о. с другими устройствами ЦВМ. Эта задача решается в основном двумя способами: применением преобразователей параллельного кода в последовательный и наоборот или использованием нескольких (по числу разрядов в машинном слове) частей накопителя (дорожка барабана, электроннолучевая трубка и т. д.), каждая из которых предназначена для хранения одного разряда хранимых слов. Первый способ менее экономичен и требует больших затрат времени на обращение к ЗУ. Второй более экономичен, но требует наличия единой синхронизации для всех частей накопителя и определенных соотношений между емкостью части накопителя и требуемой емкостью всего ЗУ. Возможен также компромиссный вариант параллельно-последовательной организации работы ЗУ, при котором машинное слово передается последовательно группами разрядов, а группа разрядов — параллельно (напр., в ЗУ на магн. барабанах и лентах). Скорость работы З. у. с п. о. определяется способом организации перемещения информации или средств считывания один относительно другого (от мех. перемещений в накопителях на перфоленте до управляемых перемещений электронного луча). Наименьшую скорость имеют ЗУ, использующие мех. перемещения. Однако такие ЗУ широко распространены благодаря большой емкости и хорошим эконом. показателям. Практически в составе всех вычисл. систем имеется ЗУ большого объема с использованием накопителей на магн. ленте, барабане или дисках. По тех. данным (невysокая скорость, большие емкости) эти устр-ва занимают место на низшей ступени иерархии ЗУ. Появление оптических ЗУ, отличающихся повышенными скоростями, позволило использовать З. у. с п. о. на более высоких ступенях иерархии.

Ф. Н. Зыков.

**ЗАПОМИНАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОБРАЩЕНИЕМ** — запоминающее устройство (ЗУ), в котором время обращения по произвольному адресу не зависит от взаимного расположения запоминающих ячеек в накопителе. З. у. с п. о., как правило, разрабатываются на базе накопителей, по природе своей не требующих циклического или последовательного считывания (записи).

Наиболее характерными чертами З. у. с п. о. является, с одной стороны, наличие в запоминающей среде линий выборки и, с другой — формирователей сигналов выборки, которые приводятся в действие в соответствии с признаком слова или кодом его адреса. Обращение

к запоминающей ячейке (см. *Ячейка запоминающего устройства*) осуществляется в них в результате совпадения линий выборки в пространстве и сигналов выборки в них по времени.

Накопитель З. у. с п. о. строится гл. обр. на основе дискретных *запоминающих элементов*, в качестве которых чаще всего применяются ферритовые сердечники, монолитные ферриты и ферритовые пластины, тонкие магнитные пленки и полупроводниковые матрицы в интегральном исполнении.

В процессе работы ЦВМ порядок обращения к ЗУ обычно определяется результатами вычислений на предыдущем этапе, т. е. не всегда может быть использован естественный порядок следования не только числовой информации, но и команд. При такой организации вычислительного процесса наиболее эффективным оказывается применение З. у. с п. о. Поэтому в качестве ЗУ, работающего непосредственно с *арифметическим устройством* или устройством управления, как правило, используется именно такое ЗУ. В тех же случаях, когда по каким-либо соображениям в оперативном ЗУ применяется накопитель с циклической выборкой, работу его организуют так, что за один цикл производится выборка только по одному адресу, т. е. равнодоступность в этом случае достигается за счет потери скорости.

Ф. Н. Зыков.

**ЗАПОМИНАЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТ** — элемент автоматических и вычислительных устройств, принимающий различные состояния, характеризуемые значениями величин, отображающих информацию, и сохраняющий эти состояния определенное время для последующего использования в процессе переработки информации.

В соответствии с представляемой формой информации З. э. могут быть аналоговыми и цифровыми. Аналоговый З. э. принимает произвольное состояние в определенном диапазоне запоминаемых величин, напр., напряжение на обкладках конденсатора, остаточная магн. индукция магн. материала и пр. Цифровые З. э. принимают фиксированное число состояний, каждое из которых ставится в соответствие определенной цифре. В *вычислительной технике* наиболее распространены элементы с двумя устойчивыми состояниями для представления разряда двоичного числа — *бита*. З. э. применяют преимущественно для построения логич. цепей и *регистров* как составных частей *процессоров* машины (*триггер*) и построения *запоминающих устройств* (ЗУ).

По физ. структуре З. э. для ЗУ могут быть дискретными или входить в состав запоминающих сред. Дискретные З. э. представляют собой автономные физ. единицы (*криотрон*, *трансфлюксор*), которые конструктивно могут быть объединены в *ячейки запоминающего устройства* или *матрицу запоминающую* или изготовлены как составная часть матрицы методами групповой технологии (*матрица ферритовая многоотверстная*, *тонкопленочная матрица*). Запоминающие среды отличаются тем, что все их участки имеют равноценные свойства. В качестве З. э. служат участки ло-

кализированные с помощью средств считывания — записи в пространстве (*ленты магнитные*, *цилиндрические тонкие магн. пленки*) или в пространстве и времени (*магнитострикционные*, *акустические ЗУ*).

По устойчивости хранения информации различают З. э. устойчивые, т. е. сохраняющие информацию произвольное время в процессе нормальной эксплуатации (феррит с прямоугольной петлей гистерезиса, сегнетоэлектрик) и неустойчивые, с самопроизвольным стиранием информации (конденсаторные ЗУ, ЗУ на электроннолучевых трубках). В последнем случае информацию надо периодически восстанавливать. Наиболее распространены устойчивые З. э. Среди этих элементов различают З. э., сохраняющие записанную информацию при отключении питания (магнитные элементы) и не сохраняющие ее — *триггер*, *туннельный диод полупроводниковый*. Особую группу представляют собой З. э. со считыванием без разрушения информации, в которых состояние З. э. не изменяется при многократном считывании. Часть З. э. этой группы допускает смену информации в процессе работы (*биакс*, *трансфлюксор*, *криотрон*, *диски магнитные*, *магн. ленты* и пр.); их широко применяют для построения адресных ЗУ и *запоминающих устройств ассоциативных*. Другая часть этой группы З. э. допускает однократную запись информации, которая, как правило, выполняется во время изготовления накопителя установкой элементов связи в запоминающую матрицу (диодных, резистивных, индуктивных), засвечиванием или перфорацией определенных участков носителя (оптические ЗУ, перфорируемые носители) и др. способами. Однажды изготовленный набор таких З. э. далее служит только для считывания с него информации и широко применяется в *долговременных запоминающих устройствах*.

Для построения запоминающих устройств используются З. э. с различными принципами работы (от электромеханических и пневматических до электромагнитных и оптических). Основ. направлениями развития З. э. являются повышение скоростей записи и считывания информации и улучшение технологичности изготовления З. э. в условиях массового производства. В вычисл. машинах чаще всего применяют магнитные З. э. Так, большинство внешних ЗУ выполнено на носителях с магнитным покрытием (*барабаны магнитные*, *магн. диски* и *ленты*). При изготовлении быстродействующих *оперативных запоминающих устройств* используют ферритовые З. э. (ферритовые сердечники с внеш. диаметром 0,3—2 мм и временем переключения 0,2—0,4 мксек). Для повышения скорости работы ЗУ применяют З. э. на цилиндрических и плоских тонких магн. пленках с временем переключения от единиц до десятков наносекунд. Повышение скорости, плотности записи информации и улучшение технологичности производства ЗУ достигается применением полупроводниковых матриц в интегральном исполнении и оптических ЗУ с использованием лазерного луча. Ф. Н. Зыков.

**ЗАЦИКЛИВАНИЕ** — бесконечно повторяющееся выполнение какого-нибудь участка (цикла) программы. Обычно причиной З. является ошибка в программе, а иногда его организуют специально и используют, напр., в тестах для ЭЦВМ.

**ЗАЩИТА ПАМЯТИ** — см. *Памяти защита*.

**ЗНАКОВЫЙ РАЗРЯД** — разряд регистра или сумматора арифметического устройства или ячейки запоминающего устройства цифровой вычислительной машины, в котором хранится код знака представляемого числа. Принято знак «+» обозначать через «0», а знак «-» — через «1». В машинах с плавающей запятой, в отличие от машин с фиксированной запятой, при представлении чисел требуется два З. р.: один — для представления знака мантиссы, другой — для представления знака порядка. Кроме того, при использовании в ЦВМ для представления чисел с фиксированной запятой модифицированных, обратного и дополнительного кодов знак числа также изображается как двухразрядный код «00» в случае положительных чисел и как код «11» — в случае отрицательных чисел. Это дает возможность легко определять ситуацию, при которой произошло переполнение разрядной сетки машины (признаком переполнения является наличие кода «01» либо кода «10» в З. р.).

При выполнении в ЦВМ операций сложения (вычитания) знак результата получается автоматически, поскольку в операции участвуют не сами числа, а их коды (включая и код знака). При выполнении операций умножения (деления) знак результата определяется сум-

мированием кодов З. р. множимого и множителя (делимого и делителя) по mod 2. См. также *Операции над числами*.

В. Н. Коваль.

**ЗНАЧАЩИЕ ЦИФРЫ** п р и б л и ж е н н о - г о ч и с л а — все верные цифры приближенного числа, кроме нулей, стоящих слева от первой отличной от нуля цифры. Все цифры некоторого числа  $k$  считают верными, если абс. погрешность числа  $k$  не превышает половины единицы разряда последней цифры этого числа. Относительная погр. числа  $k$ , имеющего  $n$

верных цифр, равна  $\delta_k = \frac{1}{z \cdot a^{n-1}}$ , где  $z$  —

первая З. ц. числа  $k$ ,  $a$  — основание счисления. Прибл. числа следует записывать, сохраняя только верные цифры.

П р и м е р. В числе 0,003070 первые три нуля не являются З. ц., т. к. они служат только для установления десятичных разрядов других цифр. Другие два нуля являются З. ц., т. к. первый из них находится между З. ц. «3» и «7», а второй нуль указывает, что в прибл. числе сохранен десятичный разряд  $10^{-6}$ . Если же в числе 0,003070 последняя цифра не является значащей, то это число должно быть записано в виде 0,00307. С этой точки зрения числа 0,003070 и 0,00307 не равноценны, т. к. в первом числе имеется четыре З. ц., а во втором — три. В первом случае прибл. число является результатом измерения или вычислений с погр. 0,0000005, во втором — с погр. 0,000005.

Понятие З. ц. используют в практических расчетах и при вычислениях на ЭВМ.

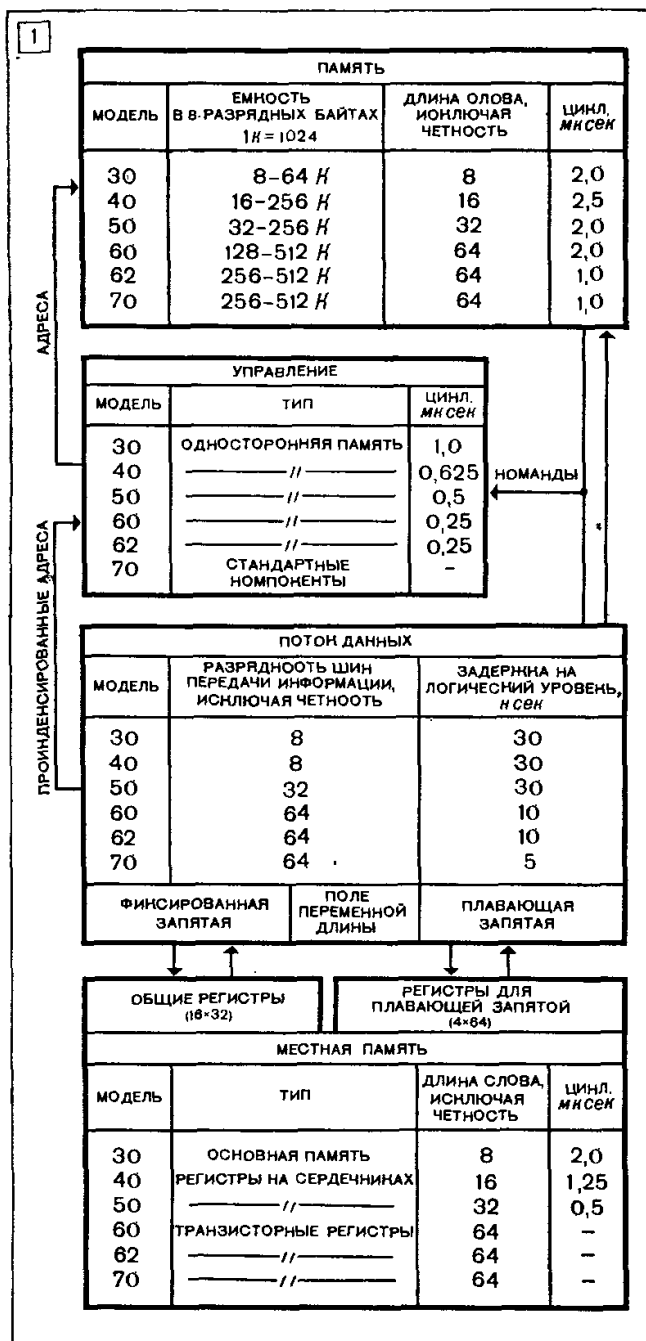
Т. В. Решетняк.



**ИБМ** (International Business Machines) — см. «*Интернейшенал бизнес машинз корпорейшен*». «**IBM-360**» — семейство цифровых вычислительных машин с универсальной организацией. Разработала эти машины фирма «*Интернейшенал бизнес машинз корпорейшен*». В апреле 1964 было объявлено о выпуске шести программно совместимых моделей семейства. Они имели единую систему команд и отличались друг от друга объемом используемой памяти и производительностью. Первые образцы машин семейства поступили заказчикам во второй половине 1965, а к 1970 было разработано около 15 моделей, из которых самая малая («IBM-360-20-1») примерно в 50 раз дешевле и в 100 раз менее производительна самой большой «IBM-360-195». Несколько моделей не доведены до серийного производства.

«IBM-360» — семейство вычисл. машин с единым комплексом принципов построения, тех. средств, операционных программ и методов тех. обслуживания. В машины «IBM-360» заложен ряд новых принципов, делающих их универсальными и позволяющих с одинаковой эффективностью использовать в различных областях экономики, науки и техники. Наиболее важными из этих принципов являются: 1) новая элементная и технологическая база машин 3-го поколения (см. *Вычислительная машина*), обеспечивающая принципиальную реализуемость проекта «IBM-360»; 2) программная совместимость всех моделей семейства — любая из программ дает один и тот же результат на любой модели семейства, имеющей, по крайней мере, требуемую память и устройства ввода — вывода. Микропрограммный принцип управления обеспечивает программную совместимость некоторых малых моделей «IBM-360» с ранее выпускавшимися машинами фирмы (режим эмулирования); 3) универсальная операционная система (ОС), содержащая для некоторых моделей системы до двух млн. команд. ОС «IBM-360» содержит трансляторы для нескольких, наиболее распространенных языков программирования и обеспечивает различные скорости и качество трансляции (стоимость создания ОС машин серии «IBM-360» соизмерима со стоимостью изготовления самой системы); 4) универсальность системы команд и организации, достигаемая следующим образом. Осн. вычисл. возможности семейства машин обеспечиваются т. н. стандартной системой команд (86 команд). Добавление команд десятичной арифметики (8 команд) к стандартному набору позволяет получить систему команд

для эконом. расчетов. При добавлении операций с плавающей запятой (44 команды) получается система команд для научных расчетов. Добавлением средств защиты памяти к эконом. и научной системам команд можно получить универсальную систему команд (около 140 команд); 5) возможность подключения большого числа различных *внешних устройств* и стандартного сопряжения этих устройств с процессором через аппаратуру каналов связи. Сопряжение устройств с процессором выполнено таким образом, что обеспечивает единый



1. Логическая структура системы «IBM-360».

способ управления ими независимо от их физ. природы и числа, а также позволяет объединять несколько машин в одну иерархическую *вычислительную систему*. Большинство моделей «IBM-360» — это не машины, а вычисл.



Центр. вычислитель «IBM-360» имеет 16 общих регистров для хранения слов (индексов или операндов с фиксированной запятой) и 4 регистра для хранения двойных слов (операндов с плавающей запятой). Физически эти регистры могут быть выполнены на активных элементах, в виде отдельного блока памяти или как часть основной памяти. В любом случае адреса и функции общих регистров одинаковы. Общие регистры пронумерованы от 0 до 15 и выбираются с помощью 4-разрядного адресного поля, обозначаемого буквой *R* в команде.

*PSW* запоминается в отдельной, соответствующей причине прерывания, ячейке памяти. В «IBM-360» возможны пять классов прерываний (в порядке приоритета обслуживания) — от схем контроля, от ввода — вывода, при обращении к супервизору, внешние и программные.

Обмен информацией между внешними устройствами и памятью осуществляется через работающие независимо друг от друга селективный и мультиплексный каналы (см. Устройство обмена ЦВМ). Обмен осуществляется

Основные характеристики некоторых моделей семейства вычислительных машин «IBM-360»

Наименование	Год изготовления	Время сложения/умножения, мксек	Емкость ОЗУ на магн. сердечниках, тыс. слов	Время цикла	Тип и емкость одного блока внешнего ЗУ, млн. байт	Ввод — вывод	
						тип	скорость карт/мин, зн./сек, строк/мин
Модель 40	1965	11,88/77	16—262	2,5	барабаны 0,83 диски 7,25	перфокарты	1000/300
Модель 30	1965	29/303 фикс., 39/312 плав.	8—64	1,5	магн. карты 400 барабаны 0,83 диски 7,25	перфокарты печ. устр-ва	200; 1100
Модель 67	1966	1,3/	131—1048	0,75	карты 400 ленты барабаны 4,1 диски 207; 7,5; 112,	перфокарты печ. устр-ва	1000/400 200; 1100
Модель 90	1967	0,18/0,27	262—1048	0,75	карты 400 барабаны 4,1 диски 234; 7,5; 112,	перфокарты печ. устр-ва	1000/400 200; 1100
Модель 75	1969	70/225	16—48	0,9	карты 400 диски 7,25	перфокарты печ. устр-ва	1000 600; 1100
Модель 85	1969	0,08/0,5	4—6; тонкие пленки 1	1	ленты	перфокарты печ. устр-ва	

Команды «IBM-360» — переменной длины: 2, 4 и 6 байт (см. рис. 2). В зависимости от способа формирования адреса операндов различаются пять осн. форматов команд: *RR* — регистр — регистр, *RX* — регистр — память с индексацией адреса памяти, *RS* — регистр — память без индексации адреса памяти, *SI* — непосредственный операнд — память, *SS* — память — память. Большинство команд системы «IBM-360» — двухадресные, однако есть одно- и трехадресные. Адрес обращения к запоминающему устройству может модифицироваться (индексироваться) на содержимое любого из 16 общих регистров. В форматах *RS* и *SS* предусматривается двойная индексация. Косвенной адресации нет. Управление порядком выборки команд, а также фиксация и индикация состояния системы по отношению к выполняемой программе осуществляется словом состояния программы — *PSW*, занимающим 8 байтов памяти и содержащим адрес команды, следующей за прерываемой командой, признак результата ранее выполненной команды, код прерывания, маску системы, маску программы, ключ защиты памяти и ряд служебных разрядов для определения режима работы. При прерываниях текущее *PSW* заменяется новым, соответствующим причине прерывания. Старое

байтами и сопровождается контролем по четности. Скорость обмена может достигать  $5 \times 10^6$  байт/сек.

По элементной базе «IBM-360» относится к машинам 3-го поколения. Все модели построены на гибридных интегральных схемах. Осн. логической схемой является инвертор с диодными логич. элементами на входе. При изготовлении систем семейства «IBM-360» применен новый способ автомат. компоновки схем, а также использован многослойный печатный монтаж. Это позволило значительно уменьшить общее количество разъемных компонент машины, повысить ее надежность, улучшить характеристики и снизить стоимость.

Вычисл. система «IBM-360» снабжена универсальной ОС, которая значительно расширяет возможности системы и программиста. Осн. назначение ОС состоит в том, чтобы обеспечить пользователю эффективное и оперативное использование ресурсов системы, добиться максимально возможного совмещения работы устройств во времени, создать оптим. условия прохождения потока задач при минимальном участии оператора. ОС «IBM-360» состоит из набора обрабатывающих и управляющих программ. Обрабатывающие программы подключаются соответствующими блоками управляю-



ших программ и предназначены для преобразования входной информации к виду, пригодному для непосредственной реализации в системе. Управляющая программа имеет три области действия: управление данными, управление заданиями и управление задачами. В соответствии с этим в ОС имеется: супервизор ввода — вывода, диспетчер заданий и диспетчер задач. Функции связи оператора с системой и системы с оператором осуществляет главный диспетчер. Обработывающие программы ОС включают в себя трансляторы для наиболее распространенных языков: *ФОРТРАН*, *КОБОЛ*, *РРГ*, *АЛГОЛ-60* и *ПЛ-1*. В качестве языка низшего уровня используется ассемблер «IBM-360». Имеется возможность включать в систему трансляторы с других языков. При этом решающую роль играет как критерий полноты системы матем. обеспечения, так и эконом. целесообразность и тех. реализуемость проектов. Такая противоречивость критериев привела к тому, что для языков *ФОРТРАН* и *КОБОЛ* применяют по три различных транслятора, каждый из которых накладывает те или иные ограничения на использование языка и отличается скоростью и качеством трансляции.

Архитектура «IBM-360» оказала сильное влияние на разработки многих зарубежных фирм, которые начали производить вычисл. машины и системы, полностью или в значительной степени совместимые с ней; логическая структура этого семейства в конце 60-х гг. стала самой распространенной в мире.

В табл. приведены осн. тех. характеристики некоторых реальных моделей системы «IBM-360».

*Лит.: Амдаль Дж., Блоу Дж., Брукс Ф. Архитектура системы IBM-360. В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия, в. 1. М., 1965; Вычислительная система IBM/360. Пер. с англ. М., 1969; Зейденберг В. К., Матвеев Н. А., Тароватова Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М., 1970. И. В. Вельбицкий, П. В. Походило.*

**ИГР ТЕОРИЯ** — теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта. Поскольку участвующие в большинстве конфликтов стороны заинтересованы в том, чтобы скрыть от противника свои намерения, принятие решений в условиях конфликта обычно оказывается *принятием решений в условиях неопределенности*. Наоборот, фактор неопределенности можно интерпретировать как противника субъекта, принимающего решения (тем самым принятие решений в условиях неопределенности можно понимать как принятие решений в условиях конфликта). В частности, многие утверждения *математической статистики* естественным образом формулируются как теоретико-игровые. Лог. основой И. т. является формализация трех понятий, входящих в ее определение и являющихся фундаментальными для всей теории: конфликта, принятия решения *внеиоптимальности* этого решения. Эти понятия рассматриваются в И. т. в наиболее широком смысле. Их формализации отвечают содержательным представле-

ниям о соответствующих объектах. Содержательно конфликтом естественно считать всякое явление, относительно которого можно говорить о его участниках, об их действиях, об исходах явления, к которым эти действия приводят, о сторонах, так или иначе заинтересованных в этих исходах и о сущности этой заинтересованности. Если назвать участников конфликта *коалициями* (действий (обозначив их мн-во через  $\mathcal{R}_d$ ), возможные действия каждой из коалиций действия — ее стратегиями (мн-во всех стратегий коалиции действия  $K$  обозначается через  $S_K$ ), исходы конфликта — *ситуациями* (мн-во всех ситуаций обозначается через  $S$ ; считается, что каждая ситуация складывается в результате выбора каждой из коалиций действия некоторой своей стратегии, так что  $S \subset \prod_{K \in \mathcal{R}_d} S_K$ ).

заинтересованные стороны — *коалициями* и *интересов* (их мн-во —  $\mathcal{R}_n$ ) и, наконец, говорить о возможной предпочтительности для каждой коалиции интересов  $K$  одной ситуации  $s'$  перед другой  $s''$  (этот факт обозначается как  $s' \succ_K s''$ ), то конфликт в целом будет описан как система

$$G = \langle \mathcal{R}_d, \{S_K\}_{K \in \mathcal{R}_d}, S, \mathcal{R}_n \{ \succ_K \}_{K \in \mathcal{R}_n} \rangle.$$

Такая система, представляющая конфликт, наз. *игрой*. Конкретизации задающих игру компонент приводят к разнообразным частным классам игр.

Если в игре имеется лишь одна коалиция действия  $K$ , можно считать, что мн-во ситуаций  $S$  совпадает с мн-вом стратегий  $S_K$ . Получаемые так игры наз. *нестратегическими*. К их числу относятся *игры без побочных платежей* и классические *игры кооперативные*, вместе с их различными разновидностями. Если в игре мн-ва коалиций действия и коалиций интересов совпадают ( $\mathcal{R}_d = \mathcal{R}_n = I$ ; в этом случае и те и другие коалиции наз. *игроками*),  $S = \prod_{i \in I} S_i$ , а отношения предпочтения задаются

ф-циями выигрыша, то получаются *игры бескоалиционные*. Их частными классами являются *игры антагонистические*, в т. ч. *игры матричные* и *игры на единичном квадрате*. *Игры динамические*, в т. ч. *игры дифференциальные*, *игры рекурсивные*, *игры на выживание* и др. также принадлежат к бескоалиционным играм.

И. т. широко пользуется различными матем. методами и результатами из *вероятностей теории*, классического анализа, функционального анализа (особенно важны теоремы о неподвижных точках), комбинаторной топологии, теории дифф. и интегр. ур-ний и др. Специфика И. т. способствует разработке для нее различных матем. направлений (напр., теория *выпуклых множеств*, *программирование линейное* и т. д.).

Принятием решения в И. т. считается выбор коалиций действия или, в частности, выбор игроком некоторой своей стратегии. Этот выбор можно представлять себе в виде однократного действия и сводить формально к выбору

элемента из мн-ва. Игры с таким пониманием выбора стратегий наз. *играми в нормальной форме*. Им противостоят динамические игры, в которых выбор стратегии является разворачивающимся во времени процессом, сопровождающимся расширением и сужением возможностей, приобретением и утратой информации о текущем положении дел и т. п. Формально стратегией в такой игре является функция, определенная на мн-ве всех информационных состояний субъекта, принимающего решения. Некритическое использование «свободы выбора» стратегий может приводить к парадоксальным явлениям.

Вопрос о формализации понятия оптимальности является весьма сложным. Единого представления об оптимальности в И. т. нет, поэтому приходится рассматривать несколько различных *оптимальности принципов*. Область применимости каждого из употребляемых в И. т. принципов оптимальности ограничивается сравнительно узкими классами игр или же касается ограниченных аспектов их рассмотрения. В основе каждого из этих принципов лежат некоторые интуитивные представления об оптимуме, как о чем-то «устойчивом» или «справедливом». Формализация этих представлений дает предъявляемые к оптимуму требования, которые носят характер аксиом. Среди этих требований могут оказаться противоречащие друг другу (напр., можно указать конфликты, в которых стороны вынуждены довольствоваться скромными выигрышами, т. к. крупные выигрыши достигаются лишь в неустойчивых ситуациях); поэтому в И. т. и не может быть сформулирован единый принцип оптимальности.

Ситуации (или мн-ва ситуаций), удовлетворяющие в некоторой игре тем или иным требованиям оптимальности, наз. *решениями* этой игры. Поскольку представления об оптимальности не являются однозначными, можно говорить о решениях игр в различных смыслах. Выработка определений решений игр, доказательства их существования и разработка способов их фактического нахождения — три осн. вопроса современной И. т. Близкими к ним являются вопросы о единственности решений игр, о существовании в тех или иных классах игр решений, обладающих некоторыми предписанными свойствами.

И. т. как матем. дисциплина зародилась одновременно с теорией вероятностей в середине 17 ст., но в течение почти 300 лет практически не развивалась. Первой существенной работой по И. т. следует считать статью Дж. фон Неймана «К теории стратегических игр» (1928), а с выходом в свет монографии амер. математиков Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» (1944) И. т. сформировалась как самостоятельная матем. дисциплина. В отличие от др. областей математики, имеющих по преимуществу физ. или физико-тех. происхождение, И. т. с самого начала своего развития была направлена на решение задач, возникающих в экономике (именно, в конкурентной

экономике). В дальнейшем идеи, методы и результаты И. т. стали применять в др. областях знаний, имеющих дело с конфликтами: в военном деле, в вопросах морали, при изучении массового поведения индивидов, наделенных различными интересами (напр., в вопросах миграции населения или при рассмотрении биол. борьбы за существование). Теоретико-игровые методы принятия оптим. решений в условиях неопределенности могут найти широкое применение в медицине, в эконом. и социальном планировании и прогнозировании, в ряде вопросов техники и т. д. Иногда И. т. относят к матем. аппарату *кибернетики*.

В И. т. используются те же методы, что и в остальной математике. Принципы оптимальности вырабатываются аксиоматически, существование решений устанавливается путем абстрактных рассуждений, а находят их в результате применения аналитического аппарата (нередко — весьма громоздкого и изощренного) или же приближенных *численных методов* (иногда — при реализации на ЭВМ). Кроме того, в И. т. большое значение приобретают экспериментальные методы, состоящие в многократном воспроизведении исследуемой игры путем ее фактического разыгрывания людьми (экспериментальные игры, деловые игры) или же путем цифрового моделирования. Последний способ особенно часто применяется при исследовании игр автоматов.

Науч. результаты, достигнутые в И. т., многочисленны и разнообразны. Сформулировано значительное число принципов оптимальности, приложимых к различным классам игр. Некоторые из них (напр., *осуществимости цели принцип*, приводящий к т. н. ситуациям равновесия, индивидуальные отклонения от которых не могут сопровождаться увеличением выигрыша, его частный случай — *максимина принцип*, характеристическая функция в кооперативной игре, теория Неймана — Моргенштерна, *Шепли вектор* и др.) отражают естественные представления об оптимальном («справедливом»), другие, пока немногочисленные (критерий Милнора), задаются исчерпывающим образом своими интуитивно ясными чертами, но в целом они носят «синтетический» характер и лишены наглядности. В И. т. доказано большое число теорем существования, устанавливающих фактическую реализуемость принципов оптимальности для соответствующих классов игр. В стратегических играх эта реализуемость достигается не непосредственно, а, как это типично для математики, за счет расширения первоначально заданного мн-ва стратегий. Именно, на исходных мн-вах стратегий вводятся в рассмотрение вероятностные меры, которые объявляются «обобщенными» *стратегиями смешанными*. В тех случаях, когда и этого недостаточно, приходится вводить конечно-аддитивные меры. Существование ситуаций равновесия в смешанных стратегиях (и тем более — в счетно-аддитивных стратегиях) по существу покрывает все практические потребности. В нестратегических играх это можно сказать лишь о векторе Шепли, а также о

К-ядре и  $n$ -ядре. Вопрос о том, имеет ли игра решение по Нейману — Моргенштерну, принадлежит к числу наиболее сложных: наряду с довольно широкими классами разрешимых игр известны и примеры неразрешимых игр.

Задача нахождения решений игр решена лишь для отдельных узких, хотя и довольно многочисленных классов игр. Нет единого способа нахождения решений даже для игр на единичном квадрате с непрерывной ф-цией выигрыша. Достигнутые успехи получены в результате использования сложного матем. аппарата. В теории нестратегических игр лишь намечается создание некоторой единой матем. теории, а большинство результатов получено конкретными, каждый раз индивидуальными, комбинаторными рассуждениями. В целом вся проблема осложняется тем, что часто решение игры оказывается неоднозначным и исчерпывающий анализ игры требует полного перечисления всех ее решений. Лишь в отдельных, исключительных случаях решение игры поддается описанию посредством ф.-л. Большей частью оно формулируется в виде *алгоритмов* (напр., для матричных игр это — алгоритм решения стандартной задачи линейного программирования). Это затрудняет оценку зависимости параметров решений игры от параметров самой игры. К тому же эта зависимость, как правило, не является непрерывной.

В последнее время в И. т. все большее внимание уделяется разработке разного рода исчислений игр, алгебр игр, пространств игр и т. д. Устанавливаются закономерности, позволяющие сводить анализ одних игр к анализу других игр, в том или ином смысле более просто устроенных. Достигаемые при этом упрощения носят обычно количественный характер. Так, бескоалиционные игры с большим числом игроков не всегда удается свести к последовательному анализу системы игр с меньшим числом игроков каждая. Разрабатываются операции на ряде достаточно резко очерченных классов игр (напр., суммы и произведения простых игр). Рассматриваются случайные игры, т. е. мн-ва одноигшних игр с вероятностными мерами на них. В случайных играх некоторые свойства решений (напр., существование в случайных матричных играх *седловых точек* в стратегиях чистых) оказываются случайными событиями, вероятности которых поддаются вычислению. Исследуются топологические пространства игр и подм-ва их, выделяющиеся свойствами совокупности решений игры (напр., единственностью решения).

Лит.: Матричные игры. М., 1961; Бесконечные антагонистические игры. М., 1963; Позиционные игры. М., 1967; Первая Всесоюзная конференция по теории игр. Ереван, 1970; Воробьев Н. Н. Современное состояние теории игр. «Успехи математических наук», 1970, т. 25, № 2; Contributions to the theory of games, v. 1—3, 6. Princeton, 1950—59; Льюис Р. Д., Райфа Х. Игры и решения. Пер. с англ. М., 1961 [библиогр. с. 608—625]; Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Пер. с англ. М., 1964 [библиогр. с. 798—818]; Klaus G. Spieltheorie in philosophischer Sicht. Berlin, 1968; Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. Пер. с англ. М., 1970 [библиогр. с. 695—702].

Н. Н. Воробьев,

**ИГРА АЗАРТНАЯ** — многошаговая игра одного игрока. На  $t$ -м шаге игры ( $t = 1, 2, \dots$ ) игрок, обладая капиталом  $f_{t-1}$ , выбирает одну из имеющихся у него альтернатив, зависящих от величины  $f_{t-1}$ . После этого происходит разыгрывание партии игры (см. *Игра динамическая*), являющееся реализацией некоторой *случайной величины*, зависящей от хода игрока. Число, получающееся при реализации, является капиталом  $f_t$  игрока после  $t$ -го шага. Если игрок кончает игру в момент  $t$ , то его выигрыш определяется как  $u(f_t)$ , где  $u$  — ф-ция полезности игрока, заданная на множестве капиталов. Цель игрока состоит в максимизации ф-ции полезности.

Примером И. а. является «красное и черное», когда в каждой партии игрок может сделать ставку на одну из двух альтернатив, появляющихся с данными вероятностями. В такой игре стратегией оптимальной является ставка в каждой партии либо всей имеющейся у игрока суммы, либо суммы, достаточной для того, чтобы сорвать банк.

Е. Б. Яновская.

**ИГРА БЕЗ ПОБОЧНЫХ ПЛАТЕЖЕЙ** — игра кооперативная, в которой возможности разделения полезности и перераспределения ее между игроками ограничены. В качестве значения *характеристической функции*  $v(K)$  в И. б. п. п. для коалиции  $K$  (см. *Игр теория*) принимается мн-во таких векторов, что  $K$  может обеспечить своим членам выигрыши, не меньшие, чем соответствующие компоненты этих векторов. Мн-во векторов выигрышей, которые фактически могут получить все участники игры, обозначается через  $H$ . Т. о., формально И. б. п. п. описывается тройкой  $\langle I, v, H \rangle$ , где  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  — мн-во игроков,  $v$  — характеристическая ф-ция, значениями  $v(k)$  для  $k \subset I$  являются некоторые подмн-ва из  $E^k$ , а  $H$  — компактное подмн-во из  $E^I$ .

В мн-ве  $H$  определяют (как и в классических кооперативных играх) отношение *доминирования* и на основании этого отношения формулируют различные принципы оптимальности, в т. ч. *ядро*, решение по Нейману — Моргенштерну и т. д. Доказано, что любая И. б. п. п. трех лиц с многогранной областью  $H$  имеет решение; известен пример И. б. п. п. семи лиц, не имеющей решения.

О. Н. Бондарева, Н. Н. Воробьев.

**ИГРА БЕСКОАЛИЦИОННАЯ** — игра, участники которой, действуя изолированно друг от друга, преследуют индивидуальные цели. Формально И. б. может быть задана системой:

$$\Gamma = \langle I, \{s_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle,$$

где  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  — мн-во игроков,  $s_i$  — мн-во стратегий игрока  $i$ , а  $H_i$  — его *выигрыша функция*, определенная на декартовом произведении  $S = s_1 \times \dots \times s_n$  и принимающая вещественные значения.

Примером может быть игра Морра с тремя игроками. Каждый из трех игроков показывает двум другим один или два пальца. Если все игроки показали одинаковое к-во пальцев,

то выигрыш каждого игрока равняется 0. Если же один из игроков показал к-во пальцев, отличающееся от показанного его партнерами, то он получает 1, а два других — по  $-\frac{1}{2}$ .

Одной из стратегий, приводящих к ситуациям равновесия, является следующая *стратегия смешанная*: каждый из игроков с вероятностью

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

показывает один палец и с вероятностью  $\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$  — два.

Важным принципом оптим. поведения игроков является *осуществимости цели принцип*, приводящий к ситуациям равновесия. Эти ситуации, а также некоторые их мн-ва принято считать решениями И. б. Ситуации равновесия  $s$  и  $t$  наз. взаимозаменяемыми, если любая ситуация  $r = (r_1, \dots, r_n)$ , где  $r_i = s_i$  или  $r_i = t_i$ , также равновесна. Они наз. эквивалентными, если  $H_i(s) = H_i(t)$  для всех  $i \in N$ . Пусть  $Q$  — мн-во всех ситуаций равновесия, а  $Q'$  — мн-во ситуаций равновесия, оптим. по Парето (см. *Парето оптимум*). Игра наз. разрешимой по Нэшу, если все  $s \in Q$  эквивалентны и взаимозаменяемы. Игра наз. сильно разрешимой, если  $Q'$  непусто и все  $s \in Q'$  эквивалентны и взаимозаменяемы. Доказано, что И. б. не обязательно имеет решение по Нэшу, но если она его имеет, то это решение единственно. Имеются и другие подходы к определению оптим. поведения в И. б.

К И. б. относятся *игры антагонистические*, в т. ч. игры на выживание, *игры на единичном квадрате*, *игры динамические*, *игры матричные*, *игры стохастические* и некоторые др.

Лит.: Воробьев Н. Н. Конечные бескоалиционные игры. «Успехи математических наук», 1959, т. 14, в. 4; Воробьев Н. Н. Современное состояние теории игр. «Успехи математических наук», 1970, т. 25, в. 2; Нэш Д. Ж. Бескоалиционные игры. В кн.: Матричные игры. М., 1961. Г. П. Ткаченко.

**ИГРА БИМАТРИЧНАЯ** — игра бескоалиционная двух лиц, имеющих конечное число стратегий. И. б. задаются парой матриц выигрышей  $A = \|a_{ij}\|$  и  $B = \|b_{ij}\|$  одинаковых размеров. Если 1-й игрок выбирает строку  $i$ , а 2-й — столбец  $j$ , то выигрыш 1-го игрока —  $a_{ij}$ , а 2-го —  $b_{ij}$ . Если  $a_{ij} + b_{ij} = 0$  для всех  $i$  и  $j$ , то И. б. называется *игрой матричной*. Теория И. б. является наиболее простым разделом общей теории бескоалиционных игр. Однако исчерпывающей теории оптим. поведения игроков в И. б. пока нет.

Примером И. б. может служить игра с матрицами выигрышей

$$\begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

Эта игра обычно интерпретируется как конфликт двух бандитов, задержанных по подозрению в тяжелом преступлении, причем каждый имеет две стратегии: «запираться» и «сознаваться». Если оба будут запираться, то за отсутствием прямых улик они будут приго-

ворены к умеренному наказанию (напр., за бродяжничество; срок заключения — 1 год). Если оба сознаются, то будут приговорены к суровому наказанию с учетом признания как смягчающего обстоятельства (8 лет заключения). Если один сознается, а другой нет, то сознавшийся получает помилование, а запирающийся — макс. наказание (10 лет заключения). *Равновесия ситуацией* будет здесь обоюдное признание, приводящее к крупным потерям (по 8 лет), а *Парето оптимумом* — обоюдное запирательство, которое, однако, неустойчиво.

М. Ф. Казакова, Н. Н. Воробьев.

**ИГРА ВЫПУКЛАЯ** — игра бескоалиционная  $n$  лиц, в которой хотя бы у одного игрока множество стратегий чистых является выпуклым подмножеством линейного пространства, а его выигрыша функция при любых фиксированных стратегиях остальных игроков выпукла на этом подмножестве. Если мн-во чистых стратегий каждого игрока И. в. компактно, а ф-ции выигрыша непрерывны, то существует *равновесия ситуация*, в которой игроки, имеющие выпуклые ф-ции выигрыша, используют чистые стратегии.

И. в. наз. *конечной*, если для каждого игрока мн-во его чистых стратегий является компактным подмножеством некоторого конечномерного линейного пространства, а ф-ции выигрыша всех игроков полилинейны. В частности, конечная антагонистическая И. в. задается тройкой  $\langle A, B, H \rangle$ , где  $A \subset E^m$ ,  $B \subset E^n$ , а ф-ция  $H$  имеет вид

$$H(r, s) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} r_i s_j, \quad r \in A, \quad s \in B.$$

Если  $\mu$  и  $\nu$  — размерности мн-ва оптим. стратегий игроков  $A$  и  $B$ , а  $\rho$  — ранг матрицы  $\|a_{ij}\|$ , то  $\mu + \nu \leq m + n - \rho$ .

Примером И. в. является антагонистическая игра на единичном квадрате, в которой при любых стратегиях первого игрока ф-ция выигрыша выпукла на мн-ве чистых стратегий второго игрока. В этом случае второй игрок имеет чистую оптим. стратегию, а первый — оптим. стратегию, являющуюся смесью не более двух чистых.

Г. Н. Дюбин.

**ИГРА ВЫРОЖДЕННАЯ** — игра антагонистическая, в которой выигрыша функция вырождена, т. е. имеет вид

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} f_i(x) g_j(y),$$

где  $f_i(x)$  и  $g_j(y)$  — ф-ции, заданные соответственно на мн-вах стратегий чистых игроков  $A$  и  $B$ .

Изучались вырожденные игры на единичном квадрате. Они сводятся к конечным антагонистическим играм выпуклым. Если  $f_i(x)$  и  $g_j(y)$  — непрерывные ф-ции, то игроки  $A$  и  $B$  имеют стратегии оптимальные, являющиеся соответственно смесями не более чем  $m$  и  $n$  чистых стратегий. Если  $f_i(x) = x^i$ , а

$g_j(y) = y^j$ , то И. в. наз. **полиномиаль-ной**. Понятие И. в. можно определить и для общих бескоалиционных игр  $n$  лиц. Г. Н. Дюбин.

**ИГРА ДИНАМИЧЕСКАЯ** — игра  $n$  лиц в виде развивающегося во времени процесса, в котором игроки принимают последовательно частичные решения, переходя от одного состояния игры к другому. И. д., в которых игроки принимают решения в дискретные моменты времени, описываются следующей схемой. Задается мн-во состояний  $X$ , для каждого  $x \in X$  мн-ва  $S_i(x)$  элементарных стратегий игроков  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) (мн-во  $S(x) = \prod_{i=1}^n S_i(x)$  определяется как простр. элементарных ситуаций  $s(x_1) \in S(x_1)$ ), начальное состояние игры  $x_1 \in X$  и ф-ции  $F_k(x_1, s(x_1), \dots, x_{k-1}, s(x_{k-1}), x_k)$ , которые при фиксированном  $x_k$  измеримы по остальным своим аргументам, а при фиксированных  $x_1, s(x_1), \dots, x_{k-1}, s(x_{k-1})$  являются вероятностными распределениями на  $X$ . Партия игры  $P = (x_1, s(x_1), x_2, s(x_2), \dots)$  определяется индуктивно. В начальном состоянии  $x_1$  каждый игрок  $i$  выбирает элементарную стратегию  $s_i(x_1) \in S_i(x_1)$ , в результате чего складывается элементарная ситуация  $s(x_1) \in S(x_1)$ . Состояние  $x_2 \in X$  выбирается согласно распределению  $F_2(x_1, s(x_1), x_2)$ . Если определен отрезок партии  $p_k = (x_1, s(x_1), \dots, x_{k-1}, s(x_{k-1}), x_k)$ , то аналогично образуется элементарная ситуация  $s(x_k) \in S(x_k)$ , после чего следующее состояние  $x_{k+1} \in X$  выбирается согласно распределению  $F_{k+1}(x_1, s(x_1), \dots, x_k, s(x_k), x_{k+1})$ . На каждой партии  $P$  определен выигрыш  $h_i(P)$  игрока  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Стратегия  $f_i^k$  игрока  $i$  есть набор ф-ций  $\{f_i^k\}$ , где ф-ция  $f_i^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) каждому отрезку партии  $p_k$  длины  $k$  ставит в соответствие элементарную ситуацию  $s_i(x_k) \in S_i(x_k)$ .

И. д. определена, если каждая ситуация индуцирует вероятностную меру  $\mu_f$  на мн-ве всех партий. В этом случае выигрыш игрока  $i$  в ситуации  $f$  определяется как **математическое ожидание**  $h_i(P)$  по мере  $\mu_f$ .

$$H_i(f) = \int h_i(P) d\mu_f(P).$$

Примером И. д. является следующая игра. Каждому из двух игроков сдается полная масть карт. Третья масть тасуется, и затем карты этой масти открываются одна за другой. Каждый раз, когда карта открыта, оба игрока одновременно открывают какую-то одну из своих карт по своему желанию. Тот, кто открыл старшую карту, выигрывает третью карту (если оба открывают карты одинакового достоинства, то не выигрывает никто). Так продолжается до тех пор, пока все три масти не будут исчерпаны. После этого каждый игрок подсчитывает к-во очков на картах, которые он выиграл; счет ведется по разности выигрышей игроков

Частными классами И. д. являются *игры рекурсивные*, *игры стохастические* и *игры на выживание*. И. д., в которых принятие решений непрерывно во времени, являются, напр., *игры дифференциальные*. А. Н. Ляпунов.

**ИГРА КООПЕРАТИВНАЯ** — нестратегическая игра многих игроков с образованием коалиций, в которой допускается неограниченное перераспределение выигрышей в форме так называемых побочных платежей. Основы теории И. к. разработали амер. ученые Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн. Первоначально конструирование И. к. производилось на основе *игр бескоалиционных*. Именно, в игре со мн-вом игроков  $I$  для каждой коалиции  $K \subset I$  рассматривали антагонистическую игру  $K$  против дополнительной к ней коалиции  $I \setminus K$ . Значение этой игры, обозначаемое через  $v(K)$ , является ф-цией от  $K$ , которая наз. **характеристической функцией**. Некоторые И. к. могут быть заданы своими характеристическими ф-циями непосредственно. Примерами таких игр являются схемы голосования, а также модели рынков. И. к. определяют формально как пару  $\langle I, v \rangle$ , где  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  — мн-во игроков, а  $v$  — характеристическая ф-ция, заданная на подмножествах  $I$ . Вектор выигрышей игроков является **дележом** игры. В качестве мн-ва всех дележей обычно принимают

$$A = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n : x_i \geq v(i), \sum_{i=1}^n x_i = v(I) \right\}.$$

На этом мн-ве определяют отношение **доминирования**: дележ  $x = (x_1, \dots, x_n)$  доминирует дележ  $y = (y_1, \dots, y_n)$  (обозначение:  $x \succ y$ ), если найдется такая коалиция  $K$ , что  $\sum_{i \in K} x_i \leq v(K)$ , и  $x_i > y_i$  для всех  $i \in K$ .

Первое условие наз. **эффективностью** коалиции  $K$  для дележа  $x$ . Это условие показывает, что коалиция может сравнивать только такие дележи, в которых она может обеспечить доли всех своих участников. Мн-во элементов, максимальных относительно доминирования, наз. **с-ядром**. Для отношения доминирования дележей важную роль играет решение по Нейману — Моргенштерну. Однако нормативная сущность решения имеет ряд недостатков: решение может состоять более чем из одного дележа; оно может не быть единственным; известен пример игры (десяти лиц), не имеющей решения. Кроме классической кооперативной теории развивается ряд новых теорий, которые тоже основаны на характеристической ф-ции. О. Н. Бондарева.

**ИГРА НА ГРАФЕ** — игра, представленная в следующем виде. Дан *Бержа граф*  $L = (X, \Gamma)$  с выделенным подмн-вом  $X_0 \subset X$  «начальных» вершин. Один из игроков (какой именно — обычно определяется жребием) в качестве своего хода выбирает некоторую вершину  $x_1 \in X_0$ ; затем делает ход 2-й игрок, выбирая вершину  $y_1 \in \Gamma x_1$ ; после этого 1-й игрок

выбирает вершину  $x_2 \in \Gamma y_1$  и т. д. Во многих играх победителем считается тот, кто первый выберет тупиковую вершину — такую  $z$ , что  $\Gamma z = \emptyset$  (т. е., что противник лишен возможности сделать очередной ход). Игрок, выбравший в какой-то момент игры вершину в ядре — таком  $S \subseteq X$ , для которого  $\forall x \in S \Gamma x \cap S = \emptyset$  и  $\forall x \in X \setminus S \Gamma x \cap S \neq \emptyset$ , имеет возможность, независимо от ответа противника, следующим своим ходом опять выбрать вершину в  $S$  и т. д., т. е. застраховать себя от проигрыша. Могут существовать и другие стратегии беспроеигрышной игры (даже на графе, не имеющем ни одного ядра). В более сложных играх элементы графа  $L$  снабжаются весами, и тогда после остановки игры победитель определяется, напр., по сумме весов выбранных им вершин. См. также *Игр теория*. А. А. Зыков.

**ИГРА НА ЕДИНИЧНОМ КВАДРАТЕ** — игра антагонистическая, в которой множествами чистых стратегий 1-го и 2-го игроков являются сегменты  $[0, 1]$ . Ф-цией выигрыша в этой игре является ф-ция двух переменных  $K(x, y)$ , называемая часто ядром игры и заданная на единичном квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Стратегиями смешанными игроков являются вероятностные меры, задаваемые с помощью ф-ции распределения  $F(x)$  и  $G(y)$  на  $[0, 1]$ . Условие существования решения записывают в случае И. на е. к. в виде

$$\begin{aligned} \max_{F(x)} \inf_{G(y)} \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) dF(x) dG(y) = \\ = \min_{G(y)} \sup_{F(x)} \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) dF(x) dG(y), \end{aligned}$$

где интегралы понимаются в смысле Стильбеса. Для непрерывной ф-ции  $K(x, y)$  это условие выполняется. Пример И. на е. к. — игра, в которой игроки выбирают местоположение на отрезке  $[0, 1]$ , причем первый игрок старается максимизировать, а второй — минимизировать расстояние между игроками. Ядром в этой игре является ф-ция  $|x - y|$ . 2-й игрок имеет оптим. чистую стратегию  $y = \frac{1}{2}$ , а 1-й игрок должен с равными вероятностями выбирать стратегии  $x = 0$  и  $x = 1$ . Игры значение равно  $\frac{1}{2}$ . См. также *Стратегия чистая*.

А. И. Соболев.  
**ИГРА ПОЗИЦИОННАЯ** — игра, имеющая вид развертывающегося в дискретном времени многошагового процесса. Этот процесс можно понимать как случайное блуждание по древовидно упорядоченному мн-ву позиций (от начальной позиции до одной из окончательных), в ходе которых игроки многократно принимают частичные решения в условиях изменяющихся информационных состояний. Примерами И. п. являются шахматы, салонные карточные игры, военные операции, действия автоматов. Точное формальное определение конечной И. п. впервые дал амер. математик Г. Кун.

Древовидно упорядоченное мн-во опреде-

ляет для каждой позиции единственный путь, ведущий к ней из начальной позиции, а также мн-во возможных из этой позиции ходов непосредственно в следующие позиции, наз. а л ь т е р н а т и в а м и. Число альтернатив может быть либо конечным, либо бесконечным. Позиции, не имеющие альтернатив, наз. о к о н ч а т е л ь н ы м и, а ведущие к ним пути — п а р т и я м и. Партии могут также продолжаться бесконечно. Позиция, в которой находится игрок в какой-либо момент, обычно известна ему не полностью, а лишь как некоторый неизвестный элемент известного мн-ва, называемого и н ф о р м а ц и о н н ы м. Стратегией чистой игрока в И. п. является ф-ция, определенная на семействе его информационных мн-в, значениями которой являются альтернативы. Структура И. п. в основном определяется семействами информационных мн-в игроков и взаимным расположением этих мн-в. Выделяются классы игр с полной информацией (когда каждое информационное мн-во состоит из единственной позиции), с почти полной информацией (когда каждый игрок знает все о других игроках), с полной памятью (когда игрок знает все о себе) и т. п. Характерными в теории И. п. являются проблемы о возможностях игроков ограничиваться более или менее узкими классами стратегий смешанных (напр., стратегиями поведения), в зависимости от взаимного расположения информационных мн-в игры. И. Н. Врублевская.

**ИГРА ПРОСТАЯ** — игра кооперативная, в которой характеристическая функция  $v$  может принимать только два значения: 0 — на проигрывающих коалициях и 1 — на выигрывающих коалициях.

П р и м е р о м может служить взвешенная мажоритарная игра. Пусть каждому игроку  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$  приписан «вес»  $w_i$ , причем ни для какого  $k \subset I$  не имеет места равенство  $\sum_{i \in k} w_i = \sum_{i \in k} w_i$ . Тогда коалиция  $k$  — выигрывающая, и  $v(k) = 1$ , а коалиция  $I \setminus k$  — проигрывающая, и  $v(I \setminus k) = 0$ , если  $k$  составляет «взвешенное большинство», т. е. если  $\sum_{i \in k} w_i > \sum_{i \in k} w_i$ . Н. Н. Воробьев.

**ИГРА РЕКУРСИВНАЯ** — разновидность игры динамической. В И. р. выбор стратегий игроками на каждом шаге определяет распределение вероятностей подыгр, разыгрываемых на следующем шаге, или окончания партии. Выигрыши участников зависят только от последней разыгранной подыгры. Т. к. вероятность того, что партия никогда не закончится, отлична от нуля, должны быть определены выигрыши игроков в случае бесконечной партии.

Конечные антагонистические И. р. рассмотрел впервые амер. математик Х. Эверетт (1954), работа которого тесно связана с работой амер. математика Л. Шепли об играх стохастических. Анализ любой стохастической игры может быть сведен к анализу некоторой И. р. Но из-за возможности бесконечных партий исследования И. р. в общем случае сложнее, чем



исследование стохастических игр. Тем не менее, как показал Эверетт, любая такая игра обладает значением и оба игрока имеют  $\epsilon$ -оптимальные стратегии. Он же указал и метод нахождения *игры значения*. В. К. Доманский.

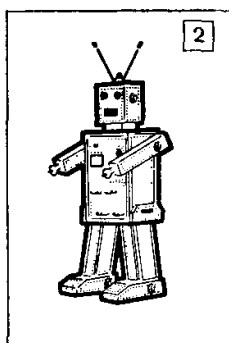
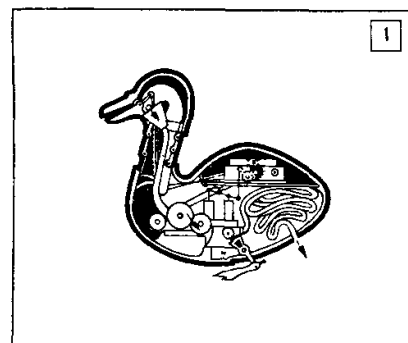
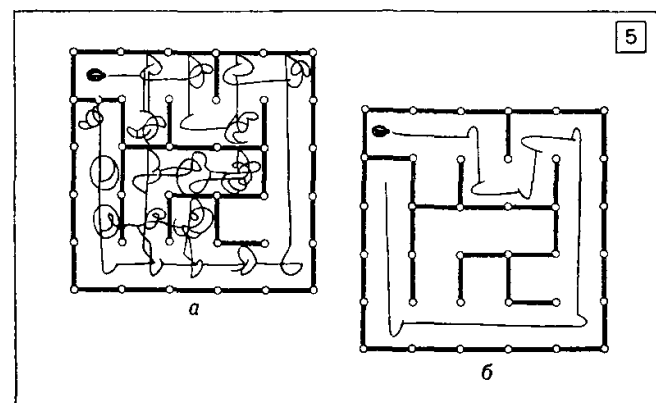
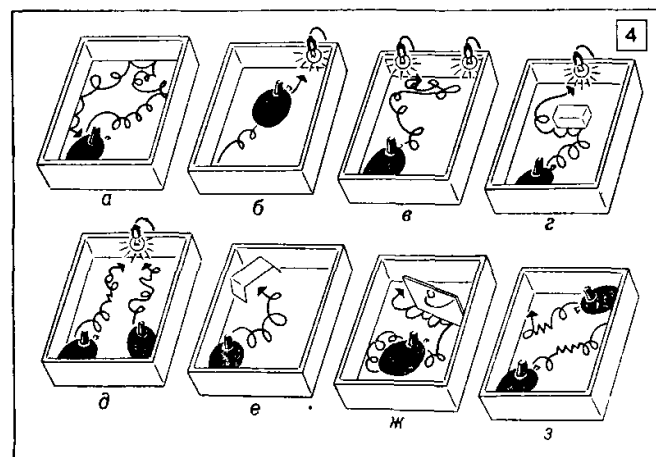
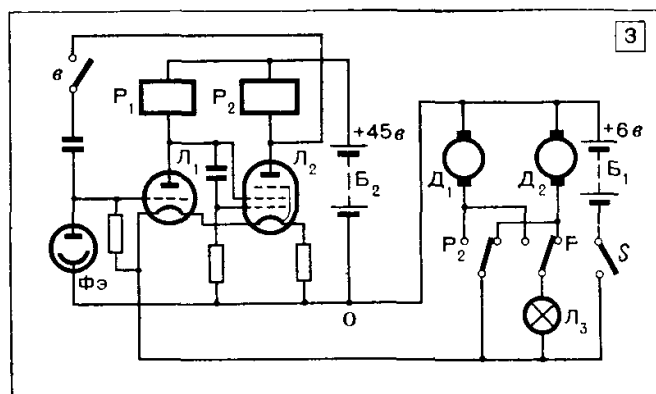
**ИГРА С ВЫБОРОМ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ** — игра на единичном квадрате, в которой стратегиями чистыми игроков являются выборы моментов времени для выполнения определенного действия. Иногда рассматривают игры с выбором нескольких моментов времени (см. *Дуэль* в теории игр.) Выигрышная функция  $I$  с в. м. в. монотонна по каждой из переменных (задержка действия увеличивает шансы успеха) и разрывна на диагонали единичного квадрата. Стратегии оптимальные игроков в  $I$  с в. м. в. обычно описываются скачком в начале временного промежутка, плотностью на некотором интервале  $[a, b]$  и скачком на конце промежутка. А. С. Михайлова.

**ИГРА СТОХАСТИЧЕСКАЯ** — разновидность игры динамической. В  $I$  с. выбор игроками альтернатив на каждом шаге определяет как выигрыш на этом шаге, так и *распределение вероятностей* подыгр, которые придется разыграть на следующем шаге. При этом на каждом шаге при любом выборе игроками альтернатив имеется ненулевая *вероятность* окончания партии. Вследствие этого условия партия с вероятностью, равной единице, заканчивается за конечное число шагов.

Конечные антагонистические  $I$  с. были впервые (1953) определены и рассмотрены амер. матем. Л. Шепли. Он доказал, что любая такая игра обладает значением и оба игрока имеют оптим. стратегии. Им же указана процедура, дающая возможность найти как *игры значение*, так и *стратегии оптимальные*. В. К. Доманский.

**ИГРУШКИ КИБЕРНЕТИЧЕСКИЕ** — кибернетические устройства (автоматы), наглядно воспроизводящие либо те или иные свойства кибернетических систем для целей проведения научного эксперимента, либо имеющие демонстрационный, учебно-методический или развлекательный характер. Как правило, они

являются примерами устройств, воспроизводящих относительно простыми средствами разнообразные формы целесообразного поведения. Простейшие  $I$  к. — автоматы с жесткой программой, получившие широкое распространение в 18 веке, например, часы, снабженные дополнительными механизмами, приводящими в действие фигурки человека, животных и т. п. Так, известные часы «яичной фигуры», изготовленные выдающимся русским изобретателем И. П. Кулибиным, содержали внутри миниатюрный игрушечный театр с согласованно движущимися фигурками; часы — «павлин» Кокса



1. Схематический разрез «утки» Вокансона.

2. «Робот».

3. Принципиальная схема «черепашки» Уолтера ( $D_1$  — двигатель рулевой колонки;  $D_2$  — приводной двигатель колеса).

4. Различные виды поведения «черепашки» Уолтера: а — поиск при отсутствии яркого света; б — стремление к не очень сильному источнику света; в — поведение при наличии двух сильных источников света; г — обход препятствия при движении на свет; д — движение к свету двух «черепашек»; е — посещение «кормушки»; ж — «черепашка» перед зеркалом; з — «знакомство» двух «черепашек».

5. Путь «мыши» в лабиринте Шеннона; а — до «обучения»; б — после «обучения».



содержат много подвижных фигур («сова» в клетке, «петух», «павлин» и т. д.), которые при наступлении заранее установленного времени приводятся в движение. К другому виду И. к. относятся автоматические (заводные) игрушки, способные выполнять весьма сложные последовательности фиксированных действий, напр., остроумные модели Вокансона: «флейтист» — фигура в рост человека, воспроизводившая на настоящих музыкальных инструментах 11 различных мелодий, и «утка» (рис. 1), способная воспроизводить сложный комплекс движений. К этому же классу И. к. принадлежат и т. н. а н д р о и д ы — автоматы, имеющие вид фигурок (кукол) со встроенными внутрь механизмами, позволявшими им выполнять фиксированный набор действий. Первые андройды изготовили швейцарский часовщик Пьер-Жак Дро и его сын Анри Дро (в честь которых и введено понятие «андройды»). Наиболее известные андройды — писец, рисовальщик и музыкантша.

Более сложной разновидностью И. к. являются игрушки, построенные на базе т. н. р е ф л е к т о р н ы х а в т о м а т о в. Как правило, это — системы, способные выполнять довольно большое число различных действий. Выбор необходимой в каждом конкретном случае последовательности действий (управление автоматом) осуществляется на расстоянии с помощью голоса, светового или электрического (радио) сигнала. Автомат распознает различные значения управляющего сигнала, напр., различные слова голосовых команд, реагируя на них соответствующей последовательностью действий. Такие И. к. обычно выполняются в виде устройств со стилизованным внешним видом, несколько напоминающим человека, и называются «р о б о т а м и» (рис. 2). Разнообразные, часто весьма сложные роботы строились и строятся в рекламных целях, а также часто являются предметом творчества детских технических станций и кружков. К этому же классу рефлекторных автоматов относятся и многочисленные действующие модели, управляемые на расстоянии. Игрушки этого типа, напр. телеуправляемые модели самолетов, морских судов и т. п., имеют весьма большое учебно-

ных — черепахах, жуков, белок, собак и т. п. Первые простейшие схемы таких устройств, способные двигаться в направлении света («моль») или удаляться от него («клоп»), разработал Н. Винер как модель тропизмов. Наибольшую известность приобрели три «черепахи», разработанные англ. биофизиком и нейрофизиологом Г. Уолтером в 1950—51 гг. Эти устройства представляют собой самодвижущиеся электромеханические устройства, способные воспроизводить следующие виды поведения: движение на свет или от него, обход препятствия, поисковые движения, заход в «кормушку» для подзарядки разрядившихся аккумуляторов и т. п. «Черепашки» приводятся в движение с помощью двух электродвигателей, питаемых от аккумулятора. Первый двигатель обеспечивает поступательное движение устройства, второй, расположенный на рулевой колонке, поворачивает его, изменяя этим направление движения. Чувствительными элементами первых двух «черепашек» Г. Уолтера являлись: фотоэлемент, расположенный на рулевой колонке, и механический контакт, замыкаемый при наезде на препятствие. Управление поведением осуществляется с помощью несложной электронной схемы с обратной связью (рис. 3). Схема отрегулирована таким образом, что низкий потенциал анода лампы  $L_1$  запирает вторую лампу  $L_2$ , перебрасывая при этом реле  $P_2$  так, что исключается возможность нахождения под током одновременно обоих реле  $P_1$  и  $P_2$ . Если фотоэлемент Фэ не освещен, то лампа  $L_1$  заперта, а  $L_2$  открыта. При умеренном освещении фотоэлемента лампа  $L_1$  приоткрывается, однако проводимый ею ток недостаточен для срабатывания реле  $P_1$ , хотя уменьшение напряжения на ее аноде достаточно для отпущения реле  $P_2$ . Дальнейшее увеличение освещенности Фэ («ослепление») ведет к срабатыванию реле  $P_1$  при отпущенном  $P_2$ . В результате замыкания механического контакта в схеме превращается в мультивибратор, попеременно включающий и выключающий реле  $P_1$  и  $P_2$ . Поведение «черепашки» в зависимости от внешних воздействий и, следовательно, от состояний реле  $P_1$  и  $P_2$  характеризуется следующей таблицей.

Раздражение	Состояние реле		Состояние двигателей	
	$P_1$	$P_2$	$D_1$ (руль)	$D_2$ (привод)
Темнота	Выключено	Включено	Нормальная скорость	Малая скорость
Свет	Выключено	Выключено	Неподвижен	Нормальная скорость
Ослепление	Включено	Включено	Малая скорость	Нормальная скорость
Прикосновение	Выключено	Включено	Нормальная скорость	Малая скорость
	Включено	Выключено	Малая скорость	Нормальная скорость

познавательное значение и широко распространены.

Наибольшую известность среди И. к. приобрели представители т. н. «кибернетического зверинца» — устройства, воспроизводящие различные формы поведения и внешне несколько напоминающие соответствующих живот-

При движении с малой скоростью в верхней части «черепашки» загорается лампочка  $L_3$ , которая может служить «приманкой» для другой «черепашки». При совместном действии двух раздражителей устройство реагирует на более сильный. Различные виды поведения «черепашек» изображены на рис. 4.

Третья «черепашка» Уолтера — «Кора» имела несколько более сложную конструкцию. В ее схему дополнительно входил микрофон и емкостной элемент памяти с большой постоянной времени забывания. Схема собрана т. о., что звуковой сигнал, воспринимаемый микрофоном, вызывает кратковременную остановку «черепашки». Появление звукового сигнала одновременно с наездом на препятствие вызывает кратковременный заряд конденсатора памяти. После нескольких наездов на препятствие, сопровождающихся звуковым сигналом, заряд конденсатора достигал определенной величины, и звуковой сигнал начинал вызывать такую же реакцию, как наезд на препятствие. Указанное поведение аналогично известным моделям условного рефлекса. Известные различные конструкции «черепашек» и др. «зверюшек», как правило, отличаются друг от друга лишь конструктивными деталями. Так, в некоторых устройствах емкостная память заменена термореле с большой инерционностью, в других — управляющие схемы построены на одних реле. И. к. описанного вида позволяют демонстрировать различные формы поведения и простейшие условные рефлексы, получаемые в моделях с помощью весьма простых средств.

К числу И. к. можно отнести также и ряд специализированных устройств, предназначенных для решения некоторых задач. Известность приобрела, например, конструкция, предложенная К. Шенноном для «обучения» решению лабиринтных задач. Это устройство, носящее название лабиринта Шеннона («мышь» Шеннона), представляет собой специализированное релейное логико-механическое устройство с доской из  $5 \times 5$  клеток, между которыми можно произвольным образом устанавливать перегородки — образовывать лабиринт. Щуп в виде небольшой металлической «мышки» помещается в произвольную клетку. После большого числа попыток и блуждания «мышь» попадает в заданную клетку — достигает цели. При этом происходит «запоминание» правильного пути. Если теперь «мышь» попадает в клетку, в которой она уже побывала, то она достигает цели без блужданий (рис. 5).

Другим представителем устройств, решающих некоторые виды развлекательных задач, является автомат для игры в нем (в ней играет тот, кто берет последний предмет из трех кучек), наиболее простую модель которого разработал З. Хеннией, а также ряд специализированных устройств для игры в крестики и нулики, решения простых шахматных задач и т. п. Число «игрушечных» задач, решаемых в настоящее время различными автоматическими устройствами в познавательных целях, непрерывно растет, однако развитие программирования позволяет, не создавая для каждой задачи специального устройства, использовать для ее решения или моделирования универсальную ЦВМ. Идеи, получившие первоначально свое воплощение в И. к., находят применение в ряде практически важных систем и устройств — автомат. манипуляторах, ро-

ботах, роботах промышленных, автомат. научных станциях и т. д.

Лит.: Полетаев И. А. Сигнал. М., 1958 [библиогр. с. 401—402]; Крементуло Ю. В. Кибернетична «черепаха» «Тортила-2». «Автоматика», 1959, № 2; Гаазе-Рапопорт М. Г. Автоматы и живые организмы. М., 1961 [библиогр. с. 210—219]; Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 [библиогр. с. 783—820]. М. Г. Гаазе-Рапопорт.

**ИГРЫ АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ** — игры двух участников с прямо противоположными интересами. Формально эта противоположность (антагонистичность) интересов выражается в том, что при переходе от одной ситуации к другой увеличение (уменьшение) выигрыша одного из игроков влечет за собой численно равное уменьшение (увеличение) выигрыша другого игрока. Т. о., сумма выигрышей игроков в любой ситуации в И. а. постоянна (обычно можно считать, что она равна нулю). Поэтому И. а. называют также играми двух лиц с нулевой суммой (иногда — «нулевыми играми»). Матем. определение понятия антагонистичности (равенство по величине и противоположность по знаку *выигрыша функций* игроков) является формальным понятием, которое отличается от содержательного философского понятия, но сохраняет его ведущую черту — непримиримость противоречия.

Существует много явлений, для которых И. а. являются удовлетворительной моделью. К их числу относятся некоторые (но не все) военные операции, спортивные и салонные игры, принятие деловых решений в условиях конкуренции. Принятие решений в условиях неопределенности, напр., игры против природы, можно также моделировать как И. а. в предположении, что истинная, но неизвестная закономерность природы приведет к действиям, наименее благоприятным для игрока. Это предположение не означает, однако, что природа наделена сознанием, направленным против человека.

В И. а., по определению, невозможны к.-л. переговоры и соглашения между игроками. Действительно, если в результате к.-л. переговоров или соглашений один из игроков сумел бы увеличить свой выигрыш на некоторую величину, то выигрыш другого игрока уменьшился бы на такую же величину, т. е. для него эти соглашения были бы невыгодными.

И. а. в нормальной форме (см. *Игр теория*) задают системой  $\Gamma = \langle A, B, H \rangle$ , где  $A, B$  — мн-ва стратегий соответственно 1-го и 2-го игроков,  $H$  — вещественная ф-ция, определенная на мн-ве всех ситуаций  $A \times B$  и являющаяся ф-цией выигрыша 1-го игрока (ф-ция выигрыша 2-го игрока равна, по определению И. а., —  $H$ ). Процесс разыгрывания И. а. состоит в выборе игроками некоторых своих стратегий  $a \in A, b \in B$ , после чего 1-й игрок получает от 2-го сумму  $H(a, b)$ .

Разумное поведение игроков в И. а. осуществляется на основании *максимина принципа*. Если

$$\max_{a \in A} \inf_{b \in B} H(a, b) = \min_{b \in B} \sup_{a \in A} H(a, b), \quad (1)$$

то у каждого игрока существуют *стратегии оптимальные*, т. е. стратегии, на которых достигаются в (1) внешние *экстремумы*. Однако уже в самых простых случаях равенство (4) может не иметь места. Напр., в *игре матричной* с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

оказывается

$$\max_i \min_j a_{ij} = -1, \min_j \max_i a_{ij} = 1.$$

Чтобы обеспечить реализуемость принципа максимина, мн-ва стратегий игроков расширяют до мн-ва *стратегий смешанных*, состоящих в случайном выборе игроками своих первоначальных стратегий, называемых чистыми, а ф-ция выигрыша определяется как *математическое ожидание* выигрыша в условиях применения смешанных стратегий. В приведенном примере оптим. смешанными стратегиями игроков являются выборы игроками обеих своих стратегий с вероятностями  $1/2$ , а *игры значение* равно нулю.

Если мн-ва  $A$  и  $B$  конечны, то антагонистическая игра наз. *матричной игрой*; для нее всегда существуют оптим. смешанные стратегии у обоих игроков. Если же одно из мн-в  $A$  или  $B$  бесконечно, то И. а. наз. *бесконечной*. Принцип максимина для бесконечных И. а. может осуществляться (если равенство (1) не имеет места) в виде равенства:

$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} H(a, b) = \inf_{b \in B} \sup_{a \in A} H(a, b).$$

В этом случае оптим. стратегии игроков не существуют, однако для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $\varepsilon$ -оптимальные стратегии (т. е. стратегии, обеспечивающие достижение значения игры с заданной точностью  $\varepsilon$ ) у обоих игроков. Если оба мн-ва  $A$  и  $B$  бесконечны, то оптим. смешанные стратегии (и даже  $\varepsilon$ -оптимальные) существуют не всегда, напр. в *игре с ф-цией* выигрыша

$$H(a, b) = \begin{cases} 1, & a > b \\ 0, & a = b \\ -1, & a < b. \end{cases}$$

где стратегиями игроков являются мн-ва натуральных чисел. См. также *Игра на единичном квадрате*. Е. Б. Яновская.

**ИГРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ** — направление в теории процессов, описываемых дифференциальными уравнениями. И. д. имеют свойства, характерные как для *оптимального управления теорией*, так и для *игр теории*. Непосредственной причиной развития теории И. д. послужили прикладные задачи, в частности, военные.

Так, типичным примером задачи И. д. может служить задача о перехвате истребителем бомбардировщика противника. Оба объекта (и истребитель, и бомбардировщик) управляемы, и их поведение зависит от того, каким образом действуют пилоты. Однако управление находится в руках различных лиц с противоположными интересами: бомбардировщик уклоняет-

ся от встречи, а истребитель преследует его. Сложность задачи управления для пилота истребителя состоит в том, что у него отсутствует информация о будущем управлении противника. Он знает тех. возможности самолета, знает его положение в данный момент, однако не может знать, какое решение о своем управлении примет пилот бомбардировщика в каждый последующий момент времени. Поэтому его решение должно базироваться на информации о ситуации, которая сложилась к данному моменту.

Формально в общей форме И. д. может быть сформулирована следующим образом. Имеется объект управления, поведение которого описывается системой дифф. ур-ний

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, v), \quad (1)$$

где  $x$  —  $n$ -мерный вектор с компонентами  $x_1, \dots, x_n$ , а  $f(x, u)$  —  $n$ -мерная вектор-функция с компонентами  $f_i(x, u)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $u$  и  $v$  — управляющие параметры, представляющие собой  $r$ -мерный и  $s$ -мерный векторы соответственно, которые могут меняться на мн-вах  $U$  и  $V$ . Кроме того, задано терминальное мн-во  $M \subset E^n$ , где  $E^n$  —  $n$ -мерное пространство (см. *Пространство абстрактное в функциональном анализе*). Пусть выбраны две какие-либо ф-ции  $u(x)$  и  $v(x)$  так, что  $u(x) \in U$ ,  $v(x) \in V$  и ур-ние

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(x), v(x)) \quad (2)$$

имеет решение. Тогда для каждого начального состояния определена траектория  $x(t)$  системы (2) и определен функционал

$$I(u(\cdot), v(\cdot); x^0) = \int_0^{t_1} f_0(x(t), u(x(t)), v(x(t))) dt,$$

где  $t_1$  — первый момент времени, когда  $x(t) \in M$ . Если такого момента нет, то считают, что  $I = +\infty$ . Задача теории И. д. теперь состоит в выяснении вопроса о том, при каких условиях и для каких точек  $x^0$  можно найти такие ф-ции  $u^0(x)$  и  $v^0(x)$ , что

$$I(u^0(\cdot), v^0(\cdot); x^0) \leq I(u^0(\cdot), v^0(\cdot); x^0) \leq I(u(\cdot), v^0(\cdot); x^0).$$

В такой постановке задача решена лишь для небольшого числа конкретных частных примеров. Для случая, когда мн-во  $M$  совпадает со всем пространством, а  $t_1$  — фиксировано, доказано существование решения игры в некотором обобщенном смысле. Для общего случая получены результаты в предположении некоторой дискриминации второго игрока, порождающегося управлением  $v$ . А именно: предполагается, что принимая свое решение, первый игрок знает будущее управление второго на некотором малом отрезке времени. В этом случае удается показать, что все пространство

начальных положений может быть разбито на две области так, что, исходя из первой области, первый игрок всегда может гарантировать себе окончание игры с конечной ценой  $I$ , в то время как в точках второй области он не может себе гарантировать никакого конечного значения цены. Построены достаточные условия возможности окончания игры с конечной ценой. Эти условия применимы в основном для решения задач с линейным объектом управления.

Лит.: Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр. «Успехи математических наук», 1966, т. 21, № 4; Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., 1970 [библиогр. с. 413—420]; Айзекс Р. Дифференциальные игры. Пер. с англ. М., 1967 [библиогр. с. 470—472].

Б. Н. Пшеничный.

**ИГРЫ ЗНАЧЕНИЕ** — общее значение обеих частей равенства

$$v = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} H(x, y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} H(x, y)$$

в антагонистической игре  $\Gamma = \langle X, Y, H \rangle$ . Если игроки имеют оптимальные (или  $\varepsilon$ -оптимальные для любого  $\varepsilon > 0$ ) стратегии, то И. з. существует. Применяя свою стратегию оптимальную, 1-й игрок обеспечивает себе получение выигрыша не меньшего, чем  $v$ , а 2-й игрок гарантирует, что его проигрыш не превысит  $v$  (см. *Максимина принцип*). И. з. существует для широких классов антагонистических игр, в частности, для матричных игр и для некоторых классов бесконечных игр (см. *Игра на единичном квадрате*). Пример игры, не имеющей значения, см. в ст. *Игры антагонистические*.

Е. Б. Яновская.

**ИГРЫ МАТРИЧНЫЕ** — игры антагонистические, в которых оба игрока имеют конечное число чистых стратегий. Если 1-й игрок имеет  $m$  стратегий, а 2-й игрок —  $n$  стратегий, то И. м. может быть задана  $m \times n$ -матрицей  $A = \|a_{ij}\|$ , где  $a_{ij}$  — выигрыш 1-го игрока, если он выбрал свою стратегию  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), а 2-й игрок выбрал свою стратегию  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). При выборе стратегий в И. м. игрокам целесообразно руководствоваться *максимина принципом*. И. м. всегда имеет решение в стратегиях смешанных.

Примером И. м. может служить игра в «прятки», состоящая в следующем. 2-й игрок прячется в одну из  $n$  ячеек, а 1-й игрок обследует одну из них. Если он выбрал ячейку  $i$  и 2-й игрок находится там, то 1-й игрок обнаруживает 2-го игрока с вероятностью  $p_i$ ; в противном случае вероятность обнаружения равна нулю. Целью 1-го игрока является максимизация, а целью 2-го — минимизация вероятности обнаружения. Эта игра описывается диагональной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Стратегии оптимальные игроков здесь совпадают; они состоят в выборе ячеек с вероятностями, равными

$$(p_i \sum_{i=1}^n 1/p_i)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

И. м. моделируют широкий круг антагонистических конфликтных ситуаций с двумя участниками и конечными мн-вами возможных действий у каждого из них. С этим связано применение И. м. при выборе военно-тактических решений. Иногда под одним из игроков понимается «природа», т. е. вся совокупность обстоятельств, неизвестных принимающему решение другому игроку. Такие игры (их часто наз. играми *против природы*) возникают, напр., при необходимости учета природных и иных неконтролируемых факторов, не находящихся в распоряжении к.-л. конкретного лица. При этом природе приписывается роль сознательного противника, антагониста.

А. А. Корбут.

**ИГРЫ НА ВЫЖИВАНИЕ** — разновидность игр динамических двух лиц. В таких играх в каждый момент времени игроки обладают соответственно ресурсами  $r$  и  $R - r$  ( $0 < r < R$ ) и играют в *игру матричную*. Выигрыши, полученные в этой игре, присоединяются к тем ресурсам игроков, с которыми они вступают в игру в последующий момент времени. Игра заканчивается, когда исчерпываются все ресурсы одного из игроков, причем победитель получает единицу выигрыша.

В. К. Доманский.

**ИГРЫ РЕФЛЕКСИВНЫЕ** — класс игр, в которых выбор стратегий играющими осуществляется на основании информации о рангах рефлексии противников и матрице платежей в отличие от классической теории игр, где противники обладают знаниями только о матрице платежей. Ранги рефлексии играющих определяются следующим образом. Игрок имеет нулевой ранг рефлексии, если он принимает решение о выборе стратегии лишь на основе знания матрицы платежей, т. е. так же, как и в классической *игр теории*. Игрок обладает первым рангом рефлексии, если он считает, что его противники имеют нулевой ранг рефлексии. Вообще, игрок с  $k$ -м рангом рефлексии предполагает, что его противники имеют  $k - 1$ -й ранг рефлексии. Он проводит за них необходимые рассуждения по выбору стратегий и выбирает свою стратегию на основе знаний о матрице платежей и экстраполяции действий своих противников. Известно, что в случае игры двух лиц имеет смысл рассматривать лишь игроков с нулевым, первым и вторым рангом рефлексии. Дальнейшее увеличение ранга рефлексии в игре двух лиц не дает ничего нового. В играх  $n$  лиц проблема оценки максимального целесообразного ранга рефлексии еще не решена.

Лит.: Лефевр В. А. Конфликтующие структуры. М., 1973 [библиогр. с. 155—156].

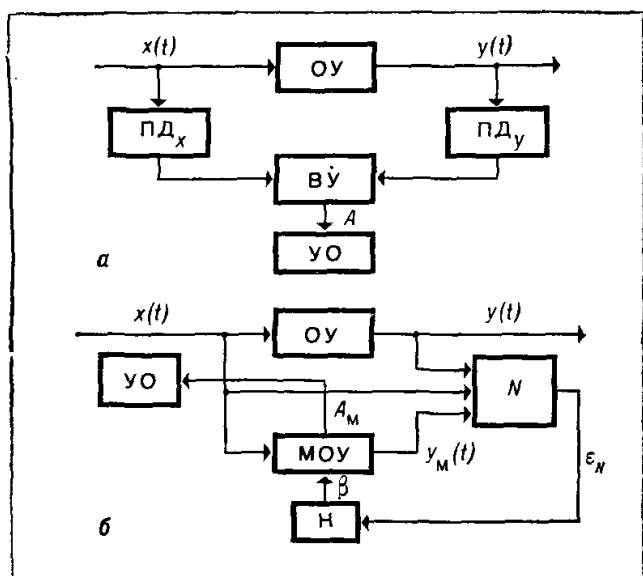
Д. А. Поспелов.

**ИДЕНТИФИКАТОР** — обозначение объектов (напр., переменных, массивов, структур, меток и др.) в языках программирования.

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ** — процедура построения оптимальной в определенном смысле математической модели объекта управления по реализациям его входных и выходных сигналов. В общем случае И. о. у. предусматривает решение следующих

осн. задач: выбор класса *модели математической*, языка ее описания, класса и типа входных сигналов, критериев соответствия (близости) модели и объекта, метода идентификации и разработку (или выбор) соответствующих *алгоритмов*.

Выбор класса моделей производится на основе теор. анализа объекта управления ОУ с использованием общих закономерностей процессов (физ., хим. и т. д.), протекающих в ОУ, и (или) на основе априорной информации о подобных объектах. Наиболее



Схемы идентификации объектов управления: а — разомкнутая; б — замкнутая.

эффективным подходом является сочетание теор. и экспериментального анализа ОУ; при этом с помощью экспериментального анализа производится количественная оценка характеристик ОУ и проверка соответствия модели реальному объекту. По способу получения экспериментальных данных об ОУ различают методы активного и пассивного эксперимента. При активном эксперименте на вход ОУ подается заранее выбранное воздействие (импульсное, ступенчатое, гармоническое, псевдослучайное и т. д.), в то время как при пассивном эксперименте используются данные, полученные в процессе нормального функционирования ОУ.

В качестве матем. моделей ОУ используют следующие осн. характеристики ОУ: статическую характеристику, *импульсную переходную функцию*, *переходную функцию*, *передаточную функцию*, частотные характеристики (см. *Частотные характеристики систем автоматического управления*), описывающие функции, дифференциальные, разностные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, связывающие входные и выходные сигналы ОУ. Наряду с этим широко применяют представление характеристик ОУ в виде различных интерполяционных рядов (Тейлора, Лягерра, Эрмита, Чебышева, Фурье, Вольтерры и др.). При И. о. у. в качестве критериев близости

ОУ и его матем. модели используют: среднеквадратичную *погрешность*, абсолютную погрешность, максимум правдоподобия и др. оценки.

Методы И. о. у. можно разделить на два обширных класса: методы, использующие весьма общие гипотезы об ОУ (напр., линейность, стационарность, детерминированность ОУ) — т. н. методы не параметрической, или функциональной идентификации и методы параметрической И. о. у., когда матем. модель ОУ известна с точностью до параметров, а задачей идентификации является их количественная оценка. Кроме того, методы И. о. у. классифицируют в зависимости от области их применения (типа сигналов, класса объектов), характера используемой информации (непрерывной, дискретной), темпа выдачи результатов (в темпе с процессом, периодически и т. д.), вида определяемых характеристик (напр., характеристик во временной или частотной областях), алгоритмов вычислений.

И. о. у. можно выполнять по разомкнутой или по замкнутой схеме. Отличительной чертой И. о. у. по разомкнутой схеме является то обстоятельство, что получаемые результаты не используются непосредственно для коррекции (уточнения) принятой матем. модели. И. о. у. по этой схеме предполагает выполнение следующих операций: преобразование (ПД) входных  $x(t)$  и выходных  $y(t)$  сигналов ОУ с целью получения необходимых соотношений относительно неизвестных параметров модели, используемых далее для вычисления (ВУ) характеристик  $A$  и их представления (отображения) УО (см. рис., а). К группе методов, использующих разомкнутую схему, относятся, напр., методы определения частотных характеристик ОУ при гармонических тестовых сигналах, импульсной переходной функции из *Винера* — *Хопфа уравнения*, т. н. интегральные методы, основанные на эквивалентном преобразовании исходных дифференциальных уравнений с целью получения системы алгебр. (обычно линейных относительно неизвестных коэффициентов) уравнений, алгебр. методы определения коэффициентов разностных уравнений.

И. о. у. по замкнутой схеме (рис., б) предусматривает оценку близости  $\epsilon_N = N(y, y_m, x)$  модели объекта управления МОУ и ОУ и коррекцию  $K$  модели, напр., коррекцию параметров  $\beta$  МОУ. При этом в качестве характеристик ОУ принимают характеристики  $A_m$  МОУ, скорректированной в смысле оптимума  $\epsilon_N$ ; здесь  $N$  — в общем случае оператор или функционал,  $y_m$  — выход модели, остальные обозначения соответствуют рис., а. Часто такая идентификация по замкнутой схеме (рис., б) сводится к нахождению экстремума выбранного (постулированного) критерия близости  $\epsilon_N$  модели и объекта, зависящего от искоемых коэффициентов  $\beta$  модели. Для решения этой задачи используют различные методы поиска экстремума (метод

Ньютона, градиентный, наискорейшего спуска метод, стохастической аппроксимации метод, методы случайного поиска и т. д.). В частности реализацию градиентных методов можно осуществить, привлекая вспомогательного оператора метод или функции чувствительности (см. *Динамических систем теория чувствительности*).

Построение моделей линейных объектов. При непараметрической идентификации определяют такие характеристики ОУ: статическую характеристику, импульсную переходную функцию, переходную функцию, частотные характеристики. С целью повышения точности оцениваемых характеристик при наличии помех широко применяют статистические методы обработки экспериментальных данных (см. *Экспериментальных данных способы статистической обработки*). Так, при оценке статических характеристик используют методы регрессионного анализа, при оценке импульсной переходной функции и частотных характеристик — корреляционные методы, соответственно во временной и частотной области (см. *Корреляционная функция*). Параметрическая идентификация ОУ связана с представлением их линейных моделей обычно в виде алгебраических, дифференциальных, разностных уравнений или интерполяционных рядов с последующим определением их коэффициентов.

Идентификация нелинейных объектов. Для описания нелинейных ОУ используют статические характеристики, описывающие функции и различные интерполяционные ряды. При определении статических характеристик широко применяют методы регрессионного и дисперсионного анализа. Весьма общим непараметрическим представлением модели ОУ является ее описание в виде ряда Вольтерры — задача идентификации в этом случае заключается в определении ядер этого ряда (многомерных импульсных переходных функций). Нелинейные системы ОУ можно описать различными системами ортонормированных функций; так в аналитической теории нелинейных систем амер. математик Н. Винер (1894—1964) использовал ряды Лягерра и Эрмита. Находят применение также описывающие функции, определяемые по данным активного эксперимента при моногармоническом входном воздействии. Наряду с этим используют методы построения линеаризованных моделей нелинейных ОУ — метод гармонической линеаризации и *статистической линеаризации метод*. При параметрической идентификации должно быть известно описание ОУ в виде нелинейного уравнения, связывающего его вход и выход. Оценку коэффициентов этого уравнения можно выполнить по разомкнутой или замкнутой схеме. При этом в последнем случае используют методы, аналогичные методам построения линейных моделей объектов.

Рассмотренные постановки задач идентификации и методы их решения во многих случаях распространяются и на объекты управления с переменными и распределенными параметрами,

а также на многомерные ОУ. Однако идентификация объектов этих классов обладает рядом специфических особенностей и зачастую связана со значительными вычисл. трудностями. С матем. точки зрения И. о. у. относится к классу обратных задач, которые во многих случаях являются некорректными. В связи с этим при И. о. у. используют методы регуляризации решений некорректно поставленных задач (см. *Некорректно поставленных задач способы решения*).

При постановке и решении задачи И. о. у. важное значение имеет область приложения (использования) получаемых результатов. Так, при исследовании объектов осн. целью является получение структуры и оценка параметров модели, адекватно отражающей основные закономерности процессов, протекающих в объекте. В задачах управления И. о. у. необходима для выработки стратегии управления; при этом часто не требуется строгой адекватности модели и объекта управления. Напр., в системах *дуального управления* И. о. у. является неотъемлемой частью процесса управления.

Методы И. о. у. являются в значительной степени универсальными, их можно использовать для получения матем. описания самых различных по своей природе объектов в технике, медицине, биологии, геологии, экономике и т. п.

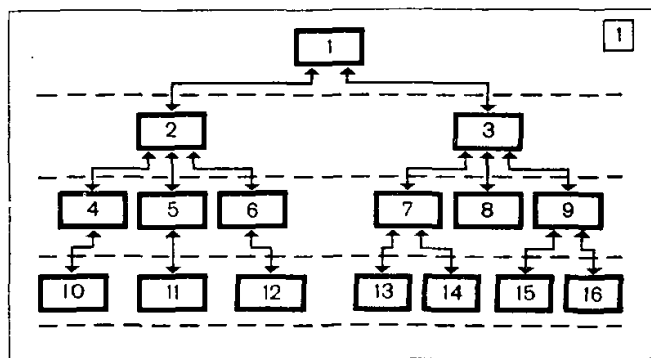
Лит.: Ордынцев В. М. Математическое описание объектов автоматизации. М., 1965 [библиогр. с. 355—357]; Кулик В. Т. Алгоритмизация объектов управления. Справочник. К., 1968 [библиогр. с. 335—343]; Райбман Н. С. Что такое идентификация? М., 1970; Идентификация систем (Обзор). «Экспресс-информация. Системы автоматического управления», 1971, № 32; Липицкий Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. Пер. с англ. М., 1966 [библиогр. с. 170—174].

Ю. В. Кременчуко, В. П. Яковлев.

**ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ** (ИСУ) — системы произвольной природы (технические, экономические, биологические, социальные) и назначения, имеющие многоуровневую структуру в функциональном, организационном или каком-либо ином плане. ИСУ изучаются в *кибернетике технической*, в *системотехнике*, *кибернетике экономической* и *кибернетике биологической*. ИСУ весьма разнообразны, встречаются они в различных областях деятельности человека и в природе. Типичными примерами технических ИСУ являются объединенные энергетические системы, транспортные системы, системы связи, пром. комплексы типа нефтеперерабатывающих и хим. заводов, горнопром. предприятий, включающих в себя шахты, обогащательные фабрики и пр. Широкое использование электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ) для управления производством особо повлияло на многообразие ИСУ, с которым теперь приходится сталкиваться (см. *Управляющая вычислительная машина*). Классическим примером в этом смысле может служить ИСУ крупными металлург. предприятиями. На рис. 1 приведена такого рода система управления металлург. комбинатом, имеющая четы-



режуровневую иерархию ЭЦВМ. В комбинат входят коксовые печи и цехи: шихтовый, чугуноплавильный, сталеплавильный, слябинговый, горячей и холодной прокатки и обработки изделий. ЭЦВМ верхнего уровня (1) предназначена для решения генеральных задач планирования, эконом. прогнозирования, регулирования запасов и др. задач чисто организационного, а не технологического характера. ЭЦВМ 3-го уровня (2 и 3) используются для составления долгосрочных календарных планов работы комбината, причем одна из них (2) предназна-



1. Иерархическая система управления металлургическим комбинатом.

чена для планирования работы подготовительных цехов (коковского, чугунолитейного и сталеплавильного), а с помощью второй — (3) осуществляется составление календарных планов работы для остальных цехов и участков. С помощью ЭЦВМ 2-го уровня иерархии (4—9) осуществляется разработка краткосрочных детальных календарных планов работы для каждого из цехов, а также производится сбор и обработка информации, необходимой для осуществления процесса автоматизированного управления работой цехов и их отдельных участков. ЭЦВМ 1-го уровня (10—16) предназначены для автомат. управления технологическими процессами и отдельными агрегатами (шихтовочными машинами, домнами, конвертерами и пр.).

Иерархические структуры встречаются также в различных системах административного управления, системах управления военными операциями, а также при изучении разнообразных проблем экономики, напр., система управления нар. х-вом СССР может быть представлена в виде семиуровневой иерархической структуры (рис. 2). Первые три нижних уровня относятся к проблематике, связанной с решением задач автоматического или автоматизированного (т. е. с участием человека) управления производством. На этих уровнях большую роль в процессе управления играют автомат. средства, а не человек, в то время как на остальных (верхних) уровнях осуществляется административное и организационное (планирование экономики) управление, и большее значение в процессе этого управления принадлежит людям, а не автомат. устройствам.

Часто иерархические структуры встречаются и при решении различных вычислительных

задач, в теории графов, в логике математической, лингвистике математической, программировании эвристическом и во многих др. случаях. Столь широкое распространение ИСУ и универсальный характер их обусловлен рядом преимуществ, которыми они обладают по сравнению с системами централизованного (радиального) управления. Основ. из преимуществ: 1) свобода локальных действий (в течение интервалов времени, обусловленных моментами поступления управляющих воздействий со стороны вышележащего по иерархической лестнице уровня); 2) возможность целесообразно сочетать различные для каждого из уровней системы локальные критерии оптимальности и глобальный критерий оптимальности системы в целом; 3) отсутствие необходимости пропускать очень большие потоки информации через один пункт управления, т. к. при использовании ИСУ информация с нижнего уровня передается на верхний в осредненном (обобщенном) виде; 4) повышенная надежность системы управления и большие возможности введения элементной избыточности в систему на необходимом уровне управления; 5) гибкость системы управления и широкие возможности приспособления ее к изменяющимся условиям; 6) универсальность при решении однотипных в целом, но отличающихся в деталях проблем управления; 7) в ряде случаев — экономическая целесообразность по сравнению с системами управления иной структуры. Поэтому ИСУ уделяется большое внимание и производятся попытки построить теорию, позволяющую рационально проектировать ИСУ для самых различных целей. Основными разделами теории ИСУ, разработанными к настоящему времени в определенной мере, являются: а) структурный анализ и синтез ИСУ, б) проблема координации действий ИСУ, в) оптимизация функционирования ИСУ.

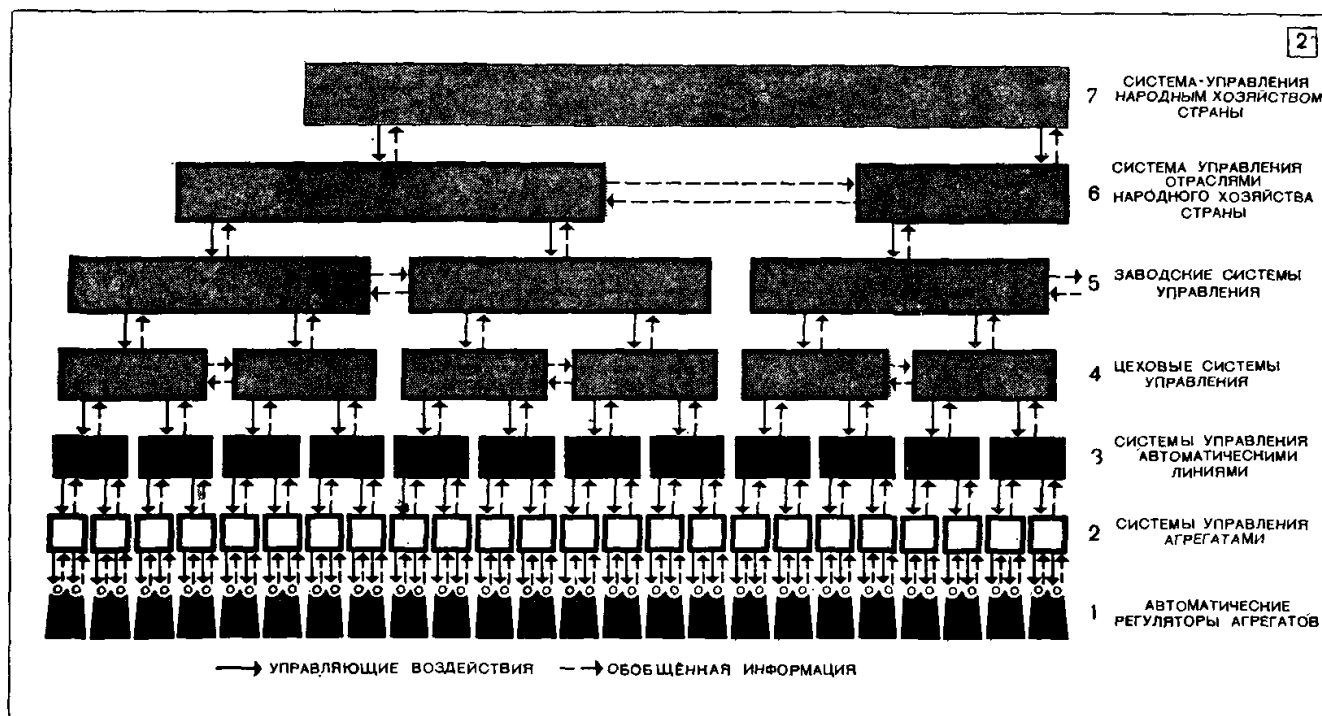
Задачи структурного анализа и синтеза ИСУ весьма разнообразны. Многое в этих вопросах зависит от того признака, который положен в основу при подразделении сложной системы на соответствующие уровни иерархии. При этом одну и ту же систему можно расчленять на различное количество уровней иерархий в зависимости от того, какой признак положен в основу при построении структуры ИСУ. Чаще всего это организационный признак и это позволяет отображать фактически существующую субординацию. Напр., при рассмотрении административных или военных проблем этот подход является вполне естественным, да и в большинстве других случаев имеются основания принять в качестве основного организационный принцип. Это утверждение справедливо, в частности, и при выборе структуры управления многими производствами и в иных случаях. При этом каждый из уровней можно подразделять еще на ряд подуровней уже по другому признаку. В качестве последнего можно, в частности, использовать избранный принцип управления: 1) с отрицательной обратной связью, 2) с самонастройкой или, вообще, адаптивный, 3) обу-



чение, 4) самоорганизация и др. На рис. 3, а изображена схема, которая демонстрирует расчленение ИСУ на осн. уровни по указанным на рис. признакам с дальнейшим подразделением каждого из уровней на подуровни в соответствии с осн. принципами управления. В ряде других случаев подразделение на осн. уровни или расчленение осн. уровней на подуровни можно производить по признаку, характеризующему определенный аспект деятельности системы. Так, на рис. 3, б указано такого рода подразделение на три уровня,

из уровней можно изучать независимо от других в течение отрезка времени, протекающего от одного момента подачи сигнала управления с верхнего уровня на нижний до следующего такого же момента. Это обстоятельство и обуславливает относительную локальную независимость *подсистем*, входящих в ИСУ.

ИСУ образуется также в результате расчленения какой-либо сложной задачи на более простые подзадачи. Полагают, в частности, что мозг человека устроен так, что в процессе принятия решения интуитивно более сложная



2. Иерархическая структура системы управления народным хозяйством СССР (по В. А. Трапезникову).

характеризующих технологический, информационный и эконом. аспекты функционирования ИСУ. Иногда процесс расчленения на уровни по последнего рода признакам именуют спец. термином — *стратифицированием* систем, а сами уровни называются *стратами*.

Подразделение системы на иерархически связанные друг с другом уровни производят и по временному признаку. В этом случае в основу при отнесении элементов к тому или другому уровню кладется величина интервала времени, через который необходимо вмешательство последующего уровня в процесс управления предыдущим уровнем для обеспечения нормального функционирования системы. На рис. 3, в приведен пример подразделения ИСУ на уровни по такому признаку применительно к задаче управления энергетической системой. Подразделение на уровни и по организационному и по временному признакам может приводить либо к одной и той же структуре, либо — к разным. Расчленение по временному признаку оказывается весьма целесообразным при проведении теоретического исследования ИСУ, т. к. в этом случае каждый

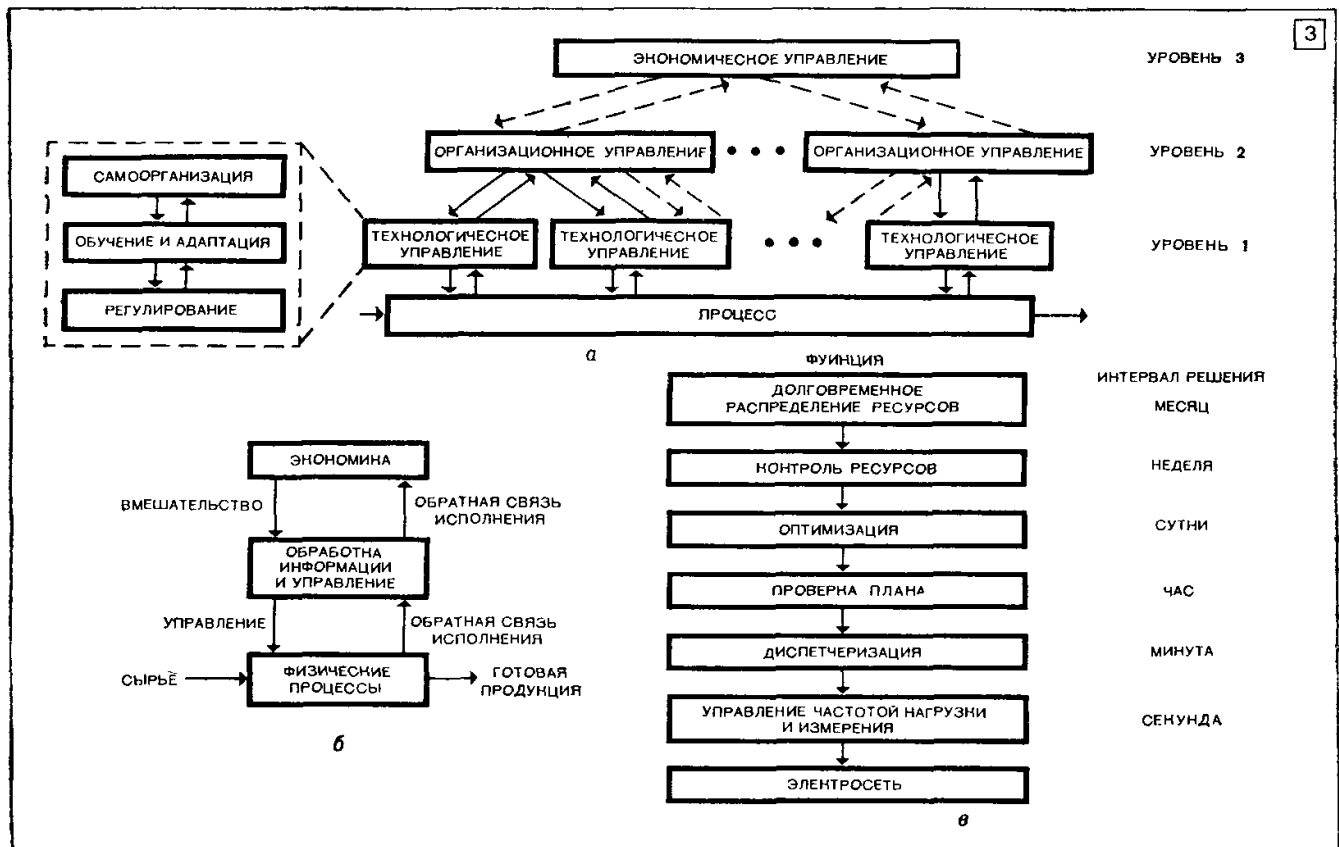
задача сводится к иерархии менее сложных задач.

Приведенные различные признаки (или свойства) использовались для построения иерархической структуры «по вертикали». Элементы внутри одного и того же уровня могут быть при этом либо связаны друг с другом непосредственно, либо не связаны. Однако и во втором случае будет осуществляться косвенная связь между ними через верхний уровень. Напр., это может быть в том случае, если критерий оптимальности последующего уровня функционально зависит от локальных критериев подсистем предшествующего ему уровня. Этим системы с иерархической структурой существенно отличаются от обычных многосвязных систем, т. к. в последних при отсутствии непосредственной связи между элементами система распадается на отдельные, не связанные друг с другом части. Каждый из элементов, входящих в тот или иной уровень ИСУ, может сам по себе иметь достаточно сложную структуру. Напр., это может быть самонастраивающаяся, самообучающаяся или самоуправляющаяся система автомат. регулирования. Так, на рис. 4, а изображена двухуровневая

вая ИСУ, состоящая из двух (может быть и больше) самоуправляющихся подсистем, соединенных во втором уровне иерархии по принципу отрицательной обратной связи.

Все ИСУ, независимо от их природы, можно подразделить на два больших класса: ИСУ с обратными связями, когда информация с нижнего уровня передается на близлежащий верхний уровень (или несколько верхних уровней), и ИСУ с прямыми связями управления, когда имеются только сигналы управления, идущие с верхнего уровня на близлежащий нижний.

стандартные задачи: устойчивости движения, определения качества *переходных процессов*, условий *автономности*, инвариантности, чувствительности и др. (см. *Устойчивости дискретных систем теория, Инвариантность систем автоматического управления*). Задача координации ИСУ сводится к отысканию тех принципов (законов управления), которые можно положить в основу при определении воздействий передаваемых с каждого из верхних уровней на подсистемы соседнего нижележащего уровня. Всегда возникает также необ-



3. Подразделение иерархических систем управления: а — по организационному признаку и по принципам управления; б — по технологическому, информационному и экономическому признакам; в — по временному признаку.

В этом случае структура ИСУ имеет вид «дерева». ИСУ с обратными связями имеют существенные преимущества по сравнению с ИСУ, не имеющими таковых.

Осн. задачами, возникающими при исследовании ИСУ, являются задачи анализа и задачи синтеза иерархических систем. Задачи анализа встречаются при изучении уже существующих объектов, а задачи синтеза — при проектировании новых систем. В последнем случае приходится решать вопрос о необходимом к-ве уровней иерархии, в связи с чем и проводились попытки решить задачу о выборе оптимального к-ва уровней иерархии как задачу вариационного исчисления. Для решения задач анализа ИСУ находят широкое применение методы теории графов.

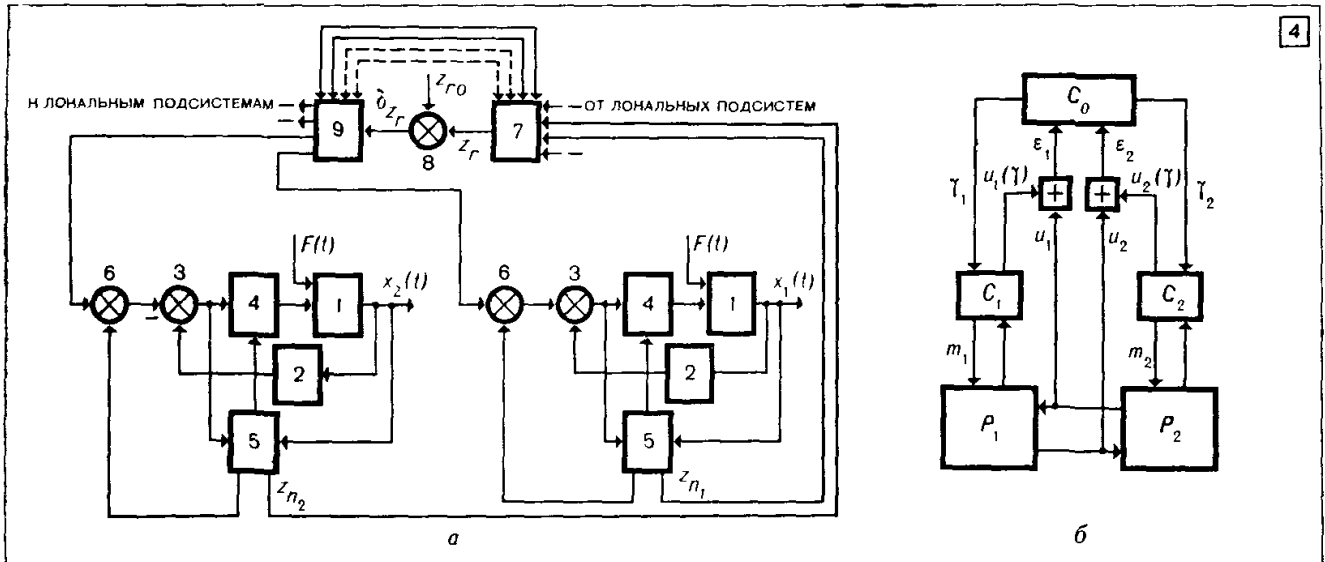
Проблема координации управляющих воздействий является специфичной для ИСУ, хотя существенны и

ходимость искать целесообразный способ координации действий между подсистемами одного и того же уровня в ИСУ. Было предложено несколько принципов, пригодных для указанной только что цели. Один из них — принцип предсказаний взаимодействий — заключается в том, что управляющие воздействия с какого-либо верхнего уровня распределяются между подсистемами соседнего нижнего уровня таким образом, что каждая из подсистем становится автономной относительно всех других подсистем этого же уровня. Фактически этот принцип (как и другие) разработан только применительно к двухуровневым системам, но полагают, что многоуровневые системы можно подразделять на двухуровневые группы и для каждой такой группы можно использовать разработанный метод. Два других известных принципа координации именуют принципом баланса взаимо-

действий и принципом оценки взаимодействий. На рис. 4, б изображена двухуровневая ИСУ с двумя подсистемами на первом уровне, с помощью которой можно наглядно продемонстрировать сущность принципов координации. Первый уровень (регуляторы  $C_1$  и  $C_2$ ) управляет объектами  $P_1$  и  $P_2$ , подавая на вход их соответственно управляющие воздействия  $m_1$  и  $m_2$ . Второй уровень (координатор  $C_0$ ) управляет регуляторами  $C_1$  и  $C_2$ , подавая на них координирующие воздействия — соответственно  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Вмеша-

пом баланса взаимодействия. Если же последние соотношения заменяются на  $u_1(\gamma) \in U_1^\gamma$  и  $u_2(\gamma) \in U_2^\gamma$ , где  $U_1^\gamma$  и  $U_2^\gamma$  — допустимый диапазон изменений взаимодействий  $u_1$  и  $u_2$ , то принцип координации именуют принципом оценки взаимодействий.

Фактический выбор той или иной стратегии координации производится на основе сопоставления результатов теоретических расчетов, моделирования и эвристических сооб-



4. Двухуровневая иерархическая система управления.

тельство координатора проявляется в том, что от значений  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  зависят управляющие воздействия  $m_1$  и  $m_2$ , и это обозначают в виде  $m_1(\gamma_1)$  и  $m_2(\gamma_2)$ . В общем случае  $m_1$  и  $m_2$  могут зависеть одновременно от  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , тогда это обозначают как  $m_1(\gamma)$  и  $m_2(\gamma)$ , где  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ . Система наз. координируемой, если найдены такие значения  $\hat{\gamma}$ , что  $m_1(\hat{\gamma})$  и  $m_2(\hat{\gamma})$  удовлетворяют общей цели, поставленной перед системой. Значения управляющих воздействий  $m_1$  и  $m_2$ , удовлетворяющие условию координируемости, обозначают через  $\hat{m}_1(\gamma)$  и  $\hat{m}_2(\gamma)$ . Для осуществления процесса координации существенное значение имеют величины  $u_1$  и  $u_2$ , характеризующие перекрестные взаимодействия между управляемыми объектами  $P_1$  и  $P_2$ . Текущие значения этих величин  $u_1$  и  $u_2$  передаются к координатору  $C_0$  и путем сопоставления их со значениями  $\hat{u}_1(\gamma)$  и  $\hat{u}_2(\gamma)$ , удовлетворяющими условиям координируемости системы, определяют ошибки рассогласования  $\varepsilon_1 = u_1 - \hat{u}_1$  и  $\varepsilon_2 = u_2 - \hat{u}_2$  и используют их для построения алгоритма функционирования координатора. Стратегия координации, при которой значения управляющих воздействий  $\hat{m}_1(\gamma)$  и  $\hat{m}_2(\gamma)$  удовлетворяют общей цели системы, когда  $u_1(\gamma) = \hat{u}_1(\gamma)$  и  $u_2(\gamma) = \hat{u}_2(\gamma)$ , наз. принци-

ражений. Теоретические расчеты сводятся к построению соответствующей итерационной процедуры, базирующейся на одном из известных, но специально для этой цели модифицированном методе оптимального управления. В частности, разработаны различные градиентные и интегральные процедуры (подача сигнала об интегральном значении величин  $u_i$  к координатору) для обеспечения условия координации  $\varepsilon_i = 0$ . Рассматривались также вопросы сходимости этих процедур, выбора момента окончания итерационного процесса и др.

При исследовании более сложных ИСУ, имеющих больше двух уровней, характер задач при переходе от уровня к уровню будет существенно изменяться. Так, если для нижних уровней характерны именно описанные выше методы координации, то для средних уровней (проблемы информационного характера, связанные и с организационным и с административным управлением) задачи координации могут быть уже иными, а для верхних уровней, на которых решаются задачи чисто эконом. характера и долгосрочного планирования и прогнозирования, они приобретают и иной, еще более сложный характер. Считается, что по мере перехода от нижних уровней к верхним, решение задач все более и более затрудняется, так как приходится оперировать все с менее и менее достоверной информацией, и объема ее обычно не хватает для качествен-

ного осуществления процесса управления (см. *Управление с адаптацией*). Однако уже хорошо известно, что только решение задач для всех уровней, а не только для нижних, позволяет действительно достичь существенных экономических результатов при использовании ИСУ.

Лит.: К о е к и н А. И. Оптимизация надежности и структуры иерархических систем управления. «Автоматика и телемеханика», 1965, т. 26, в. 11; К у х т е н к о А. И. О теории сложных систем с иерархической структурой управления. В кн.: Сложные системы управления. К., 1966; К у л и к о в с к и й Р. Оптимальное управление сложными иерархическими системами. В кн.: Труды III Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 3. М., 1971; М е с а р о в и ч М., М а к о Д., Т а к а х а р а И. Теория иерархических многоуровневых систем. Пер. с англ. К., 1973. А. И. Кухтенко.

**ИЕРАРХИЧНОСТЬ УПРАВЛЕНИЯ** — см.

*Иерархические системы управления.*

**ИЗБЫТОЧНОСТЬ СИСТЕМЫ** — превышение объема сигналов или меры сложности структур системы по сравнению с их минимальными значениями, необходимыми для выполнения поставленной задачи. Приведенное определение И. с. соответствует рассмотрению системы на уровне тех. реализации, когда осн. видами И. с. являются сигнальная и структурная избыточности. На абстрактном уровне говорят об информационной И. с., т. е. об избыточности в  $k$ -ве перерабатываемой информации, и алгоритмической И. с., т. е. избыточности в сложности алгоритма функционирования системы. Различают искусственную и естественную избыточности. Проблема И. с. связана с тремя осн. задачами: 1) введением искусственной избыточности с целью улучшения осн. характеристик системы (помехоустойчивости или точности, надежности и пр.); 2) сокращением естественной информационной избыточности с целью упрощения системы (см. *Избыточность сообщений*); 3) рациональным использованием избыточности универсальных многофункциональных систем и массового обслуживания систем в периоды недогрузки. Введение сигнальной избыточности применяется для повышения как помехоустойчивости, так и надежности, введение структурной избыточности — только для повышения надежности системы.

На уровне технич. реализации обрабатываемая информация отображается в своих физ. носителях — сигналах, а алгоритм реализуется структурами — технич. устройствами, выполняющими заданные алгоритмом преобразования сигналов. Для измерения И. с. вводятся два понятия: 1) сигналы минимального объема  $V_0$ , необходимые для отображения используемых информационных процессов с заданной точностью при условии, что сигналы не будут искажены в системе; 2) структуры минимальной сложности  $S_0$ , реализующие алгоритм системы с заданной точностью при условии, что структуры в процессе работы сохраняют свои рабочие характеристики неизменными. Для оценки сложности структуры не существует общепринятой меры; определенными преимуществами обладает информационная мера.

Введение одного вида И. с. приводит к необходимости применения и другого. Поэтому коэффициент сигнальной избыточности  $r = \alpha V/V_0$ , где  $V$  — фактический объем сигналов;  $\alpha$  — коэффициент пространственного дублирования сигналов ( $\alpha > 1$ , если структуры с избыточностью). Следовательно, сигнальная избыточность может быть связана как с усложнением сигналов по сравнению с простейшими возможными, так и с их пространственным дублированием в блоках избыточной структуры. Аналогично, коэффициент структурной избыточности  $s = \beta S/S_0$ , где  $S$  — фактическая сложность структуры,  $\beta$  — коэффициент временной загрузки структуры ( $\beta > 1$ , если обрабатываются сигналы с избыточностью). Т. о., структурная избыточность может быть связана как с усложнением структуры по сравнению с простейшей возможной, так и с увеличением времени загрузки при обработке сигналов с избыточностью.

Для нахождения предельного возможного значения сигнальной избыточности система разделяется на две части: 1) подсистема, в которую в той или иной форме входит канал передачи информации; 2) подсистема, в которую в той или иной форме входит канал вычислений. В первой части предельная И. с. определяется информационным резервом  $R_c = V_k/V_c$ , где  $V_k$  — верхний, ограниченный пропускной способностью канала, предел  $k$ -ва информации, которое может быть передано по каналу за время  $T$  его работы;  $V_c$  — объем сигналов, равный минимальному  $k$ -ву информации, которое должно быть передано для воспроизведения сообщений источника с заданной точностью. Резерв может быть представлен в виде трех сомножителей: резерва по времени, по частоте и по числу градаций интенсивности. При введении И. с. практически используются только первые два вида резерва. Для вычисления канала не доказано, существует ли конечная скорость вычислений при сколь угодно малой вероятности ошибок, т. е. пропускная способность. Поэтому оценка информационного резерва для второй части может быть сделана только приближенно:  $R_v \leq C_v T/I$ , где  $C_v$  — скорость вычислений при малой вероятности ошибок (меньше допустимой);  $I$  —  $k$ -во информации, которое должно быть обработано за время  $T$ .

Существует три осн. способа введения избыточности в сигналы: многократное повторение информации, введение в дискретные сигналы дополнительных элементов и метод избыточных переменных.

Многократное повторение информации возможно во времени и по частоте. В первом случае информация повторяется в последовательные интервалы времени. Во втором — при передаче информации используются широкополосные методы модуляции — частотной (ЧМ) и импульсной (ИМ). Так, в спектре сигналов с ИМ передаваемая информация многократно повторяется вокруг гармоник частоты следования импульсов. При

приеме производится когерентное сложение. Выигрыш в помехоустойчивости возможен при условии, что помехи в интервалах повторения слабо коррелированы. Недостатком метода является наличие порога, при превышении помехами которого помехоустойчивость резко падает из-за потери «стандарта когерентности».

Введение в дискретные сигналы дополнительных элементов применяется при передаче и обработке информации. Осн. способ — использование кодов с избыточностью. Для вычислительных устройств перспективным представляется использование кодов в системе остаточных классов. При этом можно осуществлять контроль и исправление ошибок во всех узлах ЦВМ. Недостаток кодирования с избыточностью — значительное усложнение аппаратуры.

Метод избыточных переменных находит применение в вычислительных устройствах. При этом исходная задача в виде конечных, дифференциальных, разностных или интегральных уравнений содержит  $n$  переменных  $x_i$ , вместо которых вводится  $l > n$  новых переменных  $y_i$ . Переменные  $x_i$  и  $y_i$  могут быть связаны произвольным образом, но так, чтобы исходные переменные могли быть вычислены в функции от новых переменных. На них накладываются дополнительные условия и вместо исходной задачи решается преобразованная исходная задача, перемешанная с дополнительной задачей. По правильности известного решения дополнительной задачи можно судить о правильности протекания вычислительного процесса в целом и принимать меры к исправлению возникающих ошибок. Возможно применение метода также в измерительных и управляющих системах.

Структурная избыточность может быть введена на следующих уровнях организации системы: 1) на уровне элементов; 2) на уровне функциональных блоков; 3) на уровне подсистем. Перспективным является введение И. с. на уровне функциональных блоков. Принцип построения системы с избыточностью сводится к следующему: система разбивается на функциональные блоки; избыточность распределяется между блоками; каждый блок строится по мажоритарному принципу — в виде нечетного числа параллельных однотипных ветвей, выходы которых подаются на решающий орган, принимающий решение по большинству. Решающий орган корректирует ошибки и препятствует их прохождению в последующие блоки. Распределение избыточности должно быть таким, чтобы обеспечивалась одинаковая надежность всех блоков, независимо от относительных затрат.

Для оценки выигрыша, который дает введение избыточности, целесообразно использовать критерий функциональной эффективности системы, сопоставляющий достигаемую вероятность выполнения задачи  $P$  (которая должна быть не меньше требуемой) с обобщенными за-

тратами  $C$ , объединяющими информационные, алгоритмические и тех. затраты:  $F = P/C$ . Вероятность выполнения задачи зависит, в основном, от помехоустойчивости (точности) и надежности системы. При введении одного вида избыточности неизбежно вводится и другой, поэтому улучшение помехоустойчивости, как правило, сопровождается ухудшением надежности и наоборот; кроме того, увеличиваются обобщенные затраты. Все это учитывается критерием функциональной эффективности, который сразу показывает, приводит ли введение избыточности к улучшению системы. Исследование можно провести в общем виде, если возникновение искажений в сигналах из-за помех или возникновение отказов в структурах из-за случайных возмущений описываются одинаковой схемой с независимыми событиями.

Пусть в рабочие сигналы (или, соответственно, в структуры) вводится  $r - 1$  избыточный элемент, где  $r$  — коэффициент избыточности. Искажения элементов сигналов (или отказы элементов структуры) возникают независимо с вероятностью  $p$ . В системе появляется ошибка в сигналах (или нарушение работы структуры), если не менее чем в  $n$  элементах возникли ошибки (или отказы), где  $n = [cr]$ , и  $0 < c < 1$  ( $[cr]$  — целая часть числа в квадратных скобках). Вероятность ошибки в сигналах (или отказа в структуре) при введении избыточности определяется по формуле

$$p_r = \sum_{h=n}^r C_r^h p^h (1-p)^{r-h}. \text{ Для оценки изменения}$$

функциональной эффективности подсистемы, в которую введена избыточность, применяется коэффициент  $F_1 = \gamma/B$ , где  $\gamma$  учитывает изменение вероятности выполнения задачи, а  $B$  — изменение относительных затрат. Практически наибольший интерес представляет случай, когда коэффициент избыточности сравнительно невелик ( $r \leq 20$ ), как и исправляющая способность решающего органа ( $n \leq 5$ ), а исходная вероятность ошибок в сигналах (или отказа в структурах)  $p \leq 10^{-2}$ . Тогда в приведенной выше сумме для вероятности ошибок (или отказа) при введении избыточности можно ограничиться только первым членом, что в указанных условиях даст погрешность, меньшую 10%,

$$p_r \approx \frac{r(r-1) \dots (r-n+1)}{n!} p^n [1 - (r-n)p].$$

Предельный эффект от введения избыточности реализуется в том случае, когда  $r = r_0 = 2n - 1$ . При этом И. с. используется наиболее эффективным образом, но и решающий орган должен иметь предельную чувствительность. В таблице приведены результаты расчетов для этого случая в предположении, что исходная вероятность ошибки (или отказа)  $p = 10^{-2}$ , а затраты изменяются пропорционально введенной избыточности:  $B = br$ , при  $b = 1$ .

## Расчет избыточности системы

$n$	$r_0$	Выигрыш в помехоустойчи- вости (надежности), раз	Выигрыш в функциональной эффективности, раз
2	3	$3,3 \cdot 10^1$	$1,1 \cdot 10^1$
3	5	$10^3$	$2 \cdot 10^2$
4	7	$2,8 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^3$
5	9	$8,1 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^4$

Эти результаты являются предельными для сигнальной (или структурной) избыточности и решающего органа, построенного по мажоритарному принципу, когда ошибки (или отказы) описываются схемой с независимыми событиями. В этих условиях выигрыш в функциональной эффективности системы может быть значительным.

Развитию таких исследований по теории и практическому применению И. с. значительно способствовали 1-й, 2-й и 3-й симпозиумы по этой проблеме (Ленинград, 1964, 1966, 1968), на которых были представлены и обсуждены результаты исследований по разработке осн. понятий теории избыточности, а также по исследованию выигрыша в функциональной эффективности системы с избыточностью, по исследованию метода избыточных переменных и его применений, по использованию кодирования в остаточных классах для повышения надежности ЭЦВМ, по исследованию общих законов систем и роли избыточности. Лит.: Игнатьев М. Б., Михайлов В. В. Метод повышения функциональной надежности и точности вычислительных устройств. Л., 1964 [библиогр. с. 35]; Железнов Н. А. Проблема использования избыточности в информационных системах. — Торгашев В. А. Корректирующие коды в системе остаточных классов. В кн.: Системы обработки и передачи информации. Л., 1966; Аккушский И. Я., Юдицкий Д. И. Машинная арифметика в остаточных классах. М., 1968 [библиогр. с. 430—433]. Н. А. Железнов.

**ИЗБЫТОЧНОСТЬ СООБЩЕНИЙ** — величина  $r$ , показывающая, насколько эффективно представление сообщений в алфавите  $A$ . В случае дискретных сообщений величина  $r = 1 -$

$\frac{H}{n \log M}$ , где  $H$  — энтропия сообщений,  $M$  — число символов алфавита  $A$ , который используется для представления (кодирования) сообщений;  $n$  — средняя длина кодовых слов; основание логарифма совпадает с основанием логарифмов в выражении для  $H$ . Примером неэффективного кодирования является представление сообщений, напр., на русском языке с помощью букв русского алфавита. Избыточность русского языка лежит в пределах от 0,5 до 0,8. Приблизительно в тех же пределах лежит избыточность и др. разговорных языков.

Методы оптимального статистического кодирования позволяют уменьшать И. с. Для кодирования статистически независимых сообщений с неравномерным распределением вероятностей могут использоваться метод Шеннона — Фано, метод Хаффмена и др. Осн. методом кодирования статистически зависимых сообщений является укрупнение сообщений, т. е.

объединение сообщений в блоки и последующее кодирование блоков одним из известных методов кодирования независимых сообщений. В случае непрерывных сообщений длительности  $T$  и конечного алфавита  $A$  под И. с., представленных в алфавите  $A$  с точностью  $\epsilon$  (о выборе меры точности см. *Энцислон-энтропия*),

понимается величина  $1 - \frac{TH_\epsilon}{n \log M}$ , где  $H_\epsilon$  —

энтропия сообщений, т. е. минимальное к-во единиц информации в сек., позволяющее восстановить непрерывное сообщение с точностью, не ниже  $\epsilon$ . Уменьшение И. с., сохраняющее меру точности, наз. сжатием сообщений. Сжатие может быть выполнено с помощью двух операций: *дискретизации* (т. е. представления сообщений конечным к-вом действительных чисел) и *квантования* (т. е. представления каждого действительного числа с помощью символов некоторого конечного алфавита). Задача дискретизации сводится к выбору аппроксимации сообщений конечным рядом. Задача квантования аналогична задаче оптимального статистического кодирования. В. Д. Колесник.

**ИМПЛИКАЦИЯ** в алгебре логики — одна из логических операций, соответствующая в естественном языке связке «если..., то» и образующая из двух высказываний  $A$  и  $B$  условное высказывание «если  $A$ , то  $B$ ». В алгебре логики И. записывают  $A \rightarrow B$  (или  $A \supset B$ ). **ИМПЛИКАЦИЯ СТРОГАЯ** — импликация, свободная от так называемых парадоксов материальной импликации (м. и.): «из лжи следует все, что угодно», «истина следует из чего угодно». Наиболее известный вид И. с. — И. с. Льюиса, введенная им в 1932. В модальных исчислениях К. Льюиса И. с. выражается через м. и. и модальный оператор необходимости: «если  $A$ , то  $B$ » означает «невозможно, чтобы  $A$  и не  $B$  выполнялись одновременно». Однако в исчислениях Льюиса возникают «парадоксы И. с.»: «необходимое высказывание следует из любого», «из невозможного высказывания следует любое». Исчисление И. с., в котором невыводимы «парадоксы» как м. и., так и И. с. Льюиса, описал В. Аккерман в 1956. В 1958 была предложена некоторая модификация исчисления Аккермана — эквивалентное исчисление  $E$ . Схемы аксиом и правила вывода следующие:

$$(1) ((A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow B, (2) (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

$$(3) (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B), (4) A \& B \rightarrow A.$$

$$(5) A \& B \rightarrow B, (6) (A \rightarrow B) \& (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \& C).$$

$$(7) NA \& NB \rightarrow N(A \& B), \text{ где } NA = ((A \rightarrow A) \rightarrow A), (8) A \rightarrow A \vee B,$$

$$(9) B \rightarrow A \vee B, (10) (A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C).$$

$$(11) A \& (B \vee C) \rightarrow B \vee (A \& C).$$

$$(12) (A \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{A},$$

$$(13) (A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow (B \rightarrow \bar{A}), \quad (14) \bar{A} \rightarrow A,$$

$$(R1) \frac{A, A \rightarrow B}{B}, \quad (R2) \frac{A, B}{A \& B}.$$

В исчислении  $E$  для выводимости И. с.  $A \rightarrow B$  необходима некоторая связь между  $A$  и  $B$ . Напр., формула  $A \rightarrow B$  невыводима, если  $A$  и  $B$  не имеют общей буквы (теорема Белнапа — Донченко). В отличие от м. и., И. с. не имеет конечной истинностной таблицы. Важным в исчислении  $E$  является исчисление 1-й ступени, формулы которого не содержат импликации под знаком другой импликации. Такие формулы допускают довольно простое семантическое истолкование. Кроме того, построен алгоритм, позволяющий для любой формулы первой ступени узнать, выводима ли она в  $E$ . В связи с трудностями семантической интерпретации и проблемы разрешения для всего  $E$ , было построено еще одно исчисление И. с.  $SE$ . Это исчисление, будучи более слабым, чем  $E$ , совпадает с  $E$  на формулах первой ступени и, кроме того, является разрешимым. Найден алгоритм распознавания выводимости для некоторых других исчислений, подобных  $E$ . Наиболее интересно из них — импликативно-негативное исчисление  $E_I$  с аксиомами (1)–(3), (12)–(14) и правилом вывода (R1).

Л. Л. Максимова.

**ИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕХОДНАЯ ФУНКЦИЯ** — реакция динамической системы на воздействие *дельта-функции*. Для систем, описываемых обыкновенными линейными дифф. ур-ниями с переменными коэффициентами, И. п. ф.  $k(t, \tau)$  зависит от двух аргументов — текущего времени  $t$  и момента  $\tau$  приложения импульсного воздействия. И. п. ф. линейных стационарных систем с сосредоточенными параметрами зависит только от разности аргументов  $t - \tau$ . И. п. ф. реальных систем равна нулю при  $t < \tau$  (см. *Осуществимости физической критерии*). Преобразование Лапласа И. п. ф. определяет *передаточную функцию*, а *Фурье преобразование* — частотную характеристику (см. *Частотные характеристики систем автоматического управления*), и наоборот, обратные преобразования этих характеристик дают И. п. ф. Реакция линейной системы  $y(t)$  на произвольное воздействие  $x(t)$ , приложенное в момент времени  $t = t_0$ , выражается через И. п. ф. следующим образом:

$$y(t) = \int_{t_0}^t k(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Для стационарных систем, описываемых дифф. ур-ниями

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}, \quad (2)$$

имеют место соотношения

$$y(t) = \int_{t_0}^t k(t - \tau) x(\tau) d\tau = \int_0^{t-t_0} k(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (3)$$

$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad h(t) = \int_0^t k(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где  $h(t)$  — переходная ф-ция (см. *Функция ступенчатая*).

И. п. ф. такого класса систем при  $m < n$  может быть определена также как

$$k(t) = \begin{cases} w(t) & \text{при } t > 0 \\ 0 & \text{при } t \leq 0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $w(t)$  — ф-ция Грина, удовлетворяющая *о д н о р о д н о м у* дифф. уравнению  $\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i w(t)}{dt^i} = 0$  с т. н. эквивалентными начальными условиями:

$$y^{(n-m-1)}(0) = \frac{1}{a_n} b_n; \\ y^{(n-m)}(0) = \frac{1}{a_n} [b_{n-1} - a_{n-1} y^{(n-m-1)}(0)], \dots \\ \dots, y^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n} [b_0 - a_0 y^{(n-m-1)}(0) - \dots - a_{n-1} y^{(n-2)}(0)].$$

И. п. ф. широко используют при исследовании систем автомат. управления, в теории электр. цепей, радиотехнике и т. д. Понятие И. п. ф. распространяется также на системы с распределенными параметрами, импульсные и нелинейные системы.

Лит.: Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. М., 1954 [библиогр. с. 796—798]; Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [библиогр. с. 926—963]; Теория автоматического регулирования, кн. 1. М., 1967 [библиогр. с. 743—763]; Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. Пер. с нем. М., 1971.

Ю. В. Крементуло.

**ИМПУЛЬСНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ** — одна из разновидностей *дискретной системы управления*.

**ИМПУЛЬСНАЯ ЭЛЕМЕНТНАЯ СТРУКТУРА ЦВМ** — структура элементов, обеспечивающая выполнение логических преобразований над информационными сигналами импульсного вида. Импульсный сигнал в отличие от потенциального характеризуется отсутствием управления его спадом, который возникает без внешнего воздействия через определенное время, характеризующее длительность сигнала (см. *Элементная структура ЦВМ*). В основу построения И. э. с. положены два принципа: первый из них характерен использованием

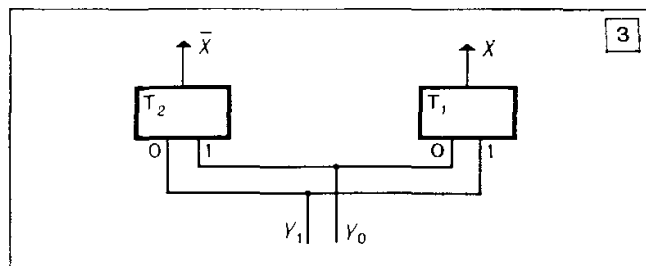
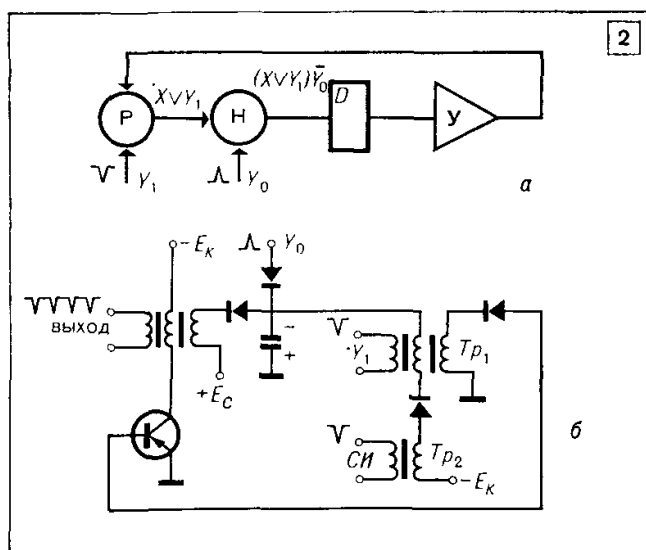
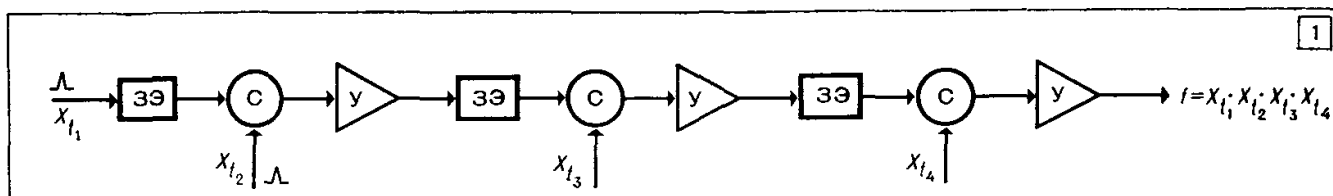


триггеров динамических и импульсных вентилей (не обладающий свойством запоминания), второй — использованием логических задерживающих элементов (см. также *Элементные структуры на логических задерживающих элементах*).

В И. э. с. 1-го типа образование и передача сигналов должны быть жестко синхронизированы в пределах долей длительности сигналов, в противном случае нарушается необходимое физ. взаимодействие сигналов в логических элементах ЦВМ. Это достигается образовани-

от И. э. с. на динамических триггерах тем, что здесь синхронизация сигналами опроса производится на каждом логическом элементе; это почти полностью устраняет рассогласование информационных сигналов во времени, т. к. ограничивает участки, где оно может возникнуть, лишь одним каскадом.

В И. э. с. на динамических триггерах «1» кодируется серией импульсов, «0» — их отсутствием. В качестве логических элементов в этой И. э. с. применяются импульсные совпадения, несовпадения и разделения. Импульс-



1. Блок-схема многовходового импульсного совпадения: С — двухвходовое совпадение; ЗЭ — запоминающий элемент; У — усилитель.

2. Триггер динамический: а — блок-схема; б — принципиальная схема (Р — импульсное разделение; Н — импульсное несовпадение; Д — задержка; У — усилитель;  $E_K$  — напряжение коллекторное;  $E_C$  — напряжение смещения;  $Tr_1, Tr_2$  — трансформаторы; СИ — серия синхронизирующих импульсов).

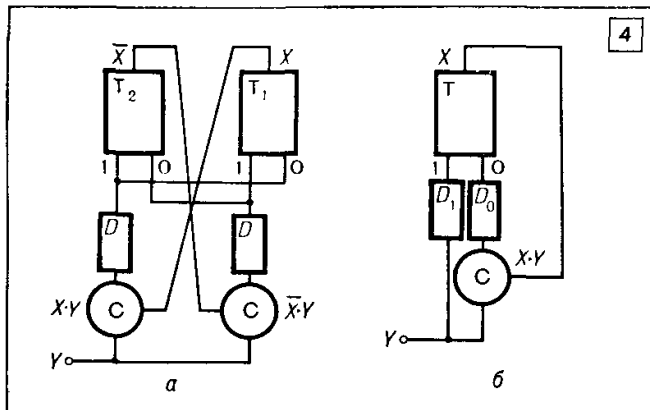
3. Триггерный каскад с прямым и инверсным выходами:  $T_1$  и  $T_2$  — динамические триггеры.

ем информационных сигналов на выходах триггеров с помощью спец. синхронизирующих импульсов, отсутствием длинных комбинационных цепей, применением задержки сигналов и их кратковременным запоминанием на емкостях и др. способами. И. э. с. на логических задерживающих элементах отличаются

ные совпадения обычно применяются двухвходовые и многовходовые. При этом синтез многовходовых совпадений путем комбинации двухвходовых, как правило, затруднителен вследствие расхождения во времени поступления сигналов с выхода одних логических элементов на другие. Для реализации многовходовых совпадений сигналов, поступающих в определенной последовательности, производится кратковременное запоминание информации (напр., на емкостях динамических триггеров), т. к. каждый сигнал в отдельности должен сохранить состояние «1» в элементе до прихода очередного сигнала (рис. 1). В большинстве схем стремятся обойтись двухвходовыми импульсными совпадениями. Импульсные несовпадения реализуют оператор типа  $X\bar{Y}$ . При этом используют различные (как правило, противоположные) способы отображения входной переменной величины, стоящей под знаком инверсии  $\bar{Y}$ , и входной переменной  $X$ . Напр., единичное значение переменной  $Y$  отображается импульсом противоположной полярности по отношению к импульсу, представляющему единичное значение  $X$ . Такой способ кодирования способствует повышению надежности элемента, поскольку взаимодействие (совпадение) двух активных сигналов происходит лишь тогда, когда на выходе не должен появиться сигнал.

Из импульсных логических элементов наиболее простыми и надежными являются импульсные разделители. В И. э. с. непосредственная замена одних логических элементов другими с помощью преобразований по известным правилам не всегда возможна, т. к. в ней нет элемента, осуществляющего прямое инвертирование, т. е. элементного оператора  $\bar{X}$ . Для выполнения этой операции необходимо применить устр-во несовпадения, подставив вместо неинвертируемого аргумента константу «1», или использовать триггер. Динамический триггер в И. э. с. представляет собой замкнутую цепь (рис. 2, а), по которой циркулируют импульсы, если триггер находится в единич-

ном состоянии. В нулевом состоянии триггер активного инвертного выхода не имеет, т. е. импульсы не циркулируют. Оператор динамического триггера с отдельными входами имеет вид:  $X = (X \vee Y_1) \cdot \bar{Y}_0$ , где  $X$  — состояние триггера,  $Y_1$ ,  $Y_0$  — входные сигналы,  $\Delta t$  — время между входным и синхронизирующим импульсами. Для надежной работы триггера необходимо обеспечить появление выходного активного сигнала через некоторое время после его прекращения, пока триггер находится в единичном состоянии. Этого достигают либо



4. Триггерный счетный каскад: а — на двух триггерах; б — на одном триггере.

установкой в цепи триггера элемента задержки (при этом требуются очень точные элементы задержки, иначе работа различных триггеров не будет согласованной), либо обеспечением запоминания выходного сигнала в виде особого кратковременного состояния цепи триггера. Такое состояние определяется наличием соответствующего заряда на «запоминающей» емкости  $C$  (рис. 2, б). До того как емкость  $C$  разрядится, на триггер поступает синхронизирующий импульс (СИ), и вследствие этого начинает работать импульсный усилитель и образуется выходной сигнал триггера. Этот сигнал с помощью положительной обратной связи вновь заряжает емкость  $C$ . Входной сигнал  $Y_1$  действует на триггер аналогично, в результате чего это устройство устанавливается в единичное состояние. При подаче входного сигнала  $Y_0$  (отображаемого импульсом обратной полярности) емкость разряжается. В результате при поступлении очередного СИ импульсный усилитель не срабатывает, и циркуляция импульсов прекращается. Триггер переключается в нулевое состояние.

Подобная организация нулевого состояния триггера затрудняет построение схем, т. к. часто необходимо иметь не только прямое, но и инвертное значение аргумента. Для осуществления этой возможности применяют триггерный каскад, состоящий из двух триггеров (рис. 3). В этом каскаде триггер  $T_2$  находится в состоянии, инвертному состоянию триггера  $T_1$ , т. е. фактически реализует операцию инвертирования. Некоторая модификация этой схемы приводит к реализации счетного каскада

по mod 2 с прямым и инвертным выходами  $X$  и  $\bar{X}$  соответственно (рис. 4, а).

Построение счетного каскада на одном триггере приводит к необходимости применять разновременные импульсные задержки на его входах для соблюдения условия правильного обмена информацией с триггером. Сигнал, который определяет требуемое воздействие, должен поступать на вход триггера последним. Для этого задержка сигнала на нулевом входе  $D_0$  (рис. 4, б) должна быть больше, чем задержка  $D_1$  на единичном входе. Когда триггер находится в нулевом состоянии, вентиль не пропускает сигнал  $Y$  на нулевой вход. На единичный вход сигнал проходит с задержкой, достаточной для окончания импульса к тому моменту времени, когда триггер переключится и откроет вентиль. Когда триггер находится в единичном состоянии, то за счет указанной разности задержки входной сигнал  $Y$  вначале пройдет на единичный вход и лишь подтвердит имеющееся состояние, а затем уже перейдет на нулевой вход и переключит триггер.

К преимуществам рассмотренного типа И. э. с. относятся: большое быстроедействие элементов, большая мощность передаваемых сигналов при относительно малом общем расходе мощности. Однако в этой структуре предъявляются жесткие требования к синхронизации сигналов, вследствие чего усложняется обеспечение высокой надежности.

Лит.: Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [библиогр. с. 299—301].

В. Н. Коваль.

**ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРИЗНАКОВ** — свойство признаков объекта распознавания не изменять своих значений при определенных преобразованиях этого объекта. Допустимыми считаются преобразования, не затрагивающие принадлежность объекта к заданному классу объектов (образу). Обычно признаки, обладающие свойством инвариантности, получают в результате некоторых математических операций над промежуточными неинвариантными признаками, которые получают путем прямых измерений. Измерения, обеспечивающие И. п., можно проводить и непосредственно на распознаваемом объекте. Примером получения признаков печатного знака, инвариантных к переносам изображения знака в поле зрения, является т. н. «центрирование по краю знака», применяемое в ряде современных считывающих автоматов. Промежуточными признаками служат двоичные сигналы «черное» (1) или «белое» (0), соответствующие различаемым уровням яркости точек изображения. Центрирование изображения заключается в его перемещении в такое положение, при котором его крайние нижняя и левая черные точки совпадают соответственно с нижней и левой границами поля зрения. Эта операция обеспечивает И. п. по отношению к любым переносам изображения в поле зрения. Другим примером получения И. п. к переносам является двумерная автокорреляционная функция изображения. Промежуточными признаками здесь являются яркости точек изображения. Измерения таких

инвариантных признаков, как автокорреляционная функция, проводят непосредственно на распознаваемых изображениях при помощи, напр., оптического коррелятора. Свойство И. п. иногда используют при решении задач *распознавания образов*. В частности, при распознавании изображений объектов стандартной конфигурации часто стремятся получать признаки, инвариантные по отношению к переносу, повороту, изменению масштаба и т. п. Недостатком подавляющего большинства известных способов достижения И. п. является низкая помехоустойчивость: даже незначительные случайные искажения рассматриваемого изображения могут вызвать большие отклонения значений его инвариантных признаков (наглядный пример — рассмотренное выше «центрирование по краю знака» в условиях, когда в поле зрения появляются отдельные «шумовые» черные точки). В настоящее время не известно ни одной формальной постановки задачи распознавания, из которой бы следовала необходимость получения И. п. Это вызвано чрезмерной общностью понятия И. п., которое охватывает и сами искомые решения задач распознавания. Действительно, наименования классов объектов, указываемые *алгоритмом распознавания*, тоже можно назвать инвариантными признаками этих объектов (и притом наилучшими из возможных с точки зрения задачи распознавания в целом).

Г. Л. Гимельфарб.  
**ИНВАРИАНТНОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ** — раздел *автоматического управления теория*, изучающий методы и средства достижения независимости (инвариантности) одной или нескольких регулируемых величин от внешних (непараметрических) возмущений, действующих на систему. Проблема инвариантности заключается в синтезе систем автомат. управления при условии равенства нулю ошибки, вызванной действием внешних возмущений (условия инвариантности).

При линейной трактовке задачи автомат. систему можно описать следующей системой дифф. уравнений:

$$A(p)x(t) = F(t),$$

где  $x(t)$  и  $F(t)$  — векторы-столбцы переменных системы и возмущений соответственно,  $A(p)$  — матрица, элементы которой  $a_{ij}(p) = m_{ij}p^2 + l_{ij}p + k_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ),  $p = \frac{d}{dt}$ ;  $m_{ij}$ ,  $l_{ij}$ ,  $k_{ij}$  — постоянные величины.

Необходимым и достаточным условием независимости, напр., величины  $x_1(t)$  от внеш. воздействия  $F_1(t)$  (условием инвариантности  $x_1(t)$  от  $F_1(t)$ ) является тождественное равенство нулю минора определителя системы ур-ний, соответствующего элементу  $a_{11}(p)$ :

$$A_{11}(p) = \begin{vmatrix} a_{22}(p) & a_{23}(p) & \dots & a_{2n}(p) \\ a_{32}(p) & a_{33}(p) & \dots & a_{3n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}(p) & a_{n3}(p) & \dots & a_{nn}(p) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Условия инвариантности аналогичны и для др. переменных,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ ... относительно возмущений  $F_2(t)$ ,  $F_3(t)$ ... Для методов инвариантности, в отличие от др. методов, важнейшей и присущей именно им особенностью является то, что синтез невозмущенных систем возможен при почти полном отсутствии информации относительно внеш. возмущений и непараметрических помех, действующих в системе. Осн. целью теории инвариантности является определение необходимой структуры системы управления и ее параметров, при которых влияние возмущений произвольного вида, но ограниченных по модулю (по своему макс. значению) не сказывалось бы на отклонении регулируемых величин от заданных заранее номиналов.

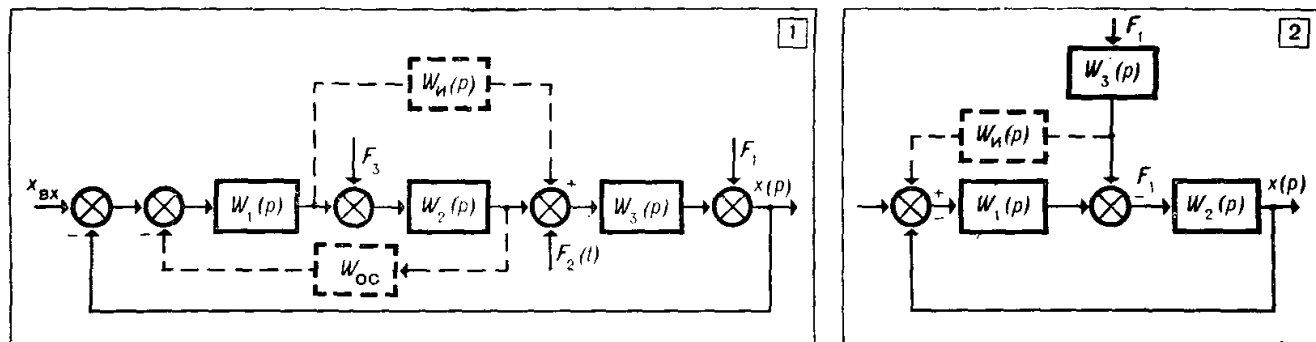
Идею инвариантности впервые высказал в 1939 сов. ученый Г. В. Шипанов. Затем в работах сов. математика Н. Н. Лузина были получены необходимые и достаточные условия инвариантности в самом общем виде (условия инвариантности Шипанова — Лузина).

При решении задач инвариантности различают системы, основанные на принципе регулирования по отклонению и принципе регулирования по возмущению, а также на комбинированном принципе (на основе двух предыдущих). Вопрос о физ. осуществимости систем, удовлетворяющих условиям инвариантности, является главным для всей теории инвариантности в целом. В системах по отклонению с одной регулируемой координатой условие инвариантности в общем случае нельзя реализовать абсолютно точно, а только с точностью до некоторой величины  $\epsilon$ , т. к. для такого рода систем автомат. регулирования условие инвариантности вступает в противоречие с условиями устойчивости. Это послужило поводом к тому, что в ряде работ вообще отрицалась возможность реализации условий абсолютной инвариантности. Вопросы реализуемости условий инвариантности изучены и освещены в работах сов. ученого в области автомат. управления Б. Н. Петрова (р. 1913). Он получил необходимые условия реализуемости абс. инвариантности переменной  $x_i(t)$  относительно некоторого возмущения  $F_i(t)$ , при выполнении которых имеет место тождественное совпадение множества решений ур-ний исходной системы автомат. управления и системы, разомкнутой на выходе элемента, определяемого переменной  $x_i(t)$  при выполнении условий инвариантности и при равенстве нулю всех остальных воздействий. Необходимым и достаточным условием является, кроме вышеуказанного, еще и требование, чтобы звенья, с помощью которых достигается инвариантность, были физически осуществимыми. Петров установил, что условие физ. реализуемости выполняется в тех системах, где имеется по крайней мере два канала распространения воздействий между точкой приложения возмущений и точкой измерения регулируемой координаты, которая должна быть инвариантной относительно этого возмущения. Напр., для системы (рис. 1) усло-

вие абс. инвариантности координаты  $x(t)$  относительно возмущения  $F_3(t)$  можно реализовать, если ее структуру дополнить связями, указанными штриховой линией, т. е. если создать еще один канал распространения возмущения  $F_3(t)$  относительно  $x(t)$ . Действительно, в этом случае при  $W_{\text{и}}(p) =$

$\frac{1}{W_1(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)}$ ,  $x(t) = 0$ , т. е. выполняется условие абс. инвариантности, которое не вступает в противоречие с критерием устойчи-

востей устойчивости, т. е. такие системы физически реализуемы. В этом — существенное преимущество комбинированных систем управления. Они являются «грубыми», и при небольших отклонениях от условий абс. инвариантности запас устойчивости в них не уменьшается. Но сложность реализации условий инвариантности в таких системах заключается в том, что необходимо непрерывное измерение величины возмущений, а это довольно часто невыполнимо. Иногда применяют косвенное измерение возмущений. Однако, такие системы



1. Структурная схема инвариантной системы регулирования по отклонению.  
2. Структурная схема комбинированной инвариантной системы.

вости, т. к. характеристическое уравнение при этом не вырождается.

В системах программного управления иногда ставится задача передачи управляющего воздействия без искажений и запаздывания. Синтез такого вида систем осуществляется при условии равенства нулю ошибки воспроизведения, и методы синтеза таких систем эквивалентны методам решения задачи инвариантности для систем стабилизации, о которых шла речь выше.

Однако два канала не всегда и не для всех возмущений, действующих на регулируемую координату, можно создать в системах по отклонению с одной регулируемой координатой, напр., этого нельзя сделать для  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  в системе рис. 1. И именно в этом заключается сложность, а порой и невозможность, реализации условий абс. инвариантности в таком классе систем.

В системах регулирования по отклонению с несколькими регулируемыми переменными условия абс. инвариантности можно всегда реализовать, если имеются два или больше параллельных канала для распространения одного и того же возмущения, относительно которого необходимо добиться инвариантности. Показано, что условие инвариантности можно выполнить принципиально иным путем, если ввести в систему дополнительные связи по возмущению, т. е. преобразовав эту систему в комбинированную систему автоматического управления. Принципиальных затруднений при решении задачи инвариантности для таких классов систем не возникает, т. к. в этом случае нет противоречия между требованиями, вытекающими из условий инвариантности и

в большинстве практически интересных случаев относится к классу систем с принципом регулирования по отклонению. Им тогда будут присущи все особенности последних при выполнении условий инвариантности.

На рис. 2 приведена структурная схема системы комбинированного регулирования, где штриховой линией обозначена связь по возмущению  $F_1(t)$ . Если  $W_{\text{и}}(p) = \frac{1}{W_1(p)}$ , то  $x(t) = 0$ , т. е.  $x(t)$  инвариантно относительно  $F_1(t)$ .

Для систем, параметры которых изменяются во времени, возникает вполне определенные трудности, однако для этих систем условия инвариантности также можно получить на основе применения операторного метода анализа решений дифф. ур-ний с переменными коэффициентами. Основные положения, относящиеся к теории инвариантности систем, описываемых дифф. ур-ниями с постоянными коэффициентами, были распространены на системы с переменными параметрами с использованием этого и других методов.

Н. Н. Лузин еще в 1940 указывал на возможность построения и для нелинейных дифф. ур-ний теории инвариантности, вполне аналогичной той, которая разработана для линейных ур-ний, если вместо языка определителей пользоваться языком якобианов. Появилось много различных работ, посвященных решению задач инвариантности для нелинейных систем управления. Эти работы можно разделить на две группы. К первой относятся все те нелинейные задачи, которые можно либо свести к линейным, либо же для их изучения можно использовать идею симметрирования

двух каналов с нелинейными звеньями, по которым проходит одно и то же возмущение. Во второй группе задачи ставились в более общем виде, причем рассматривались и непрерывные, и разрывные нелинейности. Наибольшей общностью обладает метод, сводящийся к исследованию приращений некоторого функционала,

напр., вида  $\Phi = \sum_{i=1}^n C_i x_i$ , удовлетворяющего

заданной системе нелинейных дифф. уравнений  $\dot{x}_i = F_i(x, f, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , описывающих изучаемую систему управления. Здесь:  $x$  — вектор фазовых координат, характеризующий состояние системы;  $f$  — вектор внеш. возмущающих воздействий,  $F_i$  — непрерывные дифференцируемые (необходимое число раз) нелинейные функции;  $C_i$  — постоянные коэффициенты.

Постановка задачи при этом заключается в том, чтобы функционал  $\Phi$  в силу уравнений  $\dot{x}_i = F_i(x, f, t)$  был инвариантен относительно возмущений  $f$ . В том, что такая постановка задачи инвариантности совпадает с обычной, нетрудно убедиться, если взять частный вид приведенного выше функционала, когда все  $C_i = 0$ , кроме одного  $C_k = 1$ . В этом случае  $\Phi = x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , и, таким образом, ставится обычное требование о независимости одной из координат системы  $x_k(t)$  относительно некоторого внеш. воздействия  $f_m(t)$ . Были введены понятия о слабой и сильной инвариантности. Инвариантность наз. с л а б о й, если  $x_k(t)$  не зависит от  $f_m(t)$  только в некоторый заданный момент времени  $t = T$ , когда траектория движения изображающей точки в фазовом многомерном пространстве, соответствующем рассматриваемой системе уравнений  $\dot{x}_i = F_i(x, f, t)$ , достигает заданной гиперповерхности  $M(x, t) = 0$ . Инвариантность наз. с и л ь н о й, если независимость  $x_k(t)$  от  $f_m(t)$  будет иметь место на всем интервале движения от  $t_0$  до  $t = T$ .

Решение задач для слабой и сильной инвариантности производится по-разному. Различными оказываются и условия слабой и сильной инвариантности, если уравнения нелинейны, и только для линейных задач эти условия совпадают.

Для сильной инвариантности необходимо и достаточно, чтобы функции  $I_1(x, f), \dots, I_{n-1}(x, f)$  не зависели от  $f$  при любом значении  $x$ . Функции  $I_i$  при этом определяются как  $I_0 = I$ ,  $I_1 = D(F) I_0, \dots, I_s = D(F) \times \times I_{s-1}$ , где оператор  $D(F)$  таков, что  $D(F) I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial I}{\partial x_i} F_i$ , а  $I$  зависит только от  $x$ .

Общность метода решения задач инвариантности на основе исследования приращений соответствующего функционала состоит в том, что одним и тем же путем можно решить и ли-

нейные задачи с постоянными и переменными во времени параметрами, и нелинейные задачи. Этот же путь позволяет изучать не только непрерывные системы, но и дискретные — импульсные и цифровые. При этом для импульсных систем задачи рассматривались в двух постановках: 1) производился синтез систем при условии инвариантности для любых моментов времени и 2) при условии инвариантности для дискретных моментов времени — моментов замыкания импульсного элемента.

Рассматривались также задачи инвариантности для систем с переменной структурой, для систем управления с распределенными параметрами, производились исследования структурных свойств инвариантных систем, изучались вопросы инвариантности для самонастраивающихся систем, рассмотрена теоретико-информационная трактовка задач инвариантности и др. Используя совместно методы теории инвариантности и теории чувствительности (см. *Динамических систем теория чувствительности*), можно создать динамические системы, инвариантные не только по отношению к внешним возмущениям, действующим на систему, но и к изменению ее параметров.

Теория инвариантности уже нашла широкое практическое применение. Разработаны или находятся в стадии разработки инвариантные системы управления различными технологическими процессами (хим., термическими, металлург., нефтеперерабатывающими и др.), энерг. установками и тепловыми двигателями, достижения ее широко используют при создании гироскопических приборов и др. навигационных систем и систем управления подвижными объектами.

Лит.: Ш и п а н о в Г. В. Теория и методы проектирования автоматических регуляторов. «Автоматика и телемеханика», 1939, № 1; Л у з и н Н. Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений. «Автоматика и телемеханика», 1940, № 5; Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах. М., 1959; К у х т е н к о А. И. Проблема инвариантности в автоматике. К., 1963 [библиогр. с. 364—371]; Теория инвариантности в системах автоматического управления. М., 1964; Чувствительность автоматических систем. М., 1968; В е л и ч е н к о В. В. О вариационном методе в проблеме инвариантности управляемых систем. «Автоматика и телемеханика», 1972, № 4; Теория инвариантности и теория чувствительности автоматических систем, ч. 1—3. К., 1971.

А. И. Кухтенко, А. Г. Шевелев.

**ИНВЕРТОР** — логический элемент, реализующий логическое отрицание. Одновременно И. усиливает и формирует электр. сигналы, являющиеся носителями информации в логич. цепях устр-в вычисл. техники. И. обычно выполняется на электронной лампе, транзисторе или на магнитном элементе. По функциональному признаку И. разделяются на потенциальные и импульсные. В потенциальном И. высокий уровень напряжения на его входе соответствует низкому уровню напряжения на выходе и наоборот для любого момента времени, кроме момента переключения И. (рис. а). Зависимость между входным сигналом, подаваемым на базу, и выходным сигналом, снимаемым с коллектора, соответствует логич. пре-

образованию «НЕ». В импульсном И. в момент прихода сигнала на его вход (с учетом времени срабатывания схемы) появляется сигнал противоположной полярности на его выходе (рис. б) либо в момент прихода импульсов тактирующей серии на выходе И. появляется сигнал лишь при отсутствии сигнала на его входе (рис. в). При этом после прохождения сигнала И. возвращается в исходное состояние.

В дискретном исполнении И.— один из осн. конструктивно самостоятельных элементов для построения различных логич. узлов в средств-

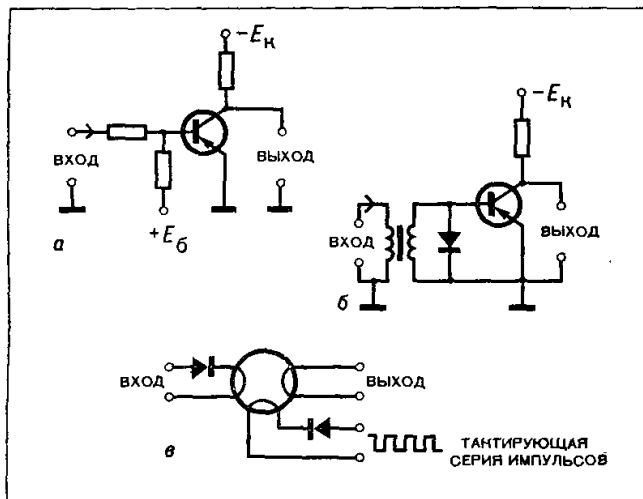


Схема инвертора: а — потенциальный инвертор на транзисторе; б — импульсный инвертор на транзисторе; в — импульсный инвертор на ферритовом сердечнике.

вах вычислительной техники. С применением интегральных схем (в особенности больших) И. перестает существовать как самостоятельная единица и становится неотъемлемой структурной частью в реализации более сложных логич. ф-ций.

В АВМ функцию И. выполняет усилитель операционный, реализующий преобразование  $Y_{\text{вых}}(t) = -Y_{\text{вх}}(t)$ .

Лит.: Бирман Н. Я., СиндILEвич Л. М. Электронные цифровые машины и программирование, ч. 2. М., 1966. Г. И. Корниенко.

**ИНГВЕ ГИПОТЕЗА**, гипотеза глубины — гипотеза, объясняющая одну количественную закономерность, наблюдаемую в структуре предложений многих естественных языков. Эта закономерность относится к понятию глубины бинарного дерева составляющих — т. е. максимум числа левых ветвей дерева, которые проходят при движении от корня к произвольному узлу. Наблюдения показывают, что в ряде языков (в т. ч. в русском, английском) глубина предложения, как правило, не превышает 7, в то время как длина пути по правым ветвям в дереве составляющих теоретически неограничена. Амер. лингвист В. Ингве, обративший внимание на эту закономерность, объясняет ее общими свойствами человеческой психики. Как легко убедиться, глубина предложения, строящегося слева направо с помощью правил бесконтекстной грамматики (см. *Грамматика порождающая*), рав-

на максимальному числу вспомогательных символов, которые следует помнить в каждый момент построения. И. г. заключается в том, что процесс построения предложения человеком аналогичен порождению предложения слева направо в бесконтекстной грамматике, а объем используемой при этом оперативной памяти равен примерно 7 (по другим данным 9) символам. Последнее находится в связи с данными ряда психологических экспериментов, приводящих к выводу, что человек способен мгновенно воспринять и запомнить не более 7 (соответственно 9) однородных элементарных единиц информации (цифр, имен и т. д.). Дальнейшие исследования привели к обнаружению в ряде языков (в т. ч. в русском) таких способов построения предложений, при которых глубина оказывается принципиально неограниченной. Одновременно указан ряд языков (напр., венгерский), в которых неограниченность глубины является нормой. Обнаруженные факты служат опровержением И. г. В категорической форме ее постановки эту гипотезу большинство исследователей принимают лишь с некоторыми оговорками.

Лит.: Ингве В. Гипотеза глубины. В кн.: Новое в лингвистике, в. 4. М., 1965.

**ИНДЕКСИРОВАНИЕ** — присвоение документу набора ключевых слов или кодов, служащих указателем содержания документа и используемых для его поиска (в основном, для документов с научно-тех. информацией). Возможны два способа И.— свободное (когда непосредственно из текста документа извлекают *ключевые слова* без учета всех видоизменений их форм и отношений между ними) и контролируемое (когда в *поисковый образ документа* включаются только те слова, которые зафиксированы в словаре ключевых слов, где указаны их синонимические, родо-видовые и ассоциативные отношения). Обычно И. осуществляют опытные библиотекари или специалисты данной отрасли науки. Для уменьшения затрат времени и средств разрабатываются методы автоматического И., статистические, пермутационные, библиографические и ассоциативные методы индексирования.

**Статистические методы И.** основаны на гипотезе о том, что частота употребления слова связана с его значимостью для смысла документа. Обычно эта связь понимается слишком упрощенно — как возрастание информационной значимости слов с ростом их частоты. Другие, напротив, полагают, что информационная ценность редких слов выше, чем информационная ценность частых слов. Это учитывается при использовании метода статистических отклонений, когда измеряются отклонения частоты слов в индексированном документе от теоретически ожидаемой частоты этих слов.

**Пермутационное И.** — И. словами из заголовка документа путем помещения заголовка в алфавитный словарь столько раз, сколько разных слов имеется в нем; при этом каждое ключевое слово помещают на свое место алфавита и сопровождают всем контекстом



заголовка. Пермутационное И. широко применяют в информационных службах.

**Библиографическое и ассоциативное И.** используют в более широких целях: библиографическое — для И. документа ссылками на др. документы и публикации, содержащиеся в нем (указатель цитированной литературы позволяет производить поиск информации и изучать закономерности развития науки); ассоциативное — для И. с использованием карт ассоциативных связей между ключевыми словами, полученных с помощью анализа частоты повторения сочетаний ключевых слов в текстах. В зависимости от интервала текста, в котором регистрируется эта частота, получают различные карты ассоциативных связей. См. также *Аннотирование автоматическое*, *Информационно-поисковая система документальная*, *Поиск информации автоматический*.

*Лит.: Михайлов А. И., Черный А. И., Гилевский Р. С. Основы информатики. М., 1968 [библиогр. с. 728—735]; Москович В. А. Статистика и семантика. М., 1969 [библиогр. с. 294—301].*

*В. А. Москович.*

**ИНДИКАТОРЫ ИНФОРМАЦИИ** — специализированные элементы, обеспечивающие наглядное (визуальное) воспроизведение данных, выводимых из систем или устройств. И. и. являются частью систем отображения информации и разделяются на аналоговые, дискретные и гибридные. Аналоговые И. и. по принципу действий делятся на механические, гидравлические, пневматические, электромеханические и электронные. Конструктивно они оформляются в виде щитовых измерительных приборов с подвижной стрелкой или шкалой и широко применяются в пром-сти. Из электронных И. и. перспективны линейные газоразрядные индикаторы. Они представляют собой стеклянные баллоны, наполненные инертным газом. Внутри баллона расположен стержневой катод и цилиндрический анод. Площадь свечения катода пропорциональна силе тока, протекающего через цепь И. и. Достоинства индикаторов: наглядность, возможность группировки в виде сопоставительных диаграмм (гистограмм), малые габариты, вес и стоимость. Недостатки: большая суммарная погрешность — около 4%, короткий срок службы — до 1000 часов, сравнительно высокое постоянное напряжение  $140 \div 170$  в и большая величина постоянного тока  $0 \div 10$  ма.

В связи с широким использованием ЦВМ особое значение приобретают дискретные И. и. К ним относятся элементы, выполненные на лампах накаливания и газоразрядных лампах, а также плазменные панели, электролюминесцентные, электромагн., феррооптические, жидкокристаллические и электрохим. элементы. Лампы можно использовать как одиночные индикаторы или сегментные (знако-синтезирующие) табло. Из 5—8 сегментов формируется любая из цифр от 0 до 9, из 14—19 сегментов — цифра или буква русского алфавита; возможна также сегментная организация мнемосхем. С помощью ламп осуществимо также поочередное высвечивание (выбор) зна-

ков. Стеклянные пластины со знаками (каждый знак образован группой отверстий в пластине) располагаются друг за другом (пакетом до 10—12 пластин) и могут подсвечиваться лампами в торец. Знак визуализируется в результате преломления света в отверстиях. В газоразрядном цифровом индикаторе знаки высвечиваются через дно либо через стенку колбы индикатора. Существуют и многоразрядные индикаторы с конструктивным и схемным совмещением элементов.

Ведется разработка плазменных панелей (рис. 1). Панель состоит из трех стеклянных пластин, в средней из которых есть отверстия, заполняемые смесью неона и азота, а на наружных нанесены полупрозрачные полоски золота (шины управления). На шины непрерывно поступает напряжение подпора. Каждый газоразрядный элемент панели расположен на пересечении двух взаимно перпендикулярных шин. Подаваемое на них напряжение управления складывается с напряжением подпора. Возникает свечение элемента, сохраняющееся и после снятия управляющего напряжения, т. к. на периферии элемента накапливается заряд. Для гашения элемента через соответствующую пару шин передается управляющий сигнал противоположной полярности. Достоинства плазменных панелей — возможность запоминания информации, высокая плотность элементов изображения ( $80\text{—}100$  элементов на  $\text{см}^2$ ) и яркость ( $2000\text{—}7000$  нт), малое время полной записи или стирания ( $40\text{—}80$  мксек); недостаток — высокие питающее напряжение ( $200\text{—}250$  в) и высокие частоты ( $50\text{—}500$  кГц), что усложняет согласование их с ЦВМ.

Перспективны электролюминесцентные индикаторы, основанные на свечении спец. материалов (электролюминофоров), возникающем при приложении к ним напряжения. Сегментный цифровой индикатор показан на рис. 2. Матричный люминесцентный экран состоит из слоя электролюминофора, заключенного между взаимно перпендикулярными системами управляющих электродов, одна из которых прозрачна. Как и для плазменных панелей, для питания электролюминесцентных индикаторов и экранов требуются высокие напряжение и частота ( $200\text{—}500$  в,  $0,4\text{—}10$  кГц). Осн. недостаток таких индикаторов — отсутствие внутр. запоминания, необходимость частой регенерации изображения. Ввиду компактности, универсальности и хорошей разрешающей способности экраны находят все большее применение в бортовых системах.

В световых диодах используется эффект свечения  $p-n$  переходов в полупроводниках (карбида кремния, фосфида и арсенида галлия) при пропускании через них тока. Световые диоды пригодны для одиночных и для сегментных цифро-буквенных индикаторов. Из них также собирают матрицы с плотностью до  $30\text{—}70$  элементов на  $\text{см}^2$ . Достоинства световодирующих диодов — низкое напряжение питания (возможность согласо-



ния с интегральными схемами) и большая скорость переключения. Осн. недостаток — малая световая отдача (2%).

К дискретным И. и. относятся также электромагнитные элементы (напр., поворотные указатели положения). Кроме одиночных, возможны еще сегментные, пакетные, ленточные и книжечные конструкции. Разработан и электромагнитный экран-матрица с плотностью 10—25 элементов на  $\text{см}^2$ . Элемент может иметь форму кубика, диска, цилиндра или шара; его противоположные поверхности окрашены во взаимно контрастирующие цвета. Элементы подвешивают на нитях или размещают в ячейках, заполненных прозрачной жидкостью, управляют элементами индивидуальные электромагнитные (запоминающие) ячейки.

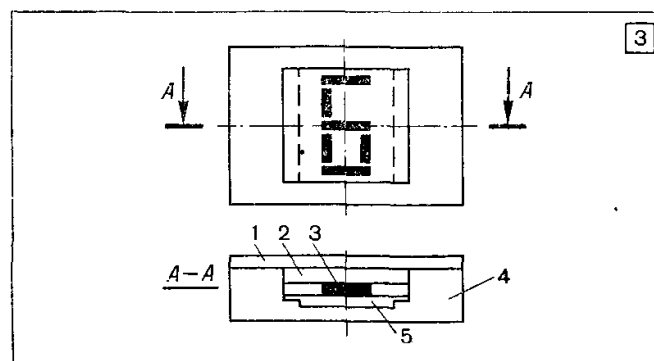
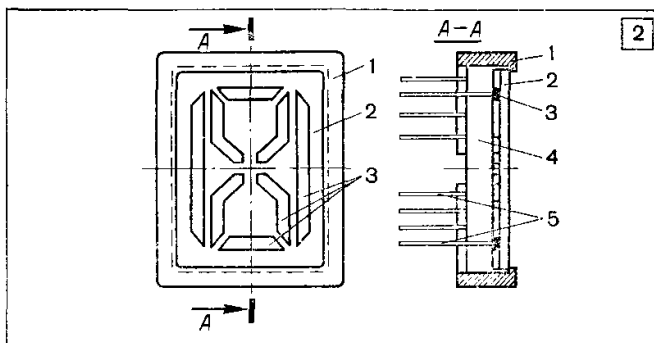
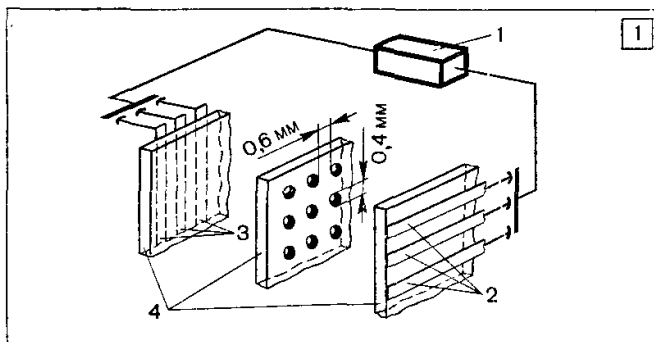
Совмещение в одном элементе запоминающих и индикационных качеств достигнуто в феррооптических элементах. Такой элемент (рис. 3) состоит из стеклянной пластины, на которую напылены последовательно слой алюминия (фон), окиси кремния (напр., сегменты для формирования цифр) и пермаллоя (проявление изображения). Способность пермаллоя отражать свет определяется его намагниченностью (эффект Керра), а коэрцитивная сила зависит от подложек (большая — на алюминии, малая — на окиси кремния). Матричное управление здесь позволяет намагничивать участки пермаллоя только над необходимыми сегментами, после чего изображение становится видимым в отраженном свете (темное на светлом фоне; рис. 3). Достоинство феррооптических элементов — удобство согласования с ЦВМ, главный недостаток — низкая контрастность (до 1 : 3).

При построении систем отображения информации все шире применяют жидкие кристаллы — спец. органические соединения, имеющие в нормальных условиях свойства и жидкостей, и твердых тел. Тонкий слой жидких кристаллов (0,3 мм и менее) заключается между двумя стеклянными пластинами и находится под действием капиллярных сил. Напряжение управления (20—70 в, частотой 10—100 гц) передается через электроды соответствующей формы (напр., в виде сегментов). Воздействие напряжения изменяет положение молекул жидкого кристалла в зоне приложения этого напряжения, что ведет к рассеянию света (потере прозрачности) или к изменению цвета на соответствующих участках. После снятия напряжения прозрачность (первоначальный цвет) восстанавливается (время переключения —  $10 \div 100$  мксек). Достоинства И. и. на жидких кристаллах — высокая контрастность изображения (тем большая, чем выше внешняя освещенность), малое потребление энергии и долгий срок службы (10 000 часов и более).

Дискретные И. и. на основе ламп накаливания и газоразрядных ламп, электролюминесцентные и электромагн. хим. индикаторы выпускает пром-сть, их широко применяют в практике. Начали применять и светоизлучаю-

щие диоды как точечные и сегментные индикаторы, а также электролюминесцентные экраны как универсальные средства отображения.

Матричные панели (плазменные, светодиодные, жидкокристаллические) изготовляют пока в форме многоразрядных цифровых и знаковых индикаторов (обычно с растром  $5 \times 7$  точек на знак). Проведены успешные исследования и выпущены опытные партии плазменных и жидкокристаллических экранов с разрешающей способностью до  $512 \times 512$  точек. Ведутся работы по получению посредством этих экранов



1. Устройство плазменной панели: 1 — источник напряжения подпора; 2 — горизонтальные управляющие шины; 3 — вертикальные управляющие шины; 4 — стеклянные пластины.

2. Устройство электролюминесцентного индикатора (сегментный цифровой индикатор): 1 — рамка; 2 — стекло со слоем люминофора на внутренней поверхности; 3 — сегменты изображения; 4 — компаунд; 5 — электрические выводы.

3. Устройство феррооптического индикатора: 1 — стеклянная подложка (экран индикатора); 2 — слой алюминия (фон); 3 — слой окиси кремния (сегменты изображения); 4 — компаунд; 5 — слой пермаллоя (проявление изображения).

полутонных и цветных изображений. В стадии исследований находятся также феррооптические экраны.

Электрохимические элементы представляют собой плоские прозрачные кюветы, заполненные электролитом. У задней стенки их размещаются индикаторные электроды, соответствующие будущему изображению (напр., сегменты для формирования цифры); кроме того, в кювете имеется общий электрод. При подаче напряжения происходит электрохим. реакция, которая изменяет окраску электролита у соответствующих электродов, т. е. изображение проявляется. Реакция является обратимой — заряд на индикаторных электродах постепенно рассеивается; видимое изображение может сохраняться несколько десятков минут, после чего требуется регенерация его. Для стирания информации через индикатор пропускают ток противоположной полярности. Осн. недостатки электрохим. элементов: индикаторные электроды соединены между собой электролитом, а это ограничивает число их в элементе (до 3—4 на см) и усложняет схемы управления ими; в электролите происходят необратимые изменения; время записи информации сравнительно велико (десятки миллисекунд).

Дискретный и аналоговый методы формирования изображения используют также в различных комбинациях, образующих гибриды. И. и. Напр., сочетание матрицы из световых диодов с фотохромным носителем или люминесцентных панелей с лазерным сканированием позволяет получить перспективные варианты индикаторных устройств. См. также *Устройства отображения информации*.

Лит.: Деркач В. П., Корсунский В. М. Электролюминесцентные устройства. К., 1968 [библиогр. с. 292—299]; Агейкин Д. И. [и др.]. Линейные газоразрядные индикаторы. «Приборы и системы управления», 1969, № 9; Плоские индикаторы [Реферативный обзор]. «Радиоэлектроника за рубежом», 1969, в. 41; Чачко А. Г. Методы преобразования информации для человека-оператора в сложных системах управления (на примере энергоблоков). «Известия АН СССР. Энергетика и транспорт», 1971, № 1. А. Г. Чачко.

**ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТОВ** — совокупность приемов и правил, используемых в инженерной практике при логическом синтезе схем дискретной автоматики, телемеханики и вычислительной техники с учетом реальных физических ограничений на элементы и структуру схемы. Эти приемы и правила можно разбить на три группы: задание работы будущего устройства и абстрактный синтез, блочный синтез и структурный синтез с учетом реальных ограничений.

Языки задания работы устройства. Классические способы задания в виде автоматных таблиц или таблиц истинности при проектировании сложных устройств неприменимы из-за своей громоздкости. Поэтому в инженерной практике для задания закона функционирования будущего устройства используют спец. сжатые способы записи. Наиболее распространены язык секвенций, язык логических схем алгоритмов и язык технологич. графов. Задание на языке секвенций представляет собой совокупность выражений вида  $P \rightarrow Q$ . В левой и правой частях этих выражений

указаны переменные или их отрицания, разделенные запятыми или объединенные знаками конъюнкций. Каждая запись вида  $P \rightarrow Q$  имеет следующий смысл: если в объекте происходит изменение сигналов, обращающее хотя бы одно из выражений в левой части секвенции в единицу, то происходит соответствующее изменение всех сигналов, указанных в правой части секвенции. Напр.,  $x_1, \bar{x}_2, x_3 \rightarrow y_1, \bar{y}_2$  означает, что когда  $x_1$  принимает значение, условно сопоставляемое с 1, или  $x_2$  принимает значение, условно сопоставляемое с 0, а  $x_3$  — с 1, то  $y_1$  принимает значение 1, а  $y_2$  — значение 0. Задание на языке логич. схем алгоритмов представляет собой, по существу, совокупность микропрограмм, которые должны быть реализованы устройством, и информацию о порядке выполнения этих микропрограмм в зависимости от внеш. условий. Задание в виде технологич. графа представляет собой графич. изображение процесса проверки допустимости того или иного технологич. режима и процесса смены этих режимов. Напр., задается пара технологич. графов, соответствующих процессам пуска и остановки гидроагрегата, и граф проверок допустимости пуска или остановки. Такие инженерные языки задания работы устройств требуют разработки спец. методов перехода от них к явному выражению функций перехода и выхода автомата или к таблице истинности функций. В связи с внедрением автоматизации проектирования с помощью ЭВМ возникла необходимость в создании спец. языков проектирования. Примерами языков такого типа могут служить ЛЯПАС, АЛОС и АЛГОРИТМ.

**Блочный синтез.** Проектирование сложного устройства невозможно практически, если предварительно не разбить его на части. Разбиение на блоки производится проектировщиком интуитивно. Критериями разбиения служат: функциональное единство блока, типизация блока, конструктивная законченность блока. Первый критерий требует, чтобы блок имел явно выраженную функцию. Его удовлетворение обеспечивает ясность общего замысла, устройства и облегчает поиск неисправностей в устройстве в процессе его эксплуатации или во время модернизации и переделок. Типизация блока приносит пользу с точки зрения удешевления изделия и стандартизации контроля и диагностики в процессе эксплуатации. Конструктивная законченность блока позволяет строить устройство по модульному принципу и облегчает эксплуатацию. Разбиение устройства на блоки приводит к тому, что описание работы каждого блока происходит независимо от остальных. Раздельно происходит и структурный синтез блоков. Поэтому с точки зрения качества оборудования, затраченного на изготовление устройства, результат может быть весьма далек от оптимума.

**Структурный синтез с учетом реальных ограничений.** После получения функций перехода и выхода автомата на этапе структурного синтеза (см. *Структурная теория автоматов*) необходимо реализовать эти функции на основе заданной со-

вокупности элементов. Поэтому первой задачей, возникающей на инженерном этапе, является задача определения аналитич. выражения ф-ций перехода и выхода через ф-ции, реализуемые заданным набором элементов. Наиболее распространенные наборы элементов реализуют, как правило, либо полную систему, состоящую из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, либо систему, состоящую из ф-ции Шеффера и отрицания. Кроме того, практически в любую из систем элементов входит либо задержка, либо *триггер*, что позволяет считать систему элементов полной и в классе *временных переключаемых функций*. Однако, иногда выбранная для проектирования система элементов может отличаться от указанных. Если, напр., реализация базируется на феррит-транзисторных элементах, то необходимо использовать полную систему, состоящую из ф-ции  $x_1x_2$ , констант и триггера.

При реализации схемы на параметронах или кристонах удобно использовать полную систему, состоящую из ф-ции отрицания и мажоритарной ф-ции от трех или пяти аргументов (для трех аргументов эта ф-ция имеет вид  $y = (x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3)$ , и т. д. Определение аналитического выражения заданной ф-ции через ф-ции, реализуемые заданным набором элементов, может представлять собой весьма сложную задачу. Напр., если базис состоит из элемента, реализующего пороговую ф-цию, то переход от таблицы задания ф-ций переходов и выходов автомата к соответствующей сети из пороговых элементов весьма трудоемок. Второй задачей этого этапа синтеза является учет тех реальных ограничений на возможность включения элементов в сеть, которые определяются спецификой этих элементов. Наиболее важными ограничениями такого рода служат: число входов на элемент каждого типа, коэффициент разветвления элемента, нагрузочная способность элемента и временная задержка, вносимая элементом. Число входов на элемент — это число аргументов у ф-ции, реализуемой этим элементом. Коэффициент разветвления показывает, на сколько входов других элементов допускается соединять выход данного элемента. Нагрузочная способность элемента определяет число элементов, образующих линейную цепочку, которую можно навесить на выход данного элемента без необходимости введения в эту цепочку спец. усилителей. Учет этих реальных ограничений в совокупности с минимизацией схемы представляет весьма трудную задачу, приводящую к нелинейной задаче целочисленного программирования большой размерности.

Решение подобных задач при существующем уровне вычисл. техники для сколько-нибудь сложных схем (напр., для автоматов, у которых число входов более двадцати, а число состояний более десяти) пока невозможно. Учет ограничений изолированно — существенно проще. Такие задачи приводят к задачам линейного целочисленного программирования, решение которых на ЦВМ происходит более эффективно. Кроме того, предлагались раз-

личные частные методы решения подобных задач, напр., построение скобочных представлений *переключаемых функций*, имеющих глубину не больше заданной, что эквивалентно учету ограничений по нагрузочным способностям элементов. Таким образом, учет дополнительных ограничений позволяет ставить не только классическую задачу о минимизации логич. элементов, но и задачу минимизации дополнительного оборудования, напр. усилителей и балансирующих элементов, необходимых для выравнивания времен прохождения сигналов по различным цепям схемы.

Использование вместо отдельных элементов целых модулей, реализующих достаточно сложные переключаемые ф-ции, приводит к тому, что при синтезе схем автоматов на таких модулях возникают задачи, отличные от задач синтеза на базе отдельных элементов. Наряду с минимизацией общего числа модулей, затрачиваемых на синтез, и учетом ограничений по входам модулей, их нагрузочным способностям и коэффициентам разветвления, а также по временным соотношениям, в этом случае необходимо еще учитывать коэффициент используемости модуля, т. е. используемость его логич. возможностей. Задачи синтеза схем на модулях пока еще не получили сколько-нибудь общих решений. Новая технология изготовления элементов приводит к тому, что роль модулей начинают играть целые стандартные узлы автоматики и вычисл. техники: *регистры, счетчики, дешифраторы* и т. п. Это выдвигает задачу синтеза дискретного автомата на уровне *блоков ЦВМ типовых*.

Примером такого подхода к синтезу могут служить методы синтеза ф-ций перехода и выхода автомата на сдвиговых регистрах. Наряду с задачами синтеза на реальных элементах, модулях или узлах на этапе инженерного синтеза необходимо еще решать задачу о выборе структурного приема реализации автомата. Дискретный автомат может быть реализован по классической схеме, состоящей из логич. преобразователя и памяти, вынесенной в *обратную связь*, охватывающую этот логич. преобразователь. Однако возможны и другие реализации: напр., реализация дискретного автомата на основе схемы микропрограммного управления Уилкса или на основе естественных временных задержек у элементов логич. преобразователя. Выбор той или иной структурной реализации пока производится лишь на уровне интуитивного опыта конструктора.

Важное значение имеет еще проблема кодирования входов и выходов автомата, проблема выбора тактности его работы и выбор синхронной или асинхронной схемы автомата. *Кодирование состояний автомата* производится еще на этапе, находящемся между абстрактным синтезом автомата и структурным синтезом. Кодирование же входных и выходных сигналов может производиться на этапе инженерного синтеза. Это кодирование должно учитывать требования реальных датчиков и исполнительных механизмов, с которыми взаимодействует

автомат. Как правило, в практических задачах автомат является сильно недоопределенным. Задача доопределения тесно связана с задачей кодирования выходных сигналов, т. к. технологич. ограничения могут, напр., не позволить доопределить ф-ции перехода и выхода значением «единица», если этому значению сопоставлен при кодировании высокий потенциал или импульс тока. Выбор того или иного кодирования связан также с характером элементов, используемых при реализации, которые могут быть потенциальными, импульсными или импульсно-потенциальными (см. *Импульсная элементная структура ЦВМ, Потенциальная элементная структура ЦВМ, Потенциально-импульсная элементная структура ЦВМ*).

Выбор рабочего такта автомата и определение того, как происходит смена тактов — еще одна из задач инженерного этапа синтеза. Под тактом понимается интервал дискретного времени, в течение которого устанавливается новое внутр. состояние и значения выходных сигналов автомата. Смена тактов может происходить либо от генератора стандартных сигналов, либо от спец. схемы, определяющей длительность асинхронного такта. В первом случае частота сигналов от генератора выбирается такой, что временной интервал между двумя соседними тактовыми сигналами больше, чем максимальное время переходного процесса, необходимого для перехода автомата из одного внутр. состояния в другое. Показано, что при создании синхронных автоматов во многих случаях удастся существенно проще реализовать автомат и сделать его более соответствующим требованиям реальных систем управления. Для автоматов асинхронных возникает много проблем, которые неизвестны для задачи синтеза синхронных автоматов. Одной из центр. проблем асинхронного автомата является проблема устранения состязаний при смене внутр. состояний автомата, решение которой происходит за счет спец. кодирования внутр. состояний автомата.

Наконец, на этапе инженерного синтеза решается круг проблем, связанных с повышением надежности получаемой схемы. Кроме выбора системы элементов, удовлетворяющей требованиям надежности, предъявляемым к синтезируемому автомату, можно еще повысить надежность автомата за счет структурной избыточности. Методы введения структурной избыточности могут быть весьма разнообразны: резервирование всего автомата или части его, мажорирование наиболее «опасных» частей логич. преобразователя или памяти, добавление обходных цепей в логич. схеме и т. д. Существует много методов внесения структурной избыточности на основе анализа и преобразования аналитич. выражений для ф-ций переходов и выходов автомата. Однако до последнего времени эти методы носили частный характер и накладывали существенные ограничения на характер сбоев, допускаемых в схеме: независимость сбоев в отдельных элементах, фиксированный характер отказов, симметричный характер сбоев типа 0—1 и 1—0.

См. также *Автоматизация проектирования ЦВМ*.

Лит.: Лазарев В. Г., Пийль Е. И. Синтез асинхронных конечных автоматов. М., 1964 [библиогр. с. 252—257]; Якубайтис Э. А. Асинхронные логические автоматы. Рига, 1966; Рабинович З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [библиогр. с. 299—301]; Пospelov Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. М., 1968 [библиогр. с. 324—328].

Д. А. Поспелов.

**ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ АВТОМАТИЗАЦИЯ** — разработка и исследование математических методов и различных видов математического и технического обеспечения для проведения инженерных расчетов на электронных вычислительных машинах; в широком смысле — это автоматизация при помощи вычислительной техники расчетов для пром. предприятий, транспорта, строительства и др. отраслей нар. х-ва, включая расчеты, связанные с планированием и орг-цией производства. В узком смысле под И. р. а. понимают автоматизацию расчетов в конструкторских бюро и НИИ путем привлечения широкого круга пользователей. И. р. а. часто осуществляется в вычислительных центрах, оснащенных ЭВМ и вычислительными системами коллективного пользования, в которых в качестве терминалов могут использоваться специализированные и малые ЭВМ для инженерных расчетов. И. р. а. с использованием ЭВМ обычно включает несколько этапов. 1-й этап — постановка задачи и определение конечных целей. На этом этапе выбирают общий подход к решению задачи и определяют совокупности критериев, которым должны удовлетворять результаты. 2-й этап — математическое описание. Это описание включает выбор одного из известных способов или разработку нового способа для решения задач. Если использовать матем. описание для постановки задачи на ЭВМ нельзя, и, кроме того, необходимо оценить полную погрешность полученного результата, то применяют численный анализ. 3-й этап — программирование для ЭВМ. 4-й этап — отладка программы. 5-й этап — вычисление (счет). Производится после устранения всех ошибок с использованием соответствующих исходных данных. 6-й этап — анализ результатов.

И. р. а. непосредственно связана с задачей взаимодействия человека с вычислительной машиной, решению которой способствует использование языков программирования, трансляторов, специализированных ЭВМ и систем графического оперативного взаимодействия. Автоматизировать 1-й, 2-й и 6-й этапы на современном уровне развития вычисл. техники и науки довольно трудно. Наиболее разработаны методы автоматизации 3-го и, частично, 4-го этапов. Во 2-ой пол. 60-х гг. для И. р. а. начали применять преимущественно малые ЭВМ. Это объясняется рядом мер, облегчающих общение человека с машиной, предусмотренных при конструировании этих машин. В машине «Промінь», напр., в набор операций включено вычисление элементарных ф-ций, умножение векторов и решение систем линейных алгебр. ур-ний; в машине «МИР-1» вход-

ным языком является язык *процедурно-ориентированный*, основанный на АЛГОЛе и обогащенный рядом символов и операторов, часто встречающихся в инженерных расчетах; упрощение программирования предусмотрено и в ЭВМ «Наири». При И. р. а. удобно использовать ЭВМ с десятичной *системой счисления* и произвольной разрядностью (напр., «МИР»). Для более эффективной организации работы ЭВМ в *диалога режиме* целесообразно выводить информацию на телеэкран (см. *Экранный пульт*). Наибольшее значение при автоматизации 3-го и 4-го этапов имеют библиотеки стандартных *подпрограмм* и пакетов программ для ЭВМ. Кроме универсальных ЭВМ, для И. р. а. используют проблемно-ориентированные и *специализированные вычислительные машины* (для решения узких подклассов задач).

Большие возможности для И. р. а. открывают системы с разделением времени, дающие возможность одновременно решать большое к-во задач на одной вычислительной системе (см. *Режим разделения времени, Вычислительных работ методы организации*).

Лит.: Каган Б. М., Тер-Микаэлян Т. М. Решение инженерных задач на цифровых вычислительных машинах. М.—Л., 1964 [библиогр. с. 588—592]; Глушков В. М., Летицкий А. А., Стогний А. А. Входной язык вычислительной машины для инженерных расчетов. «Кибернетика», 1965, № 1; Мончилов Б. Р., Попов Б. А. Программирование и стандартные программы для ЭЦВМ «Промінь» и «Промінь-М». К., 1969 [библиогр. с. 318—323]; Фильчаков П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики. Справочник. К., 1970 [библиогр. с. 765—792]; Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. Пер. с англ. М., 1969. Б. А. Попов, И. В. Сергиенко, Г. С. Теслер.

**ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ АКАДЕМИИ НАУК КИРГИЗСКОЙ ССР** — научно-исследовательское учреждение в г. Фрунзе. Организован в 1960. Оsn. направления исследований — АСУП, комплексная автоматизация и телемеханизация оросительных систем. Ведутся разработки датчиков и различных приборов (контроля, регулирования), устройств телемеханики и диспетчеризации; работы по общей теории, синтезу и анализу алгоритмов управления. При ин-те есть аспирантура.

Ю. Е. Неболюбов.

**ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ (ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ) АКАДЕМИИ НАУК СССР** — см. *Ордена Ленина институт проблем управления (автоматики и телемеханики)*.

**ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР** — научно-исследовательское учреждение в Баку. Создан в 1965 на базе Вычисл. центра АН Азерб. ССР. Оsn. направления исследований — разработка и применение матем. методов и вычисл. техники в нефтедобывающей, нефтеперерабатывающей и нефтехим. пром-сти, в экономике и планировании. В лабораториях ин-та разрабатываются численные методы решения сингулярных интегральных уравнений, задач подземной гидрогазодинамики, матем.-эконом. задач планирования и управления, матем. методы оптимизации технологических процессов, проводятся

также исследования по созданию автоматизированных систем управления. А. И. Гусейнов. **ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР** — научно-исследовательское учреждение в Тбилиси. Основан в 1960. Оsn. направления исследований: разработка физ. принципов создания киберн. систем, теория моделирования естественных и искусственных киберн. процессов и структур. В отделах и лабораториях ин-та разрабатывают физ., бионические и функционально-логические основы создания киберн. систем и имитационных моделей в новых реализациях, теорию автоматов, теорию нейронных сетей, общую теорию систем, эвристическое и психоэвристическое программирование, моделирование информационных процессов, искусственный интеллект и т. п., применения достижений оптоэлектроники, голографии и квантовой электроники. При ин-те есть аспирантура. Ин-т издает выпуски науч. трудов. В. В. Чавчанидзе. **ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР** — см. *Ордена Ленина Институт кибернетики Академии наук Украинской ССР*.

**ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР** — научно-исследовательское учреждение в г. Таллине. Создан в 1960. Оsn. научные направления: исследование и создание одно- и многоцелевых систем; матем. моделирование производственных процессов, проблем планирования и управления; исследование и построение алгоритмических языков и составление соответствующих трансляторов; исследование и разработка специализированных дискретных устройств на магнитных элементах; исследования по теории оболочек; исследование процессов управления на молекулярном уровне в бионике; хим. и молекулярная физика, биохимия ферментов. Ин-т имеет вычислительный центр и секторы матем. методов, автоматики, исследования операций, механики и прикладной математики, физики, биохимии, научной информации, СКБ, бюро программирования. Есть аспирантура. Выпускает сборники «Программы для ЭЦВМ Минск-22 и 32».

Лит.: Наука Советской Эстонии. Таллин, 1965. И. Н. Вейгель.

**ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ АКАДЕМИИ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР** — научно-исследовательское учреждение в Ташкенте. Создан в 1966. Оsn. направления исследований: вычислительная математика, экономическая кибернетика, техническая кибернетика, общие и матем. вопросы вычислительной техники и теории информации. Ин-т является головным в республике по разработке автоматизированных систем оптимального планирования и управления. В 1969 ин-т награжден орденом Трудового Красного Знамени. В ин-те есть аспирантура.

В. К. Кабулов.

**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР** — научно-исследовательское учреждение в г. Донецке. Организован в 1970 на базе Донецкого вычислительного центра

АН УССР, созданного в 1965. Оsn. научные направления: нелинейные проблемы матем. физики, содержащие свободные границы; общая теория дифференциальных ур-ний в частных производных и ее приложения; стохастические дифференциальные ур-ния и проблемы теории вероятностей и матем. статистики; метрические свойства многомерных отображений, экстремальные проблемы теории функций и их приложения; проблемы движения твердых тел с полостями, заполненными жидкостью; матем. проблемы упругости и пластичности; теоретические проблемы напряжения горных пород; исследования по созданию автоматизированных систем планирования и управления пром. предприятиями. Создан отдел эксплуатации ЭВМ. Имеется аспирантура. Ин-т издает сборники науч. трудов.

Лит.: Д а н и л о к И. Г. Донецкий обчислительный центр. В кн.: История Академии наук Украинской ССР, кн. 2. К., 1967. И. И. Данилюк.

**ИНСТИТУТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР** — научно-исследовательское учреждение в г. Тбилиси. Организован в 1956. Оsn. направления работы: исследования стохастических адаптивных систем и оптимальных систем, вопросов машинного перевода с рус. языка на грузинский; разработки итерационных методов идентификации многомерных процессов управления объектами с изменяющимися характеристиками и методов распознавания и преобразования речевых образов; разработка гибридного вычислительного комплекса для исследования систем автоматического управления; разработки специализированных вычислительных машин, элементов и устройств автоматики и телемеханики и др. При ин-те есть аспирантура. Издаются сборники науч. трудов.

Лит.: М у с х е л и ш в и л и Н. И. Наука в Советской Грузии. Тбилиси, 1961. А. И. Элиашвили.

**ИНСТИТУТ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛОРУССКОЙ ССР** — научно-исследовательское учреждение в г. Минске. Создан в 1965. Оsn. направления исследований — разработка теории и методов автоматизации процессов инженерного труда с помощью средств вычисл. техники. В крупных отделах ин-та — автоматизации инженерного проектирования и тех. средств автоматизации инженерного проектирования ведутся исследования по теории автоматизации конструирования и технологического проектирования, автоматизации анализа и синтеза схем управления, автоматизации проектирования металлообрабатывающего инструмента, оснастки и автоматизации нормативных расчетов подготовки производства, разрабатываются специализированные устройства вычисл. техники, информационно-справочные системы, читающие и чертежные автоматы и т. д. Ин-т издает сборники трудов.

Лит.: К у п р е в и ч В. Ф. Академия наук Белорусской ССР. Минск, 1968 [библиогр. с. 234—237]. О. И. Семенков.

**ИНСТИТУТ ТОЧНОЙ МЕХАНИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ АКАДЕМИИ НАУК СССР** — научно-исследовательское учреждение в Москве. Организован в 1948. Оsn.

направление работ — создание и внедрение в промышленность современных высокопроизводительных универсальных электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ). В ин-те были созданы такие ЭЦВМ, как «БЭСМ», «М-20», «БЭСМ-2», «БЭСМ-3М», «БЭСМ-4» и «БЭСМ-6». Лаборатории и отделы занимаются исследованием и разработкой как самих ЭЦВМ, их матем. обеспечения, элементов и отдельных устройств, так и исследованием ряда технологических и конструкторских вопросов, связанных с созданием ЭЦВМ. В ин-те есть аспирантура и ученый совет по защите канд. и докт. диссертаций. Ин-т издает сборники и выпуски научных трудов. И. В. Логинова.

**ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ АКАДЕМИИ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР** — научно-исследовательское учреждение в г. Риге. Создан в 1960. Оsn. направления исследований: теория конечных автоматов; теория статистической оптимизации; теория моделирования дискретных устройств; автоматизация научных исследований. Решаются также задачи создания специализированных электронных устройств для автоматизации измерений, проверки больших интегральных схем, радиоаппаратуры и телевизионных устройств, разрабатываются различные системы обработки информации. При ин-те создано опытное производство вычислительных устройств. Есть аспирантура. Ин-т издает журнал «Автоматика и вычислительная техника».

Лит.: Л е о н т ь е в Л. П. Институт электроники и вычислительной техники Академии наук Латвийской ССР. «Автоматика и вычислительная техника», 1967, № 5; Кибернетика в Латвии. «Автоматика и вычислительная техника», 1970, № 2.

**ИНСТРУМЕНТАЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ**, приборная погрешность — погрешность, возникающая вследствие несовершенства измерительных приборов, а также решающих элементов или составных частей вычислительных машин (см. Погрешность решающего элемента, Погрешностей вычислений теория).

**ИНТЕГРАЛОВ СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ**. Для вычисления определенных и неопределенных интегралов существуют точные и прил. способы. Определенным интегралом  $I =$

$$= \int_a^b f(x) dx, \text{ понимаемым в обычном для курсов}$$

математики смысле (в смысле Римана), наз. предел интегр. суммы

$$I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad [\delta = \max \Delta x_i, \Delta x_i = x_{i+1} - x_i,$$

$$x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b].$$

1. Способы точного вычисления определенного интеграла. Приведенное определение интеграла дает одновременно и способ его вычисления путем



прямого нахождения предела интегр. суммы. Но такой способ сложен и его почти не применяют при точных вычислениях. Чаще применяют его для прикл. нахождения интегралов. Большое значение имеют способы, основанные на установлении связи между изучаемым определенным интегралом и другими величинами, значения которых часто можно вычислить проще, чем предел интегр. суммы. Такие способы многообразны, так как интегралы связаны как между собой, так и со многими др. величинами. Приведем лишь несколько примеров такого рода. Если для интегрируемой ф-ции  $f(x)$  существует первообразная (примитивная) ф-ция  $F(x)$ , то верно следующее равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{позволяющее свес-}$$

ти вычисление интеграла к отысканию первообразной  $F(x)$  и нахождению двух ее значений  $F(a)$  и  $F(b)$ .

В др. случаях используют простые связи между интегралами от разных ф-ций. К такому виду связей относится, напр., правило «интегрирования по частям»:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(b) v(b) - u(a) v(a)] - \int_a^b v(x) u'(x) dx,$$

позволяющее интеграл  $\int_a^b u(x) v'(x) dx$  заменить

$$\text{интегралом } \int_a^b v(x) u'(x) dx.$$

Вторым примером может служить правило интегрирования суммы ф-ций  $\int_a^b \sum_{i=1}^n u_i(x) dx =$

$$= \sum_{i=1}^n \int_a^b u_i(x) dx. \quad \text{Это правило часто дает воз-}$$

можность привести интеграл от ф-ции, имеющей сложное строение, к нескольким более простым интегралам от отдельных слагаемых. Особенно широко применяют аналог этого правила для бесконечных рядов: если  $f(x)$  представима в форме сходящегося на  $[a, b]$

ряда  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)$ , то, при выполнении

некоторых условий о характере сходимости, верно равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b u_i(x) dx.$$

Использование его связано с тем, что ф-ции очень широкого мн-ва могут быть представлены в форме суммы ряда, члены которого явля-

ются простыми и легко интегрируемыми ф-циями, напр.

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{i!} dx = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^1 x^{2i} dx = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots \end{aligned}$$

При решении некоторых теор. и прикладных задач бывает необходимо вычислить интегралы от однозначных аналитических ф-ций по замкнутым линиям  $\int_l f(z) dz$ . Известно, что такой

контурный интеграл равен произведению числа  $2\pi i$  на сумму вычетов ф-ции  $f(z)$  в особых точках ее, лежащих внутри контура  $l$ . Это равенство позволяет вычисление контурного интеграла привести к нахождению вычетов, а это часто бывает значительно проще, чем найти предел интегр. суммы, соответствующей интегралу  $\int_l f(z) dz$ .

2. Способы приближенного вычисления определенного интеграла. Большинство применяемых в наст. время способов прикл. вычисления определенных интегралов основано на замене интегрируемой ф-ции  $f(x)$  на простую и легко интегрируемую ф-цию, такую, напр., как алгебр. многочлен или рациональная ф-ция. Эта замена, как правило, дает тем большую точность, чем выше порядок дифференцируемости ф-ции  $f(x)$  и чем более «гладко» ее изменение. Когда же  $f(x)$  — разрывная ф-ция или имеет разрывные производные невысокого порядка, то замена может дать невысокую точность вычисления интеграла или потребовать введения многочленов высокой степени, если нужно эту точность повысить. Поэтому при построении правил вычисления часто бывает целесообразно разложить интегрируемую ф-цию на два множителя  $p(x)$  и  $f(x)$ , из которых  $p(x)$  должен собрать в себе все особенности ф-ции, а  $f(x)$  должен иметь достаточно высокий порядок гладкости, и затем привести интеграл

к виду  $\int_a^b p(x) f(x) dx$ . Множитель  $p(x)$  считается фиксированным, его наз. весом или *весовой функцией* в интеграле. Ф-ция же  $f(x)$  может быть любой из некоторого широкого мн-ва. Для вычисления интеграла строят правила вида

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = Q_n(f). \quad (1)$$

Такие правила зависят от  $2n + 1$  параметров: от  $n$  узлов  $x_k$ ,  $n$  коэфф.  $A_k$  и числа  $n$  значений ф-ции  $f(x)$ . Чем больше  $n$ , тем большей точности можно достичь, используя правила (1).



Поэтому  $n$  считают произвольным, но фиксированным числом и рассматривают задачу о выборе лишь  $x_k$  и  $A_k$ . Их стремятся выбрать так, чтобы достичь возможно большей точности правила (1).

Наиболее распространенный и плодотворный принцип выбора  $x_k$  и  $A_k$  состоит в повышении степени точности правила. Рассмотрим его идею на частном примере. Пусть отрезок  $[a, b]$  конечный и нужно построить правило, которое давало бы возможно большую точность для любой непрерывной на  $[a, b]$  ф-ции  $f$ . Известно, что если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то для любой сколь угодно малой заранее заданной границы погрешности  $\varepsilon$  существует такой алгебр. многочлен

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m,$$

отличающийся от  $f(x)$  при всех значениях  $x \in [a, b]$  по абс. значению меньше чем на  $\varepsilon$ . Это позволяет ожидать, что правило (1) будет давать удовлетворительную точность для всякой непрерывной ф-ции  $f(x)$ , если оно имеет малую погр. в том случае, когда  $f(x)$  — многочлен. Поэтому правило интегрирования (1) часто строят так, чтобы оно было точным для алгебр. многочленов возможно более высокой степени. Обычно говорят, что равенство (1) имеет алгебр. степень точности  $m$ , если оно точно для всевозможных многочленов  $P_m(x)$  степени  $m$  и не выполняется точно для  $f(x) = x^{m+1}$ . Одновременно нужно отметить, что в др. условиях приходится иметь дело с задачей достижения высокой степени точности для иных способов приближения. Так, если строят правила для интегрирования периодических ф-ций, то стремятся к достижению возможно более высокой тригонометрической степени точности и т. п. Параметры  $x_k$  и  $A_k$  правила (1) не всегда произвольны. Напр., когда ф-ция  $f(x)$  задается таблично, то выбор  $x_k$  весьма стеснен: можно взять либо все табличные узлы, либо часть их опустить, но нет возможности придавать  $x_k$  произвольные значения.

В проблеме повышения степени точности правила (1) рассматриваются три следующие задачи.

а) Пусть все  $2n$  параметров  $x_k$  и  $A_k$  являются произвольными. Их можно выбрать так, чтобы сделать правило точным для всех алгебр. многочленов степени  $2n - 1$ . Можно показать, что когда весовая ф-ция  $p(x)$  знакопостоянна на  $[a, b]$ , этого действительно можно достигнуть, выбрав подлежащим образом  $x_k$  и  $A_k$ . Более того, можно показать, что при этом  $x_k$  и  $A_k$  определяются единственным образом и что степень точности  $2n - 1$  является наивысшей возможной. Впервые правило такого типа построил нем. математик К.-Ф. Гаусс (1777—1855) для случая конечного отрезка  $[a, b]$  и постоянной весовой ф-ции  $p(x) \equiv 1$ . Оно применяется для вычисления интеграла

$\int_a^b f(x) dx$ , когда ф-ция  $f(x)$  является достаточно гладкой.

б) Пусть узлы  $x_k$  правила (1) избраны и фиксированы, а произвольными являются лишь коэфф.  $A_k$ . С такими условиями построения правила (1) встречаются, напр., в задаче интегрирования таблично заданных ф-ций. Один из возможных способов построения правила (1) состоит в том, что ф-цию  $f(x)$  интерполируют по ее значениям  $f(x_k)$  при помощи алгебр. многочлена степени  $n - 1$ :

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} f(x_k),$$

$$\omega = (x - x_1) \dots (x - x_n)$$

и затем заменяют в интеграле  $\int_a^b p(x) f(x) dx$  ф-цию  $f(x)$  на многочлен  $P_{n-1}$ . После почленного интегрирования получают квадратурные формулы вида

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (2)$$

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} dx.$$

По способу их получения эти ф-лы наз. и н т е р п о л я ц и о н н ы м и. Они вполне характеризуются условием, что равенство (2) выполняется точно всякий раз, когда  $f(x)$  есть многочлен степени  $n - 1$ .

Особенно широко применяют интерполяционные ф-лы вида Котеса, в которых в качестве узлов  $x_k$  приняты равноотстоящие точки отрезка  $[a, b]$

$$x_k = a_0 + kh \left( h = \frac{b-a}{n}, k = 0, \dots, n \right).$$

В этом случае коэфф.  $A_k = (b-a)^{-1} B_k$ ,

$$\text{где } B_k = \frac{(-1)^{n-k}}{nk! (n-k)!} \int_0^n p(a+th) t(t-1) \dots (t-k+1)(t-k-1) \dots (t-n) dt.$$

Котес вычислил коэфф.  $B_k$  для  $n=1, 2, \dots, 10$  при  $p(x) \equiv 1$ . Простейшие ф-лы Котеса часто применяют при вычислениях с невысокой точностью. При  $n=1$  интерполирование выполняется по двум значениям  $f(x)$  на концах отрезка  $a$  и  $b$ . Равенство (2) приводит к ф-ле трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]. \quad (3)$$

При  $n = 2$  ф-ция  $f(x)$  интерполируется по значениям в трех узлах  $x_0 = a$ ,  $x_1 = \frac{a+b}{2}$ ,  $x_2 = b$ , и ф-ла Котеса совпадает с правилом парабол

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[ \frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b) \right]. \quad (4)$$

Равенства (3) и (4) имеют невысокую точность и с целью применения их к вычислениям отрезок  $[a, b]$  обычно разделяют на достаточно большое к-во малых частей длины  $h = \frac{b-a}{m}$ , к каждой из которых применяют правило (3) или (4) и затем складывают результаты по всем отрезкам. Получающиеся после этого «общие правила» трапеций и парабол могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{m} \left[ \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + f_{m-1} + \frac{1}{2} f_m \right], \quad f_k = f(a + kh), \\ &\quad h = \frac{b-a}{m}; \\ \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{3m} [f_0 + f_m + 2(f_2 + f_4 + \dots + \\ &\quad + f_{m-2}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{m-1})]. \end{aligned}$$

в) В некоторых случаях, напр., при графических расчетах, полезно пользоваться правилами квадратур с равными коэфф.

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx C_n \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad (5)$$

Они имеют  $n+1$  параметров  $C_n$  и  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Если параметры выбраны так, что равенство (5) выполняется точно для всяких многочленов степени  $n$ , такие правила наз. квадратурными ф-лами Чебышева. Первая ф-ла такого рода была найдена в середине 19 в.:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right). \quad (6)$$

Здесь равенство выполняется точно, если  $f(x)$  есть произвольный многочлен степени  $2n-1$ . Ф-лу Чебышева можно построить при всяком  $n$  для любой весовой ф-ции  $p(x)$ , для которой  $\int_a^b p(x) dx \neq 0$ , но среди ее узлов могут ока-

заться узлы, выходящие за границу отрезка интегрирования  $[a, b]$  и даже комплексные. Так, для случая постоянной весовой ф-ции

$$p(x) \equiv 1 \quad \text{в ф-ле Чебышева} \quad \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad \text{все узлы будут действитель-}$$

ными только при  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$ . Для всех др. значений  $n$  среди узлов  $x_k$  будут существовать комплексные. До 1965 считали, что ф-ла (6) является единственной ф-лой Чебышева, у которой при всяких  $n$  все узлы  $x_k$  действительные, и лишь в 1965 были найдены весовые ф-ции  $p(x)$ , для которых может быть построена ф-ла Чебышева с действительными узлами  $x_k$  при всяких  $n$  или для бесконечного к-ва значений  $n$ .

3) Вычисление неопределенного интеграла. В задаче вычисления неопределенного интеграла  $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$ , как правило, бывает нужно найти ф-цию  $y(x)$  для многих значений  $x$ , и это существенно отличает ее от задачи вычисления определенного интеграла. Допустим, что нужно вычислить  $y(x)$  в равноотстоящих точках с шагом  $h$   $x_k = x_0 + kh$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ). Предположим, что вычисления доведены до точки  $x_n = x_0 + nh$  и составлена табл. значений:

$x$	$x_0$	$x_1$	$\dots$	$x_n$	$x_{n+1}$	$\dots$
$y$	$y_0$	$y_1$	$\dots$	$y_n$		

Нужно найти  $y_{n+1}$ . Для этого можно использовать несколько ранее найденных значений  $y_k$  ( $k \leq n$ ) и те значения  $f(t)$ , которые можно вводить в вычисления.

В общей форме расчетное правило можно записать в виде:

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i y_{n-i} + h \sum_{j=1}^q B_{n_j} f(\xi_{n_j}). \quad (7)$$

При построении этого правила существенное значение имеет следующее.

а) Правило содержит  $p+2q+1$  параметров  $A_i$ ,  $B_{n_j}$  и  $\xi_{n_j}$ . Их выбирают так, чтобы правило имело достаточно высокую или даже наивысшую возможную алгебр. степень точности. Это условие такое же, как и в задаче вычисления определенного интеграла. б) На каждом шаге вычислений появляется некоторая погр. От шага к шагу погр. будут накапливаться, и погр. вычисления будет возрастать с увеличением к-ва шагов. Закон роста будет

зависеть от выбора правила (7); при этом рост может оказаться столь быстрым, что правило может стать непригодным для счета даже на небольшое число шагов. При построении правила (7) необходимо заботиться о том, чтобы соответствующий ему рост погр. был достаточно медленным, чтобы можно было вычислить при малых  $h$  ф-цию  $y(x)$  со сколь угодно малой погр. на всем отрезке, где она должна быть найдена. Правило (7), обладающее этим свойством, часто наз. устойчивым относительно роста погр. Признаки устойчивости были выяснены в середине 20 в. в) При вычислениях по ф-ле (7) труднее всего находить значения ф-ции  $f(t)$ . Можно упростить расчеты и сэкономить машинное время, если правило (7) строить так, чтобы каждое значение  $f(t)$  применялось для нахождения не одного, а нескольких значений  $y(x)$ .

Пусть известна таблица значений ф-ции  $f(t)$  в равноотстоящих точках  $x_0 + kh$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) и нужно найти значения  $y(x)$  в тех же точках. Для вычислений здесь часто используют правило

$$y_{n+1} \approx y_n + h \left[ \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 f_{n-2} + \Delta^4 f_{n-1}}{2} - \dots + C_k \frac{\Delta^{2k} f_{n-2} + \Delta^{2k} f_{n-k+1}}{2} \right],$$

$$C_k = \frac{1}{(2k)!} \int_0^1 (u+k-1) \dots (u-k) du,$$

$$\Delta^i f_j = \Delta^{i-1} f_{j+1} - \Delta^{i-1} f_j, \quad \Delta f_l = f_{l+1} - f_l.$$

Оно является интерполяционным, точным для случая, когда  $y(x)$  есть произвольный многочлен степени  $2k+2$ , устойчивым относительно роста погр., и каждое значение  $f(t)$  используется для нахождения  $2k+2$  значений  $y$ .

В 40–60-х годах 20 ст. были предложены иные принципы построения правил интегрирования. Опишем некоторые из них. 1) Правила с наименьшей оценкой погр. в заданных мн-вах ф-ций. Такие правила построены в небольшом к-ве простейших случаев. 2) Правила с наискорейшим убыванием погр. в заданном классе ф-ций при неограниченном возрастании числа слагаемых в интегр. сумме. Построены детерминированные и недетерминированные

методы со сходимостью порядка  $O(AN^{-\frac{m}{s}})$  и недетерминированные со сходимостью по вероятности порядка  $O(AN^{-\frac{m}{s} - \frac{1}{2}})$  на классе  $C_s^m(A)$  ф-ций  $s$  переменных ( $s > 1$ ), у которых все производные порядка  $m$  ограничены по модулю постоянной  $A$ . Аналогичные результаты получены и в некоторых других классах ф-ций. 3) Метод статистических испытаний или *Монте-Карло метод*, основанный на приведении задачи вычисления нуж-

ной величины к вычислению вероятности в процессах со случайными величинами. Простейший пример метода дается задачей о вычисле-

нии интеграла  $p = \int_0^1 f(x) dx$  ( $0 \leq f(x) \leq 1$ ).

Если в квадрате  $[0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1]$  взять случайную точку  $M(\xi, \eta)$ , то вероятность ее попадания на площадь  $S$  равна интегралу  $p$ . Пусть взяты  $N$  случайных точек  $M_i(\xi_i, \eta_i)$  и пусть для  $L$  из них выполняется неравенство  $f(\xi_i) \leq \eta_i$ , т. е. эти точки лежат на  $S$ . Тогда вероятность  $p$  приibl. находится по ф-ле  $p = \int_0^1 f(x) dx \approx \frac{L}{N}$ .

Лит.: Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., 1966 [библиогр. с. 324–360]; Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., 1967; Бахвалов Н. С. Об оптимальных методах решения задач. «Аplikase matematiku», 1968, sv. 13, № 1; Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., 1970.

В. И. Крылов.

**ИНТЕГРАЛЬНАЯ СХЕМА** — функциональный узел электронной аппаратуры, все микроминиатюрные компоненты и соединительные проводники которого изготовлены в объеме или на поверхности общей подложки с применением групповых операций в едином технологическом цикле и герметизированы в одном корпусе как единое целое. Первые И. с. появились в конце 50-х годов как результат поисков, направленных на повышение надежности, быстродействия, снижение стоимости и миниатюризацию усложняющихся электронных систем. По принципам построения и особенностям технологии различают И. с. на активной и на пассивной подложке. К первому классу относятся т. н. полупроводниковые (твердотельные, твердые) И. с., которые изготовляют на монокристаллах полупроводника (обычно кремния) методами планарной технологии. В процессе изготовления в объеме кристалла образуют специально легированные микрообласти и структуры, выполняющие роль транзисторов, диодов, резисторов, конденсаторов, линий задержки и т. п., необходимые для получения требуемой функциональной схемы. Все они имеют выход на поверхность кристалла, на которой поверх окисного слоя создают контактные площадки и внутри-схемные соединения в виде пленочных металлизированных дорожек. Полупроводниковые И. с. по способу электр. изоляции компонентов делятся на И. с. с изоляцией и  $p-n$ -переходом, смещенным в обратном направлении, и И. с. с диэлектр. изоляцией. Отдельный класс полупроводниковых И. с. составляют схемы с транзисторными структурами металл — диэлектрик — полупроводник (МДП-транзисторами). Характеристики таких И. с. приведены в табл.

К И. с. на активной подложке относят также т. н. совмещенные И. с., отличающиеся от полупроводниковых тем, что на поверхность полупроводника поверх окисного слоя выполняют в виде пленок не только контактные

площадки и соединительные проводники, но и большинство пассивных компонентов.

Из И. с. на пассивной подложке наиболее широко распространены т. н. гибридно-пленочные И. с., которые изготавливают на диэлектрической подложке, причем пассивную часть схемы формируют из пленочных компонентов, а активную — внутри миниатюрных полупроводниковых кристаллов с балочными или шариковыми выводами, монтируемыми на пленочной схеме в виде навесных деталей. В зависимости от толщины рабочих слоев гибридно-

(ТТЛ) логич. И. с., транзисторные схемы с непосредственными связями, с резистивными и резистивно-емкостными, с эмиттерными связями и т. д. От схемного и конструктивного решений, а также от уровня развития технологии зависят осн. характеристики цифровых И. с.: задержка распространения сигнала, потребляемая мощность, нагрузочная способность или коэфф. разветвления, помехоустойчивость и др. Напр., для диодно-транзисторной логич. схемы задержка распространения сигнала —  $8 \div 50$  нсек, потребляемая мощ-

Характеристики	Тип схем					
	Логические ячейки	Триггеры	Сдвиговые регистры		Счетчики	Сумматоры
			статические	динамические		
Быстродействие, Мгц	1÷3	0,5÷4	~1	0,5÷10	2÷5	≤ 1
Потребляемая мощность, мвт	1÷3	2÷5	0,5÷6 на разряд	0,02÷20 на разряд	20÷40 на разряд	~50 на разряд
Число транзисторов на кристалле	5÷20	10÷30	100÷500	300÷800	≥ 100	≥ 100

пленочные И. с. подразделяют на тонко- и толсто-пленочные. Для изготовления тонкопленочных компонентов используют такие процессы, как напыление в вакууме (термическое или с помощью ионной бомбардировки), хим. и электрохим. осаждение и выращивание, реактивное распыление. При изготовлении толсто-пленочных компонентов применяют шелкографию, центрифугирование и пр. Для придания пленочным компонентам нужной конфигурации используют маскирование и фотолитографию.

Гибридно-пленочные И. с. позволяют полностью использовать преимущества пассивных тонкопленочных и активных твердотельных элементов. Все технологические операции изготовления И. с. являются групповыми, т. е. в процессе их выполнения одновременно формируют целые массивы микросхемных компонентов и схем и соединения между ними. Это позволяет создавать высоконадежные и в то же время дешевые И. с. и выпускать их в большом к-ве. Надежность И. с. в 1965 характеризовалась интенсивностью отказов  $\sim 10^{-7}$  1/час, а позже повысилась на порядок и стала равна надежности лучших образцов дискретных кремниевых транзисторов.

По функциональному назначению И. с. подразделяют на цифровые (логические) и линейные. Цифровые И. с. предназначены для применения в логич. и запоминающих узлах ЦВМ, а линейные — для усиления, преобразования и генерирования радио- и видеосигналов, токов и напряжений. Промышленностью выпускаются различные серии цифровых И. с., выполняющих функции *инвертора*, *триггера*, схем «НЕ — И» «НЕ — ИЛИ» и т. п. По особенностям схемного решения различают диодно-транзисторные (ДТЛ), транзистор-транзисторные

ноть  $5 \div 30$  мвт, нагрузочная способность  $4 \div 20$ , помехоустойчивость  $0,4 \div 1$  в.

Из линейных И. с. наиболее широкое распространение получили операционные дифференциальные усилители постоянного тока, стандартные низкочастотные и высокочастотные усилители, усилители считывания для ЗУ и др. По числу компонентов и сложности выполняемых ф-ций различают И. с. с низкой ( $10 \div 20$  компонентов), средней ( $\sim 50 \div 100$  комп.) и высокой (свыше 100 комп.) степенью интеграции. И. с., содержащие тысячи компонентов и выполняющие ф-ции целых узлов электронной аппаратуры, наз. большими И. с. (БИС). Повышение степени интеграции, переход к БИС'ам, улучшение надежности, снижение стоимости, совершенствование и автоматизация технологических процессов являются осн. тенденциями развития техники И. с. Лит.: Наумов Ю. Е. Интегральные логические схемы. М., 1970 [библиогр. с. 424—429]; Валиев К. А., Кармазинский А. Н., Королев М. А. Цифровые интегральные схемы на МДП-транзисторах. М., 1971. В. М. Корсунский.

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ** — уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла. И. у. делятся на линейные и нелинейные. Л и н е й н ы е И. у. имеют вид:

$$\alpha(x) \varphi(x) - \mu \int_D k(x, y) \varphi(y) dy = f(x), x \in D, \quad (1)$$

где параметр  $\mu$ , коэфф.  $\alpha(x)$ , ядро И. у.  $k(x, y)$ , правая часть  $f(x)$ , а также область интегрирования  $D$  известны; требуется определить неизвестную ф-цию  $\varphi(x)$  так, чтобы ур-ние (1) удовлетворялось тождественно для всех (или почти всех) значений  $x$  в области  $D$ . В таком же виде (1) изображаются и системы линейных

И. у. (тогда  $\alpha(x)$ ,  $k(x, y)$  — матрицы;  $f$ ,  $\varphi$  — вектор-функции) и многомерные И. у. (тогда  $D$  — многомерная область). Решение  $\varphi(x)$  И. у. (1) ищется в том классе  $\varphi$ -ций, для которого левая часть (1) с учетом свойств  $\alpha(x)$  и  $k(x, y)$  обладает теми же свойствами, что и правая часть  $f(x)$ . Ур-ние (1) с  $f(x) \equiv 0$  наз. однородным, в противном случае, т. е. если  $f(x) \neq 0$  на множестве положительной меры, — неоднородным. Если  $\alpha(x) \equiv 0, 1$ , то (1) наз. соответственно ур-нием 1-го или 2-го рода. Если однородное ур-ние 1-го или 2-го рода имеет отличные от нуля решения — собственные  $\varphi$ -ции, то значение параметра  $\mu$  наз. характеристическим, при этом  $1/\mu = \lambda$  для ур-ний 2-го рода наз. собственным значением.

При фредгольмовских ядрах  $k(x, y)$ , т. е. ядрах, у которых операторы  $k\varphi = \int_D k(x, y) \times$

$\times \varphi(y) dy$  вполне непрерывны, И. у. (1) наз. ур-ниями типа Фредгольма. Примерами таких ядер являются непрерывные  $\varphi$ -ции  $k(x, y)$ ,  $\varphi$ -ции с условием  $\int \int_D |k(x, y)|^2 dx dy < \infty$ ,

а также всевозможные  $\varphi$ -ции со слабыми особенностями, для которых  $\sup_y \int |k(x, y)| dx < \infty$ . Если в ур-нии (1) типа Фредгольма  $k(x, y) = 0$  для  $y \geq x$ , то (1) наз. ур-нием Вольтерры. Ур-ние вида

$$\int_0^x \frac{\varphi(y) dy}{(x-y)^\alpha} = f(x), \quad (0 < \alpha < 1)$$

наз. ур-нием Абеля.

И. у. (1), отличные от ур-ний Фредгольма 2-го рода, наз. особыми. К ним принадлежат: И. у. Фредгольма 1-го рода, сингулярные И. у. с ядром Коши ( $D \equiv \Gamma$  — конечная совокупность непересекающихся кусочно гладких дуг

и замкнутых кривых,  $k(x, y) \equiv \frac{k_1(x, y)}{x-y}$ ) и

ядром Гильберта ( $D \equiv [0, 2\pi]$ ,  $k(x, y) \equiv \frac{k_1(x, y)}{x-y}$ ) и  $\equiv k_1(x, y) \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2}$ ), сингулярные И. у.

типа свертки ( $D \equiv [-\infty, \infty]$ ,  $k(x, y) \equiv a_1(x-y) + a_2(x-y) \operatorname{sign} y + k_1(x, y)$ , И. у. Винера — Хопфа ( $D \equiv [0, \infty]$ ,  $k(x, y) \equiv a(x-y)$ ) и др. Ядро  $k_1(x, y)$  здесь предполагается фредгольмовским, а  $\varphi$ -ции  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a$  обычно предполагаются интегрируемыми или интегрируемыми вместе со своим квадратом. К особым И. у. принадлежат также многочисленные ур-ния интегральных преобразований: ур-ния Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \varphi(y) dy = f(x), \quad \text{Лапласа} \quad \int_0^{\infty} e^{-xy} \times$$

$$\times \varphi(y) dy = f(x), \quad \text{Меллина} \quad \int_0^{\infty} y^{x-1} \varphi(y) dy =$$

$$= f(x), \quad \text{Ханкеля} \quad \int_0^{\infty} \sqrt{xy} I_\nu(yx) \varphi(y) dy = f(x),$$

где  $I_\nu$  —  $\varphi$ -ция Бесселя 1-го рода порядка  $\nu$ , и др.

Нелинейные И. у. еще не имеют детальной классификации. Укажем некоторые типы таких ур-ний, имеющих первостепенное значение. Ур-ния Гаммерштейна  $\varphi(x) = \int_D k(x, y) f(y, \varphi(y)) dy$ , где  $k(x, y)$  — фред-

гольмовское ядро,  $f$  — нелинейная  $\varphi$ -ция относительно искомого  $\varphi$ . Более общие ур-ния Урысона  $\varphi(x) = \int_D k(x, y, \varphi(y)) dy$ , где  $k(x,$

$y, \varphi)$  обычно непрерывная  $\varphi$ -ция при  $x, y \in \bar{D}$  и  $|k| \leq C$  ( $C$  — некоторая достаточно большая константа,  $\bar{D}$  — замыкание  $D$ ). Ур-ния Ляпунова

$$\sum_{\alpha, \beta} \int_D \dots \int_D k_{\alpha, \beta}(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(p)}) \varphi^{\alpha_0}(x) \varphi^{\alpha_1}(y^{(1)}) \dots \dots \varphi^{\alpha_p}(y^{(p)}) v^{\beta_0}(x) v^{\beta_1}(y^{(1)}) \dots \dots v^{\beta_p}(y^{(p)}) dy^{(1)} dy^{(2)} \dots dy^{(p)} = 0, \quad (2)$$

в которых  $\varphi$ -ция  $v$  — известна, число  $p$  — фиксировано, а суммирование распространено на всевозможные векторы  $\alpha$  ( $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ ),  $\beta$  ( $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ ) с неотрицательными целочисленными компонентами. Левая часть равенства (2) наз. интегростепенным рядом. Нелинейное одномерное сингулярное И. у. можно представить в виде  $F(x, \varphi(x), S\varphi, T_1\varphi, T_2\varphi, \dots, T_n\varphi) = 0$ , где сингулярный

$$\text{интеграл } S\varphi = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(y) dy}{y-x}, \quad T_j \text{ — вполне}$$

непрерывные операторы,  $F$  — заданная нелинейная  $\varphi$ -ция. Многомерное нелинейное сингулярное И. у. может иметь вид

$$F(x, \varphi(x), \sigma_1\varphi, \sigma_2\varphi, \dots, \sigma_n\varphi; T_1\varphi, \dots, T_n\varphi) = 0,$$

$$\text{где } \sigma_i\varphi \equiv \int_S \frac{f_i(x, \theta)}{|y-x|^m} \varphi(y) d_y S, \quad \theta = \frac{y-x}{|y-x|},$$

$S$  —  $m$ -мерная поверхность,  $f_i(x, \theta)$  — дифференцируемые  $\varphi$ -ции.

И. у. обычно играют вспомогательную роль и возникают на основе интегр. представлений решений многих задач матем. физики. Преимуществом такого подхода является понижение размерности области определения решений И. у. Точное аналитическое решение И. у., или решение их в замкнутой форме, как правило, невозможно. Поэтому до появления ЭВМ большинство И. у. исследовались лишь качественно. С развитием вычисл. техники и математики для решения широких классов

И. у. разработано много эффективных приближенных методов (см. *Интегральных линейных сингулярных уравнений способы решения, Интегральных нелинейных уравнений способы решения*).

Лит.: Забрейко П. П. [и др.]. Интегральные уравнения. М., 1968 [библиогр. с. 432—444]; Трикоми Ф. Интегральные уравнения. Пер. с англ. М., 1960 [библиогр. с. 292—296]. В. В. Иванов.

**ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ.** Сингулярные интегральные уравнения (с. и. у.) возникают на основе интегр. представлений решений многих задач математической физики. Эти ур-ния применяются также в автоматического управления теории (Винера—Хопфа уравнения), в теоретической физике (теория дисперсионных соотношений) и др. областях. Многие частные типы с. и. у. решаются в замкнутой аналитической форме. В качестве одного из важных примеров рассмотрим полученное акад. АН СССР И. Н. Векуа решение в замкнутой форме т. н. характеристического с. и. у.

$$K^0 \varphi \equiv a(t) \varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (1)$$

в котором  $\varphi(t)$  — искомая ф-ция,  $\Gamma$  — замкнутая гладкая простая кривая;  $a, b, f \in H(\alpha, \Gamma)$ , т. е. непрерывны по Гельдеру на  $\Gamma$  с показателем  $\alpha$  ( $\varphi \in H(\alpha, \Gamma)$ ), если  $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq \text{const} |t_1 - t_2|^\alpha$ ,  $t_1, t_2 \in \Gamma$ ), причем  $a^2 - b^2 \neq 0$  на  $\Gamma$ . Не ограничивая общности, будем считать, что начало координат лежит внутри  $\Gamma$ . Введем интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in \Gamma. \quad \text{Граничные}$$

значения  $\Phi(z)$  ( $\varphi^+(t)$ , когда  $z \rightarrow t$ , оставаясь внутри  $\Gamma$ , и  $\varphi^-(t)$ , когда  $z \rightarrow t$ , оставаясь вне  $\Gamma$ ) связаны ф-лами Сохоцкого — Племеля

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi^+(t) - \varphi^-(t), \quad S\varphi \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = \varphi^+(t) + \varphi^-(t). \end{aligned} \quad (2)$$

По этим ф-лам ур-ние (1) преобразуется к виду

$$\varphi^+ = G\varphi^- + g, \quad (3)$$

где

$$G = \frac{a-b}{a+b}, \quad g = \frac{f}{a+b}.$$

Задача определения  $\Phi(z)$  и  $\varphi^\pm(t)$  из соотношения (3) наз. *краевой задачей Римана*. Общее ее решение в замкнутой форме впервые дали итальянский матем. И. Племель и сов. матем. Ф. Д. Гахов. Введем индекс  $\kappa =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d \ln G(t). \quad \text{Тогда ф-ция } \psi = \\ &= \ln [G(t) t^{-\kappa}] \text{ будет однозначной на } \Gamma. \text{ При-} \end{aligned}$$

менив к ней ф-лы (2), получим

$$\begin{aligned} \psi^\pm &= \pm \frac{1}{2} \ln [G(t) t^{-\kappa}] + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln [G(\tau) \tau^{-\kappa}] d\tau}{\tau - t}, \\ G(t) &= t^\kappa \frac{\exp \psi^+}{\exp \psi^-}. \end{aligned}$$

Подставив в (3) вместо  $G$  его представление и проделав простые преобразования, в соответствии с известными свойствами аналитических ф-ций будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^+}{\exp \psi^+} - g_1^+ &= t^\kappa \frac{\varphi^-}{\exp \psi^-} - g_1^- \equiv P_{\kappa-1}(t), \\ g_1 &= \frac{g}{\exp \psi^+}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $P_{\kappa-1}(t)$  — произвольный многочлен степени  $\kappa - 1$ ,  $P_{\kappa-1}(t) = 0$  при  $\kappa \leq 0$ . Из ф-лы (4) получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi^+(t) &= g_1^+(t) \exp \psi^+ + P_{\kappa-1}(t) \exp \psi^+, \\ \varphi^-(t) &= g_1^-(t) \frac{\exp \psi^-}{t^\kappa} + P_{\kappa-1}(t) \frac{\exp \psi^-}{t^\kappa}, \\ \varphi(t) &= \varphi^+(t) - \varphi^-(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку  $\Phi(z)$  должна обращаться в нуль на бесконечности, при  $\kappa < 0$  (5) будет искомым решением ур-ния (1) лишь при условии, что  $\int_{\Gamma} \frac{g_1(\tau) d\tau}{\tau - z}$  имеет на бесконечности

нуль порядка не меньшего, чем  $-\kappa + 1$ . При  $\kappa \geq 0$  (5) дает  $\kappa + 1$  линейно независимых решений ур-ния (1) и соответствующей краевой задачи (3). Из (5) вытекает, что для доведения решения до числа нужно уметь вычислять индекс  $\kappa$  и ряд сингулярных интегралов. Пусть  $t = t_1(s) + it_2(s)$ ,  $(0 \leq s \leq \gamma)$  — ур-ние контура  $\Gamma$ . Тогда  $G(t) = G[t_1(s) + it_2(s)] = \xi(s) + i\eta(s)$ . Соотношение  $\xi = \xi(s)$ ,  $\eta = \eta(s)$  представляет собой параметрическое ур-ние некоторой кривой  $L$ . В силу непрерывности  $G(t)$  и замкнутости  $\Gamma$  кривая  $L$  будет замкнутой. Число витков кривой  $L$  вокруг начала координат (порядок кривой  $\Gamma$  относительно начала координат) будет индексом ф-ции  $G(t)$ . Если, напр.,  $G(t)$  — действительная или чисто мнимая ф-ция, не обращающаяся в нуль, то  $L$  есть отрезок прямой (проходимый четное число раз), и индекс  $G(t)$  равен нулю. Если  $G(t)$  является аналитической ф-цией внутри  $\Gamma$ , за исключением конечного числа точек, где она может иметь полюсы, то индекс равен разности между числом нулей и числом полюсов  $G(t)$  внутри  $\Gamma$ . В общем

случае индекс можно вычислить по ф-ле

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d \ln G(t) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\gamma} \frac{\xi(s) \eta'(s) - \eta(s) \xi'(s)}{\xi^2(s) + \eta^2(s)} ds. \quad (6)$$

Т. к.  $\kappa$  есть целое число или нуль, для правильного определения  $\kappa$  при численном интегрировании (см. *Интегралов способы вычисления*) по ф-ле (6) достаточно обеспечить абс. вычисл. погрешность  $< 1/2$ . Сингулярные интегралы можно вычислять указанными ниже приближенными способами.

Ур-ние Винера — Хопфа 2-го рода

$$\tilde{\varphi}(x) + \int_0^{\infty} k(x-y) \tilde{\varphi}(y) dy = \tilde{f}(x), \quad x > 0, \quad (7)$$

продолжением на всю ось ( $x \in [-\infty, \infty]$ ), применением Фурье преобразования и заменой аргумента можно свести к ур-нию вида (4), в котором

$$a(t) = 1 + \sqrt{2\pi} K(\omega), \quad b(t) = \sqrt{2\pi} K(\omega),$$

$$f(t) = \tilde{F}(\omega) \times \frac{1}{1-t}, \quad K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{-ix\omega} dx, \quad \tilde{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x) e^{-ix\omega} dx, \quad \omega = i \frac{1+t}{1-t}.$$

Применив ф-лы (5), получим замкнутую форму решения ур-ния (7) в виде

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{\omega-i}{\omega+i}\right) \frac{2i}{\omega+i} e^{i\omega x} d\omega, \\ x > 0.$$

Т. о., для доведения решения ур-ния (7) до числа еще необходимо вычислять интегралы Фурье (см. *Фурье интегралов способы вычисления*). Ур-ние Винера — Хопфа 1-го рода

$$\int_0^{\infty} k(x-y) \tilde{\varphi}(y) dy = \tilde{f}(x), \quad x > 0,$$

также приводится к ур-нию вида (1), однако при этом получается т. н. исключительный случай, когда  $a^2 - b^2$  в отдельных точках  $\Gamma$  имеет нули целых порядков. Этот случай также поддается решению в замкнутой форме, как и многие другие случаи ослабления и расширения первоначальных требований на  $\Gamma$ ,  $a$ ,  $b$  и  $f$ . Особое значение в теории упругости, гидро- и аэромеханике имеет случай, когда  $\Gamma$  — совокупность разомкнутых непересекающихся дуг,  $a$ ,  $b$  — кусочно-непрерывные ф-ции.

Полное линейное с. и. у. вида

$$K\varphi \equiv a(t) \varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} + \\ + \lambda \int_{\Gamma} k(\tau, t) \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (8)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $f$  и  $\Gamma$  — те же, что и в (1),  $\lambda$  — комплексный параметр, а ядро  $k(\tau, t)$  — фредгольмовское (см. *Интегральные уравнения*), вообще говоря, не может быть решено в замкнутой аналитической форме. Один из способов решения этого ур-ния состоит в его регуляризации, т. е. в сведении его к случаю интегр. ур-ния Фредгольма 2-го рода. Последнее решается многими способами (см. *Интегральных линейных уравнений способы решения*). Регуляризацию оператора  $K$  дает, напр., оператор

$$K_0^0 \psi \equiv a_0(t) \psi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b_0(\tau) \psi(\tau) d\tau}{\tau-t},$$

$$a_0(t) = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)}, \quad b_0(t) = \frac{b(t)}{a^2(t) - b^2(t)};$$

простые вычисления приводят к ф-лам

$$K_0^0 K\varphi \equiv \varphi + T\varphi, \quad K K_0^0 \tilde{\varphi} \equiv \tilde{\varphi} + \tilde{T}\tilde{\varphi},$$

$$T = -\frac{1}{\pi i} T_{ab_0} - \frac{1}{\pi i} T_{bb_0} S + K_0^0 k,$$

$$\tilde{T} = -\frac{a}{\pi i} T_{b_0} + \frac{b}{\pi i} T_{a_0} + k K_0^0,$$

$$T_{\omega} \psi = \int_{\Gamma} \frac{\omega(\tau) - \omega(t)}{\tau - t} \psi(\tau) d\tau,$$

$$S\varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t},$$

$$k\psi = \int_{\Gamma} k(\tau, t) \psi(\tau) d\tau.$$

Однако регуляризация с. и. у. не всегда возможна. Кроме этого, она может приводить к неэквивалентным уравнениям и к излишне сложным вычислениям. Правоммерно искать приближенное решение с. и. у. без их регуляризации. Набор способов решения ур-ния (8) без его регуляризации получают, исходя из следующих соображений. С одной стороны, ур-ние (8) является частным случаем линейных операторных ур-ний в гильбертовом или банаховом пространствах и поэтому к нему применимы общие методы решения таких ур-ний (см. *Операторных уравнений способы решения*). Специфика применения общих методов к ур-нию (8) состоит в необходимости вычисления ряда сингулярных интегралов и в учете некоторых особенностей теории с. и. у. В частности, условие  $a^2 - b^2 \neq 0$  на  $\Gamma$  обеспечивает корректность задачи решения



ур-ния (8), если  $\lambda$  не есть характеристическое число и  $\kappa = 0$ ; если  $a^2 - b^2$  может обращаться в нуль на  $\Gamma$ , то задача решения ур-ния (8) не является корректно поставленной и необходимо привлекать методы решения некорректных задач (см. *Некорректно поставленные задачи и Некорректно поставленных задач способы решения*). Случай любого индекса  $\kappa$  приводится к случаю нулевого индекса введением ур-ния

$$\begin{aligned} \tilde{K}\tilde{\varphi} &\equiv \tilde{\varphi}^+(a+b) - \tilde{\varphi}^-(a-b)t^{-\kappa} + \\ &+ \lambda \int_{\Gamma} k(\tau, t) [\tilde{\varphi}^+(\tau) - \tilde{\varphi}^-(\tau)\tau^{-\kappa}] d\tau = f(t), \\ t &\in \Gamma. \end{aligned}$$

Ф-ция  $\varphi = \tilde{\varphi}^+ - t^{-\kappa}\tilde{\varphi}^-$  будет тем решением ур-ния (8) (если оно разрешимо), у которого  $\varphi^-$  имеет наивысший возможный порядок нуля на бесконечности. Если  $\lambda$  не есть характеристическое число и  $\kappa > 0$ , то

$$\varphi_v = \tilde{\varphi}_v^+ - t^{-\kappa}\tilde{\varphi}_v^- - \frac{1}{t^v}, \quad v = 1, 2, \dots, \kappa,$$

где  $\tilde{\varphi}_v = \tilde{\varphi}_v^+ - \tilde{\varphi}_v^-$  — решение ур-ний  $\tilde{K}\tilde{\varphi}_v = Kt^{-v}$  — все линейно независимые решения однородного ур-ния  $K\varphi = 0$ . С другой стороны, к ур-нию (8), являющемуся обобщением фредгольмовских ур-ний, формально можно применять многие методы решения таких ур-ний без регуляризации с. и. у. Детальное исследование показывает, что ряд методов: типа Рунге — Галёркина, совпадения, замены ядра на вырожденное и др. (см. *Численные методы*) могут быть обоснованы применительно к с. и. у. В то же время широко распространенный метод решения фредгольмовских ур-ний 2-го рода, основанный на аппроксимации решения в виде кусочно-линейной ф-ции, не может быть обоснован применительно к с. и. у. в общем случае. При достаточной гладкости решения ур-ния (8) весьма эффективным оказывается *наименьших квадратов метод*, по которому приближенное решение ищется в виде  $\varphi_n = \sum_0^n \alpha_k t^k + \sum_n^{-1} \alpha_k t^{k-\kappa}$ , причем искомые  $\alpha_k$ , которые минимизируют  $\int_{\Gamma} \left| \tilde{K} \left( \sum_{-n}^n \alpha_k t^k \right) - f \right|^2 dt$ , находятся как решения алгебр. системы

$$\sum_{k=-n}^n \alpha_k (\tilde{y}_k, \tilde{y}_j) = (f, \tilde{y}_j), \quad (9)$$

$$j = -n, -n+1, \dots, n,$$

где

$$(\tilde{y}_k, \tilde{y}_j) = \int_0^{\gamma} \tilde{y}_k(t) \tilde{y}_j(t) ds, \quad (f, \tilde{y}_j) =$$

$$= \int_0^{\gamma} f(t) \tilde{y}_j(t) ds, \quad y_k = \tilde{K}t^k =$$

$$= \begin{cases} (a+b)t^k + \lambda \int_{\Gamma} k(\tau, t) \tau^k d\tau, & k \geq 0, \\ (a-b)t^{k-\kappa} + \lambda \int_{\Gamma} k(\tau, t) \tau^{k-\kappa} d\tau, & k < 0; \end{cases}$$

$\tilde{y}_j$  — комплексно сопряженная ф-ция к  $\tilde{y}_j$ . Алгебр. систему (9) целесообразно решать методом квадратного корня (при замене  $n$  на  $n+1$  выгодно применять метод окаймления). На практике удобно заменой переменной  $t$  свести ур-ние (8) к случаю, когда  $\Gamma$  является окружностью единичного радиуса с центром в начале координат. Способ получения априорной оценки погрешности метода и погрешности за счет неточности исходных данных см. в ст. *Приближенных методов общая теория*; оценку погрешности округления при решении алгебр. системы вида (9) см. в ст. *Линейных алгебраических систем уравнений способы решения*.

Практически удобно степень погрешности приближенного решения оценивать, вычисляя нормы невязки ур-ния  $\int_{\Gamma} \left| \tilde{K} \left( \sum_{-n}^n \alpha_k t^k \right) - f \right|^2 dt$  или  $\max_t \left| \tilde{K} \left( \sum_{-n}^n \alpha_k t^k \right) - f \right|$ . С ростом  $n$  первая норма всегда стремится к нулю, а вторая стремится к нулю при достаточной гладкости исходных данных ур-ния (8). В более общем случае, когда о гладкости решения ур-ния (8) ничего не известно, целесообразнее применять итеративные методы решения с. и. у. *Вычислительная схема* одного из всегда сходящихся итеративных методов типа наискорейшего спуска следующая:

$$\varphi^{(j+1)} = \varphi^{(j)} + \frac{\|f - K\varphi^{(j)}\|^2}{\|K^*(f - K\varphi^{(j)})\|^2} K^*(f - K\varphi^{(j)}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где  $\varphi^{(0)}$  — произвольная ф-ция, сопряженный

$$\text{оператор } K^*\psi = \bar{a}\psi + \frac{\bar{t}'(s)}{\pi i} \int_0^{\gamma} \frac{\bar{b}(\tau) \psi(\tau) du}{\tau(u) - \bar{t}(s)} +$$

$$+ \int_0^{\gamma} \bar{k}(t, \tau) \bar{t}'(s) \psi(\tau) du \text{ и знак нормы } (\| \cdot \|)$$

означает  $\|\psi\|^2 = \int_0^{\gamma} |\psi(\tau)|^2 ds$ . При этом в необ-

ходимых случаях интегралы берутся численно. Указанный итеративный метод и метод наименьших квадратов можно перенести на общий случай ур-ния вида (8), когда коэфф. этого ур-ния кусочно-непрерывны и  $\Gamma$  состоит из конечного числа непересекающихся гладких

дуг. Теперь под нормой необходимо подразумевать  $\|\psi\|^2 = \int_0^y \rho |\psi|^2 ds$ , где вес  $\rho$  должен обеспечивать ограниченность  $\|\psi\|$  для требуемого решения  $\varphi$ . Это условие будет, напр., выполнено, если положить, что  $\rho =$

$$= \prod_{k=1}^s |t - d_k|^{1-\varepsilon} \text{ с достаточно малым } \varepsilon > 0,$$

где  $d_k$  — все точки разрыва  $\varphi$ -ций  $a$ ,  $b$  и все концы дуг, входящих в  $\Gamma$ . Значительно более эффективным по числу необходимых операций для достижения заданной точности может быть комбинированный метод, когда начальную  $\varphi$ -цию  $\varphi^0$  для итеративного метода (10) находят по методу наименьших квадратов. Для получения приближенного решения с высокой точностью экономически выгодно применять вычисл. схему итерационного уточнения, по которой заново применяется тот же приближенный метод для отыскания поправки  $\delta\varphi$  к ранее полученному приближенному решению  $\varphi$ :  $K\delta = f(t) - K\varphi$ . При этом нужно позаботиться о возрастающей точности вычисления невязки  $f(t) - K\varphi$ .

Обобщением ур-ний Винера—Хопфа является полное с. и. у. типа свертки

$$\begin{aligned} \delta\varphi(x) + \eta \operatorname{sign} x\varphi(x) + \frac{1}{V2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_1(x-y) \times \\ \times \varphi(y) dy + \frac{1}{V2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_2(x-y) \operatorname{sign} y\varphi(y) dy + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} k(x,y)\varphi(y) dy = f(x), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\delta$  и  $\eta$  — заданные константы. Ур-ние (11) преобразованием Фурье и заменой аргумента сводится к ур-нию вида (8). Ур-ние (11) также является частным случаем линейных операторных ур-ний в гильбертовом или банаховом пространствах, и его можно решать общими приближенными методами для таких ур-ний. На практике нередко встречаются системы ур-ний вида (1), (8) и (11). Теория систем линейных с. и. у. аналогична теории одного ур-ния, поэтому к решению систем можно применять аналогичные способы приближенного решения. Однако система ур-ний вида (1) не всегда решается в замкнутой аналитической форме. Причина этого в том, что для матриц  $a$  и  $b$  не всегда справедливо свойство  $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ . При решении систем с. и. у. высокого порядка приближенными методами сталкиваются с вопросами экономии памяти и времени вычислений на ЦВМ. С точки зрения экономии памяти итеративный метод вида (10) оказывается предпочтительнее метода наименьших квадратов. Однако в случае медленной сходимости итераций можно воспользоваться и методом наименьших квадратов, находя искомые коэфф.  $\alpha_k$  не из алгебр. системы вида (9), а

путем непосредственной минимизации нормы невязки ур-ния одним из алгоритмов типа быстрого спуска (координатного спуска, наискорейшего спуска и др.). Сказанное о системах с. и. у. в значительной мере справедливо и в отношении линейных многомерных с. и. у. Лит.: Век у а И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., 1959 [библиогр. с. 616—628]; Га х о в Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963 [библиогр. с. 628—635]; М и х л и н С. Г., С м о л и ц к и й Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., 1965 [библиогр. с. 373—379]; М у с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968 [библиогр. с. 488—511]; И в а н о в В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. К., 1968 [библиогр. с. 281—285]; В е к у а Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., 1970 [библиогр. с. 372—379]. В. В. Иванов.

**ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ.** Многие задачи матем. физики и инженерной практики сводятся к решению интегральных ур-ний (и. у.) Фредгольма (1, 2) и интегральных уравнений Вольтерры (3,4) 2-го и 1-го рода соответственно

$$K_1\varphi \equiv \varphi(x) - \int_a^b k(x,y)\varphi(y) dy = f(x); \quad (1)$$

$$K_2\varphi \equiv \int_a^b k(x,y)\varphi(y) dy = f(x); \quad (2)$$

$$K_3\varphi \equiv \varphi(x) - \int_a^x k(x,y)\varphi(y) dy = f(x); \quad (3)$$

$$K_4\varphi \equiv \int_a^x k(x,y)\varphi(y) dy = f(x), \quad (4)$$

с неизвестной  $\varphi$ -цией  $\varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Ур-ние (3) является частным случаем (1), когда  $k(x,y) = 0$  для  $y > x$ ; путем дифференцирования от ур-ния (4) можно перейти к ур-нию (3). Ур-ние (2) коренным образом отличается от ур-ния (1); оно содержит в себе существенные внутр. трудности, и изучено еще недостаточно.

Найти точное решение и. у. в замкнутом виде удастся только в отдельных случаях. Для решения ур-ния (1) широко применяются приближенные методы (особенно в последние годы в связи с использованием вычисл. техники). Хорошо известны такие методы приближенного решения и. у., как метод простой итерации, метод замены ядра на вырожденное, вариационные методы.

1. В методе простой итерации в качестве начального приближения к решению ур-ния (1) берут произвольную  $\varphi$ -цию  $\varphi_0(x)$ . Последующие приближения строятся по  $\varphi$ -ле

$$\varphi_r(x) = \int_a^b k(x,y)\varphi_{r-1}(y) dy + f(x), \quad (5)$$

$$r = 1, 2, \dots$$

При сходимости этого процесса за приближенное решение принимается  $\varphi_n(x)$  при достаточно большом  $n$ , если все интегралы вычисляются точно. Достаточными условиями применимости метода простой итерации являются

$$q_1 = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |k(x, y)| dy < 1$$

или

$$q_2 = \left( \int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2} < 1.$$

При этом оценки погрешности определяются соответственно:  $\|\varphi - \varphi_n\|_C \leq q_1^n \|\varphi - \varphi_0\|_C$

$$\text{и } \|\varphi - \varphi_n\|_C \leq q_1^n \frac{\|\varphi_n - \varphi_0\|_C}{1 - q_1^n}, \quad \|\varphi - \varphi_i\|_C =$$

$$= \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x) - \varphi_i(x)|; \quad \|\varphi - \varphi_n\|_{L_2} \leq q_2^n \times$$

$$\times \|\varphi - \varphi_0\|_{L_2} \text{ и } \|\varphi - \varphi_n\|_{L_2} \leq \frac{q_2^n \|\varphi_n - \varphi_0\|_{L_2}}{1 - q_2^n}.$$

$$\|\varphi - \varphi_i\|_{L_2} = \left( \int_a^b |\varphi(x) - \varphi_i(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Для случая и. у. (2) доказана теорема: если и. у. (2) разрешимо, а его ядро симметрично, интегрируемо с квадратом и положительно определено, то последовательность ф-ций

$$\varphi_r(x) = \varphi_{r-1}(x) + \lambda \left[ f(x) - \int_a^b k(x, y) \times \right. \\ \left. \times \varphi_{r-1}(y) dy \right], \quad 0 < \lambda < 2\lambda_1, \quad r = 1, 2, \dots,$$

где  $\lambda_1$  — наименьшее характеристическое число, а  $\varphi_0(x)$  — любая интегрируемая с квадратом ф-ция, сходится в среднем к решению ур-ния (2).

Для ур-ния (3) последовательные приближения в методе простой итерации строятся по ф-ле  $\varphi_r(x) = \int_a^b k(x, y) \varphi_{r-1}(y) dy + f(x)$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , причем этот процесс всегда сходится. Погрешность оценивается неравенством

$$\|\varphi - \varphi_n\|_C \leq \frac{M^{n+1} (b-a)^{n+1} \|f\|_C}{(n+1)! \left( 1 - \frac{M(b-a)}{n+2} \right)}$$

$$M = \max_{a \leq x, y \leq b} |k(x, y)|.$$

Если в (5) интегралы не находятся точно, то для их вычисления применяют те или иные квадратурные формулы. Если в ур-нии (1)

ядро вырожденное  $\left( k(x, y) = \sum_{i=1}^n A_i(x) B_i(y) \right)$ , то решение этого ур-ния находится в явном

виде  $\varphi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m c_i A_i(x)$ , где  $c_i = \text{const}$  — решения системы линейных алгебр. ур-ний

$$c_i - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} c_j = f_i, \quad \alpha_{ij} = \int_a^b A_j(y) B_i(y) dy;$$

$$f_i = \int_a^b f(y) B_i(y) dy; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

при условии, что определитель системы отличен от нуля.

2. В методе замены ядра на вырожденное произвольное ядро  $k(x, y)$  аппроксимируется вырожденным ядром

$$\text{так, что } k(x, y) \approx K(x, y) = \sum_{i=1}^m A_i(x) B_i(y)$$

и в качестве приближенного решения  $\tilde{\varphi}(x)$  ур-ния (1) берется решение ур-ния с вырожденным ядром. Аппроксимацию заданного ядра вырожденным ядром можно производить различными способами. В частности, в качестве вырожденного ядра можно взять отрезок ряда Тейлора, или отрезок ряда Фурье, или интерполяционное ядро Бетмена. Оценку погрешности метода производят по следующей теореме: если

$$\int_a^b |k(x, y) - K(x, y)| dy < h,$$

$$\int_a^b |\Gamma(x, y)| dy < B, \quad 1 - h(1+B) > 0,$$

где  $\Gamma(x, y)$  — резольвента ур-ния с ядром  $K(x, y)$ , то ур-ние (1) имеет единственное решение, и

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_C < \frac{\|f\|_C h (1+B)^2}{1 - h(1+B)}. \quad (6)$$

$\Gamma(x, y)$  удовлетворяет соотношению  $f(x) - \int_a^b \Gamma(x, y) f(y) dy = \varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . При

конструировании вырожденного ядра важно получить хорошее приближение при небольшом числе слагаемых, ибо увеличение числа слагаемых может затруднить использование резольвенты.

3. В вариационных методах приближенное решение ур-ния (1) находят в виде аппроксимирующей ф-ции, зависящей от  $m$  параметров

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(x), \quad (7)$$

где  $\varphi_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , — линейно независимые координатные ф-ции (обычно первые  $m$  ф-ций из полной системы ф-ций на отрезке

$[a, b]$ ). Важным примером таких ф-ций являются  $\varphi_{ji}(x) = K_i^j \varphi_0 = K_i(K_i^{j-1} \varphi_0)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Подставив (7) в ур-ние (1), получим некоторую величину  $\varepsilon(x, c_1, \dots, c_m)$ , называемую невязкой:

$$\varepsilon(x, c_1, \dots, c_m) = \tilde{\varphi}(x) - \int_a^b k(x, y) \tilde{\varphi}(y) dy - f(x). \quad (8)$$

Параметры  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , находятся из таких условий, при которых невязка в каком-то смысле была бы по возможности малой. В зависимости от способа минимизации невязки получают тот или иной конкретный метод приближенного решения ур-ния (1). Но в каждом из них общим будет то, что для определения числовых значений параметров  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , получают систему ур-ний. Так, по *наименьших квадратов методу* неизвестные  $c_i$  находятся из условия минимизации невязки ур-ния (1) в метрике пространства  $L_2([a, b])$ . В методе Галёркина требуется, чтобы невязка была ортогональна к координатным ф-циями  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  (или к ф-циям  $\Psi_i(x)$  из другой полной системы координатных ф-ций). В методе совпадения требуется, чтобы невязка обращалась в нуль в точках  $x_i \in [a, b]$ , т. е. наряду с вариационными идеями используют также идеи метода конечных разностей. В методе подобластей отрезок  $[a, b]$  разбивают точками  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m \leq b$  на  $m$  частей, при этом

$$\text{необходимо, чтобы } \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(x, c_1, \dots, c_m) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \text{ Известно, что большинство вариационных методов сводится к методу замены ядра на вырожденное, поэтому в силу оценки (6) } \tilde{\varphi}_m(x) \rightarrow \varphi(x) \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Теор. и практический интерес к и. у. привел к созданию новых методов их приближенного решения. К ним относятся: в некотором смысле универсальный метод последовательных приближений, метод осреднения функциональных поправок, метод полос, метод моментов, метод замены ядра на кусочно-вырожденное, комбинированные методы, метод регуляризации при решении и. у. (2) и другие. Эти методы в определенных соотношениях комбинируют параметры описанных выше классических методов. Напр., при комбинации методов замены ядра вырожденным и простой итерации решения ур-ния (1) подбирают такие ф-ции  $A_i(x)$ ,  $B_i(y)$  и такое  $m$ , чтобы остаточный член  $r(x, y) = k(x, y) - K(x, y)$  обладал свойством

$$q = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |r(x, y)| dy < 1. \quad (9)$$

Решением ур-ния (1) в этом случае будет ф-ция

$$\varphi(x) = \Psi_0(x) + \sum_{i=1}^m c_i \Psi_i(x), \quad (10)$$

где  $\Psi_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , — решения ур-ний

$$\Psi_i(x) = A_i(x) + \int_a^b r(x, y) \Psi_i(y) dy; \quad A_0(x) = f(x), \text{ которые в силу условия (9) находят методом простой итерации. Величины } c_i, \text{ входящие в равенство (10), определяют из системы ур-ний}$$

$$c_i = \int_a^b \Psi_0(x) B_i(x) dx + \sum_{j=1}^m c_j \int_a^b \Psi_j(x) B_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

На практике желательно иметь как можно меньшие  $q$  и  $m$ . Эти противоречивые требования приводят к необходимости построения *алгоритмов*, оптимальных в некотором смысле. Вводится величина, характеризующая оптимальность

$$E(N, L_1, L_2, \gamma) = \inf_{M \in M(N)} \|\varphi - \tilde{\varphi}(M)\|_C,$$

$$\|k(x, y)\|_r \leq L_1, \|f\|_r \leq L_2,$$

где  $\gamma > 0$  — миним. расстояние от 1 до собственных значений ядра  $k(x, y)$ ,  $M(N)$  — множество всех методов приближенного решения ур-ния (1), при которых производится не более, чем  $N$  арифм. действий, норма  $\|\Psi\|_r$  для любой  $r$  раз дифференцируемой ф-ции  $\Psi$  означает сумму максимумов модулей  $\Psi$  и всех ее производных до  $r$ -го порядка включительно. Доказывается, что  $M_1 \leq E(N, L_1, L_2, \gamma) \times N^{r/2} \leq M_2$ , где  $M_1, M_2$  — положительные постоянные, зависящие лишь от  $r, \gamma, L_1$  и  $L_2$ . Метод, для которого  $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_C = E(N, L_1, L_2, \gamma)$ , является оптимальным по числу арифм. операций, а метод, для которого  $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_C \leq M_2 N^{-r/2}$ , — оптимальным по порядку. Вычисл. схема оптимального по порядку метода состоит в следующем. Пусть

$$K\varphi \equiv \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy, \\ k_i \varphi \equiv \sum_{j=1}^{m_i} A_j^{(i)} k(x, x_j^{(i)}) \varphi(x_j^{(i)}),$$

$$\tilde{R}f \equiv f(x) + \sum_{j=1}^{m_0} A_j^{(0)} k(x, x_j^{(0)}) \tilde{\varphi}(x_j^{(0)}),$$

где  $\tilde{\varphi}(x_j^{(0)})$  — решения системы ур-ний

$$\tilde{\varphi}(x_i^{(0)}) = f(x_i^{(0)}) + \sum_{j=1}^{m_0} A_j^{(0)} k(x_i^{(0)}, x_j^{(0)}) \tilde{\varphi}(x_j^{(0)}),$$

$$i = 1, 2, \dots, m_0, \quad (11)$$

и квадратурные ф-лы выбраны так, что  $\| (K - k_i) \varphi \|_C \leq \frac{M_3}{m_i^r} \|\varphi\|_r$ . Последовательные приближенные решения ур-ния (1) строятся по формулам  $\varphi_i = \tilde{R}(k_i - k_0) \varphi_{i-1} + \tilde{R}f$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , где  $l$  порядка  $\ln N$ ,  $\varphi_0 = \tilde{R}f$ . Числа  $m_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, l$ , выбирают так, чтобы

$$\frac{M_3 \cdot M_4^2 \cdot 2M_5}{m_0^r} < q < 1, \quad m_i = [(m_{i-1} - 1) q^{-\delta_i}] + 1,$$

$$0 < \delta_i < \frac{1}{2r}, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

где  $\|\tilde{R}f\|_0 \leq M_4 \|f\|_0$ ,  $\|\tilde{R}f\|_r \leq M_4 \|f\|_r$ ,  $\|K\varphi\|_r \leq M_5 \|\varphi\|_0$ ,  $\|k_i\varphi\|_r \leq M_5 \|\varphi\|_0$ ,  $[\cdot]$  — целая часть соответствующего числа.

На основе рассмотренных методов без принципиальных затруднений можно составить алгоритмы и программы решения этих ур-ний на ЦВМ. В ряде случаев весьма эффективной является реализация этих же методов посредством АВМ и гибридных вычисл. машин. Укажем некоторые особенности такой реализации. Пользуясь методом последовательных приближений, выбирают интервалы дискретизации  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  по переменной  $x$ . Ур-ния (1) и (3) решают соответственно по ф-лам

$$\varphi_r(x_i) = \int_a^b k(x_i, y) \varphi_{r-1}(y) dy + f(x_i), \quad (12)$$

$$\varphi_r(x_i) = \int_a^{x_i} k(x_i, y) \varphi_{r-1}(y) dy + f(x_i). \quad (13)$$

При этом аналоговые интеграторы вычисляют интегралы по ф-лам (12) и (13) без погрешностей метода, свойственных квадратурным ф-лам, с точностью до инструментальной погрешности (см. *Погрешностей вычислений теория*). Интервал  $[a, b]$  (или  $[a, x_i]$ ) представляют временем, в течение которого и определяется  $i$ -е значение нового ( $r$ -го) приближения. За  $n$  таких циклов новое приближение определяется полностью. Поступающие под интегралы правых частей приближения искомого решения получаются путем к.-л. вида интерполяции по отдельным, ранее вычисленным

значениям. Если, в частности,  $k(x, y) \approx \sum_{i=1}^m A_i(x) B_i(y)$ , то для ур-ния (1) получают ф-лу последовательных приближений  $c_{r,i} = \int_a^b B_i(y) [f(y) + \sum_{j=1}^m c_{r-1,j} A_j(y)] dy$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , для значений, а не для ф-ций, что позволяет упростить вычисл. аппаратуру. На каждом шаге итерации одновременно определяют очередное приближение  $\varphi_r(x) = f(x) + \sum_{j=1}^m c_{r-1,j} A_j(x)$  искомого решения  $\varphi(x)$ . Для (3) замена ядра вырожденным позволяет получить приближенное решение  $\tilde{\varphi}(x)$  из ур-ния

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^m A_i(x) \int_a^x B_i(y) \tilde{\varphi}(y) dy + f(x), \quad (14)$$

которое решают в течение интервала времени  $[a, x]$  беспойсковым путем, т. е. путем построения электронного аналога ур-ния (14) и измерения в нем напряжения  $\tilde{\varphi}(x)$ . Реализуя метод конечных разностей, систему (11) при небольшом  $m_0$  (15—20) можно эффективно решать на АВМ в тех случаях, когда задано одно и то же ур-ние при различных правых частях  $f(x)$ . Вариационные методы позволяют простыми средствами реализовать процесс минимизации невязок (8) при аппроксимации (7) с небольшим числом (до 4—6) координатных ф-ций. В комбинации с заменой ядра вырожденным получают эффективные алгоритмы, состоящие в минимизации невязок

$$\mu_{r,i} = c_{r,i} - \int_a^b B_i(y) \left[ f(y) + \sum_{j=1}^m c_{r-1,j} A_j(y) \right] dy$$

различными способами и в различных метриках.

Использование АВМ расширяет возможность машинных методов при решении ур-ний (3) и (4) в частном, но важном случае, когда ядро зависит от разности аргументов. Тогда ур-ния

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x-y) \varphi(y) dy, \quad (15)$$

$$\int_a^x k(x-y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (16)$$

при обычных ограничениях решают беспойсковым путем за время  $[a, x]$ . В некоторых случаях необходимо из условий воспроизводимости на АВМ аппроксимировать разностное ядро другим  $k(x-y) \approx \tilde{k}(x-y)$ , которому соответствует приближенное решение  $\tilde{\varphi}(x)$ . Аппроксимацию можно проводить как расчетным

путем, так и подбирая параметры решающих блоков. При этом надо учитывать возможную некорректность задачи решения ур-ния (16) с приближенными данными. Рассмотренные методы с небольшими видоизменениями могут быть применены для решения многомерных линейных интегральных ур-ний указанного типа и систем таких ур-ний. О решении особых линейных интегральных ур-ний см. *Интегральные линейные сингулярные уравнений способы решения.*

Лит.: Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*. М., 1959 [библиогр. с. 671—680]; Канторович Л. В., Крылов В. И. *Приближенные методы высшего анализа*. М.—Л., 1962 [библиогр. с. 698—708]; Положий Г. Н., Чаленко П. И. *Решение интегральных уравнений методом полюсов*. В кн.: *Вопросы математической физики и теории функций*, ч. 1. К., 1964; Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. *Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*. М., 1965 [библиогр. с. 373—379]; Емельянов К. В., Ильин А. М. *О числе арифметических действий, необходимом для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода*. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1967, т. 7, № 4.

А. Ф. Верлань, В. В. Иванов, П. И. Чаленко.  
**ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ.** Задача отыскания решения нелинейного интегр. ур-ния (н. и. у.) продолжает оставаться одной из сложных задач *вычислительной математики*. Среди наиболее распространенных в практике н. и. у. и их систем многие являются частными случаями ур-ния типа Урысона (см. *Интегральные уравнения*)

$$x(s) = \lambda \int_{\Omega} K[s, t, x(t)] dt, \quad s \in \Omega, \quad (1)$$

где  $x(s)$  — неизвестная ф-ция,  $\lambda$  — числовой параметр,  $\Omega$  — ограниченная замкнутая область в  $n$ -мерном евклидовом простр. (см. *Пространство абстрактное в функциональном анализе*),  $K(s, t, x)$  — заданная ф-ция. Его решение, как правило, может быть найдено только приближенно. Рассмотрим методы решения ур-ний этого типа.

Метод неопределенных коэффициентов состоит в том, что если в ур-нии (1) ф-ция  $K(s, t, x)$  может быть представлена рядом

$$K(s, t, x) = \sum_{p=0}^{\infty} K_p(s, t) x^p, \quad (2)$$

где ф-ции  $K_p(s, t)$  непрерывны, то искать решение ур-ния (1) можно в виде степенного ряда

$$x(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} x^{(1,n)}(s). \quad (3)$$

Подставим этот ряд в ур-ние (1), воспользовавшись разложением (2), а также рядом для  $x^p(t)$  вида

$$x^p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+p} x^{(p,n)}(t),$$

коэфф. которого определены рекуррентно ( $x^p = x \cdot x^{p-1}$ ),

$$x^{(p,n)}(t) = \sum_{q=0}^n x^{(1,q)}(t) x^{(p-1,n-q)}(t). \quad (4)$$

Приравнявая коэфф. при одинаковых степенях  $\lambda$ , получаем ф-лы для последовательного нахождения коэфф. ряда (3)

$$x^{(1,0)}(s) = \int_{\Omega} K_0(s, t) dt,$$

$$x^{(1,n)}(s) = \int_{\Omega} \sum_{p=1}^n K_p(s, t) x^{(p,n-p)}(t) dt, \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

( $x^{(p,n-p)}(t)$  находятся из соотношений (4)). Ряд (3) при определенных условиях — сходящийся. Напр., при выполнении условий

$$\left| \int_{\Omega} K_0(s, t) dt \right| \leq B, \quad \int_{\Omega} |K_p(s, t)| dt \leq \frac{B}{r^p},$$

$$p = 1, 2, 3, \dots, \quad s \in \Omega,$$

где  $B$  и  $r$  — постоянные, интегр. ур-ние (1) имеет в круге  $|\lambda| < \frac{r}{4B}$  единственное решение, которое можно представить рядом (3), сходящимся регулярно. Быстрота сходимости характеризуется оценкой ( $k \rightarrow +\infty$ )

$$|x(s) - x_k(s)| = O(k^{-\frac{3}{2}} \gamma^{k+1}), \quad s \in \Omega,$$

$$\text{где } \gamma = |\lambda| \frac{4B}{r}.$$

$$x_k(s) = \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{n+1} x^{(1,n)}(s). \quad (5)$$

За пригл. решение ур-ния (1) принимают частичную сумму вида (5). Погрешность такого решения может быть априорно оценена с помощью неравенства

$$|x(s) - x_k(s)| \leq \frac{r}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \gamma} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n! (n+1)!} \gamma^{n+1} \right), \quad s \in \Omega.$$

В методе последовательных приближений выбираем к.-л. способом начальное приближение  $x_0(s)$  к искомому решению ур-ния (1) и строим итерационный процесс вида

$$x_n(s) = \int_{\Omega} K[s, t, x_{n-1}(t)] dt, \quad (6) \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

Если известно, что последовательные приближения (6) сойдутся к решению ур-ния (1), то

остановив процесс на конечном шаге, мы получим прил. решение данного ур-ния.

Приведем один из результатов о сходимости процесса (6). Пусть ф-ция  $K(s, t, x)$  непрерывна вместе с производной  $K'_x(s, t, x)$  по совокупности переменных  $s, t \in \Omega, |x| \leq \rho$ , и пусть

$$\begin{aligned} |\lambda| \int_{\Omega} \sup_x |K(s, t, x)| dt &\leq \rho, \\ |\lambda| \int_{\Omega} \sup_x |K'_x(s, t, x)| dt &\leq \alpha, \\ s \in \Omega, |x| &\leq \rho, \end{aligned}$$

где  $\alpha < 1$ . Тогда при любой непрерывной ф-ции  $x_0(s)$  из области

$$|x| \leq \rho, s \in \Omega, \quad (7)$$

последовательные приближения (6) сходятся равномерно к непрерывному решению  $x^*(s)$  ур-ния (1), которое расположено в области (7) и единственно в этой области. Быстрота сходимости определяется неравенством

$$\begin{aligned} |x^*(s) - x_n(s)| &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \sup_s |x_1(s) - \\ &- x_0(s)|, s \in \Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

При  $n > 1$  неравенство (8) дает априорную оценку погрешности  $n$ -го приближения. Апостериорная и, вообще говоря, более точная оценка имеет вид

$$|x^*(s) - x_n(s)| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \sup_s |x_n(s) - x_{n-1}(s)|, s \in \Omega.$$

Трудности в вычислении квадратур, возникающие при реализации процесса (6), могут быть преодолены привлечением способов прил. интегрирования. Обобщением процесса (6) является алгоритм осреднения функциональных поправок.

Аналог метода Ньютона решения алгебр. ур-ний является одним из эффективных методов решения н. и. у. (1). Введем итерационный процесс ( $\lambda = 1$ ):

$$\begin{aligned} x_n(s) &= x_{n-1}(s) + \Delta_{n-1}(s), \\ n &= 1, 2, 3, \dots, \\ \Delta_{n-1}(s) &= \varepsilon_{n-1}(s) + \\ &+ \int_{\Omega} K'_x[s, t, x_{n-1}(t)] \Delta_{n-1}(t) dt, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\varepsilon_{n-1}(s) = \int_{\Omega} K[s, t, x_{n-1}(t)] dt - x_{n-1}(s)$ ,

предложенный сов. математиком Л. В. Канторовичем и имеющий сверхбыструю сходимость второго порядка. Здесь на каждом шаге относительно поправки  $\Delta_{n-1}(s)$  решается линейное интегр. ур-ние (см. *Интегральных линейных уравнений способы решения*). Если

ф-ция  $K(s, t, x)$  непрерывна вместе с производными  $K'_x(s, t, x)$  и  $K''_{xx}(s, t, x)$  по совокупности переменных  $s, t \in \Omega, |x - x_0(t)| \leq \rho$  и выполнены условия:

а) для начального приближения  $x_0(t)$  ядро  $K'_x[s, t, x_0(t)]$  имеет резольвенту  $\Gamma(s, t)$ , причем  $\int_{\Omega} |\Gamma(s, t)| dt \leq B, s \in \Omega$ ;

б) невязка  $\varepsilon_0(s)$  ур-ния (1) на приближении  $x_0(t)$  удовлетворяет неравенству  $|\varepsilon_0(s)| = |\int_{\Omega} K[s, t, x_0(t)] dt - x_0(s)| \leq \eta, s \in \Omega$ ;

в) в области  $|x - x_0(t)| \leq 2(1 + B)\eta \leq \rho, t \in \Omega$ , имеем  $\int_{\Omega} \sup_x |K''_{xx}(s, t, x)| dt \leq K, s \in \Omega$ ;

г) постоянные  $B, \eta$  и  $K$  подчинены условию  $h = (1 + B)^2 K \eta \leq \frac{1}{2}$ , процесс Ньютона —

Канторовича (9) сходится при этом равномерно к решению  $x^*(s)$  ур-ния (1), расположенному в области

$$|x - x_0(s)| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} (1 + B) \eta, \quad s \in \Omega, \quad (10)$$

и единственному в области  $|x - x_0(s)| \leq 2(1 + B)\eta, s \in \Omega$ . Быстрота сходимости определяется оценкой

$$|x^*(s) - x_n(s)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{2^{n-1}} (1 + B) \eta, \quad s \in \Omega. \quad (11)$$

Такие утверждения, помимо установления сходимости алгоритма, представляют собой теоремы о существовании, области расположения и области единственности решения н. и. у. Отыскание начального приближения  $x_0(s)$ , удовлетворяющего указанным условиям и представляющего грубо прил. решение ур-ния (1), является самостоятельной задачей, для решения которой общие рецепты не могут быть даны. Выбор того или иного способа получения  $x_0(s)$  диктуется видом ур-ния (1) или характером изучаемой проблемы. Если требуемое  $x_0(s)$  найдено, то высокая скорость сходимости процесса (9) обеспечивает получение прил. решения ур-ния (1) с достаточной для практики точностью после небольшого к-ва итерационных шагов. Априорная оценка погрешности приближения  $x_n(s)$  может быть подсчитана по ф-ле (11). Более точную, апостериорную оценку даст неравенство (10) ( $x = x^*(s)$ ), если во всех соответствующих выражениях заменить  $x_0(t)$  на  $x_n(t)$  и пересчитать соответствующие постоянные.

Другим эффективным методом решения н. и. у. является аналог метода Эйткена — Стеффенсена решения



алгебр. ур-ний. Введем итерационный процесс ( $\lambda = 1$ ):

$$\begin{aligned} x_n(s) &= x_{n-1}(s) + \Delta_{n-1}(s), & (12) \\ n &= 1, 2, 3, \dots, \\ \Delta_{n-1}(s) &= \varepsilon_{n-1}(s) + \\ &+ \int_{\Omega} \frac{K[s, t, \bar{x}_{n-1}(t)] - K[s, t, x_{n-1}(t)]}{\bar{x}_{n-1}(t) - x_{n-1}(t)} \times \\ &\times \Delta_{n-1}(t) dt, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_{n-1}(s) = \bar{x}_{n-1}(s) - x_{n-1}(s)$ .  $\bar{x}_{n-1}(s) = \int_{\Omega} K[s, t, x_{n-1}(t)] dt$ . Теоремы сходимости этого метода по общей идее представляют видоизменения соответствующих теорем для метода Ньютона. Алгоритм (12) имеет сверхбыструю сходимость второго порядка, но не требует вычисления на каждом итерационном шаге производной  $K'_x[s, t, x_{n-1}(t)]$ . При этом, будучи основан на идее интерполирования, он иногда фактически сходится быстрее алгоритма Ньютона.

Метод кубатурных формул позволяет при решении н. и. у. (1) заранее избежать точного вычисления квадратур и необходимости решать линейные интегр. ур-ния. Для этого пользуются методом замены интеграла в самом ур-нии конечной суммой по какой-либо кубатурной ф-ле. Пусть для простоты ур-ние (1) одномерное

$$x(s) = \lambda \int_a^b K[s, t, x(t)] dt, \quad s \in [a, b], \quad (13)$$

где ф-ция  $K(s, t, x)$  непрерывна по совокупности переменных. Возьмем квадратурную ф-лу

$$\int_a^b F(t) dt = \sum_{j=1}^m A_j F(t_j) + R, \quad (14)$$

где узлы  $t_j \in [a, b]$ . Пользуясь этой ф-лой, ур-ние (1) запишем в виде

$$x(s) = \lambda \sum_{j=1}^m A_j K(s, t_j, x_j) + \lambda R(s), \quad (15)$$

где  $x_j = x(t_j)$ ,  $R(s) = \int_a^b K[s, t, x(t)] dt - \sum_{j=1}^m A_j K(s, t_j, x_j)$ ; ( $x(t)$  — точное решение ур-ния).

Полагая в ур-нии (15)  $s = t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , получаем

$$\begin{aligned} x_i &= \lambda \sum_{j=1}^m A_j K(t_i, t_j, x_j) + \lambda R(t_i), & (16) \\ i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Отбросив здесь малую величину  $\lambda R(t_i)$ , приходим к нелинейной системе

$$\tilde{x}_i = \lambda \sum_{j=1}^m A_j K(t_i, t_j, \tilde{x}_j), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (17)$$

Ее неизвестные  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$  принимаются за прибр. значения искомого решения  $x(s)$  в узлах квадратурной ф-лы. Дальнейшая задача состоит в решении системы (17), для чего могут быть использованы все известные способы решения систем нелинейных алгебр. ур-ний. Затем, когда численное решение ур-ния (1) найдено, его можно проинтерполировать (см. *Интерполирование функций*) на весь промежуток  $[a, b]$ , исходя из равенства (15), отбросив в нем  $\lambda R(s)$  и заменив  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  решением системы (17). В результате получаем прибр. решение ур-ния (1)

$$\tilde{x}(s) = \lambda \sum_{j=1}^m A_j K(s, t_j, \tilde{x}_j). \quad (18)$$

Если (14) — обобщенная квадратурная ф-ла с шагом  $h$  и равноотстоящими узлами, то некоторое представление о погрешности решения системы (17), вызванной отбрасыванием в системе (16) величины  $\lambda R(t_i)$  можно получить, сравнивая это решение с аналогичным решением для шага  $\frac{h}{2}$  в совпадающих узлах.

Получена также и строгая апостериорная оценка погр. решения ур-ния (18) для случая произвольной квадратурной ф-лы. Изложенные методы пригодны также для ур-ний с переменным пределом интегрирования, т. е. для нелинейных ур-ний Вольтерры, и их можно реализовать на ЦВМ.

Для многих типов одномерных интегр. ур-ний эффективными средствами решения являются аналоговые и гибридные вычисл. машины (АВМ и ГВМ). Напр., для ур-ния  $x(s) = f(s) + \int_a^b K(s, t) F[x(t)] dt$  при замене

$K(s, t) \approx \sum_{i=1}^m A_i(s) B_i(t)$  процесс поиска решения состоит в минимизации к.-л. нормы для суммы невязок  $\mu_{k_i} = c_{k_i} - \int_a^b B_i(t) F\left[f(t) + \sum_{j=1}^m c_{k-1,j} A_j(t)\right] dt$  ( $k = 1, 2, \dots$  — номер

приближения). Каждое приближение воспроизводится автоматически в течение интервала времени  $[a, b]$  на каждом шаге минимизации. Удобство воспроизведения нелинейных зависимостей и многочленов на АВМ и ГВМ позволяет реализовать многие алгоритмы *вариационных методов* для достаточно сложных н. и. у. При этом независимая переменная представляется временем  $[a, b]$ , обеспечивается перио-

дическое воспроизведение минимизируемого функционала, а процесс минимизации можно автоматизировать или поручить оператору, который управляет свободными параметрами, наблюдая за поведением минимизируемого функционала по осциллографу. Ур-ние Вольтерры с вырожденными и разностными ядрами решают неалгоритмически, путем построения их электронных моделей-аналогов и измерения напряжений, изменяющихся во времени по закону  $x(t)$ . При решении нелинейных ур-ний Вольтерры с ядром общего вида модели-

руется оператор вида  $\int_a^{x_i} K(s_i, t) F[x(t)] dt$ ,

что дает возможность реализовать метод последовательных приближений с небольшой затратой аппаратуры или получить прикл. решение в виде кусочно-ломаной ф-ции путем непосредственного аналого-дискретного моделирования с использованием интеграторов в к-ве, равном к-ву отрезков  $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$  дискретизации.

Лит.: Назаров Н. Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна. «Труды Среднеазиатского университета. Серия 5-а. Математика», 1941, в. 33; Мысовских И. П. О сходимости метода Л. В. Канторовича для решения нелинейных функциональных уравнений и его применениях. «Вестник Ленинградского университета. Серия математики, физики и химии», 1953, № 11, в. 4; Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959 [библиогр. с. 671—680]; Мысовских И. П. О методе механических квадратур для решения интегральных уравнений. «Вестник Ленинградского университета. Серия математики и астрономии», 1962, № 7, в. 2; Ульм С. Алгоритмы обобщенного метода Стеффенсена. «Известия АН Эстонской ССР. Серия физико-математических и технических наук», 1965, № 3; Бельтюков Б. А. Аналог метода Рунге—Кутты для решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра. «Дифференциальные уравнения», 1965, т. 1, № 4; Бельтюков Б. А. Об одном методе решения нелинейных функциональных уравнений. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1965, т. 5, № 5; Соколов Ю. Д. Метод осреднения функциональных поправок. К., 1967 [библиогр. с. 327—328]; Забрейко П. П. [и др.]. Интегральные уравнения. М., 1968 [библиогр. с. 432—444]; Красносельский М. А. [и др.]. Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969 [библиогр. с. 437—452]; Верлань А. Ф. Методы решения интегральных уравнений на аналоговых вычислительных машинах. К., 1972 [библиогр. с. 211—217].

Б. А. Бельтюков, А. Ф. Верлань.

**ИНТЕГРАТОР** — см. Устройство интегрирующее.

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИМВОЛЬНОЕ**, интегрирование аналитическое — нахождение первообразной функции, если ее можно записать в аналитическом виде. Методы И. с. впервые были опубликованы в работах И. Ньютона (1643—1727), Г.-В. Лейбница (1646—1716). Дальнейшее развитие эти методы получили в работах Л. Эйлера (1707—83), В. П. Остроградского (1801—62), Ш. Эрмита (1822—1901) и др. Процесс интегрирования, основанный на этих методах, не является однозначным и рассчитан на использование эвристических способностей человека.

Появление развитых алгоритмических языков и ЦВМ с большими возможностями по символьным преобразованиям дало возмож-

ность в 60-х гг. 20 ст. приступить к созданию больших универсальных программ И. с. Эти программы носят эвристический характер. Целью их создания является изучение вопросов, связанных с проблемой «искусственного интеллекта», а также практическое использование при решении ряда задач, требующих интегрирования вблизи полюсов и интегрирования быстроосциллирующих ф-ций. Эти программы применяют при использовании асимптотических методов, а также в тех случаях, когда необходимо получить общее решение, зависящее от буквенных параметров.

Программа SAINT, созданная на основе тех же принципов, что и широко известная программа «Логик-теоретик», является попыткой при решении задачи И. с. моделировать человеческий образ мышления. Программа использует таблицу из 26 стандартных форм для получения непосредственного решения. Если интеграл не табличный, то делается попытка привести его к табличному виду с помощью одного из 18 предусмотренных в программе преобразований. К числу таких преобразований относятся преобразования вида

$$\int (F(x) + \varphi(x)) dx = \int F(x) dx + \int \varphi(x) dx$$

и т. п., а также различные подстановки. Перестрой применяемых преобразований осуществляется эвристически в соответствии с таблицей признаков (характеристикой), составленной для каждого вида интегрируемого выражения. После преобразования опять делают попытку применить таблицу. Эта программа была написана на языке ЛИСП и реализована на машине «IBM-7090».

Программа SIN, созданная в 1967, была написана также на языке ЛИСП, но для работы на машине «IBM-7094». Эта программа состоит из трех уровней. Первые два уровня предусматривают применение таблицы и ряда эвристических преобразований, среди которых важнейшую роль играют подстановки  $u = u(x)$  для интеграла вида

$$\int F(u(x)) u'(x) dx, \quad (1)$$

где  $F$  — одна из тригонометрических ф-ций, а  $u(x)$  — произвольная ф-ция. Ко второму уровню относятся также интегрирование по частям. Если первый или второй уровень к успеху не приводит, то с помощью подставок

$$\text{Эйлера } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

или подстановки  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  и других делают попытку преобразовать трансцендентные подынтегральные выражения к дробно-рациональному виду. После этого используют метод Остроградского для выделения рациональной части. В последних вариантах программы для этой цели использовали также алгоритм Ритча. Процедура И. с. была использована как составная часть внутреннего матем. обеспечения машины «МИР-2» с входным языком АНАЛИТИК. Процедура (программа) разделена

на три уровня. Первый уровень содержит таблицу из десяти табличных интегралов. Вследствие свойств языка АНАЛИТИК эта таблица является весьма емкой, т. к. содержит очень общие формы, такие как  $\int x^k e^{ax} \times \sin b x dx$ . Такие формы применяют и в вырожденных случаях, когда параметры равны 0 или 1. В этом случае машина автоматически производит упрощение громоздких правых частей. Второй уровень программы предусматривает использование тождественных преобразований и применение различных подстановок. Центр. роль при этом играет преобразование выражений к виду (1). Однако ф-ция  $F$  является произвольной. Третий уровень предусматривает применение различных тождественных преобразований, увеличивающих однозначность записи подынтегральных выражений. К ним относятся тождества

$$\text{вида } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \text{ уничтожение}$$

иррациональности в знаменателе и т. п. Эти преобразования не носят принципиального характера, однако значительно увеличивают вероятность успеха при интегрировании.

При решении практических задач, требующих массового интегрирования на машине «Мир-2», применяют специализированные программы, рассчитанные на быстрое интегрирование соответствующих классов интегралов. Лит.: Фишман Ю. С. Интегрирование функций на машине, выполняющей аналитические преобразования. «Теория автоматов и методы формализованного синтеза вычислительных машин и систем», 1968, в. 2; Слэйд Дж. Д. Эвристическая программа, решающая задачи символического интегрирования в объеме первого курса университета. В кн.: Вычислительные машины и мышление. Пер. с англ. М., 1967.

Ю. С. Фишман.  
**ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЕ** — см.

*Интегралов способы вычисления.*

**ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ** — класс уравнений в математике. См. *Уравнений классификация.*

**ИНТЕНСИВНОСТЬ ПОТОКА** в теории массового обслуживания — математическое ожидание числа событий из стационарного потока однородных событий, наступивших за единицу времени. В случае нестационарных потоков мгновенную И. п. определяют равенством  $\mu(t) = \lim_{s \downarrow t} \frac{\mu(t, s)}{s - t}$ ,

где  $\mu(t, s)$  — матем. ожидания числа событий, наступивших за промежуток времени  $(t, s)$ . Для любого стационарного потока с конечной интенсивностью  $\mu < \infty$  необходимым и достаточным условием ординарности этого потока является равенство  $\lambda = \mu$ , где  $\lambda$  — параметр потока (теорема В. С. Королюка). Среди стационарных потоков без последовательности только простейшие потоки удовлетворяют этому условию. См. также *Поток случайный.*

С. М. Броди.  
**«ИНТЕРНЭЙШЕНАЛ БИЗНЕС МАШИНЗ КОРПОРЕЙШЕН»**, ИБМ (International Business Machines Corporation, IBM) — самая крупная в мире корпорация по разработке,

производству и сбыту электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ), внешних устройств и систем обработки данных. Основана в 1911, нынешнее название имеет с 1924. Науч. исследования и разработки проводятся в 30 лабораториях корпорации (в США и за границей), 16 ее заводов выпускают вычисл. машины и системы, устройства, оборудование и элементы. В 1970 корпорация структурно состояла из 11 крупных подразделений — отделов. Вычисл. устройства ИБМ начала создавать в 1929. В 1944 инженеры корпорации совместно с учеными Гарвардского ун-та создали первую в мире автомат. электромех. вычисл. машину «Mark-1», в 1948 ИБМ выпустила первую серийную электронную машину «IBM-604», в 1949 — разработала состоящую из двух машин первую *вычислительную систему* с программой на перфокартах; в 1952 создала систему обработки данных «IBM-701», а в 1954 — «IBM-650», получившую широкое применение в промышленности. В 1956 корпорация выпустила машину «IBM-704» с запоминающим устройством на магн. сердечниках на 32 тыс. слов, а в 1960 — полупроводниковую ЭЦВМ известной 7000-й серии — «IBM-7090», быстродействие которой возросло в 5 раз по сравнению с аналогичными ламповыми машинами. В 1965 ИБМ выпустила первую модель семейства вычисл. систем «IBM-360», положивших начало *электронным вычислительным машинам* 3-го поколения. Логич. структура этих систем послужила основой для разработки в 1967 семейства бортовых машин «4 Pi» (на *интегральных схемах*).

В таблице приведены основные тех. данные наиболее известных серийных машин, выпускаемых ИБМ (в нее не включены данные по уникальным машинам и системам, таким как система управления на космодроме в Хьюстоне, бортовая вычисл. машина космического корабля «Джеминай» и др., и по десяткам систем стратегического назначения).

Лит.: Зейденберг В. К., Матвеев Н. А., Тароватова Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1969 г. М., 1970. П. В. Походило.

**«ИНТЕРНЭЙШЕНАЛ КОМПЬЮТЕРЗ ЛИМИТЕД»** (International Computers Limited, I. C. L.) — ведущая английская фирма по выпуску ЭЦВМ и периферийного оборудования к ним. Создана в 1968. При разработке новых ЭЦВМ научно-исследовательские лаборатории фирмы тесно сотрудничают с Манчестерским ун-том. С 1965 выпускает серию совместимых машин на интегральных схемах «System 4». С 1964 выпускает семейство ЭЦВМ «ICL 1900 Series» (с 1968 начат выпуск этой серии машин на интегральных схемах — «ICL 1900A Series»). В 1969 начат выпуск машины серии 1900 A на интегр. схемах модели «ICL 1906 A» с быстродействием порядка миллиона операций в 1 сек (объем ЗУ на магн. сердечниках до 524 тыс. 24-разрядных слов с возможным наращиванием до 4196 тыс. слов и с временем цикла до 0,75 мксек; ЗУ на магнитных барабанах емкостью до  $8 \times 2$  млн. знаков); время выполнения арифм. операций: сложение и

## Основные характеристики наиболее известных машин фирмы ИБМ

Название	Дата изготовления	Основные элементы	Время сложения/умножения, мксек	Тип и емкость ОЗУ тыс. слов	Средний цикл, мксек	Ввод — вывод	Максимальная емкость внешнего ЗУ с произвольной выборкой, млн. десятичных знаков
IBM-603	1948	лампы	500/	триггеры		перфокарты	
IBM-701	1952	»		электронно-лучевые трубки 2	12	перфокарты, перфоленты, печ. устр-во	
IBM-650	1954	»	700/	барабаны 1—4 магн. сердечники 60	4800 100	перфокарты, перфоленты, печ. устр-во	48 (диски)
IBM-705-III	1956	»	86/	сердечники 20—80	9	перфокарты, печ. устр-во	
IBM-704	1956	»	12/228 фикс., 72/192 плав.	сердечники 4—32 барабаны 4—16	12	перфокарты, печ. устр-во, экран индикатора	
IBM-303 RAMAC модель I	1957	»	30 000/	сердечники 0,1 барабаны 2	10 000	перфокарты, перфолента, печ. устр-во	5—40
IBM-709	1958	»	24/	сердечники 4—32 барабаны 4—16	12 7000	перфокарты, печ. устр-во, экран индикатора	
IBM-1620	1959	транзисторы	560/	сердечники 20—100	20	перфокарты, перфолента	10
IBM-7090	1960	»	4,4/4,4 — 30,5	сердечники 32	2,2	перфокарты, печ. устр-во	234 (диски) 0,83 (барабаны)
IBM-1401	1960	»	230/	сердечники 1,4—4	11,5	перфокарты, печ. устр-во	
IBM-7030 STRETCH	1961	»	1,5/	сердечники 16—262	2,2	перфокарты, печ. устр-во	710 (перфок.) 256 (блоков магн. лент)
IBM-7072	1962	»	12/64	сердечники 5—30	6	перфокарты	
IBM-7044	1963	»	5/22,5—33	сердечники 8—32	2,5	перфокарты, перфоленты, печ. устр-во	0,73 (барабаны) 234 (диски) 50 (блоков лент)
IBM-7700	1964	»	6/	сердечники 16—49	2	перфокарты	
IBM-1130	1965	транзисторы	8/	сердечники 3	3,6	перфокарты, перфоленты, печ. устр-во, графопостроитель	150 (диски)
IBM-1800	1966	»	10/	сердечники 4—32	2	перфокарты, перфоленты, печ. устр-во	75 (диски)
IBM-4Pi	1967	»	5—10/29,6 — 34,6	8—32	2,5 (время выборки из ОЗУ)		
IBM-360 * модель 85	1969	транзисторы, интегральные схемы	0,016/0,5	сердечники 4—6, тонкие пленки 1	1	перфокарты, перфоленты, печ. устр-во	
IBM-370 модель 135	1972	транзисторы, интегральные схемы	4/	сердечники 96—240		перфокарты, перфоленты, печ. устр-во	

\* Характеристики систем «IBM-360» см. в ст. «IBM-360».

вычитание—0,9 мксек; умножение—2,6 мксек; деление — 7 мксек.

В 1971 фирма (совместно с Манчестерским ун-том) разработала ЭЦВМ «MU-5», уступающую по мощности только амер. «CDC-7600» (среднее время выполнения команды — около 0,1 мксек).

Лит.: И н ъ к о в Ю. И. Электронная вычислительная техника и капиталистическая экономика. М., 1968; Зейденберг В. К., Матвеев Н. А., Тароватова Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М., 1970. С. Ф. Козубовский.

**ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА** — одна из задач *предсказания случайных процессов теории*. Линейное И. с. п.  $\xi(t)$

состоит в построении оценки  $\tilde{\xi}(\tau)$  значения процесса  $\xi(t)$  в момент времени  $\tau$  ( $0 < \tau < T$ ), которая линейно выражается через наблюдения  $\xi(t)$  при  $t \leq 0$  и  $t \geq T$ . При этом обычно ищут оценку  $\tilde{\xi}(\tau)$ , для которых среднеквадратическая погрешность  $\sigma^2(\tau) =$

$= M [\xi(\tau) - \tilde{\xi}(\tau)]^2$  минимальна. Явные ф-лы для решения задачи И. с. п. получены для стационарных случайных процессов с дробно-рациональной спектральной плотностью. Напр., если спектральная плотность процесса  $\xi(t)$  равна  $f(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2 + \alpha^2}$ , то  $\tilde{\xi}(\tau) = \frac{1}{\text{sh } \alpha T} \times$

$\times \{\xi(0) \text{sh } \alpha(T - \tau) + \xi(T) \text{sh } \alpha\tau\}$ . Впервые задачу линейного И. с. п. для стационарной последовательности  $\xi_n$  со спектральной плотностью  $f(\lambda)$ , наблюдающейся при всех  $n$ , кроме  $n = 0$ , рассмотрел сов. матем. А. Н. Колмогоров. Оказалось, что среднеквадратическая погрешность интерполирования  $\xi_0$

равна  $\sigma^2 = 2\pi \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} \right]^{-1}$  (в частности, интер-

полирование безошибочно, если  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} = +\infty$ ).

М. И. Ядренко.

**ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ** — приближенная замена функции  $f(x)$ , заданной на всем отрезке  $[a, b]$  или, во всяком случае, в отдельных его точках  $x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , функцией  $F(x)$  некоторого класса, значения которой в точках  $x_j$  совпадают с соответствующими значениями функции  $f(x)$ . Точки  $x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , наз. узлами интерполирования (у. и.), а  $F(x)$  — интерполирующей ф-цией. В некоторых случаях требуют, чтобы заданные значения в у. и. принимала не только интерполирующая ф-ция, но и ее производные.

В вычисл. практике применяют интерполирование, когда оперируют с ф-циями  $f(x)$ , заданными в конечном к-ве точек  $x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  отрезка  $[a, b]$ , а необходимо узнать  $f(x)$  для промежуточных значений аргумента. Иногда для  $f(x)$  известно и аналитическое представление, однако определение каждого значения ее сопряжено с большим объемом вычислений.

В этом случае при нахождении значений ф-ции для многих значений аргумента также применяют интерполирование, т. е. по нескольким вычисленным значениям  $f(x_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , строят простую интерполирующую ф-цию, с помощью которой и вычисляют прил. значения  $f(x)$  в остальных точках.

Обычно  $F(x)$  отыскивают в виде обобщенного многочлена

$$F(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x), \quad (1)$$

где  $\varphi_i(x)$  — линейно независимая на  $[a, b]$  система ф-ций и  $c_i$  — действительные коэфф. Построение конкретной интерполирующей ф-ции  $F(x)$  для  $f(x)$  сводится к отысканию  $c_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , из условий

$$\sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x_k) = f(x_k), \quad (2)$$

$$k = 0, 1, \dots, n.$$

Обобщенный многочлен, обладающий свойством (2), наз. обобщенным интерполяционным многочленом для  $f(x)$  по заданной системе узлов. Определитель  $\Delta$  системы (2) отличный от нуля при любом выборе попарно различных точек  $x_j$  отрезка  $[a, b]$ , если система ф-ций  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  является системой Чебышева на  $[a, b]$ , т. е. если любой обобщенный многочлен (1), у которого хотя бы один из коэфф. отличен от нуля, имеет на  $[a, b]$  не более  $n$  нулей. Из этого следует существование и единственность обобщенного интерполяционного многочлена (и. м.)

$$F(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta_i}{\Delta} \varphi_i(x). \quad (3)$$

где  $\Delta_i$  — определитель, получающийся из  $\Delta$  заменой  $i$ -го столбца столбцом свободных членов системы (2). Если разложить  $\Delta_i$  по эле-

ментам  $i$ -го столбца ( $\Delta_i = \sum_{j=0}^n f(x_j) \Delta_{ji}$ , где

$\Delta_{ji}$  — алгебр. дополнения элементов  $i$ -го столбца определителя  $\Delta$ ), то обобщенный и. м. (3) принимает вид

$$F(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \sum_{k=0}^n \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \varphi_k(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^n f(x_j) \Phi_j(x),$$

где  $\Phi_j(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \varphi_k(x)$  — обобщенные мно-

гочлены, не зависящие от  $f(x)$ , целиком определяющиеся выбором системы у. и. Из выполнения условий (2) следует, что

$$\Phi_j(x_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq k. \\ 1, & \text{если } j = k. \end{cases} \quad (4)$$

Чаще всего на практике применяют интерполирование алгебр. многочленами (параболическое интерполирование), т. е. многочленами по системе ф-ций  $1, x, x^2, \dots, x^n$ . Такой способ приближения основан на гипотезе, говорящей о том, что на небольших отрезках изменения  $x$  ф-цию  $f(x)$  можно достаточно хорошо приблизить с помощью параболы некоторого порядка, аналитическим выражением которой и является алгебр. многочлен. Система ф-ций  $1, x, x^2, \dots, x^n$  представляет собой систему Чебышева и потому и. м. существует и он единственный. Для его построения нужно прежде всего найти многочлен, который принимает в одной узловой точке значение 1, а во всех остальных — 0. Таким свойством обладает многочлен

$$\Phi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)};$$

он равен 1, если  $x = x_i$ , и 0, когда  $x = x_j$ ,  $i \neq j$ ; следовательно,

$$F(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \times \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Этот многочлен наз. и. м. Лагранжа, его обозначают обычно  $L_n(x)$ . В случае равноотстоящих у. и., т. е. когда  $x_{i+1} = x_i + h$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , он имеет вид

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = (-1)^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \times \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{C_n^i f(x_i)}{t-i}.$$

где  $t = \frac{x-x_0}{h}$ ,  $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ . Если все вычисления проведены точно, то  $L_n(x)$  совпадает с  $f(x)$  в у. и. В остальных точках они, вообще говоря, будут отличаться один от другого (см. *Округления погрешностей, Погрешности вычислений теория*). Исключение представляет только случай, когда  $f(x)$  является многочленом степени не выше  $n$ . В этом случае  $f(x)$  и  $L_n(x)$  тождественно совпадают.

Вообще говоря, произвольная ф-ция  $f(x)$ , совпадая с и. м. в узлах интерполирования, может как угодно отличаться от него в ос-

тальных точках. Но если  $f(x)$  обладает на  $[a, b]$  непрерывными производными до  $n$ -го порядка и производная  $f^{(n)}(x)$  дифференцируема на  $[a, b]$ , то

$$f(x) - L_n(x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0) \times \dots (x-x_n), \quad (6)$$

где  $x_0 \leq \xi \leq x_n$ . Величина  $R_n(x)$  наз. остаточным членом интерполирования или погр. интерполирования (погр. метода). Положив  $M_{n+1} = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$ , получим

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|. \quad (6')$$

Правая часть выражения (6) для заданной ф-ции  $f(x)$  зависит только от многочлена  $\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ , который полностью определяется у. и. В некоторых случаях имеется возможность выбирать у. и. по своему усмотрению и увеличивать точность интерполирования. Так, если в качестве у. и. взять нули полинома Чебышева  $T_n(x) = \cos[n \arccos x]$ ,  $|x| \leq 1$ , то погр. интерполирования на отрезке  $[-1, 1]$  для данной ф-ции  $f(x)$  будет наименьшей. В этом случае оценка (6') примет вид

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}.$$

Если интерполирование производится на произвольном отрезке  $[a, b]$ , то его можно перевести в  $[-1, 1]$  линейной заменой переменного.

Интерполяционная ф-ла Лагранжа (5) имеет ряд недостатков. Ее построение, а также вычисления по ней требуют большой вычисл. работы. Кроме того, если известен  $L_n(x)$ , построенный по значениям в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и требуется построить  $L_{n+1}(x)$  по его значениям в  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ , то все вычисления необходимо проводить заново. В связи с этим, чтобы упростить вычисл. процесс, потребовалось видоизменить и. м. Существуют различные формы записи и. м., которые обладают теми или иными преимуществами. Простой перегруппировкой членов и. м. Лагранжа (5) можно преобразовать в и. м. Ньютона

$$L_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0; x_1) + \dots + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \times f(x_0; x_1; x_2; \dots; x_n), \quad (7)$$

$$\text{где } f(x_{i-1}; x_i; \dots; x_{i+k}) = f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) - \frac{f(x_{i-1}; x_i; \dots; x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_{i-1}}.$$

разделенные разности  $(k+1)$ -го порядка,

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$\dots f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} -$$

разделенные разности 1-го порядка. Многочлен Ньютона имеет перед многочленом Лагранжа то преимущество, что добавление новых у. и. вызывает в ф-ле (7) лишь добавление новых слагаемых без изменения первоначальных.

В случае равноотстоящих у. и. ф-ла (7) упрощается. Так, если в качестве узлов  $x_0, x_1, \dots, x_n$  взять точки  $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$ , то из интерполяционной ф-лы Ньютона (7) получим т. н. интерполяционную ф-лу Ньютона для интерполирования вперед

$$L_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f_0}{h}(x - x_0) +$$

$$+ \frac{\Delta^2 f_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots +$$

$$+ \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}),$$

где  $\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j$  — конечные разности  $k$ -го порядка,  $\Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$  — конечные разности 1-го порядка. Если в качестве у. и. выберем точки  $x_0, x_0 - h, \dots, x_0 - nh$ , то аналогично получим интерполяционную ф-лу Ньютона для интерполирования назад

$$L_n(x) = f(x_n) + \frac{\Delta f_{n-1}}{h}(x - x_n) +$$

$$+ \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2! h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots +$$

$$+ \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$

Если в качестве у. и. выберем точки  $x_0, x_0 + h, x_0 - h, \dots, x_0 + nh, x_0 - nh$  или  $x_0, x_0 - h, x_0 + h, \dots, x_0 - nh, x_0 + nh$ , то из ф-лы (7) получим интерполяционные ф-лы Гаусса для интерполирования соответственно вперед и назад; полусумма этих ф-л дает ф-лу Стирлинга. Можно указать еще целый ряд интерполяционных ф-л, но все они являются иной формой записи и. м. Лагранжа (конечно, в предположении, что в них использованы одни и те же у. и.). Однако в различных случаях применяют разные ф-лы. Это связано с тем, что обычно удобнее вести вычисления, если при интерполировании сначала используются ближайшие к  $x$  узлы, а затем постепенно подкладываются все более удаленные. При этом первые члены интерполяционных ф-л дадут основной вклад в искомую величину, а остальные будут давать лишь небольшие поправки. В соответствии с этим, напр., если  $x$

находится близко к началу отрезка интерполирования, то нужно использовать интерполяционную ф-лу Ньютона для интерполирования вперед, при  $x$  близких к концу отрезка — ф-лу Ньютона для интерполирования назад, а при интерполировании на середину отрезка — ф-лы Бесселя и Стирлинга.

Параболическое интерполирование весьма удобно: многочлены просты по форме, легко вычисляются, их легко дифференцировать и интегрировать; поэтому его применяют чаще всего. В некоторых частных случаях целесообразно использовать другие виды интерполирования. Так, если интерполируемая ф-ция  $f(x)$  — периодическая, то можно интерполирующую ф-цию  $F(x)$  искать в классе тригонометрических многочленов, если интерполируемая ф-ция обращается в бесконечность в заданных точках или вблизи них, то  $F(x)$  целесообразно искать в классе рациональных ф-ций. Наряду с отмеченными преимуществами параболическое интерполирование для равноотстоящих у. и. имеет тот существенный недостаток, что с ростом  $k$ -ва узлов погр. замены исходной ф-ции и. м. в точках между узлами не обязательно будет уменьшаться. В окрестности конца интервала интерполирования такая ошибка может возрастать даже до бесконечности. Этого недостатка не имеет тригонометрическое интерполирование: для каждой ф-ции с ограниченной вариацией интерполирующая ф-ция, полученная в виде тригонометрического многочлена по равноотстоящим узлам, неограниченно стремится к заданной ф-ции в каждой точке данного интервала, когда  $k$ -во узлов бесконечно возрастает. Это преимущество тригонометрического интерполирования делает его очень важным, т. к. при этом требование периодичности интерполируемой ф-ции не обязательно.

Широко применяют также интерполирование кусочно-аналитическими ф-циями (сплайнами). Наиболее важным представителем этого класса является, по-видимому, кубический сплайн, который на интервалах  $[x_{j-1}, x_j]$  записывается в виде  $S(x) = A_j x^3 + B_j x^2 + C_j x + D_j$ . Он является кусочно-кубической кривой, которая обладает непрерывными первой и второй производными на всем отрезке интерполирования.

На практике часто возникает задача отыскания по заданному значению ф-ции значения аргумента. Эта задача решается методом обратного интерполирования. Если заданная ф-ция монотонна, то обратное интерполирование осуществляют путем замены ф-ции аргументом и наоборот и последующего интерполирования. Если заданная ф-ция не монотонна, то записывают для нее тот или иной и. м. по заданным значениям аргумента, приравнивают его значению ф-ции и решают полученное ур-ние относительно аргумента.

Интерполяционные многочлены построены и для случая, когда требуется совпадение в у. и. не только значений интерполируемой ф-ции и и. м., но и их производных до неко-



того порядка. Исследована также задача И. ф. многих переменных, хотя она имеет ряд принципиальных трудностей по сравнению с той же задачей для ф-ций одной переменной, причем для этого случая имеется ряд результатов по опти-ции интерполяционных ф-л с целью уменьшения их погрешностей.

Лит.: Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М., 1954 [библиогр. с. 321—325]; Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963 [библиогр. с. 214—216]; Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1. М., 1966; Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. Пер. с англ. М., 1961; Алберт Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. Пер. с англ. М., 1972 [библиогр. с. 267—269, 307—309].

Л. И. Березовская, А. И. Березовский.

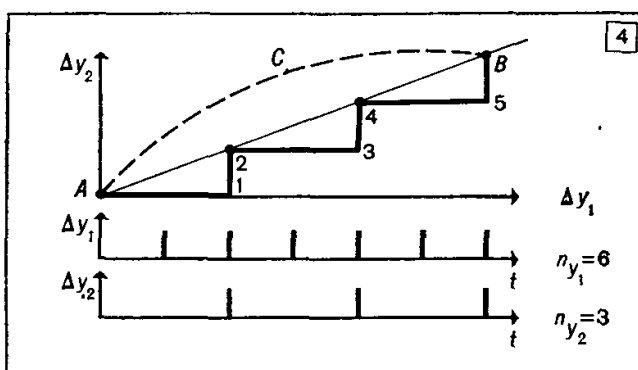
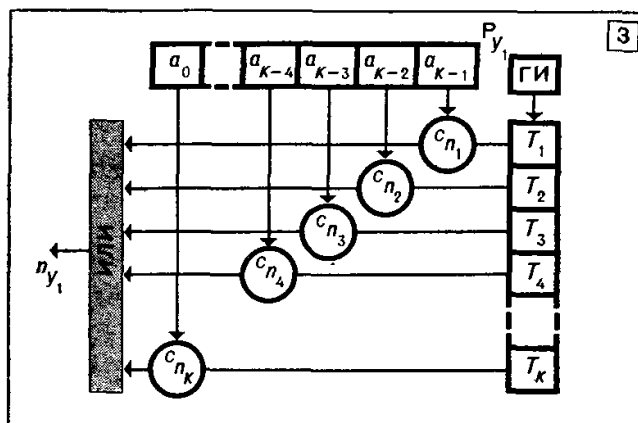
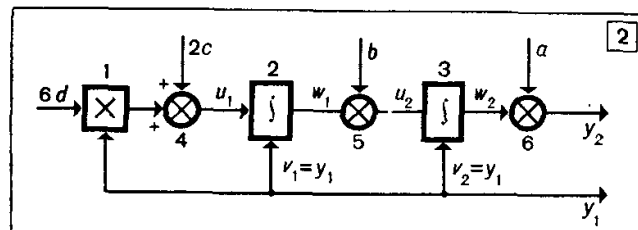
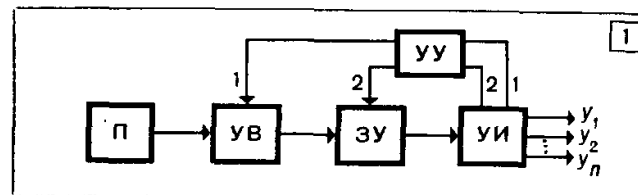
**ИНТЕРПОЛЯТОР** — устройство, предназначенное для реализации интерполирования функций. Блок-схема И. представлена на рис. 1, где УВ — устройство ввода, с помощью которого информация, записанная в программе П, вводится в запоминающее устройство ЗУ и УИ — узел интерполирования, собственно осуществляющий интерполяцию,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — выходные сигналы И. Часто в И. входит устройство, управляющее в процессе работы вводом программы и ЗУ (УУ и связи 1, 2 на рис. 1). В программе обычно записывают координаты «узлов интерполяции» либо другие характерные точки или параметры интерполяционной кривой ИК (поверхности), вид интерполяционной формулы, а иногда и ряд других данных (напр., диаметр фрезы и скорость ее движения по контуру и др. технологические команды при работе И. в системе программного управления фрезерным станком или признак графика — номер, цвет и т. п. — в графопостроителях).

Различают: в зависимости от характера ИК (поверхности) — линейные, параболические, круговые и др. И.; от системы координат — И., использующие декартовую, полярную и др. системы координат; от числа координат — двух-, трех- и т. д. координатные И.; от характера представления переменных — И. непрерывного действия и дискретные И.; от способа представления ИК — И., использующие представление ИК в явном виде, т. е. в виде  $f(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$  или в параметрическом виде, т. е.  $y_1 = f_1(t), y_2 = f_2(t), \dots, y_n = f_n(t)$ ; от используемых элементов и конструкции — механические, электромех. и электронные И.

В качестве УИ в интерполяторах непрерывного действия (ИН) используются потенциометры (линейные или нелинейные), автотрансформаторы (с линейным или нелинейным законом изменения выходного напряжения), сельсины, интеграторы, конденсаторы, гибкие стальные ленты и пр.

Блок-схема двухкоординатного ИН, использующего в качестве УИ интеграторы и осуществляющего параболическую интерполяцию в явном виде по закону  $y_2 = a + by_1 + cy_1^2 + dy_1^3$ , приведена на рис. 2.

Дискретные (цифровые) интерполяторы (ИД) представляют собой специализированные вычислительные устройства. Выходные сигналы ИД имеют вид распределенных во времени дискретных сигналов. В качестве УИ в ИД применяют цифровые интеграторы, схемы, использующие суммирование конечных разностей и др. вычислительные схемы. Блок-схема



1. Блок-схема интерполятора.

2. Блок-схема параболического интерполятора непрерывного действия: 1 — блок умножения на коэффициент  $6d$ ; 2, 3 — интеграторы, осуществляющие операцию  $w = \int_{x_0}^x u dv$  (показан случай  $x_0 = 0$ ); 4, 5, 6 — сумматоры.

3. Блок-схема узла интерполирования линейного дискретного интерполятора.

4. График линейной дискретной интерполяции:  $ACB$  — участок интерполируемой кривой; прямая  $AB$  — линейная непрерывная интерполяция;  $A12345B$  — дискретная линейная интерполяция  $ACB$ .

одного из вариантов УИ двухкоординатного ИД с заданием ИК в параметрическом виде представлена на рис. 3. Задачей такого интерполятора является выдача по двум выходным каналам  $y_1$  и  $y_2$  серий импульсов, число которых  $n_{y_1} = \frac{\Delta y_1}{\Delta l_1}$  и  $n_{y_2} = \frac{\Delta y_2}{\Delta l_2}$  должно быть пропорционально отрезкам интерполирования по координатам  $y_1$  и  $y_2$  (здесь  $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$  — цена одного импульса по соответствующей координате).

При этом осуществляется линейная дискретная интерполяция (рис. 4). Число  $n_{y_1}$  записывается в двоичном коде  $n_{y_1} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i 2^i$  в 3У (регистр  $P_{y_1}$ ). Сигналы разрешения (если  $a_i = 1$ ) или запрета (если  $a_i = 0$ ) с выходов  $P_{y_1}$  подаются на один из входов схем совпадения  $C_{n_1} - C_{n_k}$  (логические схемы «И»); на вторые входы поступают продифференцированные сигналы с выходов триггеров  $T_1 - T_k$  счетчика. Если на вход счетчика от генератора ГИ подать  $2^k$  импульсов, то число импульсов на выходе логической схемы «ИЛИ» будет равно числу, записанному в  $P_{y_1}$ , т. е. будет равно  $n_{y_1}$ . Аналогичный узел используется и для координаты  $y_2$ .

И. применяют в системах программного управления металлорежущими станками, газорезательными аппаратами и электронно-лучевой обработкой материалов (см. «Київ—67»), в устройствах отображения информации, моделирующих установках и т. д.

Лит.: Чернышев А. В., Яхин А. Б. Автоматизация обработки на металлорежущих станках с применением программного управления. М., 1959 [библиогр. с. 191—195]; Карбский В. В. Специализированное вычислительное устройство для задания движения объекта по прямой, параболе и окружности. В кн.: Автоматическое регулирование и управление. М., 1962; Коцюба Ю. Т., Харченко А. Ф., Петрушенко Л. А. Гамма-интерполирующие устройств для систем цифрового программного управления. «Информационно-управляющие системы», 1967, в. 2. Ю. В. Крементуло.

**ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЯЗЫКА СТРУКТУРНАЯ** — процесс, осуществляющий перевод рабочей (исполняемой) программы с программного уровня ( $P^{(B)}$ ) на микрокомандный уровень ( $M^{(B)}$ ) внутреннего языка ( $B$ ). Этот процесс состоит обычно из ряда последовательных преобразований программы, результаты которых представляются текущим образом на промежуточных уровнях  $R_j^{(B)}$  внутреннего языка и, в конечном счете, в виде микрокоманд (т. е. на уровне  $M^{(B)}$ ), исполняемых непосредственно по мере их образования.

Алгоритмы интерпретации фиксируются структурным способом (см. Математическое обеспечение ЦВМ внутреннее), поэтому излагаемое понятие иногда определяют как структурную интерпретацию, в отличие от программной интерпретации, предусматривающей спец. этап динамического преобразования исходной (а не рабочей) програм-

мы на программный уровень внутр. языка. Последнее преобразование в отличие от трансляции исходной программы, осуществляется в процессе ее исполнения и тогда на программном уровне внутр. языка программа в оперативной памяти ЦВМ уже предварительно не фиксируется, а представляется динамическим образом. Т. к. отражение во внутр. языке элементов и конструкций языка программирования (входного языка) означает интерпретацию этих элементов, иногда говорят об интерпретации входных языков, имея при этом в виду не программную интерпретацию входного языка, а структурную интерпретацию внутр. языка, программный уровень которого соответственно приближен к входному языку.

Классы систем интерпретации ЦВМ аналогичны классам внутр. языков ЦВМ (см. Язык ЦВМ внутренний), т. е. системы интерпретации подразделяются по парам альтернативных признаков: «традиционная» либо «развитая» и «элементарная» либо «процедурная». Признак системы интерпретации совпадает с признаком программного уровня внутр. языка (на котором фиксируются интерпретируемые рабочие программы), т. е. развитому внутр. языку соответствует развитая система интерпретации, элементарному — элементарная и т. д.

Каждая система интерпретации как мн-во алгоритмов (зафиксированных структурным способом) обладает подмн-вами алгоритмов, обеспечивающих перевод исполняемых программ с каждого уровня внутр. языка (помимо микрокомандного уровня) на нижний, соседний по отношению к данному. Результаты этого перевода как соответствующего этапа процесса интерпретации динамически фиксируются в структурном оборудовании машины на время, необходимое для выполнения заданных операций (в т. ч. и для дальнейшей детализации исполняемой программы) вплоть до микрокоманд. Мн-во алгоритмов системы интерпретации разделяется на два гл. подмн-ва — анализирующее и исполнительное, соответственно осуществляющих перевод рабочей программы с программного на исполнительный и с исполнительного на микрокомандный уровни внутр. языка. В соответствии с характеристиками уровней внутр. языка только развитые системы интерпретации обладают анализирующей частью; процедурные системы интерпретации обладают в составе исполнительной части спец. подмн-вом, реализующим перевод с исполнительного на детализированно-исполнительный уровень внутр. языка.

Этапы процесса интерпретации выделяются в соответствии с реализуемыми на них подмн-вами алгоритмов системы интерпретации. Главными из них являются анализирующий и исполнительный процессы. Ф-ции этих этапов определяются программным уровнем внутр. языка: у анализирующего — полностью программным уровнем, а у исполнительного они зависят еще и от микрокомандного уровня.

Применительно к степени приближения на уровне, не ниже, чем подобие внутр. языка

входному языку (т. е. для развитого процедурного внутр. языка), осн. ф-циями анализирующего этапа в общем случае являются: динамический анализ рабочей программы и динамическая адресация всех величин (обозначенных и необозначенных), выполняемая в ходе анализа программы. Целью динамического анализа является определение очередного выполняемого операционного знака (либо идентификатора процедуры) и его содержания в соответствии с контекстом программы.

Анализ программы обычно выполняется сопоставлением смежных операционных знаков с учетом контекста. При этом в ходе поступательно-возвратного движения по программе используются оперативно организуемые магазины в памяти, с помощью которых осуществляется адресация необозначаемых промежуточных результатов вычислений. Адресация обозначаемых в программе величин основывается на установлении соответствия между обозначениями и текущими адресами и использования при этом системы относительных и базисных адресов.

Ф-ции исполнительных этапов интерпретации — управление процессом выполнения операций на всех его уровнях. В связи с применением условной (виртуальной) памяти для адресации величин и использованием во внутр. языках широкого класса стандартных процедур среди этих ф-ций получила особое развитие ф-ция динамического перевода рабочей программы с исполнительного на детализированно-исполнительный уровень внутр. языка.

При реализации современных систем структурной интерпретации применяют, как правило, ступенчатое построение ее средств. При этом предпочтение по быстрдействию (связанному со способом реализации) отдается повсеместно применяемому элементарным языковым конструкциям, из которых уже составляются конструкции более сложные и относительно реже встречающиеся (примеры первых — алгоритмы арифм. операций и операций обращения по символическим адресам, примеры вторых — алгоритмы элементарных ф-ций и матрично-векторных операций). К более быстрдействию относятся схемные (аппаратные) средства, к менее быстрдействию — *долговременное запоминающее устройство*. Развитие систем структурной интерпретации является одним из определяющих свойств наиболее современных и перспективных вычисл. машин.

Лит.: Глушков В. М. [и др.]. Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации. К., 1970 [библиогр. с. 254—257]. З. Л. Рабинович.

**ИНТЕРПРЕТИРУЮЩАЯ СИСТЕМА** — система, которая по программе, записанной на некотором внешнем языке, реализует задаваемое этой программой предписание. И. с. может быть реализована как программными, так и схемными средствами. На каждой ЦВМ реализована определенная система непосредственной интерпретации.

**ИНТУИЦИОНИЗМ** — направление в современной математике, из которого вытекает необходимость полной перестройки всей матема-

тической науки и которое приводит к радикальному отвержению значительной части классической математики. Основатель И. — голл. математик Л.-Э. Брауэр (1881—1966), его последователи — в основном также голл. ученые. Философской основой И. является картезианское требование полной очевидности содержания матем. рассуждений. Объекты математики конструктивно даются в уместных построениях и, не доказав возможность такого построения, нельзя ни в каком смысле утверждать, что объект существует. Всякие доказательства существования, не дающие метода построения, отвергаются как несостоятельные. **Логика и арифметика.** Брауэр считал логику вторичным продуктом матем. мысли, направленной в первую очередь непосредственно на матем. объекты, и воздерживался от формализации общих приемов рассуждения. Однако, в 1930 голл. математик А. Гейтинг предложил формализацию известных интуиционистских логических способов рассуждений посредством т. н. интуиционистского исчисления предикатов. Характерным свойством этого исчисления является невыводимость *исключенного третьего закона*. И. не признает справедливости этого логического принципа, т. к. нет универсального метода распознавания, какой из его членов ( $A$  или «не  $A$ ») справедлив, утверждение не «не  $A$ » не равносильно  $A$ , из утверждения «не для всех  $x$  не  $A(x)$ » не следует «существует такой  $x$ , что  $A(x)$ ». Интуиционистское исчисление предикатов и его сужение до *исчисления высказываний* изучены довольно хорошо. Для исчисления высказываний указана процедура распознавания выводимости. Для обоих исчислений построены эквивалентные секвенциальные исчисления и доказана устранимость сечения; доказана также интерполяционная теорема. С классической матем. точки зрения оказались интересными алгебр. и топологическая интерпретации этих исчислений и их связь с модальными исчислениями. Была дана интерпретация исчислений, соответствующая пониманию интуиционистской логики математиками-классиками, и доказана полнота исчислений относительно этой интерпретации. Другие интерпретации оказались неполными. Интуиционистская арифметика основывается на содержательно понимаемом принципе индукции. Разумеется, полностью она не формализуема, но частичная формализация проводится и успешно изучается.

**Анализ и теория видов.** Интуиционистский анализ связан в основном с понятием свободно становящейся последовательности натуральных чисел, каждый член которой определяется актом произвольного выбора или выбранным наперед законом образования. Континуум образуется свободно становящимися последовательностями рациональных чисел, подчиненными естественным ограничениям. Функции — это вычислимы функции над такими последовательностями. Как очевидный принцип, Брауэр выдвинул положение: значение вычислимого функционала

зависит только от некоторого начала последовательности. Второй принцип анализа — т. н. бар-индукция (с классической точки зрения эквивалентная индукции до счетных трансфинитов). На этой основе развивается система, в которой, в частности, всякая заданная на сегменте ф-ция оказывается равномерно непрерывной. Интуиционистский анализ был изучен и как формальная система. Нужно особо отметить, что в последних своих работах Брауэр вводит свободно становящиеся последовательности, зависящие от решения проблем к моменту выбора. Эти приемы нужны только для построения контрпримеров. Осн. понятием интуиционистской теории множеств является понятие вида, т. е. свойства матем. объектов, построение которых предшествует самому виду. Разумеется, полученная теория не может быть сколько-нибудь полной параллелью классической *множеств теория*.

И. явился, пожалуй, первым критическим направлением в математике, радикально отвергнувшим представление об актуально бесконечном. Это роднит И. с гильбертовским финитизмом и марковским конструктивизмом — направлениями, несомненно испытавшими на себе интуиционистское влияние. И. отличается от них некоторым допущением абстрактного элемента в понятии свободно становящейся последовательности. Тем самым допускается не только потенциальная счетная бесконечность, но и потенциальная континуальная бесконечность. В отличие от марковского конструктивизма И. оставляет без внимания тезис Черча, не считая его самоочевидным утверждением. Содержательно это приводит к анализу, отличному от конструктивистского. С другой стороны, абстракция в И. допускается только при построении континуума. Следующие уровни строятся с помощью предикативной иерархии видов. Классической параллелью И. является предикативизм Бореля — Лебега — Лузина, допускающий актуальный (т. е. классический) континуум, но на более высоких ступенях требующий предикативности определений. С прикладной точки зрения И. не имеет большой ценности. Но бескомпромиссность его идей, выдвинутых в период кризиса оснований математики, сыграла плодотворную стимулирующую роль. Отчасти под их влиянием Гильберт и выдвинул формалистскую программу обоснования математики (см. *Формализм в математике*). Следует особо отметить, что впервые начали применять понятие эффективной вычислимости еще до того, как оно подверглось систематическому изучению. Интуиционистский конструктивизм был одним из истоков конструктивизма в матем. философии.

Лит.: Клини С. К. Математическая логика. Пер. с англ. М., 1973 [библиогр. с. 451—465]; Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. Пер. с англ. М., 1965 [библиогр. с. 152—160, 194—195]; Kleene S. C., Vesley R. E. The foundations of intuitionistic mathematics especially in relation to recursive functions. Amsterdam, 1965; Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. Пер. с англ. М., 1972 [библиогр. с. 568—578]. В. А. Янков.

**ИНФОРМАТИВНОСТЬ ПРИЗНАКОВ** — величина, количественно характеризующая пригодность признаков (или их набора)  $X$  для распознавания классов объектов. При этом предполагается, что предъявленные для распознавания объекты представляют сигналы  $x$  в пространстве признаков  $X$ . В *распознавании образов* в качестве И. п. используются условная энтропия, вероятность ошибки распознавания, дивергенция Кульбака, дисперсионная мера и другие величины. Наиболее часто встречается условная энтропия  $H$ :

$$H(K/X) = - \sum_x p(x) \sum_k P(k/x) \log P(k/x),$$

где  $K$  — множество классов,  $X$  — признаки,  $k$  — номер класса,  $x$  — сигнал в пространстве признаков  $X$ ,  $p(x)$  — плотность вероятности появления сигнала  $x$ ,  $P(k/x)$  — апостериорная вероятность класса  $k$  при условии наблюдения сигнала  $x$ . В случае, когда признаки  $X$  позволяют безошибочно указывать класс, условная энтропия равна нулю. При сравнении двух наборов признаков более информативным является тот, который характеризуется меньшей условной энтропией. На практике использование И. п. затруднительно из-за неизвестных вероятностей  $p(x)$  и  $P(k/x)$ . При выборе информативных признаков чаще всего исходят из свойств тех сигналов, которые собираются классифицировать. Учет свойств сигналов позволяет приближенно судить о распределениях  $p(x)$  и  $P(k/x)$  и находить достаточно информативные признаки.

Информативность набора признаков следует отличать от информативности отдельных признаков набора. Только в том случае, когда признаки независимы при условии отдельных классов, информативность набора признаков равна сумме информативности отдельных признаков. В этом случае на основании информативности отдельных признаков можно составлять наиболее информативные наборы. Если признаки зависимы, И. п. не выражается через информативность отдельных признаков, а выбор наиболее информативных наборов по информативности отдельных признаков становится невозможным.

Лит.: Ковалевский В. А. Задача распознавания образов с точки зрения математической статистики. В кн.: Читающие автоматы и распознавание образов. К., 1965; Кульбак С. Теория информации и статистика. Пер. с англ. М., 1967 [библиогр. с. 364—381]. Т. К. Винцук.

**ИНФОРМАТИКА** — научная дисциплина, изучающая структуру и общие свойства *информации научной*, а также закономерности всех процессов науч. коммуникации — от неформальных процессов обмена науч. информацией при непосредственном устном и письменном общении ученых и специалистов до формальных процессов обмена посредством науч. литературы. Значительную часть этих процессов составляет *научно-информационная деятельность* по сбору, аналитико-синтетической переработке, хранению, поиску и распространению научной информации.

Объектом изучения И. не является содержание конкретной научно-информационной деятельности, которой должны заниматься специалисты в соответствующих отраслях науки и техники. Она изучает внутр. механизмы реферирования документов на естественных языках, разрабатывает общие методы такого реферирования, но не занимается практическим реферированием *документов научных* по конкретным отраслям науки или техники.

Основой исследования И. является диалектический и исторический материализм. Для исследования частных проблем И. применяются отд. методы, используемые другими науч. дисциплинами. И. рассматривают как один из разделов *кибернетики*, причем иногда считают, что в последнюю входят проблемы автоматизации информационной службы, перевода и реферирования науч.-тех. литературы, построение *информационно-поисковых систем* и *информационно-логических систем* и другие задачи И. Однако ряд проблем, решаемых И. (оптимизация системы науч. коммуникации, структура науч. документа, повышение эффективности науч. исследования путем применения научно-информационных средств и т. д.), выходит за пределы кибернетики. В И. широко используются также методы *семиотики*, рассматриваемые иногда как теоретический фундамент И. Семиотика по традиции подразделяется на *прагматику*, *семантику* и *синтактику*. В рамках прагматики может производиться анализ конкретной научно-информационной деятельности, а именно — создание информационно-поисковых систем, совершенствование системы первичных публикаций, *индексирование* и т. п. Методы семантики используются в И., напр., при построении и анализе *языков информационно-поисковых*, а также при изучении таких преобразований структуры текста, которые не изменяют его содержания. Методы синтактики применяются в И. при решении задач по формализации и автоматизации некоторых видов науч.-информационной деятельности (*индексирование*, *реферирование автоматическое*, *машинный перевод*).

Матем. информации теория используется в И. для обеспечения оптимального кодирования семантической информации, ее долговременного хранения, поиска и передачи на расстояние. Семантика (логическая) существенно влияет на И. при изучении и разработке новых способов записи (представления) науч. информации. Методы *логики математической* используются в И. при построении информационно-поисковых языков и при формализации процессов логического вывода в тех или иных теориях. В И. все шире используются также методы психологии, особенно таких сравнительно новых ее направлений, как психология труда, *психология инженерная* и *психоллингвистика*. Методы психологии важны при изучении процессов мышления, при разработке проблем индексирования, реферирования, информационного поиска (см. *Поиск информации автоматический*) и т. д. Книговедение и, в частности, история книги дают И. ценные

сведения о важнейших этапах формирования науч. документов, позволяют понять историческую обусловленность методов и средств научной коммуникации. С тех. науками И. взаимодействует при создании многих средств реализации информационных систем.

Осн. теоретическая задача И. заключается в определении общих закономерностей, в соответствии с которыми происходит создание науч. информации, ее преобразование, передача и использование в различных сферах деятельности человека. Прикладные задачи И. заключаются в разработке более эффективных методов и средств осуществления информационных процессов, в определении способов оптимальной науч. коммуникации (в самой науке и между наукой и производством) с широким применением современных тех. средств.

Науч. исследования в области И. ведутся в следующих направлениях: 1) изучение основных научно-информационных процессов — сбора, аналитико-синтетической переработки, хранения, поиска и распространения науч. информации; 2) изучение истории и организации научно-информационной деятельности в различных отраслях и странах; 3) определение оптимальных форм представления (записи) науч. информации, разработка типологии науч. документов и основных требований к ним; изучение свойств и закономерностей документальных потоков; 4) разработка методов анализа семантической информации, формализации извлечения осн. смыслового содержания из науч. документов; 5) исследование информационных языков и процедур перевода с естественных языков на информационные и наоборот; 6) создание систем информационного поиска и обслуживания; 7) применение машинной техники для реализации информационных систем и разработка некоторых спец. тех. средств (см. *Информационно-поисковое устройство*). И. не изучает и не разрабатывает критериев оценки истинности, новизны и полезности науч. информации. Они являются неотъемлемой частью тех наук, к которым относится рассматриваемая науч. информация.

Многие вопросы И. ранее разрабатывались в других дисциплинах (в библиотековедении, книговедении, лингвистике и т. п.). Еще в начале 20 в. бельг. ученый П. Отле предложил объединить комплекс процессов по сбору, обработке, хранению, поиску и распространению документов под общим названием «документация», служащий иногда синонимом понятия «И.» В 1945 амер. ученый В. Буш впервые широко поставил вопрос о необходимости механизации информационного поиска. Международные конференции по научной информации (Лондон, 1948, Вашингтон, 1958) являли собой первые этапы развития И.

В СССР И. начала развиваться с 50-х гг., особенно после создания в 1952 И-та науч. информации АН СССР (ныне *Всесоюзный институт научной и технической информации* Гос. Комитета Совета Министров СССР по

науке и технике и АН СССР). См. также *Информация документальная*.

Лит.: Михайлов А. И., Черный А. И., Гилевский Р. С. Основы информатики. М., 1968 [библиогр. с. 728—735]; Международный форум по информатике, т. 1—2. М., 1969; Annual review of information science and technology, v. 1—8. Washington, 1966—73. Р. С. Гуляревский, А. И. Черный.

**ИНФОРМАЦИИ КОЛИЧЕСТВО** — теоретико-информационная мера величины информации, содержащейся в одной случайной величине относительно другой случайной величины. Если  $\xi$  и  $\eta$  — дискретные случайные величины и  $\{p_i\}$ ,  $\{q_i\}$ ,  $\{p_{ij}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  — соответственно распределения вероятностей случайных величин  $\xi$ ,  $\eta$  и пары  $(\xi, \eta)$ , то И. к.

$$I(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{p_i q_j}. \quad (1)$$

В общем случае, когда случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  принимают значения в некоторых измеримых пространствах  $X$  и  $Y$  соответственно, И. к.  $I(\xi, \eta)$  определяют следующим образом. Пусть  $\varphi(x)$ ,  $x \in X$  и  $\Psi(y)$ ,  $y \in Y$  — измеримые ф-ции, принимающие конечное число значений. Тогда  $\varphi(\xi)$  и  $\Psi(\eta)$  — дискретные случайные величины, и И. к. в  $\xi$  относительно  $\eta$

$$I(\xi, \eta) = \sup_{\varphi, \Psi} I(\varphi(\xi), \Psi(\eta)). \quad (2)$$

где верхняя грань берется по всем парам ф-ций  $\varphi(x)$  и  $\Psi(y)$ , принимающих конечное число значений. Если  $\xi$  и  $\eta$  — дискретные величины, определение (2) сводится к определению (1). Если же  $\xi$  и  $\eta$  — непрерывные величины, имеющие совместную плотность распределения  $p(x, y)$  с маргинальными плотностями  $p(x)$  и  $q(y)$ , то из ф-лы (2) следует, что

$$I(\xi, \eta) = \iint_{X \times Y} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x) q(y)}. \quad (3)$$

Хотя данное выше определение И. к. оказалось полезным с точки зрения проблем *информации передачи*, оно не может быть единой мерой И. к., равноприменимой во всех случаях. Мэру И. к. нужно выбирать в каждом конкретном случае, исходя из конкретных обстоятельств. Напр., далеко не во всех случаях целесообразно задавать И. к. в терминах распределения вероятностей. Сов. математик А. Н. Колмогоров определяет И. к. в объекте как сложность его вычисления при помощи некоторого универсального алгоритма. В некоторых ситуациях более разумной мерой неопределенности, чем *энтропия*, может служить, напр., *дисперсия*  $D\xi$  случайной величины  $\xi$ , поэтому разность безусловной и сред. значения условной дисперсии

$$\tilde{I} = D\xi - MD(\xi/\eta)$$

можно с равным основанием считать мерой И. к.  $\xi$  относительно  $\eta$ . Некоторые основные свойства И. к. таковы: 1) величина  $I(\xi, \eta)$  не зависит от значений, принимаемых случай-

ными величинами  $\xi$  и  $\eta$ , а зависит лишь от совместного распределения этих величин; 2) величина  $I(\xi, \eta) \geq 0$ , причем  $I(\xi, \eta) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\xi$  и  $\eta$  независимы,  $I(\xi, \eta)$  может обращаться и в  $+\infty$ ; 3) величина  $I(\xi, \eta)$  симметрична относительно  $\xi$  и  $\eta$ ,  $I(\xi, \eta) = I(\eta, \xi)$ ; это означает, что И. к. в  $\xi$  относительно  $\eta$  совпадает с И. к. в  $\eta$  относительно  $\xi$ ; 4) если  $f(\cdot)$  — любая ф-ция, заданная на пространстве  $X$ , то  $I(\xi, \eta) \geq I(f(\xi), \eta)$ , что вполне согласуется с представлением о том, что И. к. в  $\xi$  относительно  $\eta$  не меньше, чем И. к. в некоторой ф-ции от  $\xi$  относительно  $\eta$ ; 5)  $I(\xi, \eta) \leq I(\xi, \xi)$ , что также согласуется с интуитивным представлением о И. к.; 6) в случае, когда  $\xi$  — дискретная случайная величина, И. к.  $I(\xi, \xi) = H(\xi)$ , где  $H(\xi)$  — энтропия  $\xi$ . В остальных случаях всегда  $I(\xi, \xi) = +\infty$ . Между И. к.  $I(\xi, \eta)$  и энтропией в дискретном случае (или дифф. энтропией в непрерывном случае) существует следующая связь. В дискретном случае

$$I(\xi, \eta) = H(\xi) + H(\eta) - H(\xi, \eta) = H(\xi) - MH(\xi/\eta),$$

где  $H(\xi)$ ,  $H(\eta)$  и  $H(\xi, \eta)$  — соответственно энтропии величин  $\xi$ ,  $\eta$  и пары  $(\xi, \eta)$ , а  $MH(\xi/\eta)$  — сред. условная энтропия  $\xi$  при условии  $\eta$

$$MH(\xi/\eta) = - \sum_{j=1}^m q_j \sum_{i=1}^n p_{ij} \log p_{ij},$$

где  $\{q_i\}$  — распределение  $\eta$ , а  $\{p_{ij}\}$  — условное распределение  $\xi$  при фиксированном значении  $\eta$ . Аналогично этому, для непрерывных  $\xi$  и  $\eta$

$$I(\xi, \eta) = h(\xi) + h(\eta) - h(\xi, \eta) = h(\xi) - Mh(\xi/\eta),$$

где  $h(\xi)$ ,  $h(\eta)$  и  $h(\xi, \eta)$  — соответственно дифф. энтропии величин  $\xi$ ,  $\eta$  и пары  $(\xi, \eta)$ , а  $Mh(\xi/\eta)$  — сред. условная дифф. энтропия  $\xi$  при условии  $\eta$

$$Mh(\xi/\eta) = - \int_Y q(y) \int_X p(x/y) \log p(x/y) dx dy,$$

где  $q(y)$  — плотность распределения величины  $\eta$ , а  $p(x/y)$  — условная плотность распределения  $\xi$  при условии  $\eta$ . Среди других свойств И. к. важно отметить свойство «условной информации», выраженное ф-лой:

$$I((\xi, \zeta), \eta) = I(\eta, \zeta) + MI(\xi, \eta/\zeta),$$

где  $MI(\xi, \eta/\zeta)$  — сред. условное И. к., которое определяют аналогично тому, как была определена сред. условная энтропия, и свойство «тройной информации», выраженное ф-лой

$$I((\xi, \zeta), \eta) + I(\xi, \zeta) = I(\xi, (\eta, \zeta)) + I(\eta, \zeta).$$

Для гауссовского случая можно привести ф-лу явного вычисления И. к. Если  $\xi$  и  $\eta$  —  $n$ -мерные гауссовские величины, причем пара  $(\xi, \eta)$



также имеет гауссовское распределение, то

$$I(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \log \frac{D_{\xi\eta}^{(2n)}}{D_{\xi\xi}^{(n)} \cdot D_{\eta\eta}^{(n)}}.$$

где  $D_{\xi\xi}^{(n)}$ ,  $D_{\eta\eta}^{(n)}$  и  $D_{\xi\eta}^{(2n)}$  — соответственно определители корреляционных матриц величин  $\xi$ ,  $\eta$  и пары  $(\xi, \eta)$ . В частности, в одномерном случае  $I(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \log(1 - r^2)$ , где  $r$  —

коэфф. корреляции  $\xi$  и  $\eta$ .

Лит. см. к ст. *Информации передача.*

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

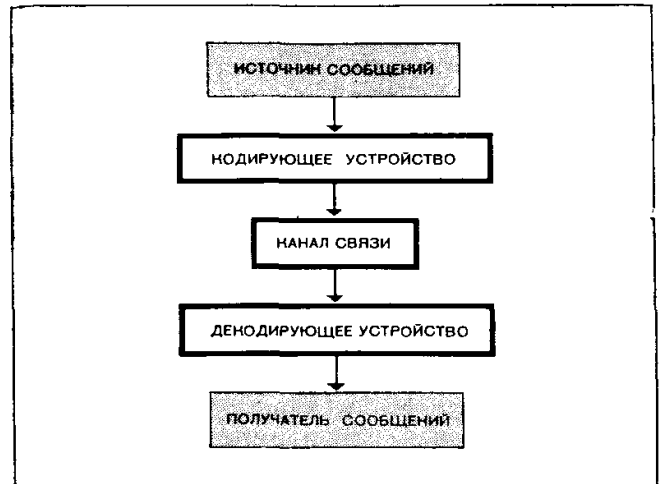
**ИНФОРМАЦИИ ПЕРЕДАЧА** — процесс переноса информации от источника сообщений к потребителю сообщений (адресату). Теория И. п. является составной частью *информации теории*. В теории И. п. изучают оптимальные и близкие к опт. методы передачи информации по каналам связи в предположении, что можно в широких пределах варьировать методы кодирования сообщений в сигналы на входе канала связи и декодирования сигналов в сообщения на выходе этого канала.

Общая схема системы И. п., которую впервые рассмотрел амер. математик К.-Э. Шеннон (р. 1916), представлена на рисунке. *Источник сообщений* вырабатывает сообщения, подлежащие передаче по каналу связи от источника к потребителю сообщений. Обычно предполагают, что возможные сообщения принадлежат некоторому заданному мн-ву сообщений  $X$ , которое может иметь различную природу, с заданными статистическими свойствами (т. е. с заданным распределением вероятностей на пространстве возможных сообщений  $X$ ). Если известны статистические свойства источника сообщений, это значительно облегчает конструирование системы И. п. Действительно, при выборе метода передачи можно, напр., стремиться к тому, чтобы наиболее быстрой и беспрепятственной была передача частых сообщений.

При конструировании системы И. п. всегда предполагают, что заданными являются требования, предъявляемые к точности воспроизведения сообщений, поскольку в тех случаях, когда мн-во  $X$  не является конечным или счетным, нельзя добиться полного совпадения посылаемого и получаемого сообщения при передаче по любому «зашумленному» каналу связи. Однако требование такого полного совпадения является во многих случаях чрезмерным. Так, напр., не следует требовать от конструктора системы радиовещания, чтобы точность воспроизведения радиоприемником звукового сигнала превышала возможности человеческого уха, воспринимающего далеко не весь диапазон частот звуковых колебаний. Математически требование точности воспроизведения сообщения формулируют обычно как некоторое ограничение, выделяющее класс допустимых совместных распределений вероятностей для передаваемого и принимаемого сообщений.

Сообщения, вырабатываемые источником, передаются по каналу связи. При этом пере-

даваться по каналу могут только элементы из некоторого фиксированного мн-ва  $Y$  (мн-во  $Y$  отлично от мн-ва  $X$ , поскольку передаваемые сигналы и сообщения имеют обычно разную природу, напр., сообщения могут быть дискретными, а передаваемые сигналы — непрерывными). В результате передачи по каналу входной сигнал  $y \in Y$  превращается в некоторый сигнал на выходе канала  $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ , где  $\tilde{Y}$  — тоже фиксированное мн-во. В простейшем случае безошибочной передачи по каналу



Общая схема системы передачи информации.

сигнал  $y$  совпадает с  $\tilde{y}$ . Однако в любых физических реальных каналах в сообщения вносятся ошибки, которые приводят к тому, что сигнал на выходе отличается от сигнала, поданного на вход канала.

Для превращения сообщения в сигнал необходимо выполнить операцию, которая наз. кодированием сообщения. Она заключается в том, что с каждым из возможных сообщений сопоставляют определенный сигнал на входе канала, т. е. описывают его как ф-цию, отображающую  $X$  в  $Y$ . В непрерывных каналах связи реально используемые методы кодирования часто наз. *модуляцией*. Когда сообщение на входе принимает фиксированное значение, то по каналу передается сигнал, соответствующий этому сообщению. С помощью операции декодирования по соответствующему сигналу на выходе канала восстанавливают некоторое значение сообщения, называемое сообщением на выходе канала. В непрерывных каналах связи реально используемые методы декодирования часто наз. *демодуляцией*. Математически декодирование описывается ф-цией, отображающей пространство  $Y$  значений сигнала на выходе в пространство значений сообщения  $X$ . Кодирование и декодирование используют неизбежно, если мн-во  $X$  отличается по своей природе от мн-ва  $Y$ . При этом передавать по каналу сами сообщения нельзя. Один из осн. выводов теории И. п. состоит в том, что с помощью достаточно сложных и соответственно подобранных методов кодирования и декодирования можно



существенно улучшить качество передачи и увеличить ее скорость.

Основную проблему, исследуемую в теории И. п., можно сформулировать следующим образом. Считают известными и фиксированными сообщение с заданными условиями точности воспроизведения и канал связи. Предполагают, что методы кодирования и декодирования можно выбирать произвольно из некоторого достаточно широкого класса возможных методов. Необходимо найти условия, при которых существуют такие методы кодирования и декодирования, что заданное сообщение можно передать по заданному каналу связи так, чтобы удовлетворялись фиксированные условия точности воспроизведения сообщений. При этих условиях необходимо эффективно построить эти методы, если доказано, что они существуют. Разработанными ранее матем. методами эту проблему решить не удалось. Даже для того, чтобы приближенно ее решить в простейших ситуациях, необходимо сочетать теоретико-вероятностные, алгебр. и комбинаторные методы. Приближенные конструктивные решения для простейших каналов связи рассматривают в *кодирования теории*. К.-Э. Шеннон установил, что осн. проблему теории И. п. можно просто и окончательно решить, если применить к ней асимптотический подход, основанный на предположении, что к-во информации, подлежащей передаче, и длительность передачи по каналу стремятся к бесконечности. По Шеннону принято обозначать:  $C$  — пропускную способность канала связи и  $H$  — энтропию сообщения при заданных условиях точности. Эти величины он определил как максимум и минимум, соответственно некоторой другой величины, которую он назвал *информации количеством*. Шеннон показал, что если  $H > C$ , то никакие методы кодирования и декодирования не позволяют передать сообщение по каналу связи с заданным условием точности воспроизведения. С другой стороны, если  $H < C$ , а энтропия  $H$  и длительность передачи достаточно велики, то осуществлять передачу с заданной степенью точности воспроизведения можно, соответственно выбрав методы кодирования и декодирования.

Первоначально доказательство теоремы Шеннона имело качественный и нестрогий характер. Позднее под теорию Шеннона была подведена строгая матем. база, сделаны обобщения теорем Шеннона для каналов и сообщений с неизвестными параметрами. Интерес к подобным обобщениям вызван тем, что на практике, как правило, нельзя считать полностью известными параметры источника сообщений и канала связи, тем более, что эти параметры могут иногда меняться в процессе передачи. Поэтому приходится лишь предполагать, что источник сообщений и канал связи принадлежат некоторому классу возможных источников сообщений и каналов. При этом вводится минимаксный критерий качества передачи, при котором качество передачи оценивают для наихудших возможных источников

сообщений и каналов, принадлежащих рассматриваемому классу.

Сделаны также обобщения теорем Шеннона для каналов с *обратной связью*. Наличие полной обратной связи означает, что в момент времени  $t$  на входе канала связи считают известными точные значения сигналов на выходе канала для всех моментов времени  $t' < t$ . В частности, для каналов без памяти с обратной связью осн. результат состоит в том, что наличие обратной связи не увеличивает пропускной способности канала, хотя и может существенно уменьшить сложность кодирующих и декодирующих устройств.

Из других рассматриваемых обобщений следует выделить каналы с погрешностями синхронизации, в которых возможны случайные сбои синхронизации, в результате чего нарушается однозначность соответствия между сигналами на входе и выходе канала, и двусторонние каналы. В двусторонних каналах имеются два потока информации, причем источник сообщений одного потока совмещен с потребителем сообщений другого потока и при этом передачу в обратном направлении можно использовать как вспомогательную — для передачи информации в прямом направлении. Появление работ Шеннона стимулировало исследования по поиску практически реализуемых вариантов методов передачи — оптим. или близких к оптим. Разработаны методы циклического и сверточного кодирования, методы мажоритарного и последовательного декодирования. Они в значительной степени основаны на идеях, использованных в доказательствах теорем Шеннона.

Теор. достижения в области теории кодирования и прогресс в технике вычисл. устройств, алгоритмов кодирования и декодирования, с одной стороны, и развитие техники связи, использующей для И. п. все более сложное и дорогостоящее оборудование, повышение требований к дальности и надежности передачи (напр., в связи с проблемами космической радиосвязи), с другой стороны, — все это привело к тому, что использование рекомендуемых теорией весьма сложных методов кодирования и декодирования становится теперь экономически и технически оправданными.

Лит.: Добрушин Р. Л. Теория оптимального кодирования информации. В кн.: Кибернетику — на службу коммунизму, т. 3. М.—Л., 1966; Шеннон К. Математическая теория связи. В кн.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963; Фано Р. Передача информации. Статистическая теория связи. Пер. с англ. М., 1965; Возенкрафт Дж., Джекобс И. Теоретические основы техники связи. Пер. с англ. М., 1969 [библиогр. с. 629—633].

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

**ИНФОРМАЦИЯ ТЕОРИЯ** — раздел кибернетики, занимающийся математическим описанием и оценкой методов передачи, хранения, извлечения и классификации информации. Поскольку понятие «информация» и его приложения весьма многообразны, на данном этапе И. т. представляет собой совокупность науч. дисциплин, в каждой из которых изучается один из аспектов этого понятия.

И. т. в основном матем. дисциплина, использующая методы *вероятностей теории, математической статистики, линейной алгебры, групп теории, графов теории, игр теории* и др. разделов математики. Важной чертой, объединяющей различные дисциплины, которые относят к И. т., является широкое использование ими статистических методов. Это объясняется тем, что процесс извлечения информации связан с уменьшением неопределенности наших сведений об объекте, а естественной численной мерой неопределенности некоторого события является его *вероятность*.

Важнейшей составной частью И. т. является теория *информации передачи*. Зачастую термин «И. т.» используют как синоним термина «теория передачи информации».

Основы И. т. были заложены в 1948—49 амер. математиком К. Шенноном (р. 1916). Большой вклад в нее внесли сов. математики А. Н. Колмогоров (р. 1903) и А. Я. Хинчин (1894—1959) и сов. радиотехники В. А. Котельников (р. 1908), А. А. Харкевич (1904—1965) и др.

Возникновение теории передачи информации связано с решением в 1948 К. Шенноном осн. проблемы нахождения скорости передачи информации, которой можно достичь при опт. методе кодирования и декодирования так, чтобы вероятность *погрешности* при передаче была сколь угодно мала. Эта опт. скорость передачи, называемая пропускной способностью канала связи, выражается через введенную Шенноном величину, называемую *информацией количеством*. Задачи, связанные с опт. способом хранения информации, принципиально не отличаются от задач опт. передачи информации, т. к. хранение информации можно рассматривать как ее передачу, но не в простр., а во времени. Осн. теоремы И. т. первоначально носили характер теорем существования, в которых доказывалось существование опт. методов кодирования и декодирования, но не указывались способы их построения и тех. реализации. Поэтому за последние десятилетия получила широкое развитие *кодирования теория*, посвященная построению конкретных и относительно простых алгоритмов кодирования и декодирования, приближающихся по своим возможностям к опт. алгоритмам, существование которых доказывается в теории передачи информации. Для теории кодирования характерным является то, что наряду со статистическими методами она использует для построения конкретных кодов алгебр. и комбинаторные идеи.

К И. т. относят также всю совокупность приложений статистических методов к описанию способов преобразования сигналов на входе и выходе каналов связи. С матем. точки зрения — это просто некоторые приложения матем. статистики (в первую очередь статистики *случайных процессов*), *предсказания случайных процессов теории*, теории игр и пр. К И. т. естественным образом примыкает теория *распознавания образов*, разрабатывающая алгоритмы распределения объектов по неко-

торым классам, которые описаны лишь на интуитивном уровне и не допускают четкого матем. задания. Такие алгоритмы всегда включают в себя процесс обучения по некоторому списку объектов, которые человек заранее классифицировал. При любой логич. трактовке И. т. трудно оставить вне ее пределов матем. статистику, поскольку осн. задачей последней является задача описания алгоритмов извлечения информации из опытных данных и распределения объектов по некоторым классам на основе наблюдения их признаков. То, что матем. статистику по традиции не рассматривают как раздел И. т., можно исторически объяснить тем, что возникла она намного раньше, чем остальные разделы И. т. К И. т. естественно было бы отнести также всю лингвистику, т. к. она является наукой, изучающей осн. способ передачи информации в человеческом обществе — речь, и лингвистику, изучающую способы записи информации в различного рода документах.

Лит. см. к ст. *Информации передача*.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

**ИНФОРМАЦИИ ХРАНЕНИЕ** — отображение информации в свойствах, конфигурации или расположении физических объектов, называемых в совокупности носителями информации. Исторически наиболее древние формы И. х. связаны с развитием письменности: комбинации предметов (раковин, узлов); графические изображения на камне, глине, папирусе, бумаге. Огромное значение в развитии этого направления И. х. имело изобретение книгопечатания. Современные формы И. х. основаны на широком использовании фотографии, явления остаточного магнетизма и связаны с развитием ЦВМ. Особое развитие получили методы и средства хранения дискретной информации, представленной в виде последовательности двоичных символов. Осн. характеристиками носителей информации являются продолжительность хранения информации в них, надежность их; время нанесения новой информации на носитель — запись и время снятия ее с носителя — чтение; стоимость хранения единицы информации. К числу действий, обеспечивающих И. х., а также воспроизведение хранимой информации, относятся кодирование информации символами, представимыми на выбранном носителе информации, запись и чтение информации, поиск требуемой единицы информации или места для нее при чтении и записи. Совокупность взаимосвязанных средств и методов, обеспечивающая выполнение этих этапов, образует систему И. х. К числу систем И. х. относятся *запоминающие устройства, информационно-поисковые системы, информационно-справочные системы*.

С. Д. Михновский.

**ИНФОРМАЦИОННО - ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ПРЕДПРИЯТИЯ** — основное звено автоматизированных систем управления предприятием (АСУП). И.-в. ц. п., работающий в составе АСУП, выполняет функции сбора, накопления и централизованной обработки данных, рассчитывает и выдает плановые

задания цехам и участкам, ведет учет произ-ва и материально-тех. обеспечения, организует решение задач оптим. планирования, прогнозирует произв.-хоз. деятельность предприятия на различные периоды времени на основе единой информационной базы АСУП.

В разных автоматизированных системах управления функции персонала И.-в. ц. п. по характеру выполняемых работ близки, а количественный состав может быть различным и зависит от объемов выполняемых работ. Обслуживают любой И.-в. ц. п. административный персонал, на который возлагается руководство его повседневной деятельностью, планирование и контроль за соблюдением графика выполнения работ и учет всех работ, и персонал, осуществляющий приемку исходных данных от служб предприятия, подготовку промежуточных носителей информации для ввода в ЭВМ, оформление результатов обработки информации, обслуживающий оборудование, библиотеку стандартных и типовых программ и т. д., т. е. обеспечивающий бесперебойное функционирование АСУП. И.-в. ц. п. — это своеобразный «цех» обработки информации, готовой продукцией которого являются результаты решаемых задач. И.-в. ц. п. в составе АСУП координируют работу предприятия, управляя ею. Поэтому И.-в. ц. п. наз. координационно-управляющими центрами.

А. Г. Сирченко.

**ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКАЯ СИСТЕМА** — автоматизированная система, осуществляющая на основе хранящегося в ней массива фактических данных алгоритмическое решение различного рода задач по синтезу новых сведений, не содержащихся в этом массиве в явной форме. Такое решение производится путем комбинаторного преобразования совокупностей элементов информационного массива, моделирующего логич. или эвристический вывод. Частный случай И.-л. с. — автоматизированная информационно-поисковая система фактографическая, которая в ответ на запросы выдает сведения, отсутствующие в явной форме в ее информационном массиве.

При функционировании любой информационно-поисковой системы (ИПС), в том числе и информационно-поисковой системы документальной, моделируются некоторые простейшие виды логического вывода. Благодаря этому при поиске отбираются и такие релевантные документы (см. *Релевантность документов*), из содержания которых семантически следует информация, требуемая запросом. При этом учитываются осн. факты, считающиеся известными в соответствующей предметной области. Чаще всего эти факты представлены в терминах языков информационно-поисковых дескрипторного типа, в простейшем случае — в терминах отношений парадигматических между дескрипторами, играющих роль дескриптивных аксиом предметной области. Последние можно также считать включенными в алгоритм проверки критерия семантического соответствия. Аналогичным обра-

зом при алгоритмическом решении вычисл. задач преобразование исходных данных задачи в искомое числовое решение равносильно моделированию процедур логич. вывода, аксиоматика и правила которых включены в алгоритм решения задачи. Подобное положение имеет место и при машинном доказательстве теорем.

Отличительной особенностью И.-л. с. является то, что для решения задач — помимо некоторой неизменной аксиоматики и совокупности правил вывода — используются наборы элементов информационного массива переменного состава, применение к которым упомянутых правил и дает решение поставленной задачи. Решаемые таким путем задачи наз. и н ф о р м а ц и о н н о - л о г и ч е с к и м и, в отличие от информационно-поисковых задач, решаемых ИПС. Однако, если соединить конъюнкциями все различные высказывания, составляющие информационный массив некоторой фактографической ИПС и рассмотреть полученную конъюнкцию в качестве записи одного «сложного факта» (или аналогичным образом рассмотреть совокупность документов из информационного массива документальной ИПС в качестве фрагментов одного «сверхдокумента»), то различие между информационно-поисковыми и информационно-логич. задачами стирается в том смысле, что при этом для решения и тех, и других упомянутый «сложный факт» (или «сверхдокумент») служит наряду с информационным запросом или формулировкой информационно-логич. задачи неизменным исходным «словом», к которому применяются соответствующие алгоритмы решения задач и поэтому его можно считать включенным в состав этих алгоритмов.

Сущность различия между информационно-логич. и информационно-поисковыми задачами и соответствующими системами состоит в более сложном характере моделируемых в И.-л. с. умозаключительных процедур. Для обеспечения возможности такого моделирования в И.-л. с. должны применяться достаточно богатые и в значительной большей степени формализованные языки информационно-логические. Примером простой реализованной модели И.-л. с. может служить программа «Бейсбол», автоматически отвечающая на разнообразные вопросы относительно этой игры. Примером экспериментальной И.-л. с., решающей практически важную задачу, является машинный поиск путей синтеза хим. соединений на эвристической основе, с использованием т. н. «хим. аналогий».

В связи с наметившимися тенденциями по алгоритмизации процессов создания тех. изделий заданного назначения можно ожидать в будущем применения И.-л. с. для решения разнообразных проектных и конструкторских задач. Перспективными областями применения И.-л. с. представляются в дальнейшем составление аналитических и критических тематических обзоров литературы, выявление закономерностей и эвристический синтез рабочих гипотез при научных исследованиях,

правдоподобное прогнозирование новых фактов и т. п. Предварительным условием для создания И.-п. с., которые могли бы выполнять такие ф-ции, является создание соответствующих крупномасштабных фактографических ИПС.

*Лит.:* В л а д у ц Г. Э., Ф и н н В. К. Проблематика создания машинного языка для органической химии. В кн.: Сообщения лаборатории электромоделирования, в. 1. М., 1960; Вычислительные машины и мышление. Пер. с англ. М., 1967 [библиогр. с. 491—546]; Р а й т м а н У. Р. Познание и мышление. Пер. с англ. М., 1968 [библиогр. с. 378—395]; C o r e y E. J., W i r k e W. T. Computer-assisted design of complex organic syntheses. «Science», 1969, v. 166, N. 3902; Н и л ь с о н Н. Искусственный интеллект Пер. с англ. М., 1973 [библиогр. с. 252—262].  
Г. Э. Влэдуч.

**ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИЙ ЯЗЫК** — см. *Язык информационно-логический*.

**ИНФОРМАЦИОННО-ПЛАНИРУЮЩАЯ СИСТЕМА** — то же, что и *информационно-управляющая система*. См. также *Автоматизированные системы управления предприятием*.

**ИНФОРМАЦИОННО-ПОИСКОВАЯ СИСТЕМА** — совокупность языково-алгоритмических и технических средств, предназначенная для хранения, поиска и выдачи необходимой информации. И.-п. с. обеспечивает поиск информации автоматический. На вход И.-п. с. поступает информация двух видов: информация, отражающая достигнутый уровень знаний о к.-л. классе объектов (устройств, технологич. процессов, хим. веществ, реакций, теорем и т. п.), и информация, отражающая информационную потребность абонентов И.-п. с. Информация 1-го вида наз. и н ф о р м а ц и о н н ы м м а с с и в о м, или поисковым массивом, а 2-го вида — и н ф о р м а ц и о н н ы м и з а п р о с а м и. Элементы информационного массива и информационные запросы вводятся в И.-п. с. на естественном языке, а затем обычно переводятся на формализованный язык информационно-поисковый (см. *Индексирование*).

Осн. функцией И.-п. с. является выявление элементов информационного массива, которые отвечают на запрос, предъявленный системе. И.-п. с. состоит из двух осн. компонентов — абстрактной И.-п. с. и информационно-поискового устройства. Абстрактная И.-п. с. — это совокупность информационно-поискового языка, правил индексирования и критерия семантического соответствия. Абстрактная И.-п. с. реализуется при помощи информационно-поискового устр-ва, в котором в качестве носителя информации могут применяться каталожные карточки, перфокарты различных типов, обрабатываемых вручную или счетно-аналитическими машинами, либо при помощи поискового устр-ва типа универсальной ЦВМ или специализиров. устр-ва. К средствам реализации абстрактной И.-п. с. входят также инструкции по обработке информационных запросов и элементов информационного массива, программы для ЭЦВМ и т. п.

По характеру информационного массива (а следовательно, и по характеру выдаваемой информации) И.-п. с. подразделяют на *инфор-*

*мационно-поисковые системы документальные* (или документографические) и *информационно-поисковые системы фактографические*. Информационный массив документальной И.-п. с. состоит из элементов, каждый из которых передает осн. содержание документа (статьи, книги, технич. отчета, патента и т. п.), независимо от того, сколько объектов описывается в документе. Такой элемент наз. *поисковым образом документа*. Информационный массив фактографической И.-п. с. состоит из элементов, каждый из которых относится непосредственно к некоторому объекту, независимо от того, был он описан в одном документе или в нескольких.

Для удобства хранения и обработки информации элементы информационного массива в информационно-поисковом устройстве расчленяют на составные части и объединяют друг с другом в различных сочетаниях. Документальная И.-п. с. в ответ на предъявленный запрос выдает множество документов, содержащих искомую информацию, или указывает адреса хранения этих документов. Фактографическая И.-п. с. в ответ на запрос выдает непосредственно искомую информацию. По виду информационного обеспечения И.-п. с. могут быть использованы как в качестве систем избирательного распределения информации, так и систем справочного (или ретроспективного) поиска или могут совмещать обе функции.

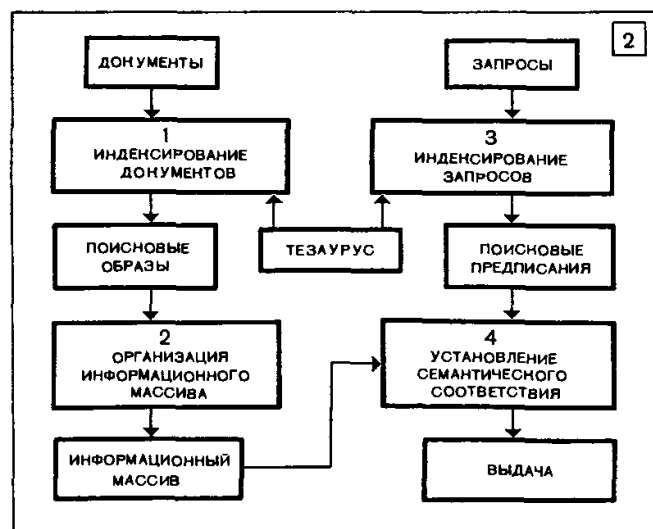
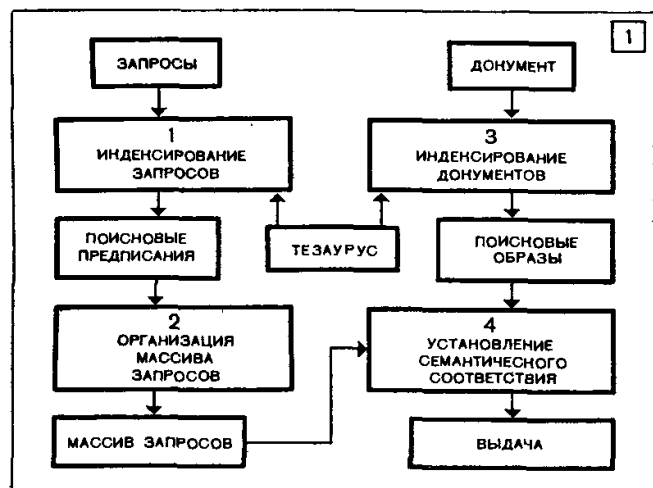
*Лит.* М и х а й л о в А. И., Ч е р н ы й А. И., Г и л ь я р е в с к и й Р. С. Основы информатики. М., 1968 [библиогр. с. 728—735]; Л а н к а с т е р Ф. У. Информационно-поисковые системы. Характеристики, испытание и оценка. Пер. с англ. М., 1972.

Э. Ф. Скороходько.

**ИНФОРМАЦИОННО-ПОИСКОВАЯ СИСТЕМА ДОКУМЕНТАЛЬНАЯ** — информационно-поисковая система, предназначенная для отыскания научно-технических документов (статей, книг, научно-технических отчетов, описаний к авторским свидетельствам и патентам и т. д.), содержащих необходимую информацию. В ответ на информационный запрос И.-п. с. д. она выдает адреса хранения релевантных, т. е. отвечающих на запрос, документов. Адрес хранения — это код, однозначно определяющий местонахождение документа в хранилище. Роль адреса хранения может играть библиографическое описание документа (автор, наименование, источник), каталожный, инвентарный или порядковый номер документа и т. п. Некоторые И.-п. с. д. осуществляют и выдачу самих документов или их копий, однако чаще это производится вне И.-п. с. д. (вручную или при помощи спец. информационно-поисковых устройств). И.-п. с. д. могут выполнять функции избирательного распределения информации и справочного (ретроспективного) поиска или совмещать эти функции (см. *Поиск информации автоматический*). В состав И.-п. с. д. входят блоки, выполняющие осн. операции поиска информации — *индексирование* документов и запросов и установление семантического соответствия между запросами и документами

(рис. 1 и 2). Эффективность информационного поиска в И.-п. с. д. оценивается в основном коэффициентом точности поиска и коэффициентом полноты поиска.

Примером И.-п. с. д. могут служить системы «Пусто — Непусто». Эти системы разработаны для поиска документов в области электротехники. Язык информационно-поисковый этих систем образован на базе слов естественного языка. В И.-п. с. д. «Пусто — Непусто-4» применяется дескрипторный язык с одним видом отношения парадигматического и без отношений



1. Упрощенная блок-схема документальной информационно-поисковой системы для избирательного распределения (1-й и 2-й блоки работают в режиме формирования и пополнения массива запросов. 3-й и 4-й — в режиме поиска).

2. Упрощенная блок-схема документальной информационно-поисковой системы для справочного (ретроспективного) поиска (1-й и 2-й блоки работают в режиме формирования и пополнения информационного массива. 3-й и 4-й — в режиме поиска).

синтагматических. В этих системах процесс индексирования документов заключается в том, что из реферата документа выбираются все слова, которые имеются в русско-дескрипторном словаре (информационно-поисковом тезаурусе), после чего эти слова заменяются вручную или автоматически дескрипторами. Запросы индексируются аналогично, однако, если запрос включает однородные члены пред-

ложения, то он разбивается на подзапросы (напр., «Расчет и конструирование трансформаторов» дает «Расчет трансформаторов» и «Конструирование трансформаторов»). Критерий семантического соответствия системы формулируется в терминах пустоты и непустоты множеств M1, M2, M3 и M4, образованных дескрипторами из состава поискового предписания и поискового образа: M1 — мн-во дескрипторов поискового образа документа, совпадающих с дескрипторами поискового предписания; M2 — мн-во дескрипторов поискового образа документа, для которых в составе поискового предписания находятся подчиненные им дескрипторы; M3 — мн-во дескрипторов поискового образа документа, для которых в составе поискового предписания находятся подчиняющие их дескрипторы; M4 — мн-во дескрипторов поискового предписания, не имеющих в составе поискового образа документа дескрипторов, совпадающих или связанных с ними отношением подчинения. Документ считается релевантным и подлежащим выдаче, если определенное мн-во или определенная комбинация мн-в M1, M2, M3 и M4 непусто (непуста), а другие мн-ва — пусты (отсюда и название системы). Так, напр., если мн-во M1 непусто, а все остальные пусты, документ считается релевантным также, если мн-ва M1 и M3 непусты, а M2 и M4 — пусты. В этом случае каждый дескриптор поискового предписания либо содержится в поисковом образе, либо имеет там подчиненный ему дескриптор. Система может быть реализована и на ЭЦВМ и на суперпозиционных картах. См. также илл. между с. 400—401. Лит.: Белоногов Г. Г., Котов Р. Г. Автоматизированные информационно-поисковые системы. М., 1968 [библиогр. с. 169—175]; В л а д у ц Г. Э. О некоторых сторонах исследований по созданию информационно-поисковых систем. «Научно-техническая информация», 1961, № 1; Информационно-поисковая система «БИТ». К., 1968 [библиогр. с. 215—217]; Труды III Всесоюзной конференции по информационно-поисковым системам и автоматизированной обработке научно-технической информации, т. 1—4. М., 1967; Шрейдер Ю. А. Лингвистический подход в теории информационных систем. «Научно-техническая информация», 1962, № 9; A l o u c h e F. [и др.]. Economie générale d'une chaîne documentaire mécanisée. Paris, 1967; С э л т о н Г. Автоматическая обработка, хранение и поиск информации. Пер. с англ. М., 1973. Э. Ф. Скорородько.

**ИНФОРМАЦИОННО-ПОИСКОВАЯ СИСТЕМА ФАКТОГРАФИЧЕСКАЯ** — информационно-поисковая система (ИПС), обеспечивающая выдачу ответов на информационные запросы, касающиеся интересующих потребителя фактов. Такие информационные запросы наз. ф а к т о г р а ф и ч е с к и м и. И.-п. с. ф. специализируется, как правило, на выдаче фактических сведений одного определенного рода. Осн. отличия от информационно-поисковых систем документальных: 1) информационный массив И.-п. с. ф. состоит не из информационных документов, а из записей фактов рассматриваемого типа (извлеченных из документов или других источников); 2) в ответ на запрос происходит непосредственная выдача искомого сведений либо путем указания на адреса хранения соответствующих записей фактов,

либо (в более совершенных И.-п. с. ф., к которым относятся применяющиеся на практике современные автоматизированные И.-п. с. ф.) — путем непосредственной выдачи записей этих фактов на том или ином понятном потребителю языке (желательно, с указанием на документы, из которых эти факты отобраны). Автоматизированные И.-п. с. ф. реализуются при помощи ЦВМ.

Традиционным неавтоматизированным аналогом И.-п. с. ф. являются справочники физ. свойств веществ и материалов, каталоги тех. параметров изделий определенного рода, картотеки адресов пром. предприятий и т. п. В качестве неавтоматизированных И.-п. с. ф. широко используются перфокартотеки, состоящие из перфокарт с краевой перфорацией, на которых записываются сведения о соответствующих объектах. Эти сведения кодируются краевыми перфорациями в виде наборов поисковых признаков, позволяющих производить мех. отбор нужных записей с помощью ручных приспособлений или средств малой механизации информационного поиска.

Фактографические сведения, как правило, представляют собой записи, состоящие из наименования объекта рассматриваемого рода (предмета, хим. соединения, тех. изделия, производственного процесса и т. п.) и присущих объекту характерных свойств (признаков, зачастую имеющих численные выражения). Информационно-поисковые языки (ИПЯ), используемые в автоматизированных И.-п. с. ф. для представления записей фактов, должны располагать средствами для обозначения всех упомянутых элементов сведений. Записи фактов на *языках информационно-поисковых*, предназначенные для алгоритмического поиска по фактографическим запросам, представляют собой поисковые образы соответствующих фактических сведений, первичные записи которых (на естественных языках) составляют информационный массив И.-п. с. ф. (см. *Поисковый образ документа*). Массив поисковых образов фактических сведений, реализованный на том или ином носителе (чаще всего на *лентах магнитных или дисках магнитных* в запоминающем устройстве ЭЦВМ, реализующей И.-п. с. ф.), составляет «активное хранилище» *информационно-поисковой системы*.

Во многих случаях удобно организовывать массив поисковых образов фактических сведений в виде т. н. информационных или объектно-характеристических таблиц, представляющих собой таблицы с двумя входами. На одном входе таких таблиц перечисляются объекты рассматриваемого рода, на другом — классы характеристик (свойств, признаков), а конкретные значения (словесные или числовые) характеристик записываются на пересечениях строк и столбцов. В «активном хранилище» И.-п. с. ф. информационные таблицы могут развертываться по строкам или столбцам. В первом случае значения характеристик группируются относительно объектов, во втором — относительно наименований характеристик.

В качестве ИПЯ в автоматизированных И.-п. с. ф. с успехом можно использовать имеющие достаточно развитую структуру дескрипторные ИПЯ, располагающие средствами выражения текстуальных отношений, в частности, язык *RX-кодов* и язык «стандартных фраз». Последние представляют собой способ записи многоместных предикатов, места которых заполняются терминами-дескрипторами, причем место, занимаемое *дескриптором*, строго определяет ее контекстуальную функцию. В ИПЯ последнего типа каждый вид «стандартной фразы» используется для записи сведений определенного рода, поэтому в конкретной И.-п. с. ф. достаточно использовать один соответствующий вид «стандартной фразы». Вместе с тем «активное хранилище» документальной ИПС, состоящее из поисковых образов документов, которые представляют собой наборы «стандартных фраз» различного вида, может служить для поиска по тем фактографическим запросам, которые соответствуют видам «стандартных фраз», имеющимся в ИПЯ. При этом в целом поиск будет происходить хотя и медленнее, чем в аналогичной специализированной И.-п. с. ф., но с равной эффективностью. Для оценки *эффективности информационного поиска* фактографического в И.-п. с. ф. используют коэффициенты потери информации и поискового шума, вполне аналогичные соответствующим коэффициентам для документального поиска. Поэтому в случае применения достаточно развитых ИПЯ различие между ИПС документальными и И.-п. с. ф. не принципиально: И.-п. с. ф. могут рассматриваться в качестве частного случая ИПС документальных, специализированных для поиска определенного типа текстов (т. е. фрагментов документов), описывающих факты определенного рода.

Как правило, значения коэффициентов полноты И.-п. с. ф. превышают соответствующие значения для документальных ИПС и приближаются к единице (100%). Обобщенная функциональная схема И.-п. с. ф. значительно отличается от соответствующей схемы ИПС документальной, при вводе сведений в И.-п. с. ф. и формировании ее информационного массива производятся дополнительные «логические» операции: отбор и извлечение (из документов или др. источников) фактических сведений заданного рода, возможная оценка достоверности этих сведений, в частности, путем выявления возможно противоречащих аналогичных сведений в ранее накопленном информационном массиве ИПС; вместо «пассивного хранилища» документов в И.-п. с. ф. может быть «пассивное хранилище» первичных записей фактических сведений на естественных языках, релевантная часть которых, после ее выявления по поисковым образам, может выдаваться в качестве ответа. Один и тот же фактографический массив поисковых образов может служить для поиска различного рода (напр., для поиска объектов по заданным наборам значений характеристик или для выдачи сведений о значениях харак-



теристик заданного объекта). При этом каждый такой тип информационно-поисковых задач решается по особому алгоритму, выполняющему роль специализированного критерия семантического соответствия.

Массив поисковых образов И.-п. с. ф. может быть применен для алгоритм. решения логических задач, связанных с моделированием умозаключительных процедур иного типа, чем те, с которыми связано моделирование информационного поиска. В этом случае И.-п. с. ф. выполняет роль *информационно-логической системы*. К числу наиболее крупномасштабных автоматизированных И.-п. с. ф. относятся И.-п. с. ф. для хим. соединений.

Лит.: Белоголов Г. Г., Котов Р. Г. Автоматизированные информационно-поисковые системы. М., 1968 [библиогр. с. 169—175]; Влэдуч Г. Э. О некоторых сторонах исследований по созданию информационно-поисковых систем. «Научно-техническая информация», 1961, № 1; Сейфер А. Л., Шурова С. С. Автоматическая информационная система по свойствам веществ. «Стандартизация», 1965, № 1; Скороходько Э. Ф. Проект фактографической информационно-поисковой системы. В кн.: Труды III Всесоюзной конференции по информационно-поисковым системам и автоматизированной обработке научно-технической информации, т. 1. М., 1967; Мидоу Ч. Анализ информационно-поисковых систем. Пер. с англ. М., 1970.

Г. Э. Влэдуч.

**ИНФОРМАЦИОННО-ПОИСКОВОЕ УСТРОЙСТВО** — устройство или совокупность средств, используемых для реализации информационно-поисковой системы. И.-п. у. классифицируют по применяемым в них материальным носителям информации, которые условно разделяют на дискретные и непрерывные (см. табл.).

**Дискретные носители информации** исторически появились раньше непрерывных, отличаются простотой реализации И.-п. у. и находят широкое применение в практике.

**Каталожные** (библиографические) карточки применяются для составления каталогов и картотек. В каталожных ящиках за спец. разделителями собирают карточки с описаниями документов, фамилии авторов или заглавия которых начинаются с определенной буквы (алфавитный каталог) или же содержание которых посвящено какому-либо предмету (предметный каталог), той или иной отрасли знания (систематический каталог). Эти карточки изготавливаются из плотной бумаги, имеют стандартный формат  $75 \times 125$  мм и отверстие у нижнего края для стержня, закрепляющего массив карточек в ящике. Каталогные ящики помещаются в гнезда спец. шкафов.

**Унитерм-карты** разработаны в 1951 (США) и предназначены для реализации *информационно-поисковых систем* (ИПС), основанных на принципе координатного индексирования. Это карточки формата  $75 \times 125$  мм или  $203 \times 125$  мм, на которые нанесена спец. сетка одной горизонтальной и десяти вертикальных граф. В верхней горизонтальной графе записывается унитерм — ключевое слово, выражающее единичное понятие, собственное имя, географическое или фирменное название. В вертикальных графах записываются адрес-

ные шифры (номера) документов, в поисковые образы которых входит унитерм, указанный в верхней вертикальной графе. Запись производится по последней цифре каждого номера, напр., 294 записывается в графе 4, 135 — в графе 5 и т. д. Такая система записи облегчает процедуру выявления номеров документов, которые одновременно содержатся в нескольких сравниваемых унитерм-картах. Это выявление совпадающих номеров документов равнозначно операции логического умножения понятий, обозначенных соответствующими унитермами.

**Перфорированные карты** представляют собой прямоугольники из плотной бумаги, вдоль краев которых пробиты отверстия или же по всему полю нанесены позиции для пробивки таких калиброванных отверстий (перфораций). Впервые они появились в 80-х годах 18 в. (Франция), когда их применили для управления работой ткацких станков. В начале 90-х годов 19 в. в США изобрели перфоратор и электр. *табулятор* для карт с внутренней перфорацией. Карты с перфорацией по краям чаще всего обрабатываются вручную. На каждую из них наносят поисковый образ и текст одного документа. Поисковые признаки этого документа кодируют вырезами между соответствующей перфорацией

**Классификация информационно-поисковых устройств по типам носителей информации**

Носители информации	Информационно-поисковые устройства
<b>Дискретные</b>	
Каталожные карточки Унитерм-карты	Каталоги и картотеки Картотеки
Перфорированные карты с краевой перфорацией с внутренней перфорацией	Устройства для перфорации, сортировки карт ручного обращения и просмотра просветных карт. Счетно-перфорационные машины
Диамикрокарты Магнитные карты Микрофильмы форматные	Специализированные информационно-поисковые устройства
<b>Непрерывные</b>	
Микрофильмы рулонные Перфорированные ленты	Микрофильмовые селекторы Оргавтоматы, ЭЦВМ
Магнитные ленты	ЭЦВМ. Специализированные информационно-поисковые устройства
Магнитные диски Магнитные барабаны	ЭЦВМ

и внешним краем карты. Поиск необходимых карт в их неупорядоченном массиве производится введением одной или нескольких сортировальных спиц в соответствующие поисковому признаку перфорации и встряхиванием массива вручную или при помощи спец. вибратора. При этом карты с вырезами данных от-



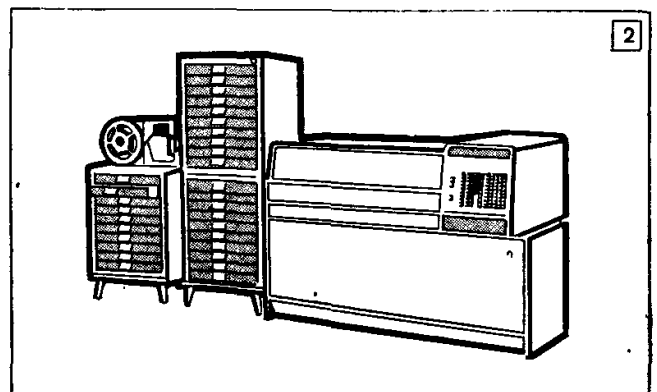
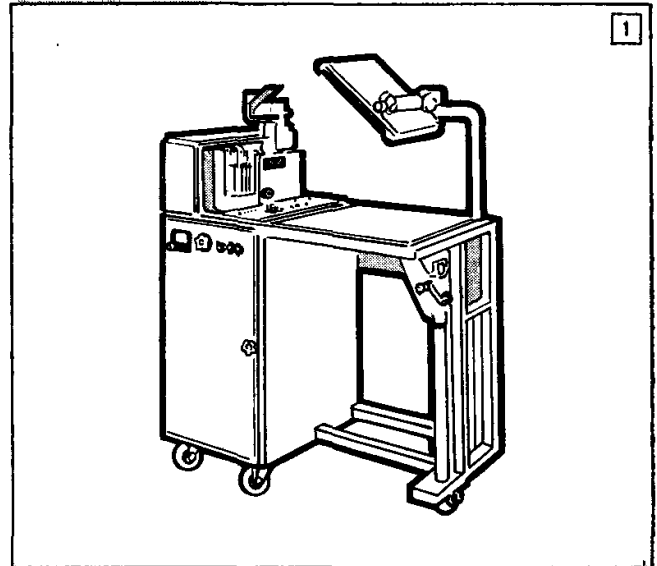
верстей выпадают. Карты с внутренней перфорацией можно обрабатывать вручную (щелевые и просветные карты) и при помощи спец. машин. Щелевые перфокарты отличаются от карт с краевой перфорацией тем, что они не выпадают из массива, а выдвигаются на величину щели (расстояние между двумя смежными отверстиями). Это позволяет вести поиск в несколько этапов и облегчает применение сложных *кодов*. Просветные перфокарты являются как бы вариантом унитерм-карт, в которых механизирована процедура выявления совпадающих номеров. Запись в них производится путем пробивки перфокарты в точке, координаты которой соответствуют номеру документа. При поиске отобранные перфокарты, на которых записаны поисковые признаки данного информационного запроса, накладываются одна на другую и просматриваются на просвет для выявления совпадающих пробивок, соответствующих номерам искоемых документов.

Наиболее широкое применение получили перфокарты машинной сортировки, имеющие формат  $187,4 \times 82,5$  мм. На лицевой их стороне по всему полю, за исключением узкой горизонтальной полосы сверху, напечатаны колонки цифр, выполняющие роль матрицы. Обычно используются 45-, 80- и 90-колонные перфокарты. Для их обработки применяются стандартные счетно-перфорационные машины. ИПС, созданные на базе этих машин, пригодны для работы с массивами документов, превышающими 200 тыс., а при условии предварительной подсортировки их — несколько миллионов документов. Применяются также апертурные перфокарты, в которых имеется калиброванное окно (апертура) для вклеивания микрокопии документа на фотопленке.

Диамикрокarta (микрофиша) является наиболее перспективным из всех дискретных носителей информации. Она представляет собой прямоугольник негативной или позитивной фотопленки с изображениями документов или их частей, в отличие от эпимикрокарты (микропринта), которая выполняется на непрозрачной основе (фотобумаге). Часть диамикрокарты обычно отводится либо для фотооптической записи поискового образа документа, либо его библиографического описания. Текст документа дается в микрокопии и может быть прочитан или скопирован в натуральную величину при помощи спец. аппаратуры. В зависимости от назначения диамикрокарты и ее размера и от кратности уменьшения на ней размещается от одной до 200 страниц текста. На основе диамикрокарт создаются весьма сложные электромех., электронные и фотооптические И.-п. у.

Примером может служить комплекс устройств «Фильморекс» (создан во Франции в 1950, неоднократно модифицировался). Его характеристики: размер негативной карты  $60 \times 35$  мм, емкость карты — 1 кадр, кратность уменьшения от 4 : 1 до 30 : 1, емкость кодового поля — 400 двоичных единиц, ско-

рость сортировки — 4—6 карт в 1 сек, время поиска — 5 мин, емкость хранилища —  $5 \times 10^5$  карт (рис. 1). Устр-во «МЕДИА» (США, 1960) использует позитивные карты размера  $32 \times 10$  мм, кратность уменьшения 30 : 1, емкость кодового поля — 69 двоичных единиц, скорость сортировки — 10 карт в 1 сек, время поиска — 1 мин, емкость хранилища —  $4 \times 10^5$  карт (рис. 2). Аналогичные И.-п. у. созданы на основе магнитных карт, напр. «Магнакард» (США, 1957), которые отличаются зна-



1. Селектор системы «Фильморекс». 2. Информационно-поисковое устройство на диамикрокартах «МЕДИА».

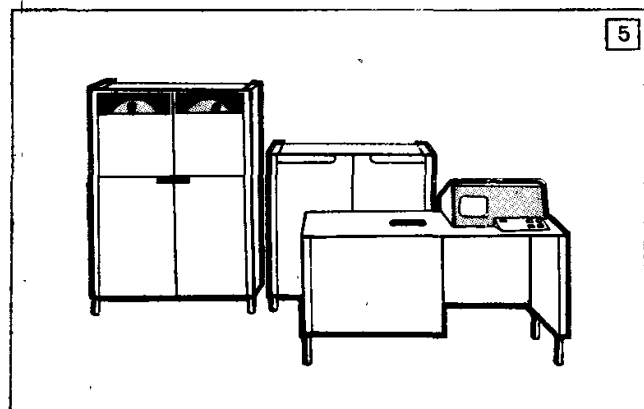
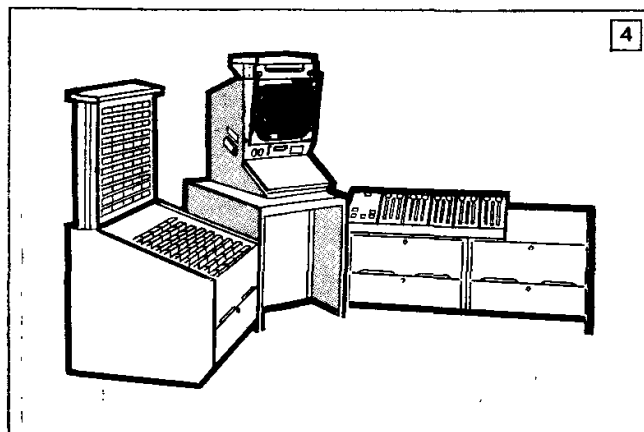
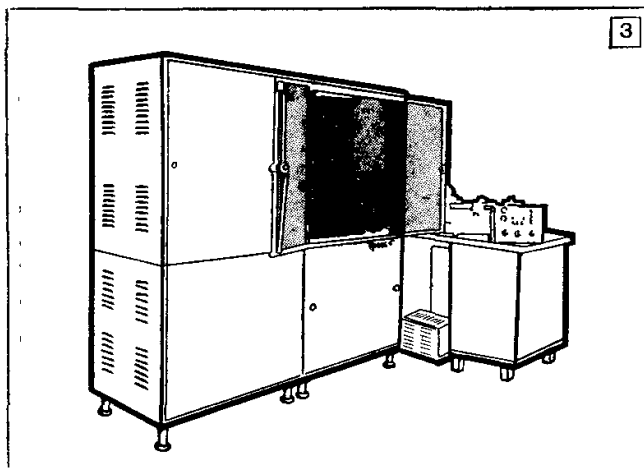
чительно большей емкостью кодового поля (5 тыс. двоичных знаков), скоростью сортировки (90 карт в 1 сек) и меньшим средним временем поиска (30 сек).

Микрофильмы форматные являются небольшими отрезками рулонных микрофильмов, их можно рассматривать как разновидность диамикрокарт. На их основе создаются И.-п. у. различной степени сложности.

Непрерывные носители информации уступают дискретным в удобстве и простоте упорядочения их массивов, однако основанные на них устройства отличаются значительно большим быстродействием. Наиболее распространены И.-п. у. для поиска документов, записанных на рулонных микрофильмах. Их начали разрабатывать в 30-х годах 20 ст. в

они получили название микрофильмовых селекторов. Эти устр-ва часто используются для реализации 2-го контура ИПС со сравнительно небольшими массивами документов. Наблюдается тенденция к их упрощению до уровня читально-копировальных аппаратов с автомат. протяжкой микрофильма и простейшими приспособлениями для поиска отдельных его кадров.

Осн. микрофильмовые селекторы имеют следующие характеристики: «Поиск ДВ» (СССР,



3. Микрофильмовый селектор «Поиск ДВ».

4. Микрофильмовый селектор «Лоудстар».

5. Информационно-поисковое устройство на видеомагнитной ленте «Видеофайл».

1967) использует негативный неперфорированный 35 мм микрофильм с 15-кратным уменьшением, в 1 м помещается до 19 кадров, ем-

кость кодового поля — 30 двоичных единиц, скорость протяжки фильма — 1 м/сек, емкость бобины — 150 м, время поиска — 75 сек (рис. 3); «Лоудстар» (США, 1961) использует негативный неперфорированный 16-мм микрофильм с 24-кратным уменьшением, в 1 м помещается до 115 кадров, емкость кодового поля — 1 двоичная единица, скорость протяжки фильма — 3 м/сек, емкость бобины — 30,5 м, время поиска — 5 сек (рис. 4). Перфорированные ленты применяются в автоматах типа «Супертайпер», «Дюра-мач» (США) и «Оптимат» (ГДР), которые используются как вводные устр-ва в ЭЦВМ при реализации на них различных информационных систем, в т. ч. и ИПС.

Ленты магнитные, диски магнитные и барабаны магнитные применяются в основном для реализации внешних запоминающих устройств в ЭЦВМ, реже — в спец. И.-п. у., в т. ч. — с видеомагнитной записью изображений документов. Примером такого спец. И.-п. у. может служить И.-п. у. на видеомагн. ленте «Видеофайл» (США, 1958—64, рис. 5). При реализации И.-п. у. на ЭЦВМ эти машины используются не только для выдачи ответов на разовые информационные запросы, но и для избирательного распространения информации, подготовки оригинал-макетов печатных указателей библиографического и координатного типа и в других видах информационного обеспечения.

Лит.. Воробьев Г. Г. Перфокартный метод документального учета в народном хозяйстве. М., 1967 [библиогр. с. 116—126]; Михайлов А. И., Черный А. И., Гиляревский Р. С. Основы информатики. М., 1968 [библиогр. с. 728—735]; Белоголов Г. Г., Котов Р. Г. Автоматизированные информационно-поисковые системы. М., 1968 [библиогр. с. 169—175]; Перфорированные карты и их применение в науке и технике. Пер. с англ. М., 1963. Р. С. Гиляревский, А. И. Черный.

**ИНФОРМАЦИОННО-ПОИСКОВЫЙ ЯЗЫК** — см. Язык информационно-поисковый.

**ИНФОРМАЦИОННО-СПРАВОЧНАЯ СИСТЕМА** — система регистрации, переработки и хранения информации, предназначенная для обеспечения абонентов сведениями справочного характера. Содержание выдаваемой информации определяется данными, накопленными в справочных массивах (СМ) системы. Функционально типичный процесс выдачи справки состоит в выполнении ассоциативного поиска в СМ и последующего осуществления требуемых содержательных и (или) структурных преобразований, а также оформления полученных сведений в виде документа или информационного сообщения спец. вида. К другим ф-циям И.-с. с. относятся длительное хранение больших объемов систематизированной информации, имеющей сложную внутреннюю структуру; пополнение и обновление хранимой информации и обеспечение обмена информацией с абонентами. Типичными примерами И.-с. с. являются справочные городские службы, библиографические отделы в библиотеках, оперативно-диспетчерские службы на предприятиях и т. п.

В состав И.-с. с. обычно входят следующие функциональные компоненты: хранилище ин-

формации или *запоминающее устройство (ЗУ)*; устр-ва преобразования, передачи и отображения информации; *каналы связи* и передачи данных, а также т. н. процессор, осуществляющий основные ф-ции по обработке информации (под процессором можно подразумевать как ЭЦВМ, так и коллектив людей, выполняющих аналогичную роль в И.-с. с.). Хранение информации и ее обработка могут выполняться централизованно или в нескольких взаимосвязанных, но территориально удаленных друг от друга пунктах, что соответствует двум осн. типам организации И.-с. с.

По характеру представления и интерпретации выводимой и хранимой информации различают И.-с. с. документального и фактографического типа. В документальн. И.-с. с. информация хранится и выдается абоненту в виде документов (напр., статей, патентов, тех. документации). В отд. случаях абоненту сообщается перечень адресов документов в ЗУ. Результатом работы фактографической И.-с. с. является, как правило, совокупность фактов, т. е. значений количественных величин, а также наименований предметов, процессов, явлений и т. п. На практике часто встречаются системы, выдающие информацию как документального, так и фактографического характера. Такие системы наз. *документально-фактографическими информационными системами*. И.-с. с., особенно фактографические, могут отличаться одна от другой сложностью выполняемой переработки информации. Простейшими в этом смысле являются *информационно-поисковые системы*, в которых формирование справки сводится к поиску требуемой информации в СМ. В наиболее сложных системах над результатами поиска может осуществляться сравнительно сложная смысловая обработка этих результатов (например извлечение фактов из текста найденных статей).

Функциональные возможности, эффективность и область применения И.-с. с. существенно зависят от степени автоматизации и механизации процессов обработки, ввода—вывода и хранения информации. Самые большие перспективы здесь связаны с использованием автоматизированных И.-с. с. (АИСС), построенных на базе ЭЦВМ и сопряженных с ней средств хранения, передачи и отображения информации. АИСС состоит из следующих осн. частей: тех. оснащения, матем. обеспечения и информационной базы.

Тех. оснащение АИСС включает в свой состав ЭЦВМ, являющуюся функциональной основой процессора системы; комплект периферийного оборудования для ввода — вывода, передачи и подготовки информации; устр-ва для связи абонента с ЭЦВМ, а также различные типы ЗУ для хранения больших объемов разнородной информации. В качестве ЗУ в АИСС используют накопители на магн. лентах, дисках и барабанах, механизированные устр-ва хранения микрофильмов, диамикроперфокарт и другие. Система связи АИСС с абонентами строится обычно на базе стандартных устр-в

связи (напр., *телетайпов*), соединяемых с ЭЦВМ через телеграфные или телефонные каналы. Большое распространение в настоящее время получили абонентские пульта, оборудованные экранами для отображения выводимой из ЭЦВМ информации, и клавиатурой для ввода данных и информации управляющего характера (см. *Экранный пульт*).

Информационная база АИСС представляет собой совокупность СМ, в которых хранится информация, составляющая предметную область определения системы. Эта информация организована в ЗУ с учетом требований к необходимому времени выборки данных, форме и виду их представления. Количество СМ определяется содержательной структурой области определения АИСС, принятыми порядком внесения информации при обновлении информационной базы и характером подготовки исходных данных для решения задач. Так, напр., организация СМ в виде нескольких одинаковых по содержанию, но различным образом упорядоченных *массивов*, существенно сокращает время решения типовых справочных задач. В состав матем. обеспечения АИСС включают набор *программ*, реализующих различные *алгоритмы* переработки информации и управления процессом функционирования АИСС; комплекс формализованных языков (см. *Языки формальные*), предназначенных для описания информации, циркулирующей в системе, а также алгоритмов обработки; совокупность массивов информации служебного характера (словари, кодирующие таблицы и т. д.) и руководящих материалов по применению матем. обеспечения. Ключевыми компонентами матем. обеспечения АИСС являются: *язык информационный*, внеш. язык для формулирования запросов к системе, *библиотека стандартных подпрограмм*, *операционная система* с программой-диспетчером, язык представления выводимой информации и блок реализации ассоциативного поиска для заданного типа критерия смыслового соответствия.

Производительность И.-с. с. во многом определяется организацией процесса функционирования системы, что связано с распределением ресурсов, выбором режимов работы И.-с. с. (ретроспективный поиск, избирательное распределение информации и др.), заданием дисциплины обслуживания абонентов и обеспечением рациональной последовательности выполнения отдельных этапов и ф-ций обработки. Современная организация функционирования АИСС базируется на использовании *мультипрограммирования*, организации вычисл. процесса (см. *Вычислительных работ методы организации*) с одновременным решением нескольких задач и обслуживания абонентов и (или) задач в *режиме разделения времени*.

Специфическими особенностями АИСС являются: широкое использование дисциплины приоритетного обслуживания абонентов и задач; совмещение режимов информирования по расписанию с оперативной обработкой нестан-

дартных запросов, поступающих произвольно во времени; реализация одновременной многоканальной дистанционной связи с абонентами. АИСС значительно расширяют возможную область применения И.-с. с. Напр., АИСС также широко используются в составе *автоматизированных систем управления* в пром-сти, экономике, на транспорте, а также для автоматизации управления предприятиями и науч. орг-циями (см. *Автоматизированные системы управления предприятием*).

Лит.: Михайлов А. И., Черный А. И., Гилревский Р. С. Основы информатики. М., 1968 [библиогр. с. 728—735]; Стогний А. А., Зайцев Н. Г. Автоматизированные информационно-справочные системы, их назначение, характеристики и основные требования к ним. «Кибернетика», 1969, № 4; Мидоу Ч. Анализ информационно-поисковых систем. Пер. с англ. М., 1970; Ланкастер Ф. У. Информационно-поисковые системы. Характеристики, испытание и оценка. Пер. с англ. М., 1972; Глушков В. М., Стогний А. А., Афанасьев В. Н. Автоматизированные информационные системы. М., 1973; Белоногов Г. Г., Богатырев В. И. Автоматизированные системы. М., 1973 [библиогр. с. 313—320]. В. Н. Афанасьев.

**ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА** — система, которая на основании информации о состоянии объекта вырабатывает и принимает решение по управлению им. Структурно И.-у. с. делится на две подсистемы: подсистема обеспечения информацией службы управления объектом и подсистема выработки и принятия решений по управлению объектом. В реальных системах управления ф-ции И.-у. с. выполняет административно-управленческий персонал: учетчики (регистрация и учет данных), бухгалтерия (отражение текущего вида управляемого объекта, систематизация данных), конструкторский, пластовый и др. отделы (выработка решений), диспетчерский, технологический и др. отделы (принятие решений). Каждый отдел на основании систематизированных данных подготавливает необходимую информацию, в результате чего потоки информации в существующих И.-у. с. часто дублируют друг друга. Наличие единого планового начала в управлении нар. х-вом СССР создает иерархическую структуру из различных И.-у. с. Это значит, что И.-у. с. нижестоящего уровня осуществляет выработку и принятие решений для достижения управляемым объектом цели, заданной И.-у. с. вышестоящего уровня. Выработка цели в И.-у. с. вышестоящего уровня осуществляется по фактической информации о состоянии объектов управления нижестоящего уровня и цели, заданной И.-у. с. вышестоящего уровня. Практически цель задают в виде перечня значений показателей, которых должен достичь управляемый объект.

Подсистема обеспечения информацией служб управления объектом осуществляет свои функции с помощью различных массивов данных об этом объекте. Условно-постоянный массив данных характеризует структуру объекта управления (к-во элементов, их характеристики, взаимосвязь и т. д.). Напр., структуру предприятия образуют цехи осн. и вспомогательного произ-в, склады,

выпускаемая продукция, вхождение деталей в узлы, технологические схемы прохождения деталей по цехам и т. д. Массив, формируемый по данным из первичных документов, отражает динамику состояния управляемого объекта. Напр., данные о межцеховом движении деталей, обеспеченности осн. произ-ва деталями, рабочей силой и пр., о реализации продукции, расходе деталей и запчастей и т. д. Массив данных, накопленный по структурным элементам объекта управления, содержит информацию о трудовых, материальных и денежных ресурсах, фактически затраченных на изготовление определенного к-ва или веса каждого вида конечного продукта. Массив нормативных данных содержит информацию о расходах материальных, трудовых и денежных ресурсов на изготовление единицы конечного продукта. Нормативные данные делятся на расчетные и статистические. Расчетные нормативы используют при запуске в произ-во нового вида продукции или вводят в директивном порядке, напр., нормы налогов. Статистические нормативы получают в результате деления суммарной величины расхода ресурсов (материальных, трудовых, денежных) на к-во или вес изготовленного продукта и используются для корректировки расчетных нормативов. В зависимости от запроса, поступающего в подсистему, по данным одного из массивов или по совокупности массивов формируется ответ.

Подсистема выработки и принятия решений занимается прогнозированием состояния управляемого объекта, вырабатывает и принимает решение по достижению заданной цели. Прогнозирование в подсистеме реализуется с помощью планирования на разных уровнях: перспективного, годового, квартального, декадного и сменно-суточного. Развитие производственных отношений, разнообразие выпускаемой продукции и большие скорости протекания производственных процессов на предприятиях порождают многовариантность и неопределенность в достижении поставленной цели. Это ведет к необходимости использования экон.-матем. методов, что в свою очередь требует более детальной и достоверной информации об управляемом объекте. Увеличение объемов информации об управляемом объекте и сложность ручного расчета экон.-матем. моделей явились причиной внедрения в практику работы И.-у. с. *автоматизированных систем управления*.

Лит.: Немчинов В. С. Экономическая информация. В кн.: Системы экономической информации. М., 1967; Ланге О. Целое и развитие в свете кибернетики. В кн.: Исследования по общей теории систем. М., 1969. М. Хайриасов.

**ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ ТЕХНИЧЕСКОЕ ОСНАЩЕНИЕ** — комплекс технических средств, которыми оснащены *информационно-управляющие системы* и *автоматизированные системы управления предприятием* (см. также *Автоматизированные системы управления в народном хозяйстве, Системотехника*).

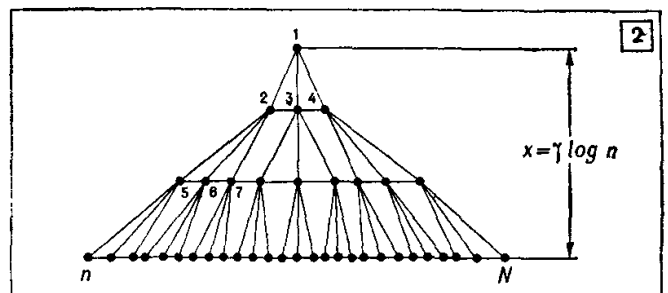
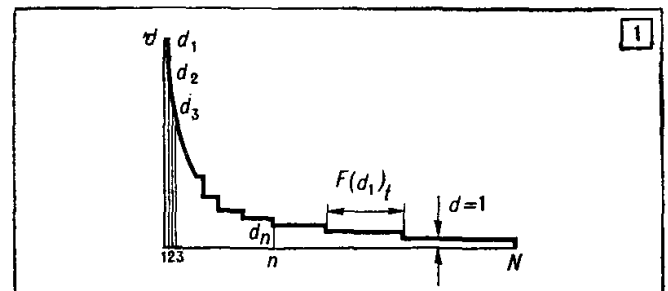
**ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПОТОКИ НАУКИ** — система зафиксированных научных и технических результатов, содержащихся в книгах, периодических изданиях, патентах, отчетах и др. формах хранения и передачи научно-технических знаний. И. п. н. — это не только объект исследования, но и каналы связи науки, без которых она не могла бы функционировать как сложная динамическая информационная система. По ориентировочным данным в мире существуют 30—40 тыс. периодических изданий, ежегодно публикуется 2 млн. статей, 75 тыс. описаний к патентам и авторским свидетельствам. И. п. н., так же как и наука в целом, представляют собой сложные системы с объективно существующими закономерностями. Изучение закономерностей систем И. п. н. является одной из центральных задач информатики и науковедения. При организации памяти информационно-поисковых систем (ИПС) и разработке алгоритмов их работы должны учитываться эти закономерности.

В основе интегральной модели систем И.п.н. лежат статистические распределения ученых по производительности, статей по журналам и т. п. Еще в 1926 показано, что если в к.-н. области знаний расположить ученых по рангам, пропорционально к-ву принадлежащих им публикаций, то получается распределение типа «гиперболическая лестница» (рис. 1), где  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$  — к-во публикаций ученого 1, 2, 3, ...,  $n$ -го ранга,  $N$  — общее число элементов распределения. В 1946 показано, что аналогичное распределение получается, если упорядочить журналы по к-ву публикаций по к.-л. проблеме (т. н. закон рассеяния информации). В 1949, изучая распределение частот слов в достаточно длинном тексте, полу-

чили аналогичное распределение  $P_n = \frac{c}{n^\gamma}$  (распределение Ципфа), где  $c$  — константа,  $n$  — ранг слова в словаре,  $\gamma \approx 1$  для естественных языков. В информационном распределении «гиперболическая лестница» отражаются общие свойства сложных систем иерархического типа. Общим для таких систем является древовидная структура (рис. 2). Распределение, показанное на рис. 1, отражено в структурной форме на рис. 2. Элементы, находящиеся на рис. 1 в пределах одной ступени, на рис. 2 находятся в пределах одного слоя. Т. н. закон Брэдфорда соответствует значению  $\gamma \approx 1$  и качественно формулируется так: «Если научные журналы располагаются в порядке уменьшения их продуктивности, т.е. числа статей по данному вопросу, то их можно разделить на основные периодические издания, главным образом посвященные данному вопросу, и на несколько групп, или зон, содержащих то же к-во статей, что и в основной зоне. При этом к-во изданий в основной группе и последующих зонах будет относиться, как  $1 : k : k^2$ ».

Более точно было бы говорить не о «рассеянии», а о «концентрации» публикаций в не-

большой зоне «специализированных» изданий. Это подтверждает накопленная статистика по распределению публикаций к.-л. области знаний в периодич. изданиях, которая свидетельствует, что в сравнительно ограниченном к-ве журналов (5—10%) сконцентрировано около 50% публикаций по избранной теме. Распределение публикаций, рассматриваемое во времени, отражает определенные существенные закономерности развития самой науки. Сведения из «школьной арифметики», напр., «рассеяны» по всем журналам потому,



1. Информационное распределение «гиперболическая лестница».  
2. Структурная модель распределения «гиперболическая лестница».

что «школьная арифметика» перестала существовать как «система», и распределение ее публикаций в литературе достигло значения максимальной энтропии. И наоборот, в истории науки известно немало примеров, когда к.-н. научное направление, которое возникло в одном из научных учреждений, отражается только в публикациях печатного органа данного учреждения. Между этими крайними случаями имеется множество состояний, которые отражаются в реальных распределениях, что приводит к изменению параметра  $\gamma$  от 0 до  $\infty$ . Однако в любом случае «рассеяние» информации — такая же объективная закономерность, как, напр., распределение частот слов в тексте, и определяется эта закономерность не «хаосом» в документалистике и издательском деле. Эту закономерность приходится учитывать при разработке информационных систем, комплектовании фондов библиотек и т. д.

Большое практическое значение имеет прогнозирование роста И. п. н. Потребности планирования работы издательств, центральных и отраслевых информационных служб и управления научными исследованиями связаны с прогнозированием не роста в целом мирового информационного массива, а роста публи-

каций в отд. областях науки. В таких отд. областях науки рост числа публикаций является функцией от числа научных работников:  $D = f(N)$ . Однако линейная зависимость между ними существует только в одном случае — когда продуктивность всех научных сотрудников одинакова. В общем случае вид этой функции определяется законом распределения ученых по продуктивности.

Одной из важных черт развития науки в период научно-технич. революции является увеличение «валентности» отд. науч. результатов, их способности обогащать «чужие» области науки. Этот факт вместе с огромным ростом самих науч. исследований и увеличением в связи с этим к-ва публикаций иногда воспринимается как убедительное доказательство информационного кризиса. В действительности эту иллюзию «погребения» ученых под массой статей создают не сами по себе потоки публикаций, а поток достижений науки. В этих условиях традиционные средства хранения и поиска информации уже не могут удовлетворить ученых, надо разработать и создать информационно-поисковые и информационно-логические системы, основанные на новых принципах и учитывающие сложные закономерности систем информационных потоков.

Лит.: Добров Г. М. Наука о науке. Введение в общее наукознание. К., 1966 [библиогр. с. 258—267]; Михайлов А. И., Черный А. И., Гиллярский Р. С. Основы информатики. М., 1968 [библиогр. с. 728—735]; Козачков Л. С. О некоторых проблемах релевантности в информатике и науковедении. — Шрейдер Ю. А., Осипова М. А. О некоторых динамических моделях в информатике. «Научно-техническая информация. Серия 2», 1969, № 8; Козачков Л. С. Некоторые методологические вопросы теории информационно-поисковых систем. «Научно-техническая информация. Серия 2», 1969, № 12. Л. С. Козачков.

**ИНФОРМАЦИОННЫХ РАБОТ АВТОМАТИЗАЦИЯ** — см. *Информатика, Машинный перевод, Поиск информации автоматический, Реферирование автоматическое.*

**ИНФОРМАЦИЯ** (лат. *informatio* — разъяснение, изложение, осведомленность) — одно из наиболее общих понятий науки, обозначающее некоторые сведения, совокупность каких-либо данных, знаний и т. п. Понятие И. обычно предполагает наличие двух объектов — источника И. и потребителя И. (адресата). И. можно рассматривать как философскую категорию, и в современном учении об И. можно видеть конкретизацию ленинского тезиса о свойстве отражения, присущего всей материи. Отражение не сводится к простому физ. взаимодействию двух объектов. Информация, переносимая сигналом, как правило, всегда имеет некоторый смысл (для потребителя), отличный от смысла самого факта поступления сигнала. Это достигается за счет спец. соглашений, по которым, скажем, один удар барабана свидетельствует о приближении противника. Для человека, не знающего о таком соглашении, этот звук такой И. не несет. Другими словами, И. бывает о чем-то, и сигнал об этом, принимаемый потребителем, может и не иметь прямой физ. связи с событием или явлением, о котором он сигнализирует. В этом смысле

И. выступает как свойство объектов и явлений (процессов) порождать многообразие состояний, которые посредством отражения передаются от одного объекта к другому и запечатлеваются в его структуре (возможно, в измененном виде).

При изучении И. возникают проблемы в техническом, семантическом и прагматическом аспектах. Технические — посвящены вопросам точности, надежности, скорости передачи сигналов связи и т. п. Семантические — проблемы направлены на исследование того, как точно можно передавать смысл текста с помощью кодов. Прагматические проблемы заключаются в том, насколько эффективно И. влияет на поведение адресата. Понятие И. является одним из осн. понятий кибернетики (подобно понятию энергии в физике). При любом процессе управления или регулирования, осуществляемом живым организмом или автоматически действующей машиной либо устройством, происходит переработка входной И. в выходную.

Для того, чтобы И. могла быть передана от источника к адресату, состояния источника должны быть каким-то образом отражены во внешней (по отношению к источнику и адресату) среде, воздействующей на приемные органы адресата. Следовательно, И. во внеш. среде выражается с помощью некоторых материальных объектов (носителей И.), ассортимент и способ расположения которых задают И. Отображение мн-ва состояний источника во мн-во состояний носителя наз. способом кодирования, а образ состояния при выбранном способе кодирования — кодом этого состояния (или кодом И., задаваемой этим состоянием).

Абстрагируясь от физ. сущности носителей информации и рассматривая их как элементы некоторого абстрактного мн-ва, а способ их расположения как отношение в этом мн-ве, приходят к абстрактному понятию кода И. как способа ее представления. При таком подходе код И. можно рассматривать как модель математическую, т. е. абстрактное мн-во с заданными на нем предикатами. Эти предикаты определяют тип элементов кода и расположение их друг относительно друга.

Чаще всего каждое отдельное состояние источника представляется одной буквой некоторого конечного алфавита  $A$ , а последовательность сменяющихся во времени состояний — последовательностью букв, т. е. словом в алфавите  $A$ . В зависимости от того, каким кодом задана одна и та же И., ее передача и переработка представляет различные трудности. Так, напр., в ЦВМ удобнее представлять числа в двоичной системе счисления, а не в десятичной, числовую И. удобнее передавать спец. телеграфным кодом, а не с помощью телефона. Различные способы представления И., специально приспособленные для конкретных случаев, связанных с ее передачей, хранением и переработкой, рассматривает кодирования теория (см. также Кодирование автоматное).



В настоящее время наиболее исследованы тех. проблемы И. Раздел науки, посвященный этим проблемам, наз. *информации теорией* (см. также *Информации передача*). Основы этой науки заложил амер. ученый Р. Хартли в 1928, определив меру к-ва И. для некоторых задач *каналов связи*. Позже другую, более общую меру к-ва И. для этих же задач предложил амер. ученый К.-Э. Шеннон (р. 1916), введя в качестве меры неопределенности системы энтропию  $H = - \sum_i p_i \log p_i$ , где  $p_i$  —

вероятность того, что система находится в  $i$ -ом состоянии. Величина устраненной неопределенности системы в результате получения И. принята количественной мерой И. Введенное таким образом *информации количество* не совпадает с общепринятым понятием количества И. как числа и важности полученных сведений, т. к. при исследовании тех. проблем не учитываются ни семантические, ни прагматические аспекты. Введенное в теории И. понятие количества И. служит только для решения тех. вопросов, напр., оптим. кодирования И. (при этом отвлекаются от ее смысла).

Введенное К.-Э. Шенноном понятие к-ва И. не адекватно интуитивному представлению об И. и является уточнением последнего для некоторого класса ситуаций, возникающих при изучении каналов связи. Понятие к-ва И. возникло из задач теории связи и, по существу, применимо только к этим задачам. Недостаточность такого представления об И. начинает проявляться при попытке увязать к-во получаемой И. с поведением получателя, решающего некоторую задачу. В этом случае требуется иметь меру И., отражающую полезность сообщения для получателя. Здесь энтропия не всегда приемлема в качестве меры неопределенности. Для задач, в которых система характеризуется более сложной мерой неопределенности, измеряемая И. имеет новые качественные стороны.

Для некоторых задач в качестве меры неопределенности можно использовать выражение:  $N(P, Q) = - \sum_i p_i \log q_i$ . Величина  $N(P, Q)$

рассматривается как неопределенность системы с распределением вероятности состояния  $P$  для получателя, который исходит из гипотезы, что это распределение равно  $Q$ . Энтропия является частным случаем выражения  $N(P, Q)$  при  $P = Q$ .

В этих задачах предполагается, что сообщения уточняют представление получателя о системе. И. о системе, как и прежде, измеряется изменением неопределенности о системе. При этом изменения могут быть как увеличивающие, так и уменьшающие эту неопределенность.

Различают несколько видов И. *Полная И.* — это к-во И., приобретаемое при полном выяснении состояния некоторой системы и равное энтропии этой системы. *Частная И.* — к-во И., содержащееся в отдельном сообщении, утверждающем, что система находится в

определенном мн-ве состояний. *Полная взаимная И.* — уменьшение неопределенности системы  $X$  в результате того, что становятся известными положения системы  $Y$ . *Частная взаимная И. о системе* — это к-во И. о системе  $X$ , содержащееся в отдельном сообщении, указывающее, что система  $Y$  находится в определенном мн-ве состояний. *Полезная И.* — к-во И., содержащееся в отдельном сообщении, уменьшающее неопределенность сведений о системе. Изменение неопределенности сведений о системе под влиянием сведений в поступающих сообщениях интерпретируется как процесс запасаения полезной И. о системе. Отрицательные значения полезной И. расцениваются как *дезинформация*. Сообщения, не изменяющие неопределенности сведений о системе, не несут в себе полезной И. В данной постановке задачи может оказаться, что одно и то же сообщение содержит разное к-во полезной И. для различных получателей. Если получатели исходят из разных гипотез, то одно и то же сообщение может уточнить представление о системе для одного из получателей и не добавить ничего нового к сведениям другого получателя. Такие качественные стороны измеряемой И. более соответствуют нашему интуитивному представлению о ней. Но для рассмотренных определений И. существенна статистическая модель ситуации, которая не всегда может быть создана.

Очень важной характеристикой И. является ее доступность для получателя. К-во И., которое нервная система человека способна подать в мозг при чтении текстов, составляет примерно 1 бит за 1/16 сек. Эта порция И. задерживается в сознании примерно 10 сек, т. е. человек воспринимает 16 бит в 1 сек, и одновременно в его сознании удерживается 160 бит. Что же касается др. видов И., то пропускная способность нервной системы может быть гораздо большей. Для задач анализа текстов (напр., *машинного перевода*) эта характеристика способности получателя к восприятию И. является одной из важнейших.

Машинный перевод невозможен без наличия в машине определенных сведений. В результате анализа большого числа текстов этот объем сведений увеличивается, и способность машины воспринимать И. растет. Такой процесс интерпретируется как пополнение и перестройка машинного справочника (*тезауруса*) в результате анализа текстов. Тезаурус — описание мн-ва состояний некоторой модели внеш. среды. Текст рассматривается как некоторый оператор над тезаурусом. *Количеством семантической И.*, содержащейся в тексте относительно тезауруса, наз. мера изменения тезауруса в результате анализа текста. Подобная концепция семантической И. способна обслужить ситуации, где возникает потребность в оценке прагматической ценности И. Понятие семантической И. может приобрести общественный характер, если создать тезаурусы, являющиеся моделью общественного мышления.



Лит.: Колмогоров А. Н. Предисловие к русскому изданию. В кн.: Эшби У. Р. Введение в кибернетику. Пер. с англ. М., 1959; Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. М., 1973 [библиогр. с. 487—500]; Шрейдер Ю. А. О количественных характеристиках семантической информации. «Научно-техническая информация», 1963, № 10; Вонггард М. М. Проблема узнавания. М., 1967; Урсул А. Д. Природа информации. М., 1968; Хартли Р. В. Л. Передача информации. В кн.: Теория информации и ее приложения. М., 1959; Бриллюэн Л. Наука и теория информации. Пер. с англ. М., 1960; Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 [библиогр. с. 783—820]; Фано Р. М. Передача информации. Статистическая теория связи. Пер. с англ. М., 1965.

Д. К. Лисенбарт, Ю. П. Скокан.

**ИНФОРМАЦИЯ ДОКУМЕНТАЛЬНАЯ** — информация, закрепленная на каком-либо материальном носителе. Примером И. д. может служить та часть информации научной, которая зафиксирована в научных документах, а также различные бухгалтерские ведомости, банковские документы и т. д. В кибернетике данное понятие употребляется в связи с автоматизацией обработки и поиска документальной информации.

**ИНФОРМАЦИЯ НАУЧНАЯ** — логическая информация, адекватно отображающая объективные закономерности природы, общества и мышления. Примером И. н. могут служить законы физики, химии, математики и т. д., установленные в ходе развития этих наук. Поскольку основу процесса познания составляет общественно-истор. практика — материальное произ-во, классовая борьба и т. п., то источником И. н. служат не только науч. исследования, но и все виды деятельности людей по преобразованию природы и общества. И. н. делят на виды: по областям ее получения и (или) использования (биол., полит., тех., управленческая, хим., физ. и т. п.) и по назначению (массовая и специальная).

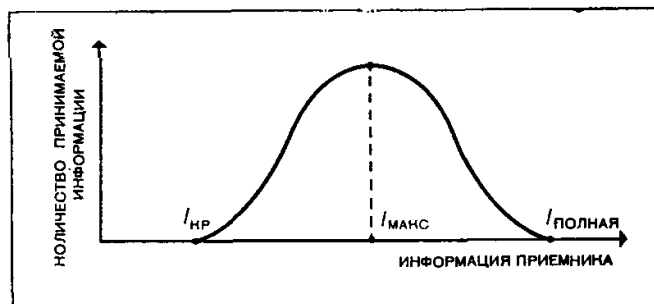
И. н. является результатом переработки и обобщения абстрактно-логич. мышлением сведений и данных, получаемых непосредственно в процессе познания. Под адекватностью отображения И. н. объективных закономерностей природы, общества и мышления понимается степень правильности отображения, обусловленная достигнутым уровнем науки. Научные гипотезы и прогнозы являются И. н., подлежащей проверке на практике, в результате чего они либо превращаются в теории, либо отбрасываются как ошибочные. Критерий использования в общественно-исторической практике позволяет отличать И. н. от бытовой информации, тривиальных истин, научной фантастики и т. п. В кибернетике И. н. применяют чаще всего в связи с автоматизированным поиском, поскольку большой объем И. н. затрудняет поиск и использование ее. См. также *Документ научный, Информатика, Информация документальная, Научно-информационная деятельность*.

Р. С. Гуляревский, Л. Э. Пшеничная, А. И. Черный.

**ИНФОРМАЦИЯ СЕМАНТИЧЕСКАЯ** — смысл или содержание, заключающиеся в данном сообщении. В отличие от статистических характеристик информации для И. с. не суще-

ствует общепринятой количественной меры. Содержащийся в сообщении смысл описывается путем соотнесения с хранящейся в приемнике (*тезаурус*) И. с. Один из важных методов описания И. с. состоит в переводе сообщения на стандартизированный семантический язык, свойственный данному тезаурусу.

Сведения, полученные в результате приема сообщения, меняют исходный тезаурус. Мету этого изменения можно принять в качестве характеристики к-ва И. с., содержащейся в данном сообщении относительно данного при-



емника. Недостаточно развитый тезаурус получит либо нулевую, либо весьма малую И. с. из данного сообщения (не сможет его «понять»). Слишком полный тезаурус также не сможет получить много И. с. (информация не будет для него новой). К-во И. с., принимаемой тезаурусом из фиксированного сообщения, зависит от к-ва имеющейся в тезаурусе (приемнике) И. с. так, как показано на рисунке. Методы декодирования И. с. тесно связаны с методами анализа смысловой структуры текстов на естественном языке, разрабатываемым в связи с автоматизацией перевода, индексирования, реферирования и т. п. См. *Аннотирование автоматическое, Машинный перевод, Реферирование автоматическое*. Ю. А. Шрейдер. IPL-V — списковый язык программирования. В IPL-V исходную информацию задают в виде списковых структур. Для обработки информации имеется около 150 базисных процессов (операторов), включающих арифм. процессы («сложить», «умножить», «проверить  $a > b$ »), списковые процессы («вставить символ в список», «стереть список», «скопировать список»), процессы обмена с внеш. памятью, процессы ввода и вывода и др. Для выполнения циклически повторяемых операторов имеется спец. тип процессов, называемых генераторами, которые обеспечивают просмотр списковых структур. Программу на языке IPL-V представляют также в виде списковых структур. См. *Языки списковые*.

Лит.: Newell A., Tonge F. An introduction to information processing language V. «Communications of the Association for Computing Machinery», 1960, v. 3, № 4.

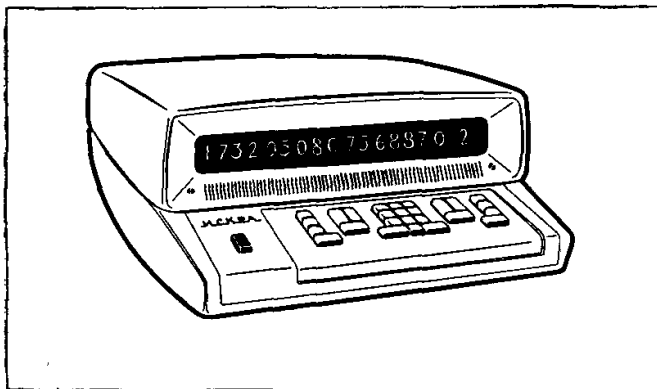
Т. А. Гринченко.

**ИСКЛЮЧЁННОГО ТРЕТЬЕГО ЗАКОН** — положение, по которому из двух высказываний, одно из которых является отрицанием другого, истинным является одно и только одно. Т. е. истинным является либо то, что утверждает высказывание  $p$ , либо то, что утверждает  $\neg p$ . Третьего не бывает. В классическом исчисле-

нии высказываний этот закон принимается, т. е. выводима теорема  $p \vee \neg p$ . И. т. з. неоднократно подвергался критике, носящей философский характер. Это привело к формулировке и изучению логич. систем, в которых И. т. з. не выполняется (см. *Логика неклассические*).

М. И. Кратко.

«ИСКРА» — настольная электронная вычислительная машина клавишная, предназначенная для выполнения научно-технических и учетно-статистических расчетов. Разработана в Ин-те кибернетики АН УССР в 1966. От-



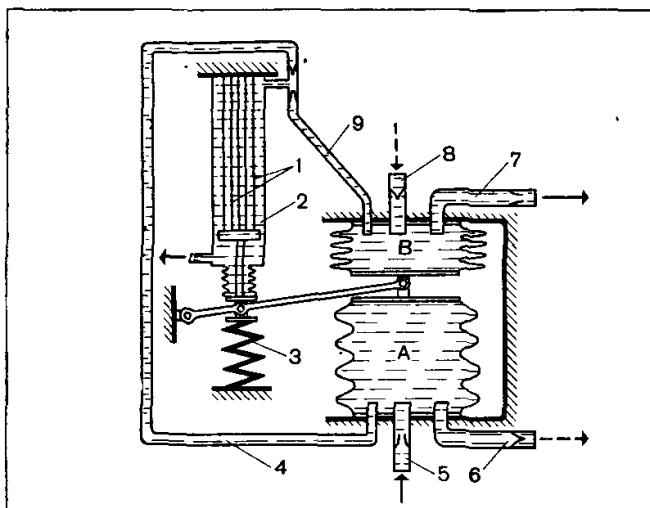
Настольная клавишная электронная вычислительная машина «Искра».

личается от аналогичных машин более высокой степенью автоматизации вычислительных и вспомогательных операций, логическим построением, позволяющим автом. и полуавтом. выполнять вычисления сложных формул, прямых и обратных элементарных функций и т. п. без записи промежуточных результатов. Обладает высокой надежностью и технологичностью. Может выполнять с учетом знаков и занятых следующие операции над 16-разрядными десятичными числами: алгебраическое сложение — вычитание, алгебраическое сложение с константой, умножение, умножение на постоянный множитель, деление, деление на постоянный делитель, накопление — алгебраическое суммирование результата произведенного действия с содержимым накапливающего регистра, извлечение квадратного корня. Вычисление элементарных функций ( $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\lg$ ,  $\text{ctg}$ ,  $\text{sh}$ ,  $\text{ch}$ ,  $\text{th}$ ,  $\text{cth}$ ,  $e^*$ ,  $\ln$ ,  $\lg$  и др.) производится полуавтоматически, путем нескольких нажатий на клавиши без записи промежуточных результатов. Числа представлены в машине с естественным расположением запятой в десятичной системе счисления. Арифметических и запоминающих регистров — 5. Результаты произведенных действий наблюдаются на индикаторных устройствах двух вариантов: на 16-разрядном индикаторе с цифровыми индикаторными лампами, показывающем содержимое одного из регистров, или на индикаторе с электроннолучевой трубкой, показывающем содержимое любых трех из пяти регистров. В машине предусмотрена возможность вывода на печать и на перфоленты исходных данных, результатов вычислений с их знаками, а также специальных признаков, не подле-

жащих вычислениям на машине. Потребляемая мощность — 80 *ва*. Вес машины — 25 *кг*. Габаритные размеры 540 × 490 × 210 *мм*. Машина выпускается серийно. Имеется ряд модификаций: «Искра-11», «Искра-12», «Искра-22», «Рось», «Орбита».

Лит.: Корниенко Г. И. Настольная электронная клавишная вычислительная машина для научно-технических и учетно-статистических расчетов. В кн.: Механизация и автоматизация инженерного и управленческого труда. Кишинев, 1967. Г. И. Корниенко.

**ИСКУССТВЕННАЯ МЫШЦА** — полимерное тело волокнистой или пленочной структуры, получаемое искусственным путем вне живого организма, обладающее свойством обратимого сокращения и удлинения при изменении хим. состава окружающей жидкой среды. Прототипом И. м. явились модельные сократительные волокна, изготовленные сов. биохимиком В. А. Энгельгардом из белковых экстрактов. Затем синтетическим путем подобные сократительные структуры были получены зарубежными учеными В. Куном и А. Качальским. Пленки и волокна для И. м. изготавливают из некоторых поликислот и полиоснований способом молекулярного сшивания при нагреве или хим. сополимеризации. На основе полиакриловой кислоты и поливинилового спирта получены, напр., пленки, сильно сокращающиеся и удлиняющиеся при изменении рН окружающего раствора. Действие И. м. обусловлено явлением осмоса и молекулярных конформационных переходов, в частности, переходов спираль — клубок. Эти переходы совершаются в изотермических условиях. При этом хим. энергия жидкой среды прямо преобразуется в механическую (без промежуточного преобразования в тепло). По мех. показателям И. м. приближается к живой мышце: у нее, как и у живой мышцы, относитель-



Модель для исследования биологической насосной функции на искусственной мышце.

ное сокращение может достигать 50%, а усилие — до 5 *кгс/см²*. Скорость сокращения и удлинения зависит от толщины волокон (пленок) и скорости диффузии ионов-инициаторов — внутрь полимерного тела.

И. м. пригодны к использованию в системах автоматизации технологических процессов, требующих постоянства температуры и давления. Их применяют и при моделировании биол. подвижности. Примером моделирования биол. подвижности может быть модель биол. насосной ф-ции (рис.). В этой модели И. м. поставлена в режим автопульсаций путем введения механохим. обратной связи. Она кинематически связана с сильфонами (камерами переменного объема) А и В и при сокращении и удлинении поочередно перфузирует себя жидкостями А и В. Возвратное усилие создается пружиной 3. При сокращении волокон 1 в рабочую камеру 2 по трубопроводу 9 поступает жидкость В, вызывающая удлинение волокон, а при удлинении их по трубопроводу 4 протекает жидкость А сократительного действия. Пополнение жидкостей в сильфонах происходит через всасывающие трубопроводы 5 и 8. Автоколебательный режим устанавливается в такой системе вследствие запаздывания в канале обратной связи. Мех. энергия отдается в виде энергии пульсационного движения жидкостей в нагнетательных трубопроводах 6 и 7. С помощью такого моделирования воспроизводятся процессы перемещения жидких сред в биол. объектах, напр., движения протоплазмы в клетке или моторики и перистальтики внутр. органов животных.

Р. В. Беляков.

**ИСКУССТВЕННЫЙ РАЗУМ** — искусственно созданная система произвольной природы, предназначенная для решения сложных задач широкого класса. Задачи для И. р. можно ставить в строгой форме и на содержательном уровне; сформулировать их можно в терминах как какого-либо формального, так и естественного языков. Термин «И. р.» используют кроме того, для обозначения класса автономных тех. систем, реализующих операции восприятия, хранения и переработки информации и формирующих на этой основе целесообразное поведение в широком классе сред. В полном объеме системы такого типа не реализованы. Поэтому термин «И. р.» часто используют и для обозначения области научных исследований и проблем, связанных с построением систем указанного типа.

Разумность поведения искусственных систем, как правило, оценивается по аналогии с поведением человека при решении сопоставимых задач. Это позволяет ввести более конструктивное определение разума путем выделения осн. программ переработки информации, свойственных человеческому мозгу. Под такими программами понимают возможные последовательности изменений системы во времени, определяемые ее структурой. Различают следующие осн. программы, характеризующие мозг как информационную систему. *Восприятие внешней информации*. Воспроизведение этой программы в И. р. обеспечивает настройку анализаторов на восприятие определенной информации, *распознавание образов*, временное хранение и предварительную обработку полученной информа-

ции. *Эмоциональная оценка информации*. Наличие аналога такой программы в И. р. позволяет системе вырабатывать собственные критерии оценок, необходимые для организации целесообразного поведения в сложных средах. *Организация действий*, направленных на изменение положения системы во внешней среде или на изменение самой среды. Воспроизведение этой программы необходимо для активного взаимодействия И. р. с внешней средой. *Программа речи* обеспечивает возможность кодирования сложных и не строго определенных понятий и явлений, формирование новых понятий и т. п. Программа речи необходима для организации взаимодействия И. р. и человека или различных систем И. р. *Программа сознания*, в которой выделяют несколько уровней: а) внимание — выделение наиболее важной в данный момент информации; б) определение пространственных и временных взаимоотношений объектов, возможность предсказания их поведения; в) представления о собственном «Я» и «не — Я», г) воля — способность концентрировать и направлять внимание; д) воображение и способность различать реальное и нереальное. Воспроизведение этой программы в И. р. обеспечивает определение пространственных, временных и причинно-следственных отношений системы и объектов внешнего мира. «Уровень сознания» характеризуется мерой сложности отношений, которые может отразить система. *Творчество* — создание новой информации.

Проблематика И. р. включает в себя задачу построения теории «разумных» автоматов и разработку средств для их реализации. Теор. разработки ведутся в двух осн. направлениях. Первое связано с проблемой автоматизации отдельных интеллектуальных действий человека (игры, доказательства теорем и т. п.). Целью исследований является разработка приемов и построение специализированных устройств и конкретных программ для ЭВМ, обеспечивающих решение сложных матем. и логич. задач. Это направление известно под названием «искусственный интеллект». Осн. внимание здесь уделяется получению результата, а на способ его получения спец. ограничений не накладывается. Широко используются эвристические приемы — правдоподобные рассуждения, выводы по аналогии и интуитивные предположения. Наиболее интересные результаты получены в области доказательства теорем логики и геометрии, а также применительно к играм (см. *Доказательство теорем на ЭВМ*).

Второе направление теор. разработок связано с проблемой построения И. р. путем моделирования его биол. прототипа — человека. Целью исследований является разработка приемов и построение конкретных автоматов, которые могут вести себя в широком классе сред так, как это делает человек. Спец. ограничения накладываются на способы получения конечного результата — поведения. Существу-

ют два подхода к изучению мозга: феноменологический (психология) и структурный (физиология центр. нервной системы, нейропсихология); сформировались соответственно и два направления в моделировании — феноменологическое и структурное моделирование.

В рамках феноменологического моделирования рассматривается поведение человека как сложной информационной системы, функционирующей в некоторой среде, причем имеется возможность наблюдать взаимодействие системы со средой. Требуется построить систему-модель, поведение которой в выбранных ситуациях соответствовало бы поведению человека. Такая модель должна решать задачи, используя те же методы, способы и приемы переработки информации, которыми пользуется человек. На этом пути возникает проблема изучения алгоритмов переработки информации человеком, проблема изучения человеческих эвристик. Эту проблему решает программирование эвристическое, суть которого состоит в следующем. Путем экспериментального исследования поведения человека при решении задач из выбранного класса выявляются наиболее характерные приемы и методы решения. На этой основе выдвигается гипотеза об алгоритмах, описывающих выбранный тип деятельности человека. Для проверки гипотезы строится ее модель (обычно в виде программы для ЦВМ) и сопоставляется поведение модели и человека при решении задач из выбранного класса. Результаты сопоставления используются для коррекции гипотезы и модели. В области использования метода эвристического программирования для создания систем типа И. р. получены интересные результаты. Создан ряд моделей — «Логик-теоретик», «GPS», «Композитор», модель игры в шашки и др. Характерно, что в рамках эвристического программирования разрабатываются модели деятельности человека в строго определенных ситуациях (напр., деятельность по решению логич. задач фиксированного класса). Поэтому различные модели оказываются слабо связанными друг с другом и возникает важная задача теор. осмысливания и систематизации полученных разрозненных результатов. Эта задача является наиболее актуальной в эвристическом программировании. Кроме исследований по методу эвристического программирования в рамках феноменологического подхода проводятся работы, посвященные моделированию отдельных психических функций. Обычно эти работы тесно связаны с психол. проблематикой (моделирование процессов обучения, формирования понятий и др.), но их результаты можно использовать и в области И. р.

Структурное моделирование связано с попытками описать работу мозга как системы, порождающей поведение, т. е. объектом моделирования становятся присущие мозгу механизмы переработки информации. При этом человек рассматривается также как информационная система, функционирующая в некоторой среде. Предполагается, что суще-

ствует информация (неполная) о свойствах структурных элементов системы и о некоторых принципах их взаимодействия (нейрофизиология), а также информация о некоторых алгоритмах взаимодействия системы со средой (психология и эвристическое программирование). Требуется построить систему-модель, структура и поведение которой с заданной степенью точности соответствовали бы структуре и поведению системы-оригинала. Сущность направления состоит в том, что на основе имеющихся знаний выдвигают гипотезы о структуре информационных механизмов системы-оригинала и строят модели этих гипотез. Сравнение модели и оригинала используется для оценки правомерности гипотез о структуре.

Первые работы в области структурного моделирования связаны с попытками синтезировать искусственную нейронную сеть, которая проявляла бы свойства нервной системы. Большое внимание уделяется также моделированию нейронных структур рецепторных органов низших животных. Широко изучаются свойства моделей нервных сетей со случайной организацией. При исследовании функционирования нервных структур большое внимание уделяется вопросам обучения (см. *Персептрон*). Исходя из понимания мозга как моделирующего устр-ва, создающего собственные информационные внутренние модели объектов внеш. мира, явлений и т. п., в Ин-те кибернетики АН УССР выдвинута гипотеза о программах переработки информации мозгом и о механизмах, обеспечивающих выполнение этих программ. Согласно этой гипотезе деятельность коры больших полушарий головного мозга выражается в изменении активности внутренних информационных моделей и связей, которые вместе реализуют различные виды памяти (см. *Моделирование памяти*). Информационную модель со стороны ее субстрата можно сопоставить с нейронным ансамблем. Рассмотрение работы мозга на уровне взаимодействия информационных моделей как функциональных единиц мозга позволяет разрабатывать И. р. в виде систем с сетевой структурой, узлы которой ставятся в соответствие внутренним информационным моделям коры, а связи — отношениям между этими моделями. При таком подходе для предварительной организации сети используются сведения не только из нейрофизиологии, но и психологии, логики и др. Взаимосвязанные элементы такого рода составляют семантическую сеть. Одним из осн. принципов организации сети является иерархичность ее структуры. Состояние каждого элемента сети изменяется во времени непрерывно. В каждый момент времени активна вся сеть, т. е. каждый ее узел находится в состоянии некоторой активности. В процессе перераспределения активности между узлами и реализуются программы переработки информации. Упорядоченность в этот процесс вносит спец. система усиления — торможения, функцией которой является выбор в каждый момент времени наиболее ак-

тивных узлов сети и усиление их влияния на остальные узлы. Работа такой системы частично реализуется в сети одну из программ сознания — внимание. В зависимости от полноты представления и реализации в сети программ, описывающих разум человека, могут быть созданы как специализированные системы И. р., предназначенные для решения отдельных классов задач, так и системы широкого назначения, которые могут организовать «разумное» поведение в широком классе сред. Эта гипотеза использована при разработке ряда автоматов (реализованных в виде программ для ЦВМ), воспроизводящих в различном объеме отдельные программы переработки информации и некоторые их совокупности.

Кроме двух осн. направлений, в теории И. р. можно выделить и некоторые другие, напр., эволюционное моделирование. При таком моделировании человека рассматривают как продукт развития и предлагают заменить процесс моделирования человека моделированием процесса его эволюции.

Теор. работы в области И. р. имеют большое познавательное значение. Практич. использование полученных результатов осуществляется путем построения специализированных устр-в, предназначенных для частичной автоматизации умственного труда (программы-консультанты, информационно-справочные системы, автомат. диспетчеры и т. п.). В настоящее время из тех. средств реализации И. р. наиболее широко применяют ЭЦВМ, являющиеся осн. базой для реализации действующих моделей. Дальнейший прогресс в теории И. р. тесно связан с развитием *вычислительной техники* и разработкой *алгоритмических языков*, обеспечивающих высокую эффективность *взаимодействия человека с вычислительной машиной*.

Важное направление работ в области И. р. связано с созданием моделей поведения человека в виде специализированных тех. устр-в (*роботов*). Разрабатываемые в настоящее время феноменологические и структурные модели поведения можно рассматривать как вычисл. аналоги подобных тех. устр-в, позволяющие проверить пригодность принятых теор. положений и эффективность моделей. Следующим этапом является разработка конкретных тех. устр-в. Тип этих устр-в определяется типом соответствующих исходных моделей. Модели, разработанные при помощи феноменологического подхода, удобно реализовать в виде специализированных ЦВМ или аналого-цифровых комплексов. Структурные модели содержат большое к-во однотипных элементов, что дает возможность строить соответствующие тех. устр-ва в виде сетевых структур, состоящих из большого числа элементов, разнообразие типов которых также ограничено. В этой связи большое значение приобретает задача создания элементов, обладающих необходимыми характеристиками. Очевидно, для построения устр-ва, пригодного к организации достаточно сложного поведения, требуется значительное к-во элементов. Это приводит

к постановке ряда спец. проблем. Одна из них связана со стоимостью и компактностью элементов, другая — со сложностью предварительной организации и настройки системы. Лит.: Глушков В. М. Кибернетика и умственный труд. К., 1965; Амосов Н. М. Моделирование мышления и психики. К., 1965; Некоторые проблемы биоклибернетики, применение электроники в биологии и медицине, в 3. К., 1967; Амосов Н. М. Моделирование процессов мышления. «Кибернетика», 1968, № 2; Амосов Н. М. Искусственный разум. К., 1969; Самоорганизующиеся системы. Пер. с англ. М., 1964; Проблемы бионики. Биологические прототипы и синтетические системы. Пер. с англ. М., 1965; Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. Пер. с англ. М., 1965 [библиогр. с. 468—473]; Принципы самоорганизации. Пер. с англ. М., 1966; Вычислительные машины и мышление. Пер. с англ. М., 1967 [библиогр. с. 491—546]; Фогель Л., Оуэнс А., Уолш М. Искусственный интеллект и эволюционное моделирование. Пер. с англ. М., 1969 [библиогр. с. 220—228]. Н. М. Амосов, А. М. Касаткин.

ИСО (International Organization for Standardization) — см. *Международная организация по стандартизации*.

**ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МЕХАНИЗМ** — устройство, осуществляющее механическое перемещение регулирующего органа, который изменяет режим объекта регулирования. По виду выходной величины И. м. бывают непрерывного и дискретного действия. Они осуществляют поворот на несколько оборотов, на один, на часть оборота при вращательном и перемещение на шаг или несколько шагов при поступательном движении. Могут быть И. м. с постоянной и переменными скоростями перемещения выходного элемента механизма. По роду используемой энергии И. м. разделяются на гидравлич., пневматич., электр. и комбинированные (электродвигатель и т. п.). Из электр. И. м. непрерывного действия наиболее распространены электромех. Часто используют И. м. с местными обратными связями (т. н. «позиционеры»). Осн. требования к И. м. — быстроедействие, точность, мощность на выходе И. м., макс. момент либо усилие, момент инерции, часто вес и габариты. В большинстве электр. И. м. мощность электродвигателей составляет от нескольких *вт* до 1 *квт*. В И. м. электр. шаговые двигатели имеют вращающий момент от нескольких *Гсм* до нескольких *кГм* и могут отрабатывать соответственно от нескольких тысяч до нескольких сотен шагов в секунду. Пневматич. И. м. обычно работают при давлении питания несколько *ат*, гидравлич. — от нескольких десятков до нескольких сотен *ат*.

Лит.: Шегал Г. Л., Коротков Г. С. Электрические исполнительные механизмы в системах управления. М., 1968 [библиогр. с. 155—156]; Исмаилов Ш. Ю. Автоматические системы и приборы с шаговыми двигателями. М., 1968 [библиогр. с. 132—135]. Б. А. Сигов.

**ИСТОЧНИК ОПОРНОГО НАПРЯЖЕНИЯ** — источник фиксированного напряжения, которое используется в аналоговых вычислительных устройствах и машинах непрерывного действия для получения с помощью резистивных делителей требуемых постоянных напряжений в нелинейных блоках, в блоках перемножения и при моделировании постоянной величины. Кроме того, как эталонное напряжение И. о. и. используется при точном изме-

рении потенциалов в отдельных точках схемы математического моделирования, в схемах аналого-цифровых преобразователей и цифро-аналоговых преобразователей, в схемах стабилизаторов напряжения и т. д. В схемах вычисл. техники непрерывного действия напряжение И. о. н. обычно равно по величине наиболее допустимому напряжению на выходе усилителя операционного (у ламповых усилителей  $\pm 100$  в). Для получения прецизионного эталонного напряжения в качестве И. о. н. используются нормальные элементы, недостатком которых является весьма незначительный ток нагрузки (1—10 мка). В схемах электронных стабилизаторов напряжения И. о. н. служат газонаполненные стабилитроны или кремниевые опорные диоды. Последние по многим показателям превосходят газовые стабилитроны. Основ. источник нестабильности напряжения опорных диодов — колебания т-ры диода. Применением термокомпенсации температурный дрейф опорного напряжения можно свести к  $10^{-4}\%/1^\circ\text{C}$ . Ю. П. Космач, А. Г. Тимошенко.

**ИСТОЧНИК СООБЩЕНИЙ** — материальный объект, основной особенностью которого является то, что он создает совокупность сведений о своем состоянии. Эта совокупность сведений, создаваемых И. с. и подлежащих передаче, наз. сообщением. И. с. классифицируют по свойствам случайных процессов, описывающих сообщения, по характеру изменения сообщений и характеру работы. Случайный процесс, описывающий сообщения, является ф-цией времени  $t \in T$ , принимающей случайные значения  $\xi_t \in N$ , где  $N$  — мн-во возможных значений сообщений в каждый фиксированный момент времени. Совокупность сообщений (вырабатываемых И. с.) с заданными статистическими свойствами наз. ансамблем сообщений.

В зависимости от свойств совместных распределений случайных величин, образующих процесс, И. с. разделяют на И. с. с независимыми компонентами (компоненты сообщения  $\{\xi_k\}$  в них являются независимыми случайными величинами), на гауссовские, марковские и стационарные И. с. По характеру мн-ва  $N$  и изменению сообщений во времени  $T$  различают И. с. дискретные и непрерывные. И. с. наз. дискретным по мн-ву в том случае, если  $N$  — конечное или счетное мн-во (сообщения с конечным или счетным числом значений). Таким И. с. является, напр., ЭЦВМ, вырабатывающая последовательность двоичных символов, или устр-во, передающее конечное число уровней измеряемого параметра к-л. физ. процесса. И. с. наз. непрерывным по мн-ву тогда, когда  $N$  — непрерывное мн-во. Непрерывным по мн-ву И. с. является, напр., устр-во, передающее непрерывное мн-во значений температуры к-л. объекта.

Если область определения сообщений  $T$  является монотонно возрастающей последовательностью моментов времени — моментов возникновения компонент сообщений  $\{t_k\}$  ( $t_k < t_{k+1}$ ), то И. с. наз. источником с дискретным временем.

Следовательно, И. с. с дискретным временем характеризуются сообщениями, изменяющимися в определенные наперед заданные моменты времени. Примером И. с. с дискретным временем является ЦВМ, вырабатывающая последовательность двоичных символов. Если  $T$  — конечный или бесконечный интервал времени, то имеет место И. с. с непрерывным временем. Т. о., источники с непрерывным временем характеризуются сообщениями, непрерывно меняющимися во времени. И. с. с непрерывным временем являются, напр., передатчики радио и телевидения.

По характеру работы И. с. бывают с фиксированной и управляемой скоростью формирования сообщений. И. с. с фиксированной скоростью наз. И. с. без памяти, а И. с. с управляемой скоростью — И. с. с памятью. В источниках без памяти сообщения выдаются в моменты времени, не зависящие от работы последующих устр-в. Такими И. с. являются, напр., устр-ва магнитной записи, передающие телевизионные трубки. И. с. с памятью сохраняют сообщения в записанном виде и выдают их по требованию других устройств. К таким И. с. относят различного рода запоминающие устр-ва, выдающие сообщения по запросу. Лит.: Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. М., 1970 [библиогр. с. 708—709]; Фано Р. М. Передача информации. Статистическая теория связи. Пер. с англ. М., 1965.

Р. Л. Добрушин, А. Я. Матов, В. В. Прелов.  
**ИСЧИСЛЕНИЕ**, дедуктивная система — система, задающая множество путем указания исходных элементов (аксиом) и правил вывода, каждое из которых описывает способ построения новых элементов из исходных и уже построенных. Каждое применение правила вывода по множеству элементов, называемых посылками этого применения, дает элемент, называемый заключением этого применения (в большинстве изучавшихся И. всякое применение правила вывода имеет лишь конечное число посылок). Выводом в И.  $\Xi$  наз. такое линейно упорядоченное множество, что всякий его элемент  $P$  является аксиомой из  $\Xi$  или заключением применения какого-нибудь принадлежащего  $\Xi$  правила вывода, причем все посылки этого применения предшествуют  $P$  в выводе. Элемент наз. выводимым в  $\Xi$ , если в  $\Xi$  можно построить вывод, кончающийся этим элементом. Пример. Для задания мн-ва слов вида

$$11, \dots, 1111, \dots, \underbrace{11 \dots 1}_{2^n \text{ раз}} \quad (1)$$

можно предложить И.  $\Delta$  с двумя аксиомами — 11 и  $1 * 1$  и с двумя правилами вывода — «от слова вида  $P * Q$  разрешается перейти к слову вида  $P1 * QPP1$ » и «от слов вида  $P$  и  $P * Q$  разрешается перейти к слову  $Q$ ». Все элементы, выводимые в  $\Delta$ , имеют либо вид (1), либо вид  $\underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ раз}} * \underbrace{11 \dots 1}_{n^2 \text{ раз}}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), причем все слова указанных двух видов выводимы. В примере проявляется характерная



черта способа задания мн-в посредством И.: построенное И. может порождать, помимо интересующего нас мн-ва, некоторые вспомогательные элементы, которые можно отличить от осн. элементов при помощи некоторого *алгоритма*. Обычно такой алгоритм сравнительно прост; в рассмотренном примере это алгоритм, проверяющий наличие в слове буквы \*.

Важная роль И. определяется тем, что индуктивно порождаемые мн-ва широко используются в математике. В частности, формализация любой развитой матем. теории опирается на большое к-во индуктивно определяемых мн-в, начиная от простейших, задающих язык теории (переменные, числа, формулы и т. п.), и кончая мн-вом теорем, которые выводятся из аксиом теории при помощи логич. средств, характерных для теории. Поэтому И. являются одним из осн. аппаратов *логики математической*. Некоторые спец. виды И. предназначены для описания грамматик и для задания множеств, распознаваемых *автоматами конечными*. Общее понятие И. применяют в *алгоритмов теории*. Это объясняется тем, что понятие «исчисление» имеет такой же фундаментальный характер, как и понятие «алгоритм». Действительно, формализация понятия индуктивно порождаемого мн-ва дает нам тот же класс алгоритмически перечислимых мн-в, который мы получили бы, положив в основу определения любое общепринятое уточнение понятия алгоритма (первую такую формализацию — т. н. канонические И. предложил амер. математик Э. Л. Пост в 1943). Отсюда вытекает существование такого И.  $\Sigma$ , для которого проблема выводимости неразрешима, т. е. невозможен алгоритм, кончающий работу для любого слова  $P$  в зафиксированном алфавите (алфавите И.  $\Sigma$ ) и распознающий, выводимо ли  $P$  в  $\Sigma$ . Этот факт, в сочетании с изучением различных модификаций и специализаций общего понятия И., открывает широкие возможности для получения интересных алгоритмически неразрешимых проблем. Основопологающее значение для работ этого направления имеет результат Поста о возможности задания любого перечислимого мн-ва посредством *нормального И.* Нормальное И. — это И., выводимыми элементами которого являются слова некоторого алфавита  $A$ , имеющие одну аксиому и конечное число правил вывода следующей структуры: «из слова вида  $GP$  выводимо слово  $PG'$ » (где  $G$  и  $G'$  — фиксированные слова в  $A$ ,  $P$  — произвольное слово в  $A$ ).

Аппарат И. может оказаться полезным при изучении различных объектов, которые по своим рабочим возможностям аналогичны алгоритмам, но не обязательно должны быть детерминированными в работе. Термин «И.» применяется еще в качестве составной части названия некоторых разделов математики, трактующих правила вычислений и оперирования с объектами того или иного типа, напр., дифференциальное И., вариационное И.

Лит.: Цейтлин Г. С. Один способ изложения теории алгоритмов и перечислимых множеств. «Труды

Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1964, т. 72; Кратко М. И. Формальные исчисления Поста и конечные автоматы. «Проблемы кибернетики», 1966, № 17; Маслов С. Ю. Понятие строгой представимости в общей теории исчислений. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1967, т. 93; Post E. L. Formal reductions of the general combinatorial decision problem. «American journal of mathematics», 1943, v. 65, № 2.

С. Ю. Маслов.

**ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ**, пропозициональное исчисление — логическое исчисление (см. *Логико-математическое исчисление*), определяющее с помощью доказуемых в нем формул логические законы, которым подчиняются логические связки «и», «или», «если..., то», «тогда и только тогда», «не» и др. Высказывания в И. в. рассматриваются только в связи с тем, как они образованы с помощью логич. связок из др. высказываний, взятых целиком, без учета их субъектно-предикатной структуры. И. в. часто входит как часть в более обширные формальные системы. Благодаря своей простоте И. в. служит иллюстрацией для многих общих понятий метаматематики. В кибернетике И. в., как и др. формальные системы, используется в последнее время при *доказательстве теорем на ЭВМ*.

Классическое И. в. характеризуется тем, что оно имеет двужначную интерпретацию («истинно», «ложно») и в нем доказуема любая *тождественно истинная формула* алгебры логики. В классическом И. в. доказуемы, в частности, *исключенного третьего закон* и т. п. «парадоксы материальной импликации», а именно: формулы  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$  и  $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ , которые, если отождествить импликацию с логическим следованием, содержательно означают: «если высказывание  $p$  истинно, то оно следует из любого высказывания  $q$ », «если  $p$  ложно, то из него следует любое  $q$ ». В ряде неклассических И. в. ставится цель определить с помощью мн-ва доказуемых в них ф-л другие, возможно, более адекватные человеческой интуиции понятия истины, логич. закона, логич. следования. Различные неклассические И. в. отличаются от классического И. в. ограничением действия закона исключенного третьего (см. *Интуиционизм, Логика конструктивная*), приписыванием высказываниям заранее (до построения системы аксиом) более двух истинностных значений, устранением возможности доказательства парадоксов материальной импликации путем надлежащего выбора системы аксиом и правил вывода (исчисление *импликации строгой*), добавлением нетрадиционных логических связок и т. д.

Существует много разновидностей классического И. в., отличающихся друг от друга набором логич. связок, системами аксиом и правилами вывода. Первая формулировка классического И. в. как формальной системы принадлежит нем. математику Г. Фреге (1879). Рассмотрим одну из разновидностей классического И. в. Исходными символами этого И. в. являются: логические связки  $\neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ , скобки  $(, )$  и бесконечное число переменных  $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, \dots$ . Понятие



ф-лы определяется следующим образом. 1. Переменная есть ф-ла. 2. Если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — ф-лы, то  $\neg \mathcal{A}$ ,  $(\mathcal{A} \& \mathcal{B})$ ,  $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ ,  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ ,  $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$  также являются ф-лами. 3. Никаких других ф-л, кроме тех, которые получаются согласно 1—2, нет. Напр.,  $(p \vee (\neg q \rightarrow r))$  является ф-лой, а  $p \vee \& q$  ф-лой не является. Поскольку большое к-во скобок часто затрудняет чтение ф-лы, условимся в ф-лах опускать внешние скобки, а также считать, что  $\&$  связывает ф-лы сильнее, чем  $\vee$ , а  $\vee$  и  $\&$  связывают ф-лы сильнее, чем  $\rightarrow$  и  $\leftrightarrow$ . Тогда, напр., ф-лу  $((p \& (q \vee r)) \rightarrow s)$  можно записать в виде  $p \& (q \vee r) \rightarrow s$ . Следующие ф-лы примем за аксиомы. 1.  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ . 2.  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ . 3.  $p \& q \rightarrow p$ . 4.  $p \& q \rightarrow q$ . 5.  $p \rightarrow (q \rightarrow p \& q)$ . 6.  $p \rightarrow p \vee q$ . 7.  $q \rightarrow p \vee q$ . 8.  $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$ . 9.  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ . 10.  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ . 11.  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q))$ . 12.  $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ .

Правила вывода следующие. Правило подстановки. Вместо переменной можно всюду, где она встречается в ф-ле, подставить любую одну и ту же ф-лу. Правило заключения (modus ponens). Из двух ф-л  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  можно получить новую ф-лу  $\mathcal{B}$ . Символически это правило записывается

так:  $\frac{\mathcal{A}, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$ . Ф-ла, получаемая из некоторых ф-л с помощью однократного применения одного из правил вывода, наз. непосредственно выводимой из этих ф-л. Конечная последовательность, состоящая из одной или больше ф-л, наз. доказательством последней ф-лы этой последовательности, если каждая ф-ла в ней либо является аксиомой, либо непосредственно выводима из предыдущих ф-л последовательности. Ф-ла И. в., для которой существует доказательство, наз. доказуемой или выводимой из аксиом И. в., или теоремой И. в. При построении доказательства в И. в. ф-лы выводятся только с помощью правил вывода, а не каких-либо содержательных соображений. Последние могут только подсказать, к каким посылкам применять правила вывода. Для примера выпишем доказательство теоремы:  $s_1 \vee s_2 \rightarrow s_2 \vee s_1$ .

1.  $s_1 \rightarrow s_2 \vee s_1$  (подстановка в аксиому 7).
2.  $s_2 \rightarrow (s_2 \vee s_1)$  (подстановка в аксиому 6).
3.  $(s_1 \rightarrow s_2 \vee s_1) \rightarrow ((s_2 \rightarrow s_2 \vee s_1) \rightarrow (s_1 \vee s_2 \rightarrow s_2 \vee s_1))$  (подстановка в аксиому 8).
4.  $(s_2 \rightarrow s_2 \vee s_1) \rightarrow (s_1 \vee s_2 \rightarrow s_2 \vee s_1)$  (по правилу заключения из 1 и 3).
5.  $s_1 \vee s_2 \rightarrow s_2 \vee s_1$  (по правилу заключения из 2 и 4).

Опираясь на аксиомы и правила вывода, можно обосновать, а затем и использовать различные производные его правила. В частности, каждая теорема И. в. вида  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  порождает некоторое производное правило вывода; напр., теорема  $(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$  порождает правило силлогизма: из формул  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  и  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  выводима ф-ла  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ . В качестве производных правил можно получить все пра-

вила т. н. естественного вывода, которые в *Генцена формальных системах* принимаются за исходные. Одно из важных производных правил вывода, представляющее собой в некотором смысле обращение правила заключения, доставляет следующая метатеорема, называемая теоремой дедукции.

Ф-ла  $\mathcal{B}$  наз. выводимой из гипотез  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  (сокращенно:  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}$ ), если ф-лу  $\mathcal{B}$  можно доказать только с помощью правила заключения, приняв за аксиомы ф-лы  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  и все теоремы И. в. Теорема дедукции утверждает, что если ф-ла  $\mathcal{B}$  выводима из гипотез  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ , то ф-ла  $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{B}$  выводима из гипотез  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{n-1}$ , а тем самым ф-ла  $\mathcal{A}_1 \rightarrow (\mathcal{A}_2 \rightarrow (\dots (\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{B}) \dots))$  есть теорема И. в. Сокращенно: если  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}$ , то  $\vdash \mathcal{A}_1 \rightarrow (\mathcal{A}_2 \rightarrow (\dots (\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{B}) \dots))$ . Приведем пример доказательства теоремы об И. в. с использованием теоремы дедукции.

Теорема:  $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ .

Доказательство. 1.  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ,  $B$ ,  $A \vdash B \rightarrow C$  (по правилу заключения из  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$  и  $A$ ). 2.  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ,  $B$ ,  $A \vdash C$  (по правилу заключения из  $B$  и из выведенной выше ф-лы  $B \rightarrow C$ ). 3.  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$  (по теореме дедукции из ф-лы 2).

Символы  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\neg$  будем интерпретировать как соответствующие операции алгебры логики; тогда каждая ф-ла будет интерпретироваться как выражение, задающее некоторую ф-цию алгебры логики. Ф-ла И. в. наз. тождественно истинной (или тавтологией, или логич. законом), если она задает ф-цию константу 1, т. е. принимает значение 1 при всевозможных значениях входящих в нее переменных. Теоремы И. в. являются тождественно истинными ф-лами. Действительно, непосредственно проверяется, что таковыми являются все аксиомы, а также ф-лы, непосредственно выводимые из тождественно истинных формул.

Для И. в., как и для всякой формальной системы, возникают вопросы о непротиворечивости, полноте и независимости системы его аксиом. Формальная система, имеющая символ  $\neg$  для отрицания, наз. непротиворечивой, если ни для какой ф-лы  $\mathcal{A}$  ф-лы  $\mathcal{A}$  и  $\neg \mathcal{A}$  не являются обе доказуемыми в этой системе. Если бы в И. в. оказались доказуемыми некоторые ф-лы  $\mathcal{A}$  и  $\neg \mathcal{A}$ , то в нем была бы доказуема и ф-ла  $\mathcal{A} \& \neg \mathcal{A}$ . Поэтому в силу доказуемости в нем ф-л вида  $\mathcal{A} \& \neg \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , в этом исчислении была бы доказуема любая ф-ла  $\mathcal{B}$ . Такое исчисление, конечно, никакой ценности не представляло бы. Рассматриваемое И. в. непротиворечиво. Это следует из того, что всякая теорема И. в. является тождественно истинной ф-лой, а любая ф-ла вида  $\mathcal{A} \& \neg \mathcal{A}$  такой не является и, следовательно, она не доказуема в И. в. Формальная система наз. полной по отношению к некоторому свойству, если в ней доказуемы все ф-лы, об-

ладающие этим свойством. И. в. полно по отношению к свойству тождественной истинности: всякая тождественно истинная ф-ла И. в. является теоремой. Сказанным, очевидно, решается также проблема разрешения для доказуемости в И. в., заключающаяся в нахождении *алгоритма*, с помощью которого относительно любой ф-лы И. в. можно решить, является ли она теоремой или нет. И. в. полно также и в следующем (строгом) смысле: присоединение к его аксиомам любой не доказуемой в нем ф-лы делает полученное исчисление противоречивым. Интересно отметить, что для класса всех И. в., отличающихся от рассматриваемого И. в., возможно, только списком аксиом, общие проблемы непротиворечивости, полноты и разрешения неразрешимы. Система аксиом И. в., ни одна аксиома которой не выводима из остальных по правилам вывода И. в., наз. *независимой*. Приведенная выше система аксиом И. в. независима. Метод доказательства этого утверждения заключается в построении спец. интерпретации ф-л И. в., при которой исследуемая аксиома принимает значения, отличные от значений остальных аксиом, а также ф-л, выводимых из этих аксиом.

Если в приведенной системе аксиом отбросить 12-ю аксиому, то получится *п о з и т и в н о е* И. в., задающее с помощью доказуемых в нем ф-л те законы логики, которые не содержат отрицания. Если заменить 12-ю аксиому 13-й аксиомой  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$ , то получится *исчисление высказываний минимальное*, сильно отличающееся от классического И. в. недоказуемостью в нем многих классических законов, содержащих отрицание. Если заменить 12-ю аксиому двумя аксиомами, а именно: 13-й аксиомой и аксиомой  $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ , получится интуиционистское исчисление, в котором не доказуем закон исключенного третьего (т. е. ф-ла  $p \vee \neg p$ ). Заменяя же 12-ю аксиому аксиомой  $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow p)$  или же двумя — 13-й и аксиомой  $\neg \neg p \rightarrow p$ , получим снова классическое И. в.

Существуют формулировки классического И. в., основывающиеся только на части обычных логич. связок. При этом система логич. связок выбирается полная (см. *Алгебра логики*). Напр., непротиворечивой, полной и независимой является система аксиом, состоящая из аксиом 1, 2 и 12-й, а также следующая система аксиом:

$$a) (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r));$$

$$b) p \rightarrow (\neg p \rightarrow q);$$

$$в) (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p.$$

Ф-лы, содержащие связки, которые не входят в эти системы аксиом, уже не являются ф-лами этих новых разновидностей И. в. Однако такие ф-лы можно ввести в качестве сокращений ф-л этих новых И. в., считая  $p \vee q$ ,  $p \& q$ ,  $p \leftrightarrow q$  сокращениями соответственно ф-л  $\neg p \rightarrow q$ ,  $\neg(p \rightarrow \neg q)$ ,  $(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow p)$ . Имеются формулировки классического

И. в., содержащие вместо аксиом т. н. аксиомные схемы, которые можно получить из любой системы аксиом, заменив переменные на переменные из некоторого нового алфавита. Аксиомы при этом получают, заменяя переменные, входящие в аксиомную схему, произвольными ф-лами И. в., так что каждая аксиомная схема задает бесконечное мн-во аксиом. Единственным правилом вывода (если не считать правилами вывода сами аксиомные схемы) является при этом правило заключения. Существует И. в., основанное на одной логич. связке — *Шеффера штрихе* и единственной аксиоме. Некоторая разновидность классического И. в. содержится и в формальной системе Генцена. В некоторых классических И. в., напр., в синтаксических схемах нем. математика К. Шютте, правила вывода решают одновременно и проблему поиска доказательства.

*Лит.:* Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1973; Чёрч А. Введение в математическую логику. Пер. с англ., т. 1. М., 1960; Карри Х. Б. Основания математической логики. Пер. с англ. М., 1969; [библиогр. с. 518—547]; Менделёв Э. Введение в математическую логику. Пер. с англ. М., 1971 [библиогр. с. 296—309].

В. Ф. Костырко.

**ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ МИНИМАЛЬНОЕ**, л о г и к а м и н и м а л ь н а я — исчисление высказываний, отличающееся от интуиционистского (см. *Интуиционизм*) тем, что в нем отсутствует аксиома

$$\neg a \supset (a \supset b). \quad (*)$$

Термин ввел в 30-х годах норв. математик И. Йогансон, он же привел и некоторые соображения, заставившие его исключить (\*) из числа аксиом. Мн-во теорем И. в. м. содержится в мн-ве теорем интуиционистского исчисления высказываний, но не совпадает с последним. Все связки И. в. м. независимы. Известны необходимые и достаточные условия того, чтобы присоединение некоторой ф-лы к аксиомам И. в. м. давало интуиционистское исчисление высказываний.

*Лит.:* Янков В. А. О расширении интуиционистского пропозиционального исчисления до классического и минимального — до интуиционистского. «Известия АН СССР. Серия математическая», 1968, т. 32, № 1; Johansson I. Der Minimalalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus. «Compositio Mathematica», 1936, v. 4, fasciculus 1.

К. П. Вершинин.

**ИСЧИСЛЕНИЕ ЗАДАЧ**, т е о р и я з а д а ч — теория, представляющая собой особое истолкование языка логики предикатов. Создана А. Н. Колмогоровым в 1932 г. Логические связки  $\&$ ,  $\rightarrow$  и т. д. служат, при их обычном истолковании, для образования новых утверждений из заданных. Идея И. з. состоит в том, что эти же связки можно понимать как символы операций над объектами, отличными от логич. утверждений. В качестве таких новых объектов предлагается рассматривать задачи. Если  $A$  и  $B$  — достаточно четко поставленные задачи (как, напр., в случае геом. задач на построение с помощью циркуля и линейки), то ясен также смысл следующей задачи: «решить обе задачи  $A$  и  $B$ ». По аналогии с логикой эту задачу естественно обозначить через

$A \& B$ . Задача  $A \vee B$  ставится так: «назвать одну из задач  $A, B$  и дать ее решение». Задача  $A \rightarrow B$ : «свести решение задачи  $B$  к решению задачи  $A$ », т. е. «указать метод решения  $B$  в предположении, что решение  $A$  дано». Наконец,  $\neg A$  есть задача: «установить невозможность решения задачи  $A$ ». Можно также определить операции над задачами, соответствующие логическим кванторам общности и существования. Произвольная логич. ф-ла (напр.,  $b \& ((a \rightarrow b) \rightarrow c)$ ) превращается в некоторую задачу, если переменные заменить конкретными задачами  $A, B, C$  и последовательно осуществить все операции. Может оказаться, что для данной ф-лы существует общий метод решения всех так возникающих задач. В этом случае ф-ла наз. истинной ф-лой И. з. Напр.,  $(a \& b) \rightarrow a$  истинна, так как для любых задач  $A, B$  и  $C$  можно решить  $(A \& B) \rightarrow A$ . Последнее следует из того, что при наличии решения  $A \& B$  в силу определения  $A \& B$  известны как решение  $A$ , так и решение  $B$ , поэтому искомый метод сведения  $A$  к  $A \& B$  состоит в простом отбрасывании информации, относящейся к  $B$ . А. Н. Колмогоров показал, что все аксиомы интуиционистского исчисления предикатов истинны в упомянутом смысле, и что применение правил вывода этого исчисления сохраняет это свойство. Поэтому каждая интуиционистски выводимая ф-ла истинна. Вместе с тем, сразу видно, что ф-лу  $a \vee \neg a$ , выражающую *исключенного третьего закон* (она невыводима интуиционистски, хотя выводима в классической логике), нет оснований считать истинной. Действительно, из истинности  $a \vee \neg a$  следовало бы, напр., что мы в состоянии решить задачу  $A \vee \neg A$ , где  $A$  — задача доказательства гипотезы Римана. Но в силу определения операций  $\vee$  и  $\neg$  это означало бы, по меньшей мере, что мы знаем, справедлива или ложна эта гипотеза.

И. з. было предложено в качестве основы для интерпретаций интуиционистской логики. Эта роль И. з. связана с возможностью рассматривать логич. утверждения как задачи частного вида. Но значение И. з. не ограничивается философией *интуиционизма*. Идея А. Н. Колмогорова получила многочисленные применения и развитие, причем уточнялось расплывчатое понятие задачи, а также видоизменялось понятие истинности. Реализуемость в смысле Клини, первое по времени понятие истинности для логики-арифм. ф-л, основанное на идее вычислимости, полностью соответствует духу И. з. Теория задач играет определенную роль в построении различных вариантов конструктивной математики (см. *Конструктивное направление в математике*). С неконструктивной, теоретико-множественной точки зрения, алгоритм. проблемы самого общего вида образуют (при подходящем определении операций над ними) некоторое И. з. Исследовалось исчисление финитных задач, для построения которого достаточно финитных средств. Интерпретация арифметики, предложенная Гёделем (распространенная

впоследствии на анализ), фактически основана на одном варианте теории задач, более удовлетворительном, чем теория реализуемости Клини. Построение автором «исчисления локально-финитных алгоритмических проблем» является попыткой интерпретации арифметики минимальными средствами. Можно предполагать, что теоретико-задачный метод всегда будет играть существенную роль при разработке и обосновании формализованных теорий.

Ю. Т. Медведев.

**ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ УЗКОЕ**, и с ч и с л е н и е п р е д и к а т о в п е р в о й с т у п е н и — логическое исчисление (см. *Логико-математическое исчисление*), определяющее с помощью доказуемых в нем формул логические законы, записываемые на специальном формальном языке первой степени (языке И. п. у.). Этот язык отличается от языка *логики предикатов высших ступеней* тем, что в его ф-лах кванторы (см. *Логические операции*) употребляются только с предметными переменными, но не с предикатными или функциональными. В кибернетике само И. п. у., его язык и формализацию теорий на базе И. п. у. используют для *автоматизированного поиска доказательства теорем* (см. также *Доказательство теорем на ЭВМ*), в *информационно-логических системах*, в *лингвистике математической*, в *автоматов теории*, в теории формальных языков, в *распознавании образов* и т. п.

Существуют неклассические И. п. у. (см. *Логика неклассическая*) и различные формулировки классического И. п. у. Полную формулировку классического И. п. у. изложили Д. Гильберт и В. Аккерман (1928).

Рассмотрим одну из формулировок классического И. п. у. Язык классического И. п. у. задают тройкой  $L = \langle A, \tau, \Phi \rangle$ , где  $A$  — алфавит,  $\tau$  — мн-во термов,  $\Phi$  — мн-во ф-л 1-й степени. Алфавит  $A$  состоит из следующих символов: 1) счетное мн-во предметных переменных  $x_1, x_2, \dots$ ; 2) счетное мн-во предикатных символов  $P_i^n, i, n \geq 0$ , среди которых  $P_i^0$  — пропозициональные символы, символы высказываний; 3) счетное мн-во функциональных символов  $f_i^n, i \geq 0, n > 0$  ( $n$  — число аргументов, «арность» предикатов и ф-ций, которые сопоставляют данным предикатным и функциональным символам в интерпретации языка 1-й степени); 4) счетное мн-во предметных постоянных (символов нульместных функций)  $a_1, a_2, \dots$ ; 5) логические связи  $\&, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ ; 6) кванторы  $\forall$  и  $\exists$ ; 7) технические символы: скобки «(», «)» и запятая «,». Мн-во  $\tau$  термов определяется следующим образом: 1) любая предметная переменная и предметная постоянная есть терм; 2) если  $f_i^n$  — функциональный символ, а  $t_1, \dots, t_n$  — термы, то  $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$  — терм; 3) никаких других термов, кроме тех, которые получаются согласно 1) и 2), нет. Пример терма:  $f_3^2(x_4, f_5^1(x_6))$ . Ф-лы И. п. у. определяются следующими пра-

вилами образования: 1) каждый пропозициональный символ  $P_i^0$  есть ф-ла; 2) если  $P_i^n$  — предикатный символ,  $n > 0$ , а  $t_1, \dots, t_n$  — произвольные термы, то  $P_i^n(t_1, \dots, t_n)$  — ф-ла; ф-лы, определенные в 1) и 2), наз. элементарными ф-лами; 3) если  $F$  и  $G$  — ф-лы,  $y$  — предметная переменная, то каждое из выражений  $\neg F$ ,  $(F \& G)$ ,  $(F \vee G)$ ,  $(F \rightarrow G)$ ,  $(F \leftrightarrow G)$ ,  $(\forall y F)$ ,  $(\exists y F)$  есть ф-ла; 4) никаких других ф-л И. п. у., кроме тех, которые получаются согласно 1) — 3), нет. В ф-лах  $(\forall y F)$  и  $(\exists y F)$  ф-ла  $F$  наз. областью действия квантора  $\forall y$  и соответственно  $\exists y$ . К правилам экономии скобок, введенным в исчислении высказываний, прибавим еще такие правила: будем писать  $Q_1 y Q_2 z F$  вместо  $(Q_1 y (Q_2 z F))$  и  $Q_1 y F * G$  вместо  $(Q_1 y F) * G$ , где  $*$   $\in \{\&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ,  $Q_1 Q_2 \in \{\forall, \exists\}$ . Вхождение переменной  $y$  в данную ф-лу  $F$  наз. связанным, если оно является вхождением в некоторый квантор  $\forall y$  или  $\exists y$  или же находится в области действия этого квантора; в противном случае вхождение переменной  $y$  в  $F$  наз. свободным. Например, в ф-ле  $\forall x_2 P_1^3(x_2, x_1, x_3) \& P_1^1(x_2)$  1-е и 2-е вхождения переменной  $x_2$  — связанные, а 3-е — свободное. Ф-ла И. п. у. наз. замкнутой, если она не имеет свободных вхождений предметных переменных.

Произвольная система вида

$$\sigma = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots; P_{j_1}^{m_{j_1}}, P_{j_2}^{m_{j_2}}, \dots;$$

$$f_{k_1}^{n_{k_1}}, f_{k_2}^{n_{k_2}}, \dots \rangle$$

из символов языка И. п. у. наз. сигнатурой. Ф-ла И. п. у., содержащая предметные, предикатные и функциональные символы только из  $\sigma$ , наз. ф-лой сигнатуры  $\sigma$ . Если взять только такую часть  $A'$  алфавита  $A$  и все только такие термы и ф-лы языка И. п. у., в которые входят предметные, предикатные и функциональные символы только из  $\sigma$ , то получим некоторый язык  $L' = \langle A', \tau', \Phi' \rangle$ , который наз. языком 1-й степени в алфавите  $A'$  или языком 1-й степени сигнатуры  $\sigma$ . В частности, и сам язык И. п. у. является языком определенной сигнатуры. Язык 1-й степени сигнатуры, в которую входят только все предикатные символы языка И. п. у. (т. е., в которой  $\tau \neq \emptyset$ ), наз. языком чистого И. п. у., а соответствующее исчисление — чистым И. п. у.

Логические константы, т. е. символы логических операций, имеют в интерпретациях языка И. п. у. всегда одно и то же значение — значение соответствующих логич. операций, а нелогич. константы, т. е. предметные постоянные, предикатные и функциональные символы, получают значение лишь в той или иной интерпретации языка И. п. у.

Интерпретацией языка И. п. у. наз. пара  $I = \langle D, \varphi \rangle$ , образованная из непустого мн-ва  $D$  — области интерпретации и отображения  $\varphi$ , действующего следующим образом: каждому предикатному символу  $P_i^n$  оно ста-

вит в соответствие определенный  $n$ -местный предикат в  $D$  (т. е.  $n$ -местную функцию в  $D$  со значениями «истинно» и «ложно», или 1 и 0), каждому функциональному символу —  $f_i^n$  —  $n$ -местную операцию в  $D$  (т. е. функцию типа  $D^n \rightarrow D$ ) и каждой предметной постоянной — некоторый элемент из  $D$ . Пусть  $F(y_1, \dots, y_n)$  — ф-ла И. п. у., в которой  $y_1, \dots, y_n$  — список всех ее переменных, имеющих свободные вхождения в  $F$ . Будем обозначать через  $F_I(y_1, \dots, y_n)$  результат подстановки в  $F$  вместо предикатных, функциональных символов и предметных постоянных именно тех конкретных предикатов, ф-ций и элементов из  $D$ , которые ф-ция  $\varphi$  ставит в соответствие символам из  $F$ . Для  $b_1, \dots, b_n$  из  $D$  обозначим через  $F(b_1, \dots, b_n)$  соответственно  $F_I(b_1, \dots, b_n)$  результат подстановки каждого символа  $b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) вместо всех свободных вхождений переменной  $y_i$  в  $F(y_1, \dots, y_n)$  соответственно в  $F_I(y_1, \dots, y_n)$ . Так как в выражении  $F_I(b_1, \dots, b_n)$  стоят лишь имена конкретных предикатов, функций и элементов, то оно обозначает уже какое-то конкретное высказывание, истинность или ложность которого в области  $D$  определяется согласно обычному содержанию логических операций. Ф-ла  $F(y_1, \dots, y_n)$  наз. 1) истинной (соответственно, ложной) в интерпретации  $I = \langle D, \varphi \rangle$  для заданных значений  $y_i = b_i$ ,  $b_i \in D$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ее свободных предметных переменных; 2) истинной (ложной) в интерпретации  $I = \langle D, \varphi \rangle$ ; 3) истинной (ложной) в области  $D$ ; 4) тождественно истинной, общезначимой (тождественно ложной, всегда ложной); 5) выполнимой в интерпретации  $I = \langle D, \varphi \rangle$ ; 6) выполнимой в области  $D$ ; 7) выполнимой тогда и только тогда, если соответственно: 1) выражение  $F_I(b_1, \dots, b_n)$  истинно (соответственно, ложно) в  $D$ ; 2) ф-ла  $F(y_1, \dots, y_n)$  истинна (ложна) в  $I$  для произвольных значений ее свободных переменных; 3) ф-ла  $F(y_1, \dots, y_n)$  истинна (ложна) в каждой интерпретации  $\langle D, \varphi \rangle$  с областью  $D$ ; 4) ф-ла  $F(y_1, \dots, y_n)$  истинна (ложна) в каждой непустой области  $D$ ; 5) ф-ла  $F(y_1, \dots, y_n)$  истинна для каких-нибудь значений ее свободных переменных; 6) ф-ла  $F(y_1, \dots, y_n)$  выполнима в какой-нибудь интерпретации  $\langle D, \varphi \rangle$  с областью  $D$ ; 7) ф-ла  $F(y_1, \dots, y_n)$  выполнима в какой-нибудь непустой области. Например, пусть некоторая интерпретация  $I = \langle N, \varphi \rangle$  с  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$  сопоставляет предикатному символу  $P_1^2$  предикат  $\geq$ . Тогда ф-ла  $\exists x_1 P_1^2(x_1, x_2)$  истинна в  $I$ , так как для каждого  $x_2$  из  $N$  истинно утверждение  $\exists x_1 (x_1 \geq x_2)$ . Говорят, что ф-ла  $F$  является логическим следствием мн-ва ф-л  $\Gamma$  (обозначение  $\Gamma \models F$ ), если для любой интерпретации  $I = \langle D, \varphi \rangle$  и для любых значений из  $D$  всех свободных переменных, входящих в какие-либо формулы из  $\Gamma \cup \{F\}$ , имеет место следующее: если все ф-лы из  $\Gamma$

истинны в  $I$  для взятых значений всех тех свободных переменных, которые входят в ф-лы из  $\Gamma$ , то и ф-ла  $F$  истинна в  $I$  для взятых значений всех тех свободных переменных, которые входят в  $F$ . Две ф-лы И. п. у. называются равносильными, если каждая из них является логическим следствием другой. Т. о. ф-ла  $G$  является логическим следствием ф-лы  $F$  тогда и только тогда, когда ф-ла  $F \rightarrow G$  тождественно истинна. Ф-лы  $F$  и  $G$  равносильны тогда и только тогда, когда ф-ла  $F \leftrightarrow G$  тождественно истинна.

Если к мн-ву предикатных символов языка И. п. у. прибавить предикатный символ «=», то расширенный так язык наз. языком 1-й ступени с равенством (иногда же просто — языком 1-й ступени); при этом вместо « $(y, z)$ » обычно пишут  $y = z$ . Интерпретация языка 1-й ступени с равенством получается, если доопределить произвольную интерпретацию языка И. п. у. на символе «=», сопоставив ему предикат равенства, т. е. такой предикат, который истинен для любой пары  $(y, z)$  тогда и только тогда, когда  $y$  и  $z$  являются одним и тем же элементом. Понятия истинности и выполнимости для ф-л И. п. у. переносятся и на ф-лы с равенством, если отнести эти понятия к интерпретации языка 1-й ступени с равенством. Знак «=» (как и знаки логических операций) не включают в сигнатуру ф-лы 1-й ступени с равенством.

Алгебр. системой сигнатуры  $\sigma$ , задаваемой интерпретацией  $\langle D, \varphi \rangle$ , наз. система, состоящая из области  $D$  и из образов всех компонент из сигнатуры  $\sigma$  при отображении  $\varphi$ ; при этом образы компонент записываются в том же порядке, в котором идут сами компоненты в  $\sigma$ .

Пусть  $K$  — класс ф-л сигнатуры  $\sigma$ ,  $\mathfrak{M}$  — алгебр. система сигнатуры  $\sigma$ , задаваемая интерпретацией  $I = \langle D, \varphi \rangle$ . Если ф-ла  $F$  из  $K$  истинна или выполнима в  $I$ , то говорят, что она истинна или выполнима и в алгебр. системе  $\mathfrak{M}$ . Если все ф-лы в  $K$  замкнуты и истинны в  $I$ , то скажем, что  $\mathfrak{M}$  является моделью для мн-ва ф-л  $K$ , а также, что мн-во  $K$  выполнимо, совместно, имеет модель (см. *Модель теории*). Зададим аксиомы и правила вывода И. п. у. произвольной сигнатуры  $\sigma$ . Терм  $t$  наз. свободным для переменной  $x_i$  в ф-ле  $F$ , если никакое свободное вхождение  $x_i$  в  $F$  не находится в области действия никакого квантора  $\forall x_j$  или  $\exists x_j$ , где  $x_j$  — переменная, входящая в  $t$ . Если терм  $t$  свободен для переменной  $x_i$  в формуле  $F(x_i)$ , то все вхождения переменных в терм  $t$  переходят в свободные вхождения этих переменных в ф-лу  $F(t)$ . В этом случае подстановку в  $F(x_i)$  терма  $t$  вместо всех свободных вхождений  $x_i$  можно считать правильной, корректной. Аксиомами И. п. у. сигнатуры  $\sigma$  являются: 1) все ф-лы, полученные из аксиом исчисления высказываний заменой  $p, q, r$  произвольными ф-лами сигнатуры  $\sigma$ ; 2) все ф-лы вида  $\forall x_i F(x_i) \rightarrow F(t)$ ,  $F(t) \rightarrow \exists x_i F(x_i)$ , где  $F(x_i)$  — ф-ла сигнатуры  $\sigma$ , а  $t$  — терм сигнатуры  $\sigma$ , свобод-

ный для  $x_i$  в  $F(x_i)$ . Аксиомы И. п. у., в отличие от специфических аксиом матем. исчисления наз. логическими аксиомами. Правила вывода И. п. у. следующие: 1) *modus ponens*: из  $\alpha$  и  $\alpha \rightarrow \beta$  можно получить  $\beta$ ; 2) правила Бернаиса: если ф-ла  $\alpha$  не содержит свободных вхождений переменной  $x_i$ , то из  $\alpha \rightarrow \beta$  можно получить  $\alpha \rightarrow \forall x_i \beta$  и из  $\beta \rightarrow \alpha$  можно получить  $\exists x_i \beta \rightarrow \alpha$ . Формальной теорией 1-й ступени сигнатуры  $\sigma$  или логико-математическим исчислением 1-й ступени сигнатуры  $\sigma$  наз. тройка  $T = \langle M, L, A \rangle$ , где  $M$  — язык 1-й ступени сигнатуры  $\sigma$ ,  $L$  — мн-во всех логических аксиом сигнатуры  $\sigma$  и правил вывода И. п. у.,  $A$  — разрешимое мн-во матем., или специфических, аксиом данной теории. Пара  $\langle M, L \rangle$  или тройка  $\langle M, L, \emptyset \rangle$  наз. логическим исчислением, теория же  $T = \langle M, L, A \rangle$  с  $A \neq \emptyset$  наз. матем. исчислением, основанным на логическом исчислении  $\langle M, L \rangle$ . Ф-ла  $F$  теории  $T$  наз. выводимой в теории  $T$  из гипотез  $\Gamma$  (что записывается так:  $\Gamma \vdash F$  в теории  $T$ ) тогда и только тогда, когда она является либо аксиомой, либо ф-лой из  $\Gamma$ , либо может быть получена из некоторых выводимых в  $T$  из  $\Gamma$  ф-л по правилам вывода. Ф-ла  $F$  теории  $T$ , выводимая из пустого мн-ва гипотез, наз. доказуемой в  $T$  или теоремой теории  $T$ . Моделью формальной теории  $T$  1-й ступени сигнатуры  $\sigma$  наз. алгебр. система, в которой истинны все теоремы теории  $T$ .

Для удобства проведения формальных доказательств в И. п. у. вводится ряд производных правил: правило обобщения:  $F(x_i) \vdash \vdash \forall x_i F(x_i)$ ; подстановки терма вместо всех свободных вхождений переменной; подстановки ф-лы вместо предикатного символа; переименования связанной переменной и др. Одним из производных правил является теорема дедукции, аналогичная теореме дедукции в исчислении высказываний, но несколько сложнее формулируемая. Из теоремы дедукции вытекает, что доказуемость в теории 1-й ступени  $T = \langle M, L, A \rangle$  некоторой замкнутой ф-лы  $G$  равносильна доказуемости в И. п. у. некоторой ф-лы  $F \rightarrow G$ , где  $F$  — конъюнкция конечного числа определенных ф-л из  $A$ . Т. о., теоремы любого матем. исчисления 1-й ступени превращаются в некоторые теоремы логического исчисления — И. п. у.

И. п. у. сигнатуры  $\sigma$  с равенством — это исчисление на языке 1-й ступени сигнатуры  $\sigma$  (без равенства!) такое, что в самой сигнатуре  $\sigma$  имеется спец. двухместный предикатный символ, обозначаемый обычно через «=», а к аксиомам И. п. у. сигнатуры  $\sigma$  присоединяются аксиомы

$$\forall x_1 (x_1 = x_1), \forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \rightarrow x_2 = x_1),$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \& x_2 = x_3 \rightarrow x_1 = x_3),$$

и все аксиомы вида

$$\forall x_1 \forall x_2 [x_1 = x_2 \rightarrow (A(x_1) \rightarrow A(x_2))],$$

$$\forall x_1 \forall x_2 [x_1 = x_2 \rightarrow (g(x_1) = g(x_2))],$$

где  $A(x_1)$ ,  $g(x_1)$  — произвольный  $n$ -местный предикатный, соответственно, функциональный символ из сигнатуры  $\sigma$ , у которого на месте произвольного  $i$ -го аргумента стоит  $x_1$ . Приведенные аксиомы для  $=$  определяют не отношение равенства, а лишь отношение конгруэнтности. И. п. у. является (просто) непротиворечивым: никакая его ф-ла не доказуема в нем вместе со своим отрицанием. Более того, всякая доказуемая в нем ф-ла является тождественно истинной. Однако, чтобы никакое матем. исчисление, имеющее совместное мн-во аксиом и основанное на некотором логическом исчислении  $L$ , не оказалось противоречивым, необходимо, чтобы  $L$  удовлетворяло более сильному условию (которое можно назвать семантической непротиворечивостью  $L$  как логического исчисления): всякая ф-ла, выводимая в  $L$  из любого мн-ва  $\Gamma$  замкнутых ф-л на языке  $L$ , должна быть логич. следствием из  $\Gamma$ . И. п. у. любой сигнатуры удовлетворяет этому условию.

И. п. у. любой сигнатуры  $\sigma$  полно как логическое исчисление (является семантически полным логическим исчислением): всякое логическое следствие из любого мн-ва  $\Gamma$  ф-л сигнатуры  $\sigma$  выводимо из  $\Gamma$  в И. п. у. сигнатуры  $\sigma$ . В частности, всякая *тождественно истинная формула* И. п. у. (т. е., всякое логическое следствие из пустого мн-ва ф-л) доказуема в нем (теорема Гёделя о полноте, 1930). Следовательно, в И. п. у. доказуемы все законы логики, выражимые на языке 1-й ступени, и только они. Семантическая полнота И. п. у. следует из более общей теоремы Гёделя — Мальцева: всякое непротиворечивое мн-во замкнутых ф-л И. п. у. имеет модель. Отсюда следует локальная теорема Мальцева для счетных сигнатур: мн-во  $\Gamma$  замкнутых ф-л сигнатуры  $\sigma$  имеет модель тогда и только тогда, когда каждое конечное подмн-во мн-ва  $\Gamma$  имеет модель. Из семантической полноты И. п. у. также легко следует теорема компактности: если  $\Gamma \models F$  для мн-ва  $\Gamma$  ф-л и для ф-лы  $F$  И. п. у., то для некоторого конечного подмн-ва  $\Gamma_0$  мн-ва  $\Gamma$   $\Gamma_0 \models F$ .

И. п. у. не является просто полным, т. е. в нем существует замкнутая ф-ла  $F$  (а именно, любая замкнутая выполнимая, но не тождественно истинная ф-ла) такая, что ни  $F$  ни  $\neg F$  не доказуемы в И. п. у. Присоединив к аксиомам И. п. у. все ф-лы вида  $\exists y \alpha(y) \rightarrow \forall y \alpha(y)$ , которые недоказуемы в И. п. у., получим непротиворечивое исчисление.

Проблема установления тождественной истинности ф-л 1-й ступени — неразрешима (теорема Чёрча, 1936). Отсюда и из теоремы Гёделя о неполноте следует неразрешимость проблемы: является ли произвольная ф-ла И. п. у. в нем теоремой или нет.

В рамках формальных теорий 1-й ступени можно формализовать (т. е., представить в виде теорем этих теорий) достаточно обширные разделы математики. Напр., имеются формулировки формальной теории мн-в 1-й ступени, в которых можно вывести обычный классический анализ и значительную часть общей теории множеств. В частности, в формальной

теории мн-в (1-й ступени) можно формализовать теорему и доказательство о существовании несчетно-бесконечных мн-в. Вместе с тем, согласно теореме Левенгейма — Сколема, если некоторое мн-во ф-л И. п. у. с равенством имеет модель, то оно имеет конечную или счетную модель. Это т. н. парадокс Сколема.

Наряду с ранее введенными терминами иногда пользуются как терминами выражениями вида  $\text{из } F(y_1, \dots, y_n, z)$ , которые интерпретируются как «то единственное  $z$ , для которого истинно  $F(y_1, \dots, y_n, z)$ » и наз. определенными описаниями. При этом в определении термина  $t$ , свободного для  $x_i$  в  $F$ , следует говорить не о переменной  $x_j$ , входящей в  $t$ , а лишь о ее свободных вхождениях в  $t$ . Для И. п. у. с определенными описаниями справедлива т. н. теорема об устранимости определенных описаний. Иногда при определении И. п. у. задают не схемы аксиом, а конкретные аксиомы. При этом среди правил вывода появляется правило подстановки формулы вместо предикатного символа и усложняется формулировка теоремы дедукции. Имеется весьма естественная формулировка И. п. у., принадлежащая нем. математику Генцену (1909—45) (см. *Генцена формальные системы*).

Лит.: Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1973; Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. Пер. с нем. М., 1947 [библиогр. с. 297—298]; Клини С. К. Математическая логика. Пер. с англ. М., 1973 [библиогр. с. 451—465]; Чёрч А. Введение в математическую логику. Пер. с англ., т. 1. М., 1960; Лидон Р. Заметки по логике. Пер. с англ. М., 1968 [библиогр. с. 123]; Мендельсон Э. Введение в математическую логику. Пер. с англ. М., 1971 [библиогр. с. 296—309]. В. Ф. Костырко.

**ИСЧИСЛЕНИЕ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЕ** — то же, что и *исчисление высказываний*.

«ИТЕРАТОР» — специализированная аналоговая вычислительная машина, предназначенная для решения линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dX}{dt} + AX - F = 0; \quad (1)$$

$$\Gamma_0 X_0 - \gamma_0 = 0; \quad (2)$$

$$\Gamma_i X_i + \Gamma_k X_k - \gamma = 0, \quad (3)$$

где  $X = X(t)$  — вектор искомых функций,  $X_0 = X(t_0)$ ,  $X_i = X(t_i)$ ,  $X_k = X(t_k)$ . Решение отыскивается в интервале  $[t_0, t_k]$ ,  $t_i$  — внутр. точка интервала,  $A = A(t)$ ,  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_i$ ,  $\Gamma_k$  — заданные матрицы,  $F = F(t)$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma$  — заданные векторы; порядок дифф. ур-ния  $n \leq 8$ , к-во условий в системе (3)  $m \leq 4$ . Задача (1) — (3) решается совместно с АВМ, реализующей систему (1) с начальными условиями, задаваемыми «И.», краевые условия (2) и (3) реализуются на «И.». Разработан «И.» в Ин-те кибернетики АН УССР в 1962. Состоит из аналогов краевых условий (2) и (3), блока преобразования невязок, генератора программы работы АВМ и блоков «И.».



Задача решается итерационным методом Ньютона, сводящим ее к серии задач Коши. Применение метода Ньютона позволяет быстро находить решение, итерирование обуславливается погрешностями аналоговых вычислений и, как правило, содержит 2—4 шага. Алгоритм состоит из двух частей: определение матрицы первых производных по компонентам вектора начальных условий и автомат. отыскание решения краевой задачи с использованием полученной матрицы первых производных. Погрешность «И.» в удовлетворении краевых условий не более 3%. «И.» может работать совместно с АВМ «МН-7», «МПТ-9», «ИПТ-5» и предназначен для использования в проектных орг-циях, н.-и. институтах, вычисл. центрах и др.

Лит.: Пухов Г. Е., Грездов Г. И., Верлань А. Ф. Методы решения краевых задач на электронных моделях. К., 1965 [библиогр. с. 142—144].

Г. И. Грездов.

**ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ** — методы приближенного решения задач прикладной математики, основанные на последовательном приближении к решению путем многократного применения какой-либо вычислительной или аналитической процедуры. При этом исходными данными для каждой последующей процедуры являются результаты применения предыдущих процедур (см., напр., *Операторных уравнений способы решения*). Следствием этого процесса является последовательность, которая при выполнении некоторых условий сходится к решению задачи, т. е. имеется возможность получить приближение, сколь угодно

мало отличающееся от истинного решения. Напр., для решения произвольного ур-ния  $f(x) = 0$  его представляют в виде  $x = \varphi(x)$  (это можно сделать многими способами, напр.,  $x = x + Cf(x)$ , где  $C$  — произвольная постоянная) и строят последовательность:  $x_0$  — произвольное,  $x_1 = \varphi(x_0)$ ,  $x_2 = \varphi(x_1)$ , ...,  $x_n = \varphi(x_{n-1})$ ... Эта последовательность сходится к решению исходного ур-ния, если, напр.,  $\varphi(x) > x$  и  $0 < \varphi'(x) < 1$ .

И. м. применяют также в теор. исследованиях. С их помощью доказывают, напр., теоремы существования и единственности решений различных классов ур-ний. А. И. Березовский.

**ИТЕРАЦИЯ СОБЫТИЯ** — операция, применимая к множествам слов некоторого алфавита  $A$ , т. е. к *событиям*. Операция итерации обозначается чаще всего с помощью фигурных скобок  $\{ \}$ . Если  $\mathcal{U}$  — некоторое событие в алфавите  $A$ , то  $\{ \mathcal{U} \}$  будет событием, содержащим пустое слово и все те слова, которые можно составить из слов события  $\mathcal{U}$ , приписывая их друг к другу в произвольном порядке. Напр., если  $\mathcal{U} = ab$ , то  $\{ \mathcal{U} \} = e, ab, abab, ababab, \dots$ . Известно, что если  $\mathcal{U}$  — *событие регулярное*, то и  $\{ \mathcal{U} \}$  — тоже регулярное событие (см. также *Алгебры событий*).

**ИФАК** (International Federation of Automatic Control) — см. *Международная федерация по автоматическому управлению*.

**ИФИП** (International Federation for Information Processing) — см. *Международная федерация по обработке информации*.



# К

**КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ** — упорядочение во времени определенного круга работ, выполняемых в соответствии с заданными ограничениями, когда ресурсы, используемые для выполнения этих работ, ограничены. Задачи К. п. составляют класс комбинаторных задач полного упорядочения во времени различных дискретных процессов, множества работ, предварительно частично упорядоченных согласно технологии своего выполнения — технологическим маршрутам. Задача построения календарного плана-графика состоит в установлении наилучшей последовательности выполнения работ, согласно заданному критерию оптимизации. К. п. производства является осн. средством согласования, увязки планов производственных участков и обслуживающих эти участки подразделений во времени. Календарный план-график можно рассматривать как своеобразную *модель производства*. Конечной целью построения календарного плана на предприятии является указание сроков выполнения отдельных планируемых работ, операций по каждой бригаде, оператору, рабочему месту. К. п. облегчает и задачи служб поставки необходимого сырья и полуфабрикатов, так как заранее известно, к какому моменту времени и в каком к-ве требуется поставить их для каждого производственного участка, для каждого рабочего места. Задачей К. п. явл. также выбор того из допустимых графиков, который наиболее соответствует конкретной производственной обстановке. Как прогноз течения производственного процесса календарный график дает ясную картину возможного использования оборудования и трудовых ресурсов, указывает, где может возникнуть «узкое место», позволяет заранее предвидеть возможные сбои в производстве и своевременно принять меры по их ликвидации. С работой предприятия по календарному плану связаны организация экономного и действенного учета, более четкая постановка работы по технологическому проектированию и расчету достоверных нормативов. Работа по календарному плану создает предпосылки для более точного определения размеров страховых запасов материалов, деталей, полуфабрикатов и инструмента, для поддержания на нужном уровне запасов незавершенного производства. С появлением ЭВМ работа предприятий по единому календарному плану стала реальной возможностью.

Матем. методы решения задач К. п. разрабатываются в рамках бурно развивающейся ма-

тем. теории расписаний. Точные методы решения задачи построения календарного плана-графика применимы, как правило, только для задач малой размерности. Для решения некоторых частных задач К. п. применяют методы *программирования линейного*, *целочисленного линейного программирования* и *программирования динамического*. В общем случае динамичность производства, различного рода отклонения, неоднозначно определенные критерии оптимизации требуют построения такой схемы решения, которая была бы достаточно универсальной, обеспечивала большую гибкость; допускала легко реализуемый переход от одного критерия оптимизации к иному; обеспечивала приемлемое время счета, позволяла получать приближенное решение, достаточно близкое к оптимальному; позволяла вносить изменения в построенное решение, т. е. осуществлять корректировку плана-графика. Этим требованиям удовлетворяют *алгоритмы*, использующие методы моделирования, и идеи *последовательного анализа вариантов*.

Существуют различные способы наглядного представления календарных планов работы участков. Наиболее распространены графические способы. На графике работы участка (рис.) видна загрузка каждого рабочего места по сменам. Каждая операция на таком графике представляется отрезком, по длине равным продолжительности выполнения операции в выбранном масштабе времени. Под отрезком записаны осн. хар-ки операции (номер детали, номер операции, размер партии и т. д.). Широкое распространение получили особые формы представления как самих «технологических маршрутов», так и календарных планов в виде т. н. стрелочных диаграмм или сетевых графиков (см. *Сетевые методы планирования и управления*). Такие формы представления используют при К. п. в случае сложных разработок, проектировании уникальных объектов в сжатые сроки и т. п. Наряду с наглядными формами графического представления календарных планов возможны различные формы табличного представления данных, характеризующих календарные планы.

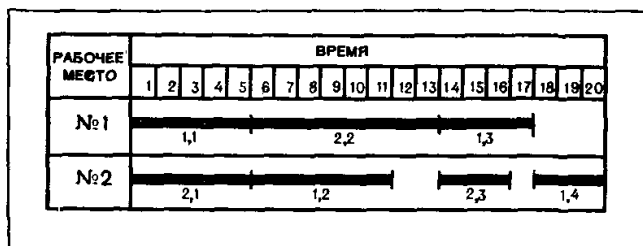


График работы участка.

Задачи К. п. встречаются при конструировании цифровых вычисл. машин и в ряде разделов дискретной прикладной математики. При этом рассматриваемые дискретные процессы можно отождествлять с технолог. маршрутами обрабатываемых деталей, а заданное ограниченное множество преобразователей — с множеством единиц оборудования.

Лит.: Бусленко Н. П. Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах. М., 1964 [библиогр. с. 361—362]; Шкурба В. В. [и др.]. Задачи календарного планирования и методы их решения. К., 1966 [библиогр. с. 152—153]; Вайонь А. Научное программирование в промышленности и торговле. Пер. с англ. М., 1963; Календарное планирование. Пер. с англ. М., 1966 [библиогр. с. 450—464].

Т. П. Подчасова.

**КАНАЛ МАШИННЫЙ** — устройство, с помощью которого производится обмен данными между центральным процессором и периферийным оборудованием. См. также *Устройство обмена ЦВМ*.

**КАНАЛОВ СВЯЗИ ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ** — теоретико-информационная мера возможности передачи информации по каналу связи. Пропускная способность канала связи совпадает с максимально возможной *передачи информации скоростью* по такому каналу, при котором еще возможно добиться как угодно высокой надежности передачи. Общее выражение для К. с. п. с. определяется соотношением

$$C = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} C_t \quad (1)$$

где  $C_t$  — пропускная способность временного отрезка  $[0, t)$  канала, задаваемая выражением

$$C_t = \sup I(\eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t), \quad (2)$$

где  $\eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t$  — отрезки  $[0, t)$  сигналов на входе и выходе соответственно,  $I(\eta_0^t, \tilde{\eta}_0^t)$  — информации количество относительно  $\tilde{\eta}_0^t$ , содержащееся в  $\eta_0^t$ , а верхняя грань берется по всем возможным допустимым распределениям отрезка сигнала  $\eta_0^t$  на входе канала при условии, что условное распределение сигнала на выходе  $\tilde{\eta}_0^t$  (при фиксированном сигнале на входе  $\eta_0^t$  канала) совпадает с условным распределением, задаваемым переходной ф-цией канала. Т. о., пропускная способность  $C_t$  отрезка  $[0, t)$  канала характеризует макс. к-во информации, которое можно получить при передаче по отрезку  $[0, t)$  канала, выбрав оптим. образом распределение сигнала на входе канала. *Распределение вероятностей*, на котором достигается верх. грань в выражении (2), наз. оптимальным распределением на входе отрезка  $[0, t)$  канала. Оптим. либо близкое к оптим. распределение позволяет наиболее полно использовать возможности канала связи (отрезка канала).

Иногда вводят другое определение К. с. п. с.  $\bar{C}$ . Если  $\eta$  и  $\tilde{\eta}$  — сигналы на входе и выходе канала соответственно, и  $\bar{I}(\eta, \tilde{\eta})$  — средняя скорость передачи информации (определяемая как  $\bar{I}(\eta, \tilde{\eta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I(\eta_1, \dots, \eta_n, \tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_n)$ ) — для каналов с дискретным временем, и

$$I(\eta, \tilde{\eta}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I(\eta_t, \tilde{\eta}_t) dt \quad \text{— для каналов с}$$

непрерывным временем), то  $\bar{C} = \sup \bar{I}(\eta, \tilde{\eta})$ , где верхняя грань берется по всем возможным допустимым распределениям сигнала  $\eta$  на входе канала, при условии, что условное распределение сигнала на выходе при фиксированном сигнале на входе канала совпадает с условным распределением, заданным переходной ф-цией канала. Если обе величины  $C$  и  $\bar{C}$  существуют, то всегда  $\bar{C} \leq C$ , и, более того, во многих случаях  $C = \bar{C}$  (напр., для случая стационарных каналов с конечной памятью).

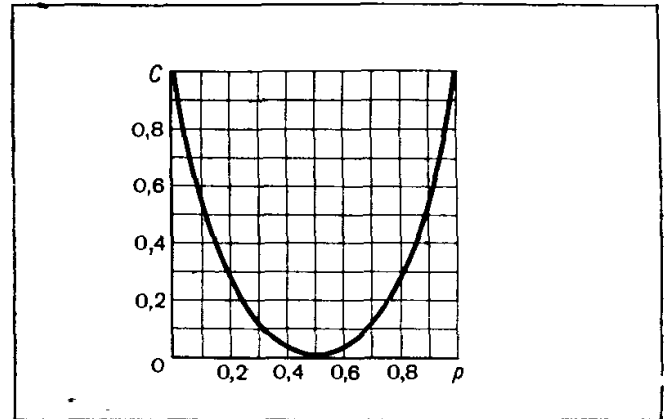


График пропускной способности  $C$  двоичного симметричного канала в зависимости от вероятности ошибки  $p$  в канале.

Явное вычисление К. с. п. с.  $C$  (или  $\bar{C}$ ) оказывается возможным лишь в некоторых частных случаях для наиболее простых (с матем. точки зрения) каналов связи. Напр., для дискретного стационарного канала без памяти с конечным числом сигналов на входе и выходе, задаваемого матрицей переходных вероятностей канала  $Q = \| p_{ij} \|$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ , пропускная способность  $C = 0$  в том и только в том случае, если все строки матрицы  $Q$  совпадают, т. е. для канала с независимым выходом, в котором условное распределение вероятностей сигналов на выходе не зависит от сигнала на входе канала. При  $l = k$   $C$  принимает макс. значение  $\log k$  в случае канала без шумов, т. е. в случае, когда каждая строка и каждый столбец матрицы  $Q$  содержит ровно одну единицу, а остальные нули. Для симметричного канала, задаваемого матрицей  $Q = \| p_{ij} \|$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, k$ ,  $p_{ii} = p$ ,  $p_{ij} = (1 - p)/(k - 1)$ ,  $i \neq j$ ,  $0 \leq p \leq 1$ ;

$$C = \log k + p \log p + (1 - p) \log \frac{1 - p}{k - 1}, \quad (3)$$

причем оптим. распределением сигнала на входе служит равномерное распределение. На рис. приведен график пропускной способности канала, задаваемой выражением (3) как ф-ции  $p$  при фиксированном  $k$ . Величина  $C$  обращается в нуль при  $p = \frac{1}{k}$  (т. к. при этом значении  $p$  канал оказывается с независимым выходом). При  $p = 1$  канал является каналом

без шумов и  $C$  принимает макс. значение  $\log k$ . Любопытной и на первый взгляд парадоксальной особенностью графика является то, что при малых вероятностях правильной передачи  $p$  (меньших критического значения  $p = 1/k$ ) пропускная способность возрастает. Возможность передачи при таких  $p$  связана с тем, что, получив сигнал на выходе, с большей степенью уверенности можно считать, что он получен из отличного от него сигнала на входе.

Для двоичного канала со стиранием, задаваемого матрицей  $Q = \begin{pmatrix} p & q & h \\ q & p & h \end{pmatrix}$ ,  $p + q + h = 1$ , К. с. п. с.  $C = (1 - h) + p \times \log \frac{p}{1-h} + q \log \frac{q}{1-h}$ . В случае отсутствия ошибок ( $q = 0$ ) и наличия только стираний  $C = 1 - h$ . Для каналов с непрерывным пространством сигналов на входе и выходе явное вычисление пропускной способности оказывается возможным для гауссовских каналов. Напр., для гауссовского канала с дискретным временем и независимым аддитивным шумом, задаваемого равенством  $\tilde{\eta}_k = \eta_k + \zeta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $\zeta_k$  — последовательность независимых гауссовских случайных величин, такая, что  $M\zeta_k = 0$ ,  $M\zeta_k^2 = N$ , а на распределение стационарного входного сигнала ( $\eta_1, \eta_2, \dots$ ) наложено условие, состоящее в том, что ср. мощность не превосходит  $P$ , пропускная способность  $C = 1/2 \log(1 + P/N)$ .

Эта ф-ла обобщается и на случай гауссовского канала без памяти с непрерывным временем. Впервые ф-лы для гауссовских каналов дал амер. математик К.-Э. Шеннон (р. 1916).

Ввиду трудностей, связанных с получением явных ф-л для пропускной способности каналов, значительный интерес представляет получение разного рода асимптотических ф-л. Напр., для канала без памяти, сигналы на входе и выходе которого принимают значения в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R^n$ , задаваемом плотностью условного распределения  $p(y, \tilde{y})$  сигнала  $\tilde{\eta} = \tilde{y}$  на выходе при фиксированном сигнале на входе  $\eta = y$  и ограничении на ср. мощность сигнала на входе  $M|\eta|^2 \leq \varepsilon$  (где  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ,  $|\eta|^2 = \sum_{i=1}^n \eta_i^2$ ), пропускная способность при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (случай малого сигнала на входе) имеет вид

$$C = \left( \sup_x \frac{\varphi(x)}{|x|^2} \right) \varepsilon + o(\varepsilon),$$

где  $\varphi(x) = \int_{R^n} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(0, y)} dy$ , а  $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Лит. см. к ст. Информации передача.

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов.

**КАНАЛЫ СВЯЗИ** — 1) Совокупность технических устройств, обеспечивающих независимую передачу сообщений от передатчика к приемнику по физической линии связи. Линия связи представляет собой среду, в которой распространяются сигналы от передатчика к приемнику. По ней организуется одновременная передача нескольких независимых сообщений, каждое из которых следует по своему каналу. На одной линии каналов может быть очень много. Каналы, по которым связь осуществляется только в одном направлении,

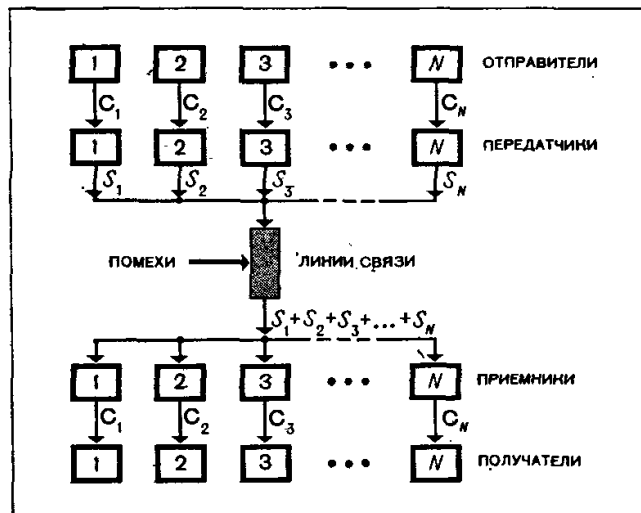


Схема многоканальной линии связи.

наз. односторонними или симплексными, каналы с одновременной двухсторонней связью в прямом и обратном направлении — дуплексными.

К. с. совместно с отправителем и получателем образуют систему связи (рис.). Независимые сообщения  $C_1 \div C_N$  многоканальной системы связи от  $N$  источников (отправителей) подаются на входы передатчиков и там преобразуются в соответствующие этим сообщениям сигналы  $S_1 \div S_N$ . Сигналы всех передатчиков поступают в линию связи. С выхода линии связи смесь сигналов всех  $N$  каналов поступает на входы приемников, там эти сигналы разделяются спец. разделительными устройствами (селекторами), преобразуются в сообщения и выдаются получателю. Операция преобразования сообщения в сигнал наз. модуляцией сигнала, а обратное преобразование — демодуляцией сигнала. При частотном способе разделения сигналы различных каналов размещаются в неперекрывающихся частотных полосах и разделяются при помощи набора полосовых фильтров, каждый из которых пропускает полосу частот своего канала; при временном — передача осуществляется так, что элементы сигнала, принадлежащего данному каналу, передаются в определенные промежутки времени, свободные от передачи сигналов других каналов, а для разделения сигналов на приемном конце устанавливается коммутатор, работающий синхронно с разделителем на передающем конце.

Наиболее важные характеристики К. с.: степень искажений, которым подвергается передаваемый сигнал, уровень *помех* в канале и затухание сигнала. Линейные искажения состоят из частотных и фазовых, они определяются переходной характеристикой канала или, что эквивалентно, комплексным коэффициентом передачи канала. Для уменьшения фазовых искажений в К. с. включают фазокорректирующие цепи. Нелинейные искажения возникают в результате действия нелинейных элементов и узлов (дрессели и трансформаторы с сердечниками, усилители, окислившиеся контакты и др.). При наличии нелинейных искажений в составе сигнала появляются высшие гармонические составляющие и комбинационные частоты.

В результате воздействия помех сигнал искажается и условия разделения сигналов ухудшаются. Источниками синусоидальных, импульсных и флуктуационных помех являются соседние передатчики, пром. установки, линии электропередачи, атмосферные помехи, внутренние шумы в аппаратуре связи и др. Помехи в реальных системах связи ограничивают нижний уровень мощности сигнала и достоверность (надежность) связи.

Затухание К. с. определяется потерей мощности сигналов в нем (уменьшением уровня мощности сигнала), оно измеряется в децибеллах и определяется выражением  $b = 10 \log \frac{P_0}{P_k}$ ,

где  $P_0$  — мощность в начале канала при идеальном согласовании канала с передатчиком,  $P_k$  — мощность на выходе реального канала.

По характеру передаваемых сообщений К. с. разделяют на телеграфные, телефонные, фото-телеграфные, радиовещания, телевизионные, телемеханические, передачи *данных*, радиолокационные и др. Они различаются гл. обр. диапазоном и полосой частот. Воздушные линии выполняются биметаллическими, медными, а в некоторых случаях стальными проводами. По линии с биметаллическими проводами (стальной провод, покрытый слоем меди) можно передавать сигналы до 150 кгц. Это позволяет организовать 15 высокочастотных каналов по одной паре проводов. Одним из осн. средств проводной связи являются кабели с симметричными парами. В кабельных линиях используется система уплотнения, позволяющая создавать 24 телефонных канала при диапазоне частот до 108 кгц, или 60 каналов с верхним диапазоном частот до 250 кгц. По коаксиальным кабелям можно передавать высокие частоты вплоть до 8—12 Мгц, это позволяет создавать до 2700 телефонных каналов или 1200 телефонных и один телевизионный канал. К числу проводных линий следует отнести и системы с передачей сигналов связи по линиям электрической передачи (ЛЭП). К. с., построенные на этих линиях, используются в энергосистемах для диспетчерской телефонной связи, телеметрии, телеуправления и релейной защиты.

Для создания К. с. широко используются

радио- и радиорелейные линии. В последних связь осуществляется на сверхвысоких частотах в диапазоне дециметровых и сантиметровых волн, где имеется возможность выделить широкие полосы частот и разместить большое число каналов. В многостволовой системе радиорелейной связи, содержащей до 8 стволов, создают на каждом из них 2220 телефонных каналов или 700 телефонных и один телевизионный канал. Значительное увеличение числа К. с. достигается при работе в более высокочастотном диапазоне. Поэтому для создания К. с. начинают использовать волноводные линии, по которым можно передавать частоты до  $2 \cdot 10^{11}$  гц. Очень широкие возможности открываются при использовании для построения систем связи оптического и ультрафиолетового диапазонов волн.

2) В теории *информации передачи* К. с. наз. математическое описание рассмотренных выше реальных (физических) К. с. Одно из общепринятых матем. определений К. с. с дискретным временем основывается на следующих положениях.

а) Задается монотонно возрастающая последовательность действительных чисел  $t_1, t_2, \dots$ , называемых моментами передачи, т. е. предполагается, что передача сигнала ведется по К. с. в отдельные наперед заданные моменты времени  $t_1, t_2, \dots$ . При этом считают, что сигналу, поступившему на вход канала в момент  $t_i$ , соответствует сигнал на выходе канала, полученный в тот же момент  $t_i$ . В реальных (физических) К. с. передача сигнала никогда не происходит мгновенно, а имеет некоторую конечную длительность. Поэтому матем. модель К. с. с дискретным временем более всего приспособлена для описания тех реальных К. с., в которых передача ведется на отдельных непересекающихся отрезках времени.

б) Считаются заданными пространства  $Y$  и  $\tilde{Y}$  значений сигналов на входе и выходе канала соответственно. Для того, чтобы матем. модель К. с. служила описанием для возможно большего числа различных физ. К. с., естественно считать, что пространство значений сигнала на входе канала в каждый момент передачи  $t_i$  и пространство значений сигнала на выходе канала в тот же момент времени являются произвольными мн-вами  $Y$  и  $\tilde{Y}$ .

Примером канала, где  $Y$  и  $\tilde{Y}$  не совпадают, может служить канал со стиранием, в котором в результате действия шумов передаваемый по каналу сигнал может быть настолько искажен, что его нельзя отождествить с достаточной степенью уверенности ни с одним из возможных значений сигнала на входе (т. е. в результате передачи по каналу сигнал «стирается»). По сравнению с пространством значений  $Y$  сигнала на входе пространство значений  $\tilde{Y}$  сигнала на выходе для канала со стиранием содержит дополнительное значение, которое соответствует «стиранию» сигнала при передаче. Возможны такие случаи, когда

сигнал на входе принимает конечное или счетное число значений, а сигнал на выходе может принимать любое действительное значение (случай т. н. полунепрерывных каналов). Так будет, если сигнал на входе принимает, напр., всего два значения  $+1$  и  $-1$ , а во время передачи на него воздействует аддитивный шум, являющийся в момент  $t_i$  случайной величиной  $l_i$ , принимающей любые действительные значения.

в) В любых физически реальных К. с. в передаче по тем или иным причинам вкрадываются погрешности, которые приводят к тому, что сигнал на выходе канала, вообще говоря, отличается от сигнала на входе канала. Математически такие погрешности в каналах описываются заданием системы переходных вероятностей  $Q_n(\tilde{A}/y_1, y_2, \dots, y_n)$ , где  $y_1, \dots, y_n \in Y$ , а  $\tilde{A}$  — произвольное мн-во  $n$ -мерных векторов  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)$ , где  $\tilde{y}_i \in \tilde{Y}$ , являющихся при любых  $n$  условными распределениями в пространстве  $n$ -мерных векторов  $(y_1, \dots, y_n)$  — значений сигналов на выходе канала, при условии, что были переданы сигналы  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Эта система переходных вероятностей должна удовлетворять двум естественным ограничениям. Первое из них наз. требованием отсутствия предвосхищения. Его наглядный смысл состоит в том, что статистические свойства значений сигналов на выходе, появившихся до некоторого момента времени  $t$ , целиком определяются сигналами на входе до момента  $t$  и не зависят от значений сигналов, передаваемых после момента  $t$ . Второе ограничение состоит в требовании согласованности условных распределений, состоящем в том, что условное распределение сигнала на выходе в моменты  $t_1, t_2, \dots, t_m$ , вычисленное по условному распределению вероятностей сигнала на выходе в моменты  $t_1, t_2, \dots, t_n$ ,  $n > m$  и в соответствии с требованием отсутствия предвосхищения, не зависящее от  $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n$ , должно совпадать с заданным условным распределением для сигналов в моменты  $t_1, t_2, \dots, t_m$ .

г) Реальные сигналы, передаваемые по К. с., всегда подчиняются некоторым ограничениям (напр., ограничены мощность передатчика и приемника, напряжение электрических сетей и т. п.). Существуют разные способы матем. отражения этих ограничений, однако, матем. теория оказывается существенно более простой, если предполагать, что ограничения накладываются не на пространство значений сигнала, а на его статистические свойства. Наиболее общий способ введения таких ограничений задается с помощью некоторых мн-в  $V_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  — «допустимых» распределений вероятностей на мн-ве отрезков входных сигналов длины  $n$ , т. е. на пространстве  $n$ -мерных векторов  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , где  $y_i \in Y$ . Примером такого ограничения может быть часто используемое требование, чтобы распределе-

ния вероятностей сигналов на входе  $\eta_1, \eta_2, \dots$ , являющихся последовательностью случайных величин, соответствующих моментам передачи  $t_1, t_2, \dots$ , удовлетворяли неравенству  $M\eta_i^2 \leq p^2$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , называемому ограничением на мощность сигнала на входе в каждый момент времени. Часто используется также не-

равенство вида  $\frac{1}{n} M \left[ \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \right] \leq p^2$ , называемое ограничением на среднюю мощность сигнала.

Данное выше определение К. с. с дискретным временем обобщается и на К. с. с непрерывным временем, т. е. на случай, когда передача ведется во все моменты времени  $t$ . В непрерывном К. с. сигналы на входе и выходе являются случайными процессами с непрерывным временем. Кроме того, так же, как и для К. с. с дискретным временем, должна быть задана система допустимых распределений на пространстве значений сигнала на входе канала в каждый момент времени  $t$ .

К наиболее важным классам К. с. принадлежат следующие каналы (даваемые ниже определения для К. с. с дискретным временем в большинстве случаев естественным образом обобщаются и на каналы с непрерывным временем). Стационарный канал без памяти с конечным числом сигналов на входе  $y_1, y_2, \dots, y_k$  и на выходе  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_l$  полностью определяется матрицей переходных вероятностей  $Q = \|p_{ij}\|$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $j = 1, 2, \dots, l$ , где  $p_{ij} = P\{\tilde{\eta}_m = \tilde{y}_j / \eta_m = y_i\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , — вероятность того, что сигнал на входе канала  $y_i$  перейдет в результате передачи по каналу в сигнал  $\tilde{y}_j$  на выходе канала. При этом имеет место равенство

$$P\{\tilde{\eta}_1 = \tilde{y}_{i1}, \dots, \tilde{\eta}_k = y_{ik} / \eta_1 = y_{i1}, \dots$$

$$\dots, \eta_k = y_{ik}\} = P\{\tilde{\eta}_1 = \tilde{y}_{i1} / \eta_1 = y_{i1}\} \cdot \dots$$

$$\dots P\{\tilde{\eta}_k = \tilde{y}_{ik} / \eta_k = y_{ik}\},$$

означающее, что каждый передаваемый по каналу сигнал искажается независимо от всех других передаваемых сигналов (т. е. у канала отсутствует память).

Чаще всего рассматриваются симметричные каналы без памяти, для которых число символов на выходе  $l = k$  совпадает с числом символов на входе, а матрица  $\|p_{ij}\|$  такова, что

$$p_{ii} = p, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$p_{ij} = \frac{1-p}{m-1}, \quad i \neq j, \quad 0 < p < 1.$$

Примерами каналов с непрерывным пространством сигналов на входе и выходе служат гауссовские каналы, в которых сигнал на входе  $\tilde{\eta}_k$  в момент  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  равен сумме

$$\tilde{\eta}_k = \sum_{j=1}^k a_{kj} \eta_j + \zeta_k, \quad \text{где } \eta_j \text{ — значения сиг-}$$



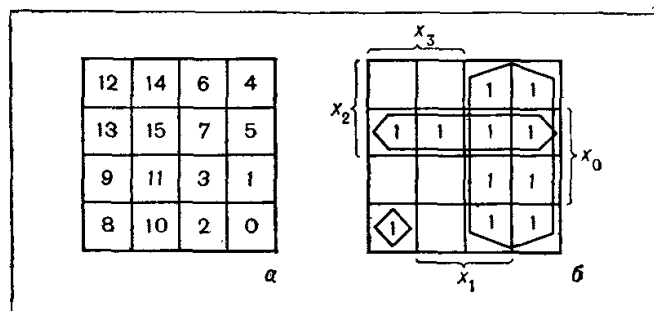
**эквивалентности** отношение между мн-вами. Класс эквивалентности мн-в наз. **м о щ н о с т ь ю**, или **К. ч.**, каждого из мн-в класса; так  $\aleph_0$  есть мощность любого счетного мн-ва,  $2^{\aleph_0}$  — мощность любого мн-ва, равномощного  $[0,1)$ . Общая запись  $\text{Card } A = \aleph$  означает, что мощность мн-ва  $A$  есть класс эквивалентности мн-в, обозначенный символом  $\aleph$ . Естественно ввести между мощностями отношение порядка: если  $\text{Card } A = \aleph$ ,  $\text{Card } B = \aleph'$ , то  $\aleph < \aleph'$  означает, что  $A$  равномощно некоторой части  $B$ , но  $B$  не равномощно никакой части  $A$  (в частности, самому  $A$ ). Имеет место теорема, по которой для любых мн-в  $A, B$  либо  $A$  равномощно части  $B$ , либо  $B$  — части  $A$ ; если верно то и другое, то  $A$  и  $B$  равномощны. Тем самым для любых двух мощностей  $\aleph, \aleph'$  имеется три взаимно исключающих друг друга возможности  $\aleph < \aleph'$ ,  $\aleph' < \aleph$ ,  $\aleph = \aleph'$  (= означает совпадение). В этом смысле К. ч. напоминают обычные числа. Для К. ч. можно ввести операции сложения и умножения, но возникающая при этом арифметика весьма не похожа на обычную. Доказано, что мн-во всех подмножеств любого мн-ва  $A$  имеет мощность большую, чем  $A$ , откуда следует, что мн-во К. ч. не ограничено.

Важнейшей нерешенной задачей теории мн-в с самого начала была проблема континуума: существует ли мощность, промежуточная между счетной и мощностью континуума? «Гипотеза континуума» состояла в том, что такой мощности нет, т. е., что мн-во, равномощное части отрезка  $[0,1)$ , либо равномощно всему отрезку, либо конечно или счетно. Для устранения парадоксов, возникающих в «наивной» теории мн-в, была построена аксиоматика теории мн-в. Австр. математик К. Гёдель показал в 1940, что гипотеза континуума совместима с аксиомами теории мн-в, т. е. не может быть опровергнута никаким рассуждением, исходящим из этих аксиом. Наконец, в 1963 амер. математик П. Козн полностью решил проблему континуума, показав, что гипотеза континуума не может быть доказана никаким рассуждением, исходящим из аксиом теории мн-в. Т. о., принятие или отвержение гипотезы континуума одинаково законно, что ведет к двум равноправным «математикам». Этот результат является одним из наиболее глубоких в основаниях математики.

*Лит.:* Натансон И. П. Основы теории функций действительной переменной. К., 1950; Александров П. С. Введение в теорию множеств и теорию функций, ч. 1. М.—Л., 1948; Хаусдорф Ф. Теория множеств. Пер. с нем. М.—Л., 1937 [библиогр. с. 291—295]; Бурбаки Н. Начала математики, ч. 1. Основные структуры анализа, кн. 2. Теория множеств. Пер. с франц. М., 1965; Fraenkel A. A., Bar-Hillel I. Foundations of set theory. Amsterdam, 1958; Келли Дж. Л. Общая топология. Пер. с англ. М., 1968 [библиогр. с. 361—376]; Cohen P. J. Set theory and the continuum hypothesis. New York — Amsterdam, 1966. А. В. Гладкий.

**КАРНАУ КАРТА**, Вейча диаграмма — прямоугольная таблица некоторого специального вида, используемая для задания булевых функций и применяемая с целью упрощения поиска тупиковых и минимальных дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) их

представления. При построении К. к. для задания ф-ции, зависящей от  $n$  переменных, используют таблицу, содержащую  $2^n$  клеток. Каждой клетке присваивается номер, определяемый числом, запись которого в двоичной системе счисления совпадает с определенным набором значений переменных. При задании ф-ции с помощью такой таблицы в каждой клетке записывается значение этой ф-ции (0 или 1) на соответствующем наборе значений переменных. При задании частично определенных ф-ций в клетке, соответствующей набору



Способы нумерации клеток:  $a$  — нумерация клеток при  $n = 4$ ;  $b$  — буквенная нумерация клеток.

значений переменных, на котором ф-ция не определена, ставится метка. Применение К. к. для упрощения поиска тупиковых и минимальных ДНФ основано на установлении нумерации клеток такого соответствия между набором переменных и клетками таблицы, при котором элементарным произведениям различной длины соответствуют вполне определенные, удобные для запоминания и узнавания конфигурации единиц таблицы, например, конфигурации из расположенных рядом единиц, имеющие форму прямоугольника, квадрата. Нахождение тупиковых и минимальных ДНФ заданной булевой ф-ции при такой нумерации сводится к отысканию наиболее экономных покрытий конфигурации единиц, соответствующей этой функции, указанными конфигурациями единиц элементарных произведений. При определенных ограничениях на число переменных этот поиск характеризуется наглядностью, сравнительной простотой нахождения склеивающихся членов и выполнения собственно операции склеивания, а также наглядностью и простотой доопределения частично определенных ф-ций, исходя из соображений наиболее экономного покрытия их. Получение удобных для запоминания и узнавания конфигураций единиц (прямоугольников, квадратов), соответствующих элементарным произведениям, и выполнение всех возможных склеиваний и поглощений, а также получение приведенной системы импликант в случае  $n \leq 4$  обеспечивается, если при нумерации клеток номерами наборов (конституэнт единиц) номера всех конституэнт, соседних данной (т. е. отличающихся значением всего одной переменной), оказываются геометрически соседними. При  $n \geq 5$  выполнения этого требования недостаточно и номера соседних консти-



туэнт могут располагаться также в клетках, место которых в таблице определяется дополнительными признаками. Эти признаки можно получить, например, исходя из К. к. для  $n = 4$ . Один из возможных способов нумерации клеток К. к. при  $n = 4$  показан на рис. а. В некоторых случаях наряду с рассмотренным способом используют также буквенный (рис. б), позволяющий выделять области К. к., в которых значение любой переменной остается постоянным. Буквенная нумерация оказывается удобной, например, при задании булевой ф-ции с помощью К. к., если эта ф-ция представлена совершенной ДНФ и конституэнты записаны в виде произведения переменных, а также при переходе от покрытия конфигурациями единиц, соответствующих элементарным произведениям, к аналитическому представлению при записи этих произведений в виде произведения переменных. В качестве примера на рис. б показано задание с помощью К. к. ф-ции  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , принимающей единичные значения на наборах с номерами 0—7, 8, 13, 15. На этом же рисунке показано наиболее экономное покрытие конфигурации единиц, соответствующей этой функции, правильными прямоугольниками, состоящими из клеток (0—7), (5, 7, 13, 15) и (8).

Переход от покрытия некоторой булевой ф-ции, заданной с помощью К. к., к ее аналитическому представлению в виде ДНФ связан с отысканием аналитических представлений элементарных произведений, соответствующих всем конфигурациям единиц покрытия и являющихся дизъюнктивными членами этой ДНФ. Такое элементарное произведение составляется из тех и только тех сомножителей ( $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \dots, x_n, \bar{x}_n$ ), которые обращаются в единицу на всех наборах, охватываемых соответствующим покрытием. Например, показанному на рис. б покрытию соответствует ДНФ  $x_3 \vee x_0 x_2 \vee x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ , которая в данном случае является и минимальной.

Наиболее эффективно применение К. к. при  $n \leq 4$ . При  $n = 5, 6$  необходим некоторый навык в работе с картами. При  $n > 6$  сложность К. к. увеличивается настолько, что практически полностью теряется наглядность геом. представления, а вместе с ней и осн. преимущества применения К. к.

Лит.: Г л у ш к о в В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]; Е р е м е в И. С., Подлипенский В. С. Магнитная техника автоматики и кибернетики. К., 1970 [библиогр. с. 399—404]; V e i t c h E. W. A cart method for simplifying truth functions. «Proceedings of the Association for Computing Machinery», 1952, May, № 2—3; K a r n a u g h M. The map method for synthesis of combinational logic circuits. «Transactions of the American institute of electrical engineers», 1953, v. 72, № 1. Ю. Л. Ивасюк.

**КАРТА МАГНИТНАЯ** — прямоугольный отрезок (лист) гибкой пленки, покрытый ферромагнитным слоем, предназначенный для магнитной записи информации. Магн. карта как *носитель информации* имеет ряд существенных достоинств — удобна для формирования массивов информации и для передачи и хранения данных вне цифровой вычислительной ма-

шины (ЦВМ). К. м. можно предварительно отбраковывать, а также можно заменять отдельные карты в процессе эксплуатации.

На базе К. м. строят *накопители* с последовательной и произвольной выборкой карты из оперативного комплекта карт. В первом случае для поиска нужной карты производится последовательный перебор оперативного комплекта карт вплоть до момента поступления заданной карты к блоку магнитных головок (МГ). Во втором случае любая заданная карта за небольшой промежуток времени выбирается и подается к блоку МГ. Примером накопителя с последовательной выборкой может служить система «Magnacart». Она состоит из четырех рядом расположенных вакуумных барабанов, при помощи которых карты могут передаваться из одного пенала в другой или перемещаться относительно МГ для записи и считывания. Оперативный комплект карт (3000 шт.) хранится в пенале, 50 пеналов помещаются в магазине накопителя. Выбранный пенал автоматически подводится к вакуумным барабанам. Кроме обмена информацией с ЦВМ, система «Magnacart» может проводить сортировку и подборку карт. Емкость системы может составлять  $2,5 \cdot 10^9$  двоичных знаков. Применяется К. м. на майларовой основе с майларовым защитным покрытием ферромагнитного слоя. Емкость карты —  $4,5 \cdot 10^3$  двоичных знаков.

Накопитель с произвольной выборкой типа «SRAM» включает в себя магазин с 8 кодовыми и 2 фиксирующими поворотными стержнями, на которых висят 256 майларовых К. м. (оперативный комплект). Каждая К. м. имеет свою индивидуальную комбинацию из 8 кодовых вырезов. Любая из 256 К. м. может быть выбрана путем соответствующей комбинации поворота стержней и подана на вакуумный барабан, перемещающий ее вблизи МГ. После записи — считывания карта автоматически возвращается на стержни. Емкость К. м. —  $1,3 \cdot 10^5$  двоичных знаков, время выборки — 0,25 сек. Накопители большой и сверхбольшой емкости, построенные по многоадресному принципу, содержат несколько (от 8 и выше) оперативных комплектов карт, причем сначала выбирается комплект, а после этого — необходимая карта. Наибольшее распространение получили многомагазинные накопители, где каждый комплект карт хранится в отдельном магазине, снабженном системой выборки. К. м. наиболее пригодна для построения различных перспективных устройств, напр., с произвольной выборкой карты, с циклическим перемещением или шаговым движением карты и т. п. Р. Я. Черняк.

**КАСКАДОВ МЕТОД** — один из методов синтеза *комбинационных схем*. К. м. был разработан для синтеза релейно-контактных схем, а впоследствии этот метод получил широкое распространение при синтезе комбинационных схем, построенных из логических элементов. Он используется чаще всего для синтеза схемы, реализующей одновременно  $m$  булевых функций  $f_1, \dots, f_m$ , каждая из которых есть функция  $n$  аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . К. м. основан на использовании соотношения *булевой алгебры*,

справедливого для произвольной булевой ф-ции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1) \vee \bar{x}_n \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Приведенное соотношение содержит в правой части ф-ции, зависящие от  $n-1$  переменных, и его можно легко синтезировать, используя двухвходовые элементы «И» и «ИЛИ», реализующие ф-ции вида  $x_n \cdot \varphi_1 \vee \bar{x}_n \cdot \varphi_2$ , если в качестве входных значений разрешается брать значение аргумента  $x_n$  и значения ф-ции  $\varphi_1 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$  и  $\varphi_2 = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ .

Построенная таким образом схема для каждой из функций  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) образует последний каскад искомой комбинационной схемы. Предпоследний каскад получают аналогично этому, но уже применительно к ф-циям вида

$$f_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \text{ и } f_i(x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Применив указанный прием последовательно  $n-2$  раза, сводят исходную задачу синтеза к задаче синтеза схемы, реализующей некоторые булевые ф-ции от двух переменных, а эта задача решается тривиально. Т. о., применяя К. м., получают искомую схему (на выходах которой реализуются функции  $f_1, \dots, f_m$ , зависящие от  $n$  переменных) в виде объединения последовательно включенных  $n-1$  каскадов. Лит.: П о в а р о в Г. Н. Математическая теория синтеза контактных (1,  $k$ )-полосников. «Доклады АН СССР», 1955, т. 100, № 5; Г л у ш к о в В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]. В. Н. Коваль.

**КАТАЛОГ** (от греч. *καταλόγος* — список) — сгруппированный определенным образом массив вторичных документов. Наибольшее распространение в процессе научно-информационной деятельности получили библиотечные К., являющиеся составной частью справочно-информационного фонда.

**КАТЕГОРИЙ ТЕОРИЯ** — математическая теория, основным объектом изучения которой является понятие категории. Это понятие ввели амер. математики С. Маклейн и С. Эйленберг в 1945 г. применительно к проблемам алгебраической топологии. Позднее применение К. т. вышло далеко за пределы этих проблем и широко использовалось в алгебре, алгебр. геометрии, анализе, логике математической, матем. кибернетике и др.

Говорят, что задана категория  $K$ , если: а) задан класс  $Ob(K)$  элементов  $A, B, A_1, A_2, B_1, \dots$ , называемых объектами категории  $K$ ; б) для каждой упорядоченной пары объектов  $(A, B)$  задано мн-во  $Hom_K(A, B)$ . Элементы этого мн-ва наз. морфизмами  $A$  в  $B$  и  $f \in Hom_K(A, B)$  записывается также в виде  $f: A \rightarrow B$  или  $A \xrightarrow{f} B$ . Объект  $A$  наз. областью морфизма  $\vec{f}$ , а объект  $B$  — его кообластью; в) для каждой упорядоченной тройки объектов  $(A_1, A_2, A_3)$  задано отображение  $\mu: Hom_K(A_1, A_2) \times Hom_K(A_2, A_3) \rightarrow$

$\rightarrow Hom_K(A_1, A_3)$ . Образ  $\mu(\varphi, \psi)$ , где  $\varphi \in Hom_K(A_1, A_2)$ ,  $\psi \in Hom_K(A_2, A_3)$ , обозначается через  $\varphi \circ \psi$  или  $\varphi\psi$  и наз. композицией морфизмов  $\varphi$  и  $\psi$ . Мн-во морфизмов  $Hom_K(A, B)$  и композиция морфизмов должны удовлетворять следующим аксиомам.

1) Композиция ассоциативна, т. е. для каждой тройки морфизмов  $f \circ (\varphi \circ \psi) = (f \circ \varphi) \circ \psi$ .

2) Для каждого объекта  $A$  из  $Ob(K)$  существует морфизм  $1_A: A \rightarrow A$ , наз. тождественным или единичным морфизмом объекта  $A$ , такой, что  $1_A \circ f = f$  и  $\varphi \circ 1_A = \varphi$  для произвольных морфизмов  $f: A \rightarrow B$  и  $\varphi: C \rightarrow A$ .

3) Если пары  $(A, B)$  и  $(A_1, B_1)$  различны, то пересечение мн-в  $Hom_K(A, B)$  и  $Hom_K(A_1, B_1)$  пусто.

Отождествляя единичный морфизм произвольного объекта  $A$  с самим этим объектом, можно дать определение понятия категории, эквивалентное приведенному выше, пользуясь только понятием морфизма и не используя понятия объектов. Очень часто именно так и определяется категория. В качестве примера категории приведем категорию всех мн-в  $S$ . Объектами этой категории являются все мн-ва, морфизмами — все отображения мн-в друг в друга и композицией морфизмов — суперпозиции отображения. Другой пример категории — произвольный полный граф, имеющий в каждой вершине петлю. В этом случае объектами являются вершины графа, морфизмами — дуги, а композицией дуг  $(a, b)$  и  $(b, c)$  — дуга  $(a, c)$ . Морфизм  $f: A \rightarrow B$  наз. изоморфизмом, если существует морфизм  $g: B \rightarrow A$  такой, что  $gf = 1_B$  и  $fg = 1_A$ . Категория  $K$  наз. малой, если ее объекты образуют мн-ва, напр., любой полный граф — малая категория ибо, говоря о графах, мы всегда подразумеваем, что совокупность всех вершин графа — мн-во. Подкатегорией  $K$  наз. категория  $K'$  такая, что а)  $Ob(K') \subset Ob(K)$ ; б) все тождественные морфизмы из  $K'$  суть тождественные морфизмы в  $K$ ; в)  $Hom_{K'}(A, B) \subset Hom_K(A, B)$  и г) композиция морфизмов в  $K'$  индуцируется их композицией в  $K$ . Подкатегория  $K'$  наз. полной, если  $Hom_{K'}(A, B) = Hom_K(A, B)$  для каждой пары  $(A, B)$  из  $Ob(K')$ .

Каждой категории  $K$  можно поставить в соответствие дуальную категорию  $\bar{K}$ . Объекты дуальной категории  $\bar{K}$  суть объекты категории  $K$ . Для произвольной пары объектов  $(A, B)$  мн-во морфизмов  $Hom_{\bar{K}}(A, B) = Hom_K(A, B)$ .

Композиция морфизмов в категории  $\bar{K}$  определяется следующим образом:  $\varphi \circ \psi$  в категории  $\bar{K}$  равно  $\psi \circ \varphi$  в категории  $K$ , где  $\varphi \in Hom_{\bar{K}}(A, B)$  и  $\psi \in Hom_{\bar{K}}(B, C)$ . Можно увидеть, что  $\bar{\bar{K}} = K$ . Очевидно, что если некоторое утверждение верно для категории  $K$ , то дуальное ему утверждение верно для дуальной категории  $\bar{K}$ .

Пусть  $K_1$  и  $K_2$  — две категории. Функтор (ковариантный) из категории  $K_1$  в категорию  $K_2$  определяется, во-первых, отображением  $A \rightarrow F(A)$ , сопоставляющем каждому объекту  $A$  категории  $K_1$  объект  $F(A)$  из категории  $K_2$  и, во-вторых, отображением  $f \rightarrow Ff$ , сопоставляющем каждому морфизму  $f: A \rightarrow B$  категории  $K_1$  морфизм  $Ff: F(A) \rightarrow F(B)$  из категории  $K_2$ . При этом выполняются следующие аксиомы:

- 1)  $F(f\varphi) = (Ff)(F\varphi)$ ;
- 2)  $F1_A = 1_{F(A)}$ .

Для двух функторов  $F_1: K_1 \rightarrow K_2$  и  $F_2: K_2 \rightarrow K_3$  композиция определяется обычным способом  $F_1 \circ F_2: K_1 \rightarrow K_3$ . Аналогично понятию ковариантного функтора вводится понятие контравариантного функтора, которое является к нему дуальным. С каждым контравариантным функтором из  $K_1$  в  $K_2$  естественно ассоциируются ковариантные функторы из  $\bar{K}_1$  в  $K_2$  и из  $K_1$  в  $\bar{K}_2$  и обратно. Поэтому общее изучение контравариантных функторов может быть сведено к изучению ковариантных функторов. Говорят, что ковариантный функтор  $F: K_1 \rightarrow K_2$  определяет изоморфизм между категориями  $K_1$  и категорией  $K_2$ , если для каждого объекта  $A$  из  $K_2$  существует единственный объект  $B$  из  $K_1$  такой, что  $F(B) = A$  и отображение, сопоставляющее каждому морфизму  $f: A_1 \rightarrow A_2$  категории  $K_1$  морфизм  $Ff: F(A_1) \rightarrow F(A_2)$  категории  $K_2$ , биективно. В этом случае говорят, что категории  $K_1$  и  $K_2$  изоморфны. Категория наз. конкретной, если она изоморфна подкатегории категории мн-в  $S$ . Если  $K$  — категория и  $K_1$  — малая категория, то функтор из  $K_1$  в  $K$  наз. также диаграммой в  $K$  (со схемой  $K_1$ ).

Рассмотрим некоторые приложения К. т. к математической логике и кибернетике. Напр., на основе К. т. можно ввести общее понятие теории и алгебр. систем, т. е. развивать семантику логич. систем. Для этого прежде всего введем категорию  $S_0$ . Обозначим через  $[n]$  мн-во  $\{1, 2, \dots, n\}$ , так что  $[0] = \emptyset$ ,  $[1] = \{1\} = 1$ ,  $[2] = \{1, 2\}$  и т. д. Объектами категории  $S_0$  являются  $[n]$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , морфизмами — все отображения таких мн-в друг в друга, композицией морфизмов — суперпозиции отображений. Важную роль при этом будут играть морфизмы для пар объектов вида  $\{1\}, [n]$ . Очевидно, что для любого  $[n]$  существует ровно  $n$  различных отображений  $1 \rightarrow [n]$ : единица может отображаться либо в 1, либо в 2, либо в 3 и т. д. Если при отображении  $f: 1 \rightarrow [n]$  образом единицы является число  $i$ , то и само отображение  $f$  будем обозначать через  $f_i$ , или  $i$ , и записывать в виде  $f_i: 1 \rightarrow [n]$  или  $1 \xrightarrow{i} [n]$ .

Теорией  $T$  наз. такая категория, что 1)  $Ob(T) = Ob(S_0)$ ; 2)  $S_0$  есть подкатегория  $T$ ; 3) для произвольных данных морфизмов  $f_i: 1 \rightarrow [p]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  существует единственный морфизм  $\varphi: [n] \rightarrow [p]$ , такой, что  $f_i$

есть композиция  $1 \xrightarrow{i} [n] \xrightarrow{\varphi} [p]$  для каждого  $i \in [n]$ . Таким образом любой морфизм  $\varphi: [n] \rightarrow [p]$  может быть представлен  $\varphi = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ . Теория  $T$  и мн-во  $A$  определяют  $T$ -алгебру  $\mathfrak{A} = \langle A, T \rangle$  следующим образом. Каждый морфизм  $\varphi: [n] \rightarrow [p]$  и каждый набор из  $p$  элементов мн-ва  $A$  определяют  $n$  элементов мн-ва  $A$   $(x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_p)$   $\varphi$  следующим образом: 1) если  $\varphi$  принадлежит  $S_0$ , то  $x'_i = x_{\varphi_i}$ ; 2) если  $\psi: [n] \rightarrow [p]$  — морфизм  $T$ , то  $(x'_1, \dots, x'_n) \psi = (x_1, \dots, x_p) (\varphi\psi)$ . Отметим, что если  $\emptyset: 1 \rightarrow [p]$  морфизм  $T$ , то  $(x_1, \dots, x_p) \emptyset \in A$ , так, что  $\emptyset$  определяет  $p$ -местную операцию в алгебре  $\mathfrak{A}$ . Пусть  $A_k = Hom_T([1], [k])$  — мн-во всех морфизмов  $1 \rightarrow [k]$ . Превратим  $A_k$  в  $T$ -алгебру. По данным  $\emptyset: [n] \rightarrow [p]$  в  $T$  и  $(x_1, \dots, x_p) \in A$  имеем  $x_i: 1 \rightarrow [k]$  и значит  $(x_1, \dots, x_p): p \rightarrow [k]$  в  $T$ , следовательно, композиция  $\gamma = (x_1, \dots, x_p) \emptyset$  определена и является морфизмом  $\gamma: [n] \rightarrow [k]$  в  $T$ . Определим  $(x_1, \dots, x_p) \emptyset = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ . Отметим, что каждое отображение  $i: 1 \rightarrow [k]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  в  $S_0$  является элементом  $A_k$  и, следовательно,  $[k]$  есть подмн-во  $A_k$ . Морфизм двух  $T$ -алгебр  $\mathfrak{A} = \langle A, T \rangle$  и  $\mathfrak{B} = \langle B, T \rangle$  — это такое отображение  $f: A \rightarrow B$ , что  $f[(x_1, \dots, x_p) \emptyset] = (fx_1, \dots, fx_p) \emptyset$ . Для введенной  $T$ -алгебры на мн-ве  $A_k$  верно следующее утверждение: какова бы ни была  $T$ -алгебра  $\mathfrak{A} = \langle A, T \rangle$ , каждое отображение  $f: [k] \rightarrow A$  допускает единственное расширение  $\bar{f}: A_k \rightarrow A$  до морфизма алгебр  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{A}_k$ . Таким образом, алгебра  $\mathfrak{A}_k$  является свободной алгеброй с базой  $[k]$ .

Пусть  $\Omega = \{\Omega_n\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  последовательность мн-в и теория  $T$  такова, что  $\Omega_n \subset Hom_T([1], [n])$ . Пусть с каждым морфизмом  $\emptyset: [n] \rightarrow [p]$  связано положительное целое число  $d\emptyset \geq 0$  такое, что 1)  $d\emptyset = 0$ , если  $\emptyset$  из  $S_0$ ; 2)  $d\emptyset = d(\emptyset 1) + \dots + d(\emptyset n)$ ; 3) если  $\omega \in \Omega_n$ , то  $d(\emptyset \omega) = 1 + d\emptyset$ ; 4) если  $\emptyset: [1] \rightarrow [p]$  и  $d\emptyset > 0$ , то существует единственное  $k \geq 0$  и единственная факторизация  $\emptyset 1 \xrightarrow{\omega} [k] \xrightarrow{\psi} [p]$  с  $\omega \in \Omega_k$  и  $\psi$  из  $T$ . Нетрудно убедиться, что теория  $T$  с такими свойствами единственна и она наз. свободной теорией с базой  $\Omega \Rightarrow S_0(\Omega)$ . Конгруэнция  $Q$  в теории  $T$  — это такое семейство отношений эквивалентности, по одному в каждом мн-ве  $Hom_T([n], [p])$ , что, во-первых, если  $\emptyset_1, \emptyset_2: [n] \rightarrow [p]$  и  $\emptyset_1 \sim \emptyset_2$ , то  $\psi \emptyset_1 \sim \psi \emptyset_2$  для каждого  $\psi: [q] \rightarrow [n]$  и  $\emptyset_1 v \sim \emptyset_2 v$  для каждого  $v: [p] \rightarrow [q]$ ; во-вторых, если  $i \emptyset_1 \sim i \emptyset_2$  для всех  $i = 1, \dots, n$ , то  $\emptyset_1 \sim \emptyset_2$ ; в-третьих, для произвольных  $\emptyset_1, \emptyset_2: 1 \rightarrow [n]$  из  $S_0$ ,  $\emptyset_1 \sim \emptyset_2$  тогда и только тогда, когда  $\emptyset_1 = \emptyset_2$ . Конгруэнция  $Q$  в  $T$ -алгебре  $\mathfrak{A} = \langle A, T \rangle$  — это такое отношение эквивалентности на мн-ве  $A$ , что  $(a_1, \dots, a_p) \emptyset \sim (a'_1, \dots,$

...,  $a_p$ )  $\in \emptyset$  для любого  $\emptyset : 1 \rightarrow [p]$  из  $T$  при условии, что  $a_i \sim a_i'$ . Рассмотрим, напр., теорию  $Sgr$ , алгебрами которой являются *полугруппы*. Ее можно описать следующим образом. Начиная со свободной теории, порожденной единственным морфизмом  $\pi : 1 \rightarrow [2]$ , т. е.  $T = S_0(\Omega)$ , где  $S_2 = \{\pi\}$ , а  $\Omega_i = \emptyset$  для  $i \neq 2$ . Тогда все  $T$ -алгебры этой теории — это *мн-ва*  $A$  с определенным на них бинарной операцией (умножением)  $\pi : (a_1, a_2) \pi \in A$ . Для того, чтобы задать ассоциативность этой операции, необходимо задать конгруэнцию  $((a_1, a_2) \pi, a_3) \pi \sim (a_1, (a_2, a_3) \pi) \pi$ .

Конечные автоматы можно рассматривать как конечные  $T$ -алгебры и таким образом в рамках К. т. изучать теорию конечных автоматов. Известны также попытки приложения К. т. к программированию. Пусть  $X$  — *мн-во* слов некоторого алфавита  $A$ ,  $X_1 \subset X$  — *мн-во* всех возможных исходных данных задачи, а  $X_2$  — *мн-во* всех возможных ее решений. Общий метод решения задачи заключается в том, чтобы с каждым конкретными исходными данными (т. е. отдельными элементами из  $X_1$ ) связать частное решение (т. е. отдельный элемент из  $X_2$ ), которое этой задаче соответствует. Тогда категория задач — это категория отображения частей *мн-ва*  $X$  в части того же самого *мн-ва*. Вычислительная машина, алфавитом которой является алфавит  $X$ , соответствует некоторому набору задач (простейших машинных операций), т. е. некоторому набору морфизмов  $f_1, \dots, f_n$  из категории задач. Решить задачу  $f$  при помощи машины означает найти последовательность морфизмов, составленную единственным образом из  $f_1, \dots, f_n$ , такую, что произведение их равно  $f$ . Следовательно, морфизм  $f$  необходимо разложить на «множители», которые все принадлежат множеству «элементарных» задач.

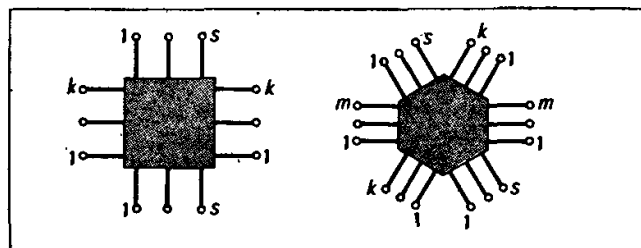
Лит.: Курош А. Г., Лифшиц А. Х., Шультце Й. Фер Е. Г. Основы теории категорий. «Успехи математических наук», 1960, т. 15, № 6; Ляпунов А. А. К алгебраической трактовке программирования. «Проблемы кибернетики», 1962, № 8; Риге Ж. Программирование и теория категорий. В кн.: Кибернетический сборник, в. 9. М., 1964; Букр И., Делану А. Введение в теорию категорий и функторов. Пер. с англ. М., 1972; Eilenberg S., Wright J. B. Automata in general algebras. «Information and control», 1967, v. 11, № 4. М. И. Кратко.

**КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ** — см. Программирование квадратичное.

**КВАДРАТЪРНЫЕ ФОРМУЛЫ** — формулы численного интегрирования. См. Интегралов способы вычисления.

**КВАЗИАНАЛОГОВАЯ МОДЕЛИРУЮЩАЯ СРЕДА** — квазианалоговая модель, которая конструктивно представляет собой структуру, состоящую из однотипных и однотипно соединенных между собой ячеек, образующих геометрически правильную и изотропную плоскую или пространственную решетку, причем каждая ячейка допускает управление ее состоянием или параметрами. Состоянием ячеек среды можно управлять сигналами от соседних ячеек, извне либо комбинированным способом.

К. м. с. делят на уравнивающиеся и не уравнивающиеся. Не уравнивающаяся К. м. с. — вычислительная среда, в которой нет обратных связей. Ввод в нее известной информации позволяет непосредственно получить искомые величины, состоящие из осн. неизвестных, соответствующих исходным ур-ниям моделируемого объекта, и вспомогательных, получающихся вследствие того, что по принципу квазианалогового моделирования решаются не заданные, а расширенные эквивалентные ур-ния. В уравнивающейся



Типы ячеек для плоской квазианалоговой моделирующей среды.

ва ем ы х К. м. с. вспомогательные неизвестные используют для формирования т. н. уравнивающих величин. Эти величины воздействуют на режим модели так, что выполняется условие эквивалентности ур-ний объекта и ур-ний, описывающих состояние К. м. с. Процесс подбора управляющих величин наз. уравниванием вычисл. среды. Как правило, уравнивание производится с помощью обратных связей. Вычисл. устр-во, построенное на базе уравниваемой К. м. с., структурно подразделяется на две осн. части: квазианалог, являющийся собственно моделью (в качестве квазианалога используют уравниваемую К. м. с.), и устр-во управления для уравнивания квазианалога. Устройство управления квазианалогом может быть выполнено в виде преобразователя, который является некоторой средой направленного действия, пропускающей сигналы лишь в определенных направлениях (см. Уравнивания методы).

К. м. с. бывают дискретные и непрерывные. В дискретных К. м. с. можно выделить отдельную ячейку среды. В моделях с непрерывными средами в качестве решаемой части используют непрерывные структуры, состоящие из монолитного материала (напр., электропроводная бумага, проводящие ткани, проводящая пластмасса и др.). Такие структуры наз. непрерывными моделирующими средами (см. Моделирование на сплошных средах). Непрерывные К. м. с., в которых свойства материала во всех направлениях одинаковы, наз. однородными, а непрерывные К. м. с., в которых свойства материала во всех направлениях неодинаковы, — неоднородными.

Требование однородности (изотропности) структуры К. м. с. ограничивает выбор формы ячеек. Форма ячеек такова, что совокупность плотно уложенных ячеек образует плоское либо объемное тело без зазоров между ячейка-

ми. На каждой стороне (грани) ячейки имеются выводы для соединения с др. ячейками. Поэтому в качестве ячеек используют фигуры (тела) с центр. симметрией и четным числом сторон (граней). Симметричные стороны ячейки содержат одинаковое к-во выводов. Для плоской квазианалоговой среды возможны два типа ячеек (рис.), где  $1 - k$ ,  $1 - m$ ,  $1 - s$  — полюсы, для трехмерного пространства — пять. К. м. с. могут быть одномерными, двумерными и трехмерными (в зависимости от моделируемого объекта). Аналоговая моделирующая среда — разновидность К. м. с. Конструктивно она строится так же, как и К. м. с., однако базируется она на принципе подобия (см. *Подобия теория*). При моделировании ур-ния Лапласа в качестве аналоговых вычисл. сред применяют электропроводную бумагу, пластины из проводящей резины, проводящие ткани, проводящие пластмассы; при моделировании ур-ния Фурье — электропроводную бумагу с распределенной емкостью. М. Н. Кулик.

**КВАЗИАНАЛОГОВАЯ МОДЕЛЬ** — вычислительное устройство, в основу которого положен принцип эквивалентности уравнений объекта и модели относительно получаемых результатов. К. м. каких-либо ур-ний  $A$  — это *аналоговая модель* иных ур-ний  $B$ , хотя бы частично не подобных ур-ниям  $A$  и таких, чтобы при выполнении определенных условий (условий эквивалентности) все или некоторые из решений ур-ний  $B$  совпали с точностью до постоянных множителей с решениями исходных ур-ний  $A$ .

Реализация условий эквивалентности К. м., как правило, связана с формированием т. н. вектора уравнивающих величин, получаемых в модели (см. *Уравнивания методы*). Имеются К. м., условия эквивалентности которых могут быть таковы, что их реализация не требует использования величин, получаемых в модели. Такие К. м. наз. *неуравновешиваемыми*, или К. м. 1-го рода. По своим свойствам они практически не отличаются от чисто аналоговых моделей. К. м. 1-го рода относятся к категории устр-в без *обратных связей*. Размерность вектора уравнивающих величин заранее не ограничивается и определяется видом моделирующего объекта. Этот вектор заранее неизвестен, поэтому для его определения организуется процесс уравнивания модели. К. м., построенные таким способом, наз. *уравниваемыми*, или К. м. 2-го рода. Уравниваемые К. м. состоят из двух осн. частей: из собственно модели, или квазианалога, и из устр-ва, предназначенного для уравнивания или управления. Модели 2-го рода относят к категории систем с обратными связями, т. к. в них имеются устройства управления.

К. м. строят на основе принципа *квазианалогового моделирования*, являющегося развитием аналогового метода. По сравнению с аналоговыми устр-вами К. м. обладают большими вычисл. возможностями и позволяют решать более широкие классы ур-ний.

М. Н. Кулик.

**КВАЗИАНАЛОГОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ** — исследование физического процесса путем изучения явления иной физической природы, которое описывается математическими соотношениями, эквивалентными относительно получаемых результатов, и допускает измерение значений неизвестных величин. Состояние объекта моделирования обычно характеризуется группой неизвестных величин  $X_1(t), \dots, X_n(t)$ , а состояние модели, находящейся в квазианалоговом соответствии с объектом, — группой величин  $b_1 X_1(t), \dots, b_n X_n(t), Z_{n+1}(t), \dots, Z_{n+m}(t)$ , где  $b_1, \dots, b_n$  — некоторые постоянные.

Ур-ния объекта моделирования можно записать в виде,

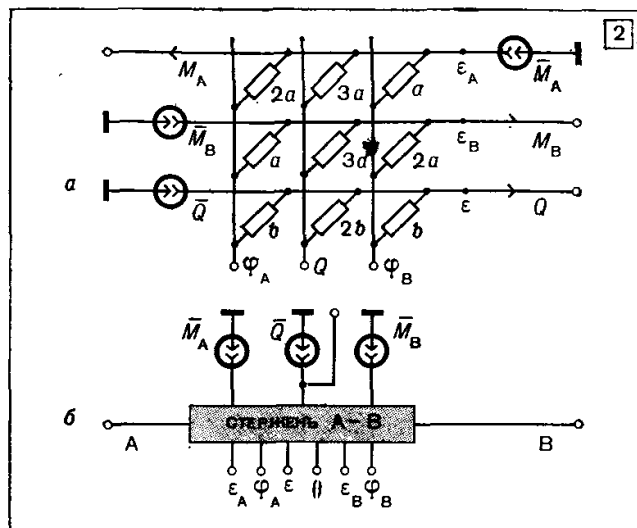
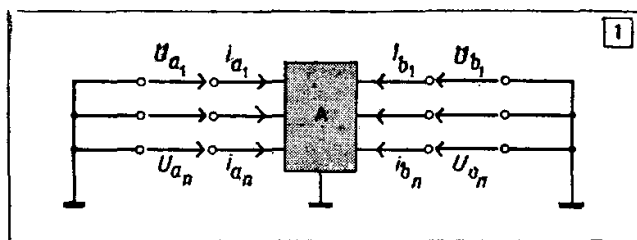
$$A(X, F) = 0,$$

где  $A$  — оператор, определяющий связи между неизвестными  $X$  и заданными величинами  $F$ . Всякая *квазианалоговая модель* является аналогом не исходной системы ур-ний, а некоторых др. ур-ний. Чтобы ур-ния объекта и квазианалоговой модели стали эквивалентными, необходимо выполнить ряд условий, называемых условиями эквивалентности. Эти условия могут быть таковы, что для их реализации в модели не требуется использование получаемых в ней величин. Такие модели по своим свойствам практически не отличаются от моделей прямой аналогии и наз. *квазианалоговыми моделями 1-го рода*, или *неуправляемыми* (неуравновешиваемыми). В общем же случае условия эквивалентности таковы, что для их реализации необходимо использовать получаемые в модели величины. Поскольку последние заранее неизвестны, для реализации условий эквивалентности нужно организовать определенный процесс управления (уравнивания). Модели в этом случае наз. *квазианалоговыми моделями 2-го рода*, или *уравниваемыми*. Неуравновешиваемые модели относятся к категории устр-в без обратных связей (см. *Уравнивания методы*).

Общий подход к получению ур-ний неуравновешиваемых квазианалоговых моделей состоит в замене исходных ур-ний эквивалентными или расширенными ур-ниями, содержащими, кроме  $X$  и  $F$ , и вспомогательные неизвестные  $y$ , и дополнительные величины  $G$ , не зависящие от  $X$ . При этом матем. связи между  $X, y, F, G$  выбирают так, чтобы выполнялись и условия физ. реализуемости при помощи выбранных элементов, и условия простоты вычисления вектора  $G$  по данным, содержащимся в исходных ур-ниях.

Свойства уравниваемых моделей определяются структурой эквивалентных ур-ний. Общий подход к получению этих ур-ний (как и для неуравновешиваемых квазианалоговых моделей) состоит в том, что исходные ур-ния надо заменить расширенными так, чтобы выполнялись условия эквивалентности. Их выполнение осуществляется при помощи вектора уравнивающих величин и вектора дополнительных, независимо определяемых величин.

Основой тех. средств К. м. являются электр. цепи, в которых распределение токов и напряжений находится в определенном соответствии с матем. зависимостями, описывающими стационарный или нестационарный процесс, происходящий в изучаемом объекте (см. *Электрических цепей теория*). Различные методы синтеза квазианалоговых моделирующих электр. цепей основаны на использовании принципа образования *потенциально-нулевых точек*, принципа образования узлов с нулевыми собственными проводимостями и на комбинировании



1. Схема квазианалога, построенного на основе электрических цепей постоянного тока.  
2. Схема квазианалога изгибаемого стержня: а — для коэффициента а, б — для коэффициента в.

рованном использовании этих принципов (см. *Нулевых собственных проводимостей узлов метод* и *Потенциально-нулевых точек метод*). Так, напр., ур-ния квазианалога, построенного на основе электр. цепей постоянного тока (рис. 1), имеют вид

$$i_a = g_{aa}u_a - g_{ab}u_b + \bar{i}_a;$$

$$i_b = -g_{ba}u_a + g_{bb}u_b + \bar{i}_b.$$

Здесь  $g_{aa}$  и  $g_{bb}$  — матрицы собственных проводимостей узлов  $a_1, \dots, a_n$  и  $b_1, \dots, b_n$ ;  $g_{ab}$  и  $g_{ba}$  — матрицы взаимных проводимостей между узлами  $a_1, \dots, a_n$  и  $b_1, \dots, b_n$ ;  $i_a$  и  $i_b$  — векторы токов полюсов;  $\bar{i}_a$  и  $\bar{i}_b$  — значения  $i_a$  и  $i_b$  при коротком замыкании полюсов  $a_1, \dots, a_n$  и  $b_1, \dots, b_n$  на общий полюс (землю). Квадратные матрицы  $g_{aa}$  и  $g_{bb}$  — диагональные, с положительными коэфф., не меньшими сумм

модулей коэфф. соответствующих строк матриц  $g_{ab}$  и  $g_{ba}$ . Квадратные матрицы  $g_{ab}$  и  $g_{ba}$  имеют неотрицательные компоненты, а в остальном они могут иметь произвольный вид. Из структуры и характера ур-ний рассматриваемого многополюсника следует, что его можно применять для моделирования алгебр. объектов. Однако, чтобы получить модели таких объектов в общем случае, необходимы способы, которые позволили бы устранять из ур-ний многополюсника члены вида  $g_{aa}u_a$  и  $g_{bb}u_b$ , т. к. матрицы  $g_{aa}$  и  $g_{bb}$  не могут быть произвольными. Таких способов всего два. Первый из них заключается в том, что для одной из групп полюсов  $a_1, \dots, a_n$  или  $b_1, \dots, b_n$  добиваются выполнения условий  $u_a = 0$ ,  $i_a = 0$  или  $u_b = 0$ ,  $i_b = 0$ . Оставив, напр., полюсы  $b_1, \dots, b_n$  на холостом ходу и выполнив условия  $i_b = 0$ , получим ур-ния

$$i_a = g_{aa}u_a - g_{ab}u_b + \bar{i}_a;$$

$$0 = -g_{ba}u_a + g_{bb}u_b + \bar{i}_b.$$

Если ток  $i_a$  или напряжение  $u_a$  регулировать так, чтобы напряжение  $u_b = 0$ , то получим ур-ние  $g_{ba}u_a = \bar{i}_b$ , позволяющее моделировать алгебр. объекты произвольного вида, т. к. матрица  $g_{ba}$  может быть произвольной. Принцип образования потенциально-нулевых узлов в моделирующих цепях применяют для моделирования не только алгебраических, но и дифференциальных и др. объектов.

При втором способе члены вида  $g_{aa}u_a$  и  $g_{bb}u_b$  можно устранять из ур-ний цепи, регулируя токи  $i_a$  и  $i_b$  таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$i_a = g_{aa}u_a;$$

$$i_b = g_{bb}u_b.$$

В этом случае также получим ур-ния

$$g_{ab}u_b = \bar{i}_a;$$

$$g_{ba}u_b = \bar{i}_b,$$

позволяющие моделировать алгебр. объекты произвольного вида. Аналогичный результат получился бы в случае нулевых значений всех компонент матриц  $g_{aa}$  и  $g_{bb}$ . В цепях синусоидального переменного тока, состоящих лишь из емкостей и индуктивностей, этого можно добиться и без регулировки токов  $i_a$  и  $i_b$ , т. к. в таких цепях сопротивления емкостей и индуктивностей имеют противоположные знаки и, следовательно, могут быть скомпенсированы в каждом узле. Рассмотрим один из способов построения квазианалогов объектов на примере моделирования рамных систем строит. механики. Для каждого стержня рамы можно записать ур-ния

$$M_A = \frac{2EI}{l} (2\varphi_A + \varphi_B + 3\theta) + \bar{M}_A;$$



$$M_B = \frac{2EI}{l} (\varphi_A + 2\varphi_B + 3\theta) + \bar{M}_B;$$

$$Q_{AB} = \frac{6EI}{l^2} (\varphi_A + \varphi_B + 2\theta) + \bar{Q}_{AB},$$

где  $l$  — длина стержня;  $EI$  — жесткость на изгиб;  $M_i$  — изгибающие моменты на концах;  $Q_{ij}$  — поперечные силы с противоположным знаком в каком-либо поперечном сечении стержня;  $\varphi$  — угол поворота конца стержня;  $\theta$  — угол переноса с противоположным знаком;  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{Q}_{ij}$  — силовые факторы для стержня с заземленными концами.

Для определения неизвестных углов  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$ ,  $\theta$  дополнительно составляют уравнения равновесия. Эти уравнения представляют собой простые суммы изгибающих моментов в узлах и суммы поперечных сил в различных сечениях рамы, поэтому они имеют вид

$$By = z,$$

где  $y$  — вектор, компоненты которого моделируют углы  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$  и  $\theta$ ;  $B$  — прямоугольная матрица, компоненты которой состоят лишь из единиц и нулей;  $z$  — вектор свободных членов. Схема квазианалога изгибаемого стержня приведена на рис. 2. Проводимости резисторов

моделируют коэффициентами  $a = \frac{2EI}{l}$ ,  $b =$

$= \frac{6EI}{l^2}$ . При условии, что напряжения  $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ ,  $\varepsilon$  равны «0», схема моделирует уравнения стержня. Уравнения равновесия в узлах рамы и поперечных сечениях выполняются автоматически при соединении квазианалогов стержней между собой.

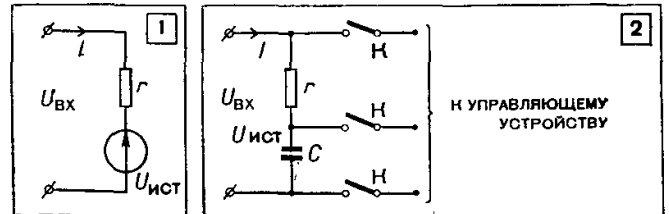
Принцип эквивалентности, на котором основано К. м., является более общим, чем принцип подобия, на котором основано аналоговое моделирование. Поэтому чтобы увеличить возможности большинства современных моделирующих установок и расширить класс решаемых задач, их строят именно по этому принципу. Эти устройства используют для моделирования объектов, описываемых системами алгебр. и дифф. уравнений с начальными и краевыми условиями, для решения задач оптимизации, строительной механики и т. д.

Г. П. Галузинский.

**КВАЗИРЕЗИСТОР** — электрический двухполюсник, содержащий зависимые источники напряжения и тока и обладающий заданным значением входного сопротивления. Один из возможных вариантов выполнения схемы К. показан на рис. 1. В этой схеме величина напряжения источника  $U_{ист}$  пропорциональна входному напряжению  $U_{вх} = \alpha U_{вх}$  и входное сопротивление определяется выражением

$R_{вх} = \frac{r}{1-\alpha}$ . Таким образом, при неизменном значении сопротивления  $r$  величину сопротивления К. можно регулировать, изменяя значение коэфф.  $\alpha$ . С целью упрощения схем

устройств, содержащих значительное число К., последние выполняются в виде динамических К. (рис. 2). В динамическом К. зависимый источник  $U_{ист}$  заменен конденсатором  $C$  (или другим запоминающим элементом), который периодически подзаряжается от устройства управления до нужного напряжения. Управляющее устройство обслуживает систему динамических К., подключаясь к ним через ключи  $K$  на достаточно малое время. Если постоянная времени разряда конденсатора  $C$  велика по сравнению со временем заряда и вре-



1. Схема квазирезистора.

2. Схема динамического квазирезистора.

менем цикла работы управляющего устройства, входное сопротивление динамического К. практически мало отличается от нужного значения.

К. применяют в схемах аналоговых и гибридных вычисл. машин, особенно в сеточных интеграторах для решения задач матем. физики. Динамические К. позволяют облегчить автомат. ввод исходной информации о параметрах модели. Отсутствие в схеме динамического К. изменяемых параметров позволяет эффективно использовать их при построении дискретных моделирующих сред.

В. В. Васильев.

**КВАЙНА МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ** — метод получения минимальной дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) представления булевых функций из совершенной ДНФ. К. м. м. предусматривает выполнение двух осн. этапов: получение сокращенной ДНФ из совершенной и построение исходя из сокращенной дизъюнктивных нормальных форм тупиковых и выбор из их числа дизъюнктивных нормальных форм минимальных. На первом этапе к совершенной ДНФ применяют операции неполного склеивания ( $xy \vee x\bar{y} = x \vee xy \vee x\bar{y}$ ) и элементарного поглощения ( $x \vee xy = x$ ). Возможность получения сокращенной ДНФ в результате применения этих операций определяется теоремой Квайна: если в совершенной ДНФ выполнить все операции неполного склеивания, а затем все операции поглощения, то в результате будет получена сокращенная ДНФ.

С помощью операции элементарного поглощения на первом этапе минимизации исключают только те члены ДНФ, к которым применены все возможные для них склеивания. Минимизацию на этом этапе удобно проводить в такой последовательности. Исходя из совершенной ДНФ  $f_0$  булевой ф-ции  $f$ , зависящей от  $n$  переменных, строят последовательность ДНФ  $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots$  до тех пор, пока не совпадут между собой некоторые ДНФ  $f_k$  и  $f_{k+1}$ .



При этом переход от  $f_i$  к  $f_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) осуществляют по следующему правилу. В ДНФ  $f_i$  выполняют все операции неполного склеивания, применимые к элементарным произведениям длины  $(n - i)$ . В результате в представлении  $\Phi$ -ции образуются произведения длины  $(n - i - 1)$ . Поскольку склеивать можно только произведения с одинаковым  $k$ -ом букв, ни с одним из полученных произведений произведения длины  $(n - i)$  склеиваться не будут. Поэтому после выполнения операции склеивания исключаются все те элементарные произведения длины  $(n - i)$ , которые могут быть исключены в результате применения операции элементарного поглощения.

На втором этапе используют т. н. таблицу простых импликант, представляющую собой прямоугольную таблицу с двумя входами. Столбцы такой таблицы отмечаются конституентами единицы минимизируемой  $\Phi$ -ции, строки — ее различными простыми импликантами. Если в некоторую конституенту входит какая-либо из простых импликант, то на пересечении соответствующих столбца и строки ставится метка.

Построение тупиковых ДНФ с помощью таблицы простых импликант связано с построением на ее основе т. н. сокращенной таблицы простых импликант. Такая таблица получается при вычеркивании из таблицы простых импликант 1) тех столбцов, которые содержат только по одной метке, 2) тех строк, импликанты которых содержат метки в вычеркнутых столбцах, 3) одного из тех двух столбцов, у которых имеются метки в одинаковых столбцах, 4) тех строк, которые в результате вычеркивания в соответствии с 1) — 3) не содержат ни одной метки. Построению тупиковой ДНФ при этом соответствует выбор такой совокупности простых импликант, которая включает все те импликанты, которые принадлежат строчкам, вычеркнутым в соответствии с п. 2) (т. н. ядро булевой  $\Phi$ -ции), и, кроме того, некоторую систему импликант из сокращенной таблицы, метки которых по крайней мере один раз накрывают все ее столбцы. В отличие от ядра такая система в общем случае может содержать различные наборы простых импликант. Выбор набора импликант с минимальным суммарным числом букв при нескольких возможных вариантах соответствует построению минимальной ДНФ заданной  $\Phi$ -ции.

К. м. м. обычно применяется при минимизации  $\Phi$ -ций, зависящих от сравнительно небольшого числа переменных. При увеличении числа переменных более удобными оказываются др. методы минимизации.

Лит.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. 464—469].

Ю. Л. Иваськив.

**КВАНТОВАНИЕ** — операция преобразования сигнала, при которой осуществляется дискретизация его по уровню или по времени, или одновременно по уровню и времени.

К. п о в р е м е н и — преобразование сигнала  $x(t)$  в последовательность следующих друг за другом импульсов, амплитуда, дли-

тельность или частота которых зависят от амплитуды входного сигнала (см. *Модуляция*). Устройство, выполняющее операцию К. по времени, наз. прерывателем, или импульсным элементом, который в частном случае пропускает входной сигнал  $x(t)$  лишь в течение некоторого времени  $\tau_i$  (длительности замыкания) и не пропускает его в течение времени  $T_i - \tau_i$  (длительности прерывания). Величина  $T_i$  наз. периодом К. (прерывания).  $T_i$  может быть случайной величиной (К. со случайным периодом), величиной, функционально зависимой от квантуемого сигнала  $x(t)$  (либо сигнала на выходе импульсного элемента  $x(iT_i)$ ), или постоянной  $T_i = T = \text{const}$ . Обычно величина  $\tau_i \ll T_i$ , поэтому сигнал  $x(iT_i)$  представляет собой во времени последовательность импульсов, огибающая которых соответствует входному сигналу  $x(t)$ . Операция К. по времени изменяет как интенсивность сигнала (при  $T_i = T = \text{const}$ ,  $\tau_i = \tau = \text{const}$  ослабляет его в  $\frac{\tau}{T}$  раз), так и его частотный спектр. Если

$\omega_0$  — частота составляющей непрерывного сигнала  $x(t)$ , то частотный состав квантованного сигнала обогащается бесконечным числом боковых частот  $\omega_0 \pm n \frac{2\pi}{T}$ ,  $n = 1, 2, \dots, K$ .

по времени изменяет информативность исходного сигнала. Доказано, что потери информации не происходит, если интервал К. сигнала  $x(t)$ , имеющего ограниченный спектр ( $\omega_c$  — граничная частота спектра), равен  $T = \frac{\pi}{\omega_c}$

(теорема Котельникова). В этом случае по сигналу  $x(iT_i)$  можно восстановить исходный  $x(t)$ , для этого применяют *фильтры* нижних частот (отсекающие все боковые частоты) и усилители.

К. п о у р о в н ю — преобразование сигнала  $x(t)$ , заключающееся в округлении его мгновенного значения до некоторой ближайшей, наперед заданной, фиксированной величины  $x_k^*$ , называемой у р о в н е м К. К. по уровню является нелинейным преобразованием входного сигнала  $x(t)$ . Устройство, осуществляющее операцию К. по уровню, наз. к в а н т о в а т е л е м (квантующим устройством). Расстояние между двумя соседними уровнями К. наз. ш а г о м К.  $q_k = x_{k+1}^* - x_k^*$ . Важной характеристикой квантующего устройства является интервал (порог) К. —  $p_k$ , равный интервалу значений  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$  входных величин  $x(t)$ , которые относятся к определенному уровню К. Возможные характеристики квантователей приведены на рис. 1. К. с  $q_k = q = \text{const}$  и  $p_k = p = \text{const}$  (равномерное К., рис. 1, б), благодаря своей простоте, наиболее распространено.

Преобразование входного сигнала в квантователе сопряжено с операцией округления, а, следовательно, с определенным искажением

входного сигнала. Погрешностью К. наз. величина  $\varepsilon_k = x(t) - x_k^*$  при  $x_k \leq x(t) \leq x_{k+1}$ . Она зависит от характеристик квантующего устройства ( $q_k, p_k$ ) и от самого входного сигнала. Величина  $\varepsilon_k$  может быть найдена для каждого значения  $x(t)$ . Квантующее устройство, преобразующее входной сигнал с миним. погрешностями, наз. оптимальным. Квантователь, оптимальный для одного вида сигнала  $x(t)$ , не будет оптимальным для другого. Для равномерного К. при  $q = p$  и  $x_1 = x_{-1} = -0,5q$  величина погрешности будет лежать в пределах  $-0,5 \leq \varepsilon \leq +0,5q$ . Поскольку квантователь является обычно частью динамической системы, погрешности К. в таких системах могут накапливаться. Оценить величину погрешности, вызванную К. в динамической системе, можно, используя метод Цыпкина, по которому оценивают максимальное значение погрешности, вызванной К., через импульсную весовую ф-цию системы  $w[n]$  как

$$\varepsilon_{\max} = 0,5q \sum_{n=0}^m |w[n]|.$$

Если  $x(t)$  — случайная ф-ция времени, то  $\varepsilon(t)$  также будет случайной ф-цией, наз. шумом К. Влияние шума К. на работу устройств, содержащих квантователи, можно исследовать с помощью статистической теории К. сигналов. Доказано, что при достаточно малом шаге К.  $q$  и большом числе уровней К., шум К. является некоррелированным с квантуемым сигналом — случайным процессом типа *белого шума*. Амплитуды шума К. распределены равномерно между значениями  $-0,5q$  и  $+0,5q$ ,

а спектральная плотность равна  $\frac{q^2}{12}$ . Благодаря такой аппроксимации шума К., работу равномерного квантователя можно исследовать с помощью эквивалентной блок-схемы (рис. 2). При ограниченном числе уровней К. учет влияния К. по уровню усложняется.

Однозначно восстановить исходный сигнал  $x(t)$  по его квантованному значению  $x^*$  невозможно. Если известен закон распределения входного сигнала  $P[x]$ , то возможно найти вероятность того, что входная величина лежит в пределах  $kq - 0,5q \leq x \leq kq + 0,5q$ , и найти условную плотность вероятности распределения  $x$  в этом интервале:

$$p \left[ x/x^* = kq \right] = \frac{P[x]}{P[k]},$$

где  $P[k]$  — вероятность появления сигнала  $x^*$ ,  $P[k] = \int_{x^*-0,5q}^{x^*+0,5q} P[x] dx$ .

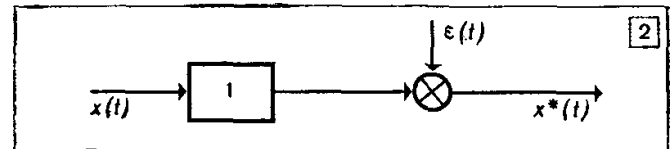
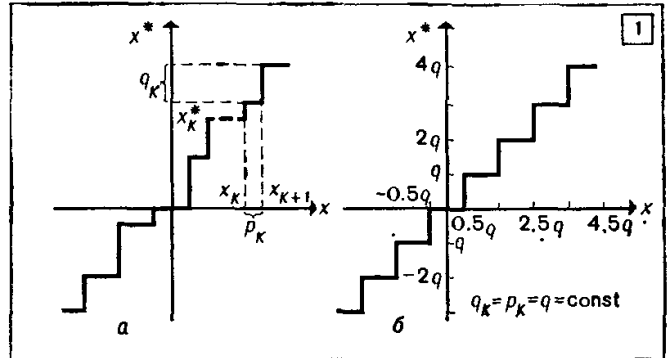
Математическое ожидание, дисперсия и т. д. квантованного сигнала  $x^*$  могут быть выражены через матем. ожидание, дисперсию и т. п. входного сигнала  $x(t)$  с помощью формул, получивших название поправок Шенперда для

сгруппированных данных:

$$M[x^*] = M[x] + \frac{1}{12} q^2,$$

$$D[x^*] = D[x] + \frac{1}{3} q^2 E(x^2) + 0[(q)^4],$$

где  $M[\cdot]$  и  $D[\cdot]$  — матем. ожидание и дисперсия величин, стоящих в квадратных скобках,  $E(\cdot)$  — характеристическая ф-ция  $x$ ,  $0[(q)^4]$  — величины 2-го порядка малости.



1. Характеристики квантователей: а — неравномерного; б — равномерного.

2. Блок-схема преобразования сигнала в квантователе.

Корреляционная ф-ция будет при этом иметь вид:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \begin{cases} E[(x^*)^2(t_1)] - \frac{1}{12} q^2 & \text{при } t_1 = t_2, \\ R_{x^*x^*}(t_1, t_2) & \text{при } t_1 \neq t_2. \end{cases}$$

В ряде устр-в, цифровых вычисл. машин, измерительных приборов, устройств управления, связи и т. д. сигналы подвергаются одновременному преобразованию: К. по времени и К. по уровню. При этом выходной сигнал представляется обычно в цифровой форме — десятичной, двоичной, двоично-десятичной и т. д. (см. *Дискретизация*). Одновременное К. по уровню и времени осуществляется в *аналого-цифровых преобразователях*.

Лит.: Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [библиогр. с. 926—963]; Ефимов В. М. Квантование по времени при измерении и контроле. М., 1969 [библиогр. с. 86—87]; Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. Пер. с англ. М., 1964; Корн Г. А. Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах. Пер. с англ. М., 1968. Б. Ю. Мандровский-Соколов.

**КВАНТОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ** — описание непрерывных сигналов, воздействующих на элементы рецепторного поля, ступенчатыми (кусочно-постоянными) функциями от этих сигналов. К. и. может осуществляться как

в самих рецепторах, так и вне их. Для К. и. используют пороговые элементы, позволяющие непрерывный входной сигнал представить в виде ступенчатой функции. Как правило, пороговые элементы всех рецепторов обладают одинаковыми свойствами. Чем больше порогов имеют пороговые элементы, тем полнее полученное изображение. Очень часто пороговые элементы имеют всего один порог, и тогда выходной сигнал рецептора может быть представлен кусочно-постоянной функцией с двумя возможными значениями.

В. И. Васильев.

**КВАНТОРЫ** — логические операторы, переводящие одну высказывательную форму в другую. Различают К. всеобщности и К. существования (см. *Логические операции*).

**КИБЕРНЕТИКА** (греч. κυβερνήτης — искусство управлять) — наука об общих законах получения, хранения, передачи и преобразования информации в сложных управляющих системах. При этом под управляющими системами здесь понимают не только технические, а и любые биологические, административные и социальные системы. Примерами очень сложных управляющих систем являются нервные системы живых организмов, в особенности организм человека, а также аппарат управления в человеческом обществе.

Термин «К.» впервые (после древних греков) употребил в 1834 франц. ученый А.-М. Ампер (1775—1836) в предложенной им классификации наук для обозначения не существовавшей еще в то время науки об управлении человеческим обществом. Вскоре после Ампера этот термин был забыт и снова возрожден амер. ученым Н. Винером (1894—1964) в названии своей книги, опубликованной в 1948. Эту дату принято считать датой рождения К. как самостоятельной науки.

Н. Винер определил К. как «науку об управлении и связи в животном и машине». Человеческое общество выпало из этого определения. Чувствуя этот недостаток, Н. Винер опубликовал в 1954 новую книгу «Кибернетика и общество». Для обеих книг Винера характерен, однако, повествовательный подход, автор описывает свои мысли и впечатления в связи с некоторыми исследованиями, выполнявшимися им и его коллегами в области теории случайных процессов и физиологии нервной системы. По существу, они не содержат последовательного изложения методов новой науки и ее результатов. Более систематически изложил в 1956 суть К., как ее понимал Винер, англ. ученый У.-Р. Эшби (р. 1903).

В целом для развития К. в США и Зап. Европе, особенно на первых порах, характерно увлечение ее философскими аспектами (далеко не всегда правильно трактуемыми). Вместе с тем развертывавшееся во 2-й пол. 1950-х годов широкое использование электронных *цифровых вычислительных машин* (ЦВМ) и базирующихся на них автоматизированных систем управления (АСУ) требовало создания научных основ проектирования таких машин и систем. Поскольку появившиеся в то время

статьи и книги по К. не давали ответа на животрепещущие вопросы, поднятые практикой, большинство специалистов по ЦВМ и АСУ за рубежом стали скептически относиться к самой науке К. Что же касается новых науч. методов и результатов, возникавших в связи с задачами проектирования ЦВМ и АСУ, то их объединили в новую науку, получившую в США и Англии название «computer science» (наука об ЭВМ), во Франции — «informatic». Термин же «К.» стали чаще всего употреблять в более узком смысле, понимая под этим в основном аналогии, существующие между машинами и живыми организмами, и философские вопросы, возникающие в связи с социальными последствиями автоматизации. Лишь в самом конце 1960-х годов наметились пути сближения между «кибернетиками» и «вычислителями».

В СССР развитие К. пошло по другому пути. После первоначальной отрицательной реакции, частично вызванной рядом ошибочных философских установок Н. Винера и его последователей, к началу 1960-х годов определилось более широкое толкование К., полностью охватывающее не только теорию ЦВМ, но и многочисленные применения в различных областях, начиная от автоматизации обработки научных данных до управления большими эконом. системами.

Схема функционирования произвольной системы управления в самом общем виде изображена на рисунке. Смысл этого функционирования состоит в осуществлении такого кругооборота информации и с таким ритмом, которые необходимы для нормального действия объекта: управляющие воздействия выдаются на объект управления по каналу прямой связи, результаты этого воздействия воспринимаются спец. системой датчиков и передаются в управляющую систему по каналу обратной связи, переданные данные вместе с ранее накопленной информацией преобразуются управляющей системой в новые управляющие воздействия, после чего процесс обмена информацией продолжается.

Информация о процессах в системах управления может представляться в двух видах — непрерывной и дискретной. Непрерывная информация о необходимых параметрах процесса при передаче обычно представляется в виде той или иной физ. величины (сила тока, угол поворота вала и т. п.), являющейся непрерывной ф-цией времени. При хранении непрерывная информация представляется в виде графиков или в виде к.-н. физ. величины (напр., величины намагниченности или степени прозрачности), меняющейся непрерывно на к.-л. участке пространства (линии, площади или объема). Дискретная информация представляется в виде последовательности отдельных сигналов, отделенных друг от друга конечными временными или пространственными промежутками. При этом к-во различных состояний сигналов конечно. Что же касается физ. вида сигналов, то для этой цели можно использовать любые физ. величины. Ввиду конечности мн-ва видов дискретных сигналов

их принято обычно отождествлять с буквами того или иного (абстрактного) алфавита или с цифрами той или иной системы счисления. Поэтому часто дискретная информация отождествляется с алфавитно-цифровой информацией.

В реальных системах управления всегда имеется возможность приближенно свести непрерывную информацию к дискретной, т. е. все реальные устр-ва для восприятия, передачи и воспроизведения непрерывной информации всегда обладают рядом ограничений. Это, во-первых, ограниченная чувствительность, не позволяющая различать достаточно мало отличающиеся друг от друга значения величины, используемой для представления информации. В результате каждый конкретный прибор фактически имеет дело только с конечным множеством уровней сигнала. Во-вторых, имеют место ограничения пропускной и разрешающей способности устройств. Эти ограничения не позволяют различать достаточно близкие друг к другу моменты времени или точки пространства, и это, в конечном счете, приводит к тому, что непрерывная информация, проходящая через устр-во или запоминаемая в нем, фактически распадается на конечную последовательность сигналов. Поэтому огромное влияние на развитие К. оказало и продолжает оказывать создание универсальных преобразователей дискретной информации — электронных цифровых вычислительных машин.

*Автоматического управления теория* — непосредственная предшественница К. имела дело с относительно простыми объектами и управляющими системами, описываемыми системами дифф. и разностных уравнений. Ограниченные алгоритмические возможности, имевшиеся в механике регулирования до появления ЦВМ, позволяли осуществлять лишь простейшие виды преобразования информации. Накопление информации в управляющих системах и, следовательно, использование предшествующего опыта в этот период не производилось. Возможность накопления информации (ф-ция памяти) и осуществления сложных ее преобразований самой разнообразной природы была в сколько-нибудь полном виде впервые реализована в ЦВМ. Это позволило поставить и успешно решать задачу автоматизации не только физической, но и умственной деятельности человека, представляющую осн. практическую задачу К. Центр тяжести исследований сместился от простых систем управления к сложным, основанным, как правило, на использовании в качестве осн. управляющего звена ЦВМ. Наконец, широкое использование ЦВМ в системах управления сильно повысило роль дискретной формы представления информации и вызвало соответствующее совершенствование теоретической базы кибернетики.

Для более полной характеристики предмета К. охарактеризуем ее теоретическую основу — теоретическую К. Ее задача — создание науч. аппарата и метода исследований, пригодного для изучения широких классов систем управления, независимо от их конкретной природы.

Теор. К. включила в себя ряд научных направлений, развивавшихся ранее в таких разделах математики, как *логика математическая, вероятностей теория, вычислительная математика* и др. К их числу относится *информационная теория*, имеющая дело с количественной мерой информации, *кодирования теория*, изучающая способы представления дискретной информации в виде последовательностей букв абстрактных алфавитов, и *алгоритмов теория*, занимающаяся преобразованиями таких последовательностей.

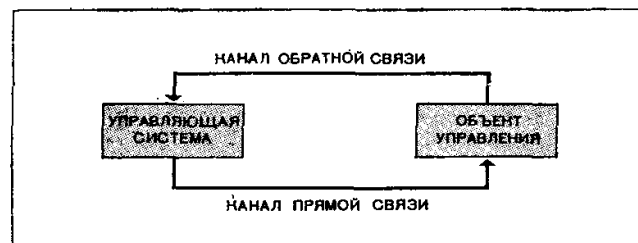


Схема функционирования произвольной системы управления.

Ряд матем. разделов К. возник и развивался в рамках самой К. Это, в частности, относится к общей теории автоматов, предметом которой является изучение произвольных преобразователей дискретной информации, и в значительной мере к ее более рано развившейся части — теории логических сетей. К *автоматов теории* примыкают теории формальных языков и грамматик, составляющие основу общей теории знаковых систем. Все перечисленные направления К. имеют дело с дискретной информацией и ее преобразованиями, представляющими собой основу при построении теории любых систем управления (см. *Дискретных преобразователей теория*).

Практически возможно сводить произвольную информацию к дискретной, но принципиальное значение для К. имеет факт существования универсальных преобразователей дискретной информации, установленный еще до возникновения К. в рамках матем. логики. Универсальный преобразователь дискретной информации характеризуется тем, что, получив и запомнив описание любого конструктивного преобразователя (т. е. преобразователя дискретной информации, описываемого любым конечным множеством правил), он может выполнять (с точностью до изменения кодирования) работу этого преобразователя. Универсальные преобразователи информации реализуют т. н. полные системы элементарных преобразований и способов их композиции, из которых, как из атомов, могут быть сложены произвольные конструктивные преобразования информации — *алгоритмы*. К числу таких универсальных преобразователей дискретной информации относятся, в частности, и современные ЦВМ.

Матем. основой теории систем управления, имеющих дело с непрерывной информацией, является прежде всего теория обыкновенных дифф. уравнений, перерастающая в общую

теорию динамических систем (не обязательно непрерывных). Вообще за последние годы наметилась тенденция к созданию более общего матем. аппарата кибернетики, охватывающего гибридные (дискретно-аналоговые) управляющие системы. Непрерывные и дискретные формы представления информации изучаются (с различных точек зрения) в таких разделах матем. аппарата К., как *случайных процессов теория*, *игр теория*, теория статистических решений, и в методах решения сложных экстремальных задач (линейное, выпуклое, стохастическое и динамическое программирование, методы оптимизации на графах и т. п.). Используя этот аппарат, развились такие уже более специфические для теор. К. науч. направления, как *распознавание образов* и теория обучающихся и самоорганизующихся систем управления. Они, наряду с теориями алгоритмов, автоматов и формальных языков, открывают новые возможности для решения одной из самых увлекательных задач К. — раскрытия закономерностей накопления и преобразования информации в мозгу человека. Как видим, теор. К. широко использует математику и строится на матем. основе. Однако теор. К. не сводится только к математике. Она, как и все другие естественные и тех. науки, широко использует эксперимент как метод изучения объекта.

Очень важной отличительной особенностью К. является то, что она ввела принципиально новый метод изучения объектов и явлений — т. н. матем. эксперимент, или машинное моделирование.

Смысл этого метода заключается в следующем: очень многие объекты и явления описываются столь сложными системами соотношений, что прямое применение традиционных матем. методов оказывается практически невозможным. Если, напр., объект описывается системой из многих сотен нелинейных дифф. ур-ний, с многими десятками параметров, то, как правило, аналитическое решение таких систем невозможно, а если бы оно и было возможным, то исследование получаемых сложных аналитических зависимостей обычными матем. методами практически не пришло бы к успеху. В этом случае естественно прибегнуть к матем. эксперименту. Описание соответствующей системы ур-ний и к.-л. метода ее численного решения помещают в память ЦВМ. Благодаря огромной скорости работы современных ЦВМ, за короткое время можно получить большое число вариантов решений системы при различных значениях параметров, что позволяет автоматически строить таблицы (или графики) зависимостей от параметров тех или иных интересующих нас свойств решений.

Иными словами, матем. эксперимент позволяет производить исследование объекта по его описанию (см. *Модель математическая*), не прибегая к построению и исследованию реальной модели физической этого объекта. Эффективность такого подхода определяется, в частности, точностью машинного моделирования, которая может быть оценена на основе *погреш-*

*ностей вычислений теории*. Очень важно подчеркнуть, что матем. эксперимент можно применять и к таким объектам, которые не имеют точного матем. описания в традиционной форме (т. е. в виде формул или ур-ний). Его с успехом применяют и к объектам, имеющим лишь качественные (но достаточно точные и полные) описания. Напр., записав в памяти ЦВМ правила грамматики с полными списками исключений, можно проводить матем. эксперименты с языковыми конструкциями. Аналогично можно строить и изучать модели биол. эволюции, развитие сложных эконом. и социальных систем и т. п.

Наличие метода машинного моделирования ставит теор. К. наряду с математикой в особое положение по отношению к др. наукам. А именно, имея свой специфический предмет исследования (управляющие системы), К. вместе с тем поставляет и новый метод исследования (матем. эксперимент), который, подобно матем. формулам, находит применение в др. науках, независимо от специфики изучаемых ими объектов или явлений. Более того, матем. эксперимент охватывает значительно большую, чем классические дедуктивные матем. методы, область возможных применений, включая в их число практически все науки — как тех. и естественные, так и социальные. Само собой разумеется, что, поставляя новый универсальный метод науч. исследования в другие науки, теоретическая К., как и математика, никоим образом не претендует на то, чтобы подменить или заменить собой эти науки. Появление ЦВМ и метода машинного моделирования привело к тому, что теория *сложных систем управления* явилась одним из осн. разделов К.

Одним из важнейших принципиальных отличий сложных систем от простых является то, что законы функционирования сложных систем не может описать и изучить один человек, для этого нужны коллективы исследователей. Так, законы функционирования различных регуляторных и управляющих систем человеческого организма изучают ученые различных специальностей (нейрофизиологи, эндокринологи и т. п.). Собрать из этих разрозненных знаний комплексную картину функционирования человеческого организма позволяет машинное моделирование. При этом в одном месте (в ЦВМ) не просто собираются отдельные факты. Возникает новое качество: ЦВМ способна отвечать на различные вопросы о поведении всей сложной системы (в данном случае человеческого организма) в целом.

Методы комплексного исследования сложных систем управления составляют основу т. н. анализа систем (см. *Систем общая теория*) и *операций исследования*. Помимо теор. ядра, представляющего аппарат для изучения произвольных систем управления, в К. оформились направления более прикладного характера, имеющие дело с теми или иными конкретными видами систем управления и областей приложений. На одном из первых мест здесь стоит электронная *вычислительная техника* — основа тех. базы К. А в основе теории ЦВМ и *ма-*

тематического обеспечения ЦВМ лежит аппарат теор. К. Этот аппарат широко используют при построении систем автоматизации проектирования ЦВМ. Программирование для ЦВМ является, по существу, прикладной теорией алгоритмов, а теория различного рода устройств, входящих в состав ЦВМ, — прикладной теорией автоматов. Описание различного рода алгоритмических языков и теория трансляции и интерпретации таких языков в ЦВМ опираются на теорию языков формальных и грамматик формальных.

За свою сравнительно короткую еще историю ЦВМ прошли большой путь развития — от простых ламповых машин, предназначенных в основном для автоматизации вычислительных работ, до сложных систем обработки данных, строящихся на базе микроэлектронной вычислительной техники и имеющих широчайшую область применений. Большие сдвиги произошли в организации использования ЦВМ. Если на первых порах они применялись для решения отдельных задач, то с начала 1960-х годов основной упор делается на комплексную автоматизацию, на т. н. системный подход к применению ЦВМ. Суть этого подхода состоит в том, что, во-первых, автоматизируется не только обработка информации, но и ее сбор, ввод и вывод в окончательной, не требующей никакой дополнительной обработки, форме, во-вторых, в памяти машины постоянно находится целый комплекс программ и необходимая для их работы информация (в сложных системах управления — информационная модель объекта управления). Для организации последовательной работы отдельных программ, снабжения их необходимой информацией и для взаимодействия с людьми, работающими на спец. пультах, служат спец. матем. обеспечение — т. н. операционная система.

Среди областей применения К. и ЦВМ по-прежнему одно из первых мест занимает наука. При системном подходе большое значение приобрели системы автоматизации экспериментальных исследований. Различают три вида таких систем. В наиболее простом случае автоматизация сбора данных осуществляется за счет того, что измерительная аппаратура фиксирует данные на таких носителях и в такой форме, чтобы они могли быть введены в ЦВМ с помощью спец. вводных устройств без к.-л. дополнительной обработки. Высокого уровня автоматизации достигают при применении спец. преобразователей, служащих для съема информации, преобразования ее в цифровую форму и передачу (по спец. каналам связи или линиям связи общего назначения) в ЦВМ в реальном масштабе времени. В случае относительно простых экспериментальных установок одна ЦВМ может обслуживать много отдельных лабораторий. Еще более высокого уровня автоматизации достигают в сложных экспериментальных установках (ускорители, радиотелескопы и т. п.), где ЦВМ встраиваются в установки в качестве их органических составных частей. Для возможности последующего использования экспериментальной информа-

ции, особенно полученной в результате дорогостоящих или трудноповторимых экспериментов, организуется длительное хранение этой информации в цифровой форме на машинных носителях информации (ленты магнитные, диски магнитные и т. п.).

Второе направление науч. применений ЦВМ, делающее сейчас лишь первые шаги, — это создание системы автоматизации дедуктивных построений, напр., системы автоматизации доказательства теорем в математике (см. *Доказательство теорем на ЭВМ*). Наиболее перспективными являются человеко-машинные системы, в которых человек дает идею доказательства, ставит промежуточные цели, а машина осуществляет поиск в заданном направлении, и, в случае успеха, оформляет полученные результаты. Такого рода системы должны включать в себя в качестве составной части информационно-справочные системы, накапливающие совокупность ранее установленных фактов и их обоснований. Автоматизация справочно-информационной работы в науке имеет, разумеется, и самостоятельное значение. Наконец, большое место в научных применениях ЦВМ и К. занимает описанное выше машинное моделирование.

Большую роль К. и ЦВМ играют в развитии техники. Все более и более важное значение приобретают системы автоматизации проектирования в различных областях техники. В отличие от недавнего прошлого, когда ЦВМ использовались для решения отдельных конструкторских задач расчетного характера, в настоящее время все более и более утверждается системный подход. При этом с помощью спец. операционных систем осуществляется работа с чертежами и другой конструкторской документацией. Конструкторы, работая за спец. экранными пультами, могут вызывать на них изображения отдельных чертежей или фрагментов их, контролировать ход проектирования, передавать в систему различные указания и изменения и т. п. (см. *Автоматизированная система проектирования*). Автоматизированные системы испытаний сложных тех. объектов строятся примерно по тем же принципам, что и автоматизированные системы обработки экспериментальных данных.

Системы автоматизации управления технологическими процессами начали развиваться задолго до возникновения К. Однако в то время задача этих систем сводилась гл. о. к авторегулированию, т. е. к удержанию тех или иных параметров, характеризующих процесс в заданных границах. Появление ЦВМ и развитие К. позволило перейти к решению задач оптим. управления. Резко возросла сложность систем. При их конструировании начали применяться идеи самообучения и самоорганизации. Другое направление в автоматизации технологии — программное управление, имеющее особо важное значение в машиностроении и приборостроении.

Станок с программным управлением может быстро перестраивать свою работу за счет простого изменения программы, записываемой



на магнитную ленту или перфоленту. Перемещение и установку на станках деталей также могут осуществлять универсальные программные автоматы. Если к тому же программы, управляющие подобным автоматизированным оборудованием, являются выходами автоматизированной системы управления, то в результате появляется возможность создания цехов и заводов-автоматов, способных быстро перестраиваться на новые виды продукции. В последнее время увеличился интерес к созданию как человекоподобных автоматов — *роботов*, управляемых ЦВМ, так и более простых устройств — киборгов, имитирующих и усиливающих движения людей, которые ими управляют.

Задача автоматизации технологических процессов настолько важна и специфична, что совокупность обеспечивающих ее решение науч. направлений обычно объединяют в спец. раздел К., получивший название *кибернетики технической*. Задачи управления технологией непосредственно соприкасаются с задачами управления предприятиями в организационно-экономическом плане (планирование, управление запасами, организация сбыта и снабжения, финансовые операции и т. п.). Эти задачи призван решать другой раздел К., называемый обычно *кибернетикой экономической*. Автоматизированные системы для решения такого рода задач называются системами административного, или организационного управления. Системный подход применительно к такого рода системам означает не только автоматизированный сбор информации, но и комплексное решение задач. Их особенностью является наличие общего для всех задач поля информации (информационная модель объекта), хранимого в памяти системы и постоянно автоматически обновляемого по мере поступления новых данных.

Автоматизированные системы административного управления должны полностью автоматизировать документооборот. Иными словами, в ЦВМ должны вводиться только действительно первичные данные. Все те данные, которые могут быть из них выведены, получаются в системе автоматически в виде тех или иных вторичных документов. Что же касается первичной информации, то ее подготовка либо совмещается с приготовлением документов первичного учета (финансового или материального), либо осуществляется автоматически с помощью соответствующих датчиков и систем управления технологией. В последнее время наметилась тенденция к органическому слиянию автоматизированных систем технологического и административного управления. Такие системы получили название интегрированных. Автоматизированные системы административного управления (см. *Автоматизированные системы управления предприятием*) получают распространение не только в промышленности, но и на транспорте, в строительстве, проектно-конструкторских и научно-исследовательских учреждениях, в банках и т. п. Автоматизированные системы управления отдельными пред-

приятиями и учреждениями сливаются в сложные системы управления отраслями нар. х-ва (см. *Автоматизированные системы управления в народном хозяйстве*), а впоследствии (для стран социалистического строя) — и всем нар. х-вом в целом. «Необходимо... быстрее создавать отраслевые автоматизированные системы управления, — подчеркивал в Отчетном докладе ЦК КПСС на XXIV съезде партии Л. И. Брежнев, — имея в виду, что в перспективе нам предстоит создать общегосударственную автоматизированную систему сбора и обработки информации» (Материалы XXIV съезда КПСС. М., 1971, с. 67, 68). Обмен информацией в таких системах вначале происходит на машинных носителях (чаще всего — на магнитных лентах), а впоследствии заменяется прямым обменом данными между ЦВМ по каналам связи. Происходит процесс все большего и большего слияния сети ЦВМ с системой связи, что приведет в будущем к коренному изменению наших представлений о задачах такой системы.

Система связи в будущем должна предоставлять потребителям услуги не только по простой передаче информации, но также и по ее хранению и переработке. В связи с этим большой интерес представляет одна из практических задач, которую уже начинает решать К., — создание т. н. национальных *банков данных*. Под этим понимается накопление в памяти ЦВМ той или иной информации, напр., всех законов страны или данных о всех новинках науки и техники, и возможность быстрого автомат. получения справок из пультов, расположенных в любых частях страны через единую систему связи. Близкие задачи решаются в т. н. *программированном обучении*. Но, в отличие от простых банков данных, здесь ЦВМ может не только выдавать информацию, но и задавать вопросы, оценивать ответы на них, отсылая, в случае необходимости, к ранее пройденному материалу или задавая более простые вопросы.

Ввиду особой важности и специфики изучения организма человека и прежде всего его мозга, вопросы применения ЦВМ и К. для этой цели выделяют обычно в особый раздел К. — *кибернетику биологическую*. Разумеется, при этом не исключается исследование киберн. методами не только человеческого, но и любых др. живых организмов. Помимо вопросов комплексного моделирования организма и изучения в информационном плане мыслительных процессов, биол. К. включает в себя и ряд вопросов, относящихся к медицине. Речь идет о создании искусственных органов и управлении ими (см. *Биоэлектрическое управление*), об автоматизации диагностики, о системах для автоматизации анамнеза и мед. статистики, национальных «банков» мед. данных (истории болезней, содержащие данные о состоянии и изменениях состояния здоровья всех членов общества) и т. п. (см. *Медицинская информационная система*).

В связи с задачей моделирования функций мозга и автоматизации мыслительных процес-



сов (см. *Искусственный разум*) возникает ряд принципиальных вопросов философского характера. Прежде всего — это вопрос о границах автоматизации мыслительных процессов. Одним из важнейших достижений К. является установление того факта, что таких границ принципиально (в чисто теоретико-познавательном плане) не существует. Вместе с тем, в плане историческом, поскольку существует различие между человеческим обществом и используемыми этим обществом орудиями (какими бы совершенными они ни были), всегда будут составные части мыслительного процесса, остающиеся прерогативой человека. На самых высоких уровнях автоматизации их они могут быть сведены к постановке общих целей развития и окончательной оценки получаемых автоматизированными системами результатов и решений.

Второй вопрос — возможная опасность, связанная с ошибками автоматизированных систем управления. Дело в том, что эконом. эффект, даваемый автоматизированными системами, сильно растет при увеличении размеров систем. Поэтому масштабы таких систем непрерывно увеличиваются и, соответственно, все большая и большая часть работы по подготовке ответственных решений перекладывается на машины. При этом возникает опасность, что из-за ненадежности автоматизированных систем или из-за ошибок их конструкторов и программистов может увеличиваться возможность принятия неверных или даже пагубных для общества решений. Такие опасения разделял, напр., Н. Винер.

Однако развитие К. показывает несостоятельность подобных опасений. Прежде всего, надежность кибернетических систем опирается не только на непрерывно растущую надежность их элементов, но и на вскрытую К. возможность построения сколь угодно надежных систем из ненадежных элементов. Что же касается ошибок конструкторов и программистов, то при обычных методах их работы вероятность их ошибок действительно растет с увеличением размеров систем. Однако и здесь опережающее развитие автоматизированных систем проектирования вместе с развитием чувства социальной ответственности конструкторов автоматизированных систем является гарантией непрерывного уменьшения вероятности ошибочных решений. Вероятность ошибки в решениях, подготавливаемых автоматизированными системами, несравнимо меньше в сравнении с решениями, получаемыми традиционными безмашинными методами.

Разумеется, К., как и любая другая наука, не гарантирована от возможности злоупотребления ее результатами отдельными группами или классами. Однако, решение этого вопроса относится к сфере социальных наук, к проблеме построения справедливого безантагонистического общества (см. *Социологические вопросы кибернетики*, *Философские вопросы кибернетики*).

К. — наука комплексная и интернациональная, т. к. в ее развитие вносят свой вклад уче-

ные и коллективы разных стран мира. В решение проблем различных ее аспектов и разделов внесли вклад отечественные и зарубежные ученые, имена которых названы в соответствующих статьях этой энциклопедии. Обмену информацией, выработке стратегических направлений развития, решению больших проблем К. и вычисл. техники и их применений способствуют такие международные организации, как *Международная федерация по обработке информации* (ИФИП), *Международная федерация по автоматическому управлению* (ИФАК), *Международная федерация по исследованию операций* (ИФОРС) и *Международная федерация по аналоговым вычислениям* (АИКА).

К. находится на самом острие научно-технического прогресса. Роль ее в народном хозяйстве нашей страны будет расти и далее. Директивами XXIV съезда КПСС по пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР на 1971—1975 годы предусмотрено обеспечить «дальнейшую разработку проблем теоретической и прикладной математики и кибернетики для более широкого применения в народном хозяйстве математических методов и электронно-вычислительной техники, автоматизации процессов производства и совершенствования управления» (Материалы XXIV съезда КПСС. М., 1971, с. 244).

Лит.: Материалы XXIV съезда КПСС. М., 1971; Глушков В. М. Введение в кибернетику. К., 1964 [библиогр. с. 319—322]; Винер Н. Кибернетика и общество. Пер. с англ. М., 1958; Эшб и У. Р. Введение в кибернетику. Пер. с англ. М., 1959 [библиогр. с. 396—399]; Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине. Пер. с англ. М., 1968. В. М. Глушков.

«КИБЕРНЕТИКА» — научный журнал, орган Кибернетического центра Академии наук УССР. Освещает общие вопросы кибернетики (методологии), вопросы математических проблем кибернетики, теории автоматов и алгоритмов, теории электронных цифровых и аналоговых вычислительных машин и моделирующих устройств, создания алгоритмических языков и теории программирования, разработки методов исследования операций и систем, теории оптимальных решений, моделирования процессов мышления, информационных языков и систем, математической лингвистики. Выходит с 1965 шесть раз в год на русском языке, а также переводится на англ. язык в США под названием «Cybernetics».

«КИБЕРНЕТИКА» — реферативный журнал, состоящий из двух выпусков: «Теория вероятностей и математическая статистика. Теоретическая кибернетика» и «Техническая кибернетика». В первом выпуске освещаются вопросы теории вероятности и матем. статистики, комбинаторного анализа, теории управляющих систем и ее приложения, теории информации, исследования операций и матем. экономики, программирования и теории матем. машин, матем. моделирования мыслительных процессов и математические вопросы семиотики; во втором — вопросы киберн. систем управления, теории конечных автоматов, киберн. устройств, тех. приложения теории игр, применения кибернетики, кибернетические вопросы биологии

и психологии. Издает журн. «К.» Всесоюзный ин-т научной и тех. информации (ВИНИТИ) Гос. комитета Совета Министров СССР по науке и технике и Академии наук СССР с 1964. Выходит 12 номеров в год (на русском языке). **КИБЕРНЕТИКА БИОЛОГИЧЕСКАЯ** — направление *кибернетики*, изучающее общие законы хранения, переработки и передачи информации в *биологических системах*. К. б. использует моделирование и изучает методы анализа и управления биол. системами. К. б. не подменяет других биол. наук, т. к. занимается преимущественно матем. обработкой, построением моделей, переработкой информации, а не непосредственным получением данных. Традиционными методами исследования биол. систем, описанием и управлением ими занимается биология. Но по мере своего развития биол. науки все больше нуждаются в методах кибернетики, поскольку принцип символического выражения сведений в виде моделей позволяет не только уточнить качественные и количественные представления о системе, но и получить новые данные. К. б. использует методы *автоматов теории*, *алгоритмов теории*, *систем общей теории*, *теории сложных систем управления*, а также теории автомат. регулирования и управления (теории устойчивости, инвариантности, теории оптим. управления, *информации теории*, *операций исследования* и др.).

Живая природа сложна и разнообразна, поэтому К. б. подразделяют на несколько направлений, изучающих различные биол. системы и их частные ф-ции: на мед., физиол. и психол. кибернетику, нейрокибернетику и бионику. *Кибернетика медицинская* занимается гл. о. созданием статистических моделей заболеваний и использованием их для диагностики, прогнозирования и лечения, а также изучает процессы управления в медицине и здравоохранении. *Физиологическая кибернетика* изучает и моделирует ф-ции клеток, органов и систем в условиях нормы и патологии с перспективой использования моделей для медицины. *Нейрокибернетика* моделирует процессы переработки информации в нервной системе — от *нейрона* до организма в целом. *Психологическая кибернетика* моделирует психические ф-ции на базе изучения целостного поведения человека. *Бионика* является связующим звеном между К. б. и *кибернетикой технической* и изучает возможности использования моделей биол. процессов в технике. По мере накопления в биол. науках количественной информации выделяются новые направления К. б.

При составлении количественных моделей в первую очередь формулируют цель моделирования; после этого переходят к составлению гипотезы, представляющей качественное описание системы, и выбору типа модели, матем. методов и тех. средств для ее выражения в зависимости от цели, количества и качества информации. Последний этап — это создание модели и ее исследование с целью идентификации с системой-объектом. Матем. модель биол. системы, дающую достаточно хорошее

совпадение с результатами ее экспериментальных испытаний при расширении внешних условий, можно назвать теорией работы данной системы (см. *Биологических систем математическое моделирование*).

В зависимости от целей моделирования модели должны с различной степенью точности отражать структуру и функции системы (всей системы или ее частей). Для познания и управления она должна быть более детальной, чем для создания устр-в, заменяющих систему, когда можно ограничиться моделированием отношений «входы — выходы» (см. «*Черный ящик*»), не претендуя на воспроизведение внутр. структуры и частных ф-ций. Ряд особенностей биол. систем определяет требования к модели и ограничивает возможности моделирования. Все биол. системы очень сложны, поэтому в большинстве случаев возможны только вероятностные, а не точные модели; методы классической математики применимы в К. б. только для моделирования частных ф-ций и то с ограниченной степенью точности. Биол. системы составляют сложную иерархию. Модель каждой из систем может охватывать разное число смежных уровней «сверху» и «снизу». Напр., организм можно моделировать «снизу» — с уровня молекул, клеток или органов и учитывать влияние «сверху» таких систем, как популяция, биогеоценоз или даже всей биосферы. Чем большее число смежных уровней включено в модель, тем она точнее и тем большее число качеств системы-объекта она отображает. На каждом структурном уровне биол. системы (клетка, организм, популяция) можно условно выделить рабочие и управляющие *подсистемы*. Между ними циркулируют потоки не только материальных частиц, но и информации, выражаемой ее энергетическим кодом. При моделировании обязательно отражение как материально-энерг., так и информационно-моделирующих свойств систем. Функции биол. систем, их подсистем и элементов представляют сочетание дискретных и непрерывных процессов, поэтому и для их моделирования нужно использовать сочетание дискретных и непрерывных методов.

Высшим атрибутивным свойством биол. систем является способность к самоорганизации, выражающаяся в изменении функций и изменении структуры за счет появления новых связей при одинаковом к-ве элементов, или в изменении структуры за счет изменения числа элементов и связей между ними и образовании новых уровней. Качество самоорганизации обычно локализовано на различных уровнях структур (изменения в ДНК при мутациях и рекомбинациях, условные связи в нейронах коры головного мозга, творчество отдельных людей в обществе). Для моделирования этого качества необходимо «начать построение» модели с соответствующего уровня, что связано с большими тех. трудностями и пока практически невозможно.

Биология не располагает ни об одной из своих сложных систем, необходимыми к-вом и качеством информации, которые позволили бы

уже сейчас создать модели с высокой степенью идентичности их поведения. Для получения такой информации необходимы экспериментальные исследования на новом тех. уровне, а для обработки результатов этих исследований — широкое использование *вычислительной техники*.

Учитывая недостаток информации и трудности ее получения, создают в К. б. эвристические модели, в которых воспроизводятся гипотезы о структуре и функциях системы с использованием имеющейся информации и восполнением недостатка ее за счет предположений. Эвристические модели полезны для проверки гипотез, для планирования экспериментов и для управления системой.

По характеру блок-схемы модели можно условно поделить на феноменологические и структурные. В феноменологических, или функциональных, моделях отражены временные и причинно-следственные отношения между дискретными явлениями, характеризующими функцию биол. системы без учета ее структуры. Возможны модели разной сложности: модели, отражающие зависимости дискретных входов и выходов целой системы, рассматриваемой как «черный ящик», и иерархические модели, в которых представлены не только общие для системы выходы и входы, но и дискретные ф-ции внутренних подсистем, которые при интеграции определяют целостное поведение. Детализация функций, выделение нескольких уровней, расчленение энерг. и информационных потоков, привязка к внутр. структурным элементам, введение вероятностных оценок и *обратных связей* хотя и очень усложняет модели этого типа, но приближает к раскрытию сущности системы. Структурные модели строятся на базе внутр. структуры системы и отражают один или несколько иерархических уровней (элементы, подсистемы и связи). К структуре «привязываются» непрерывные и дискретные изменения частных ф-ций, из которых рассчитываются суммарные ф-ции системы как целого. Модель представляет собой плоскую или пространственную сеть, отражающую рабочие и управляющие элементы системы. Структурные модели лучше приспособлены для выражения сущности систем, однако сложность расчетов не позволяет начинать моделирование с низких структурных уровней и заставляет ограничиваться отражением отдельных подсистем и частных ф-ций. Кроме типичных феноменологических и структурных моделей возможны и смешанные модели, в которых отдельные подсистемы или их определенный уровень выражаются по первому, а другие — по второму типу. Выбор зависит от специфики системы. В качестве тех. средств для создания моделей используют ЭЦВМ, поскольку они позволяют перерабатывать большой объем информации, хотя программирование на них трудоемко. Некоторые частные ф-ции и отдельные подсистемы можно моделировать на *аналоговых вычислительных машинах*.

Отдельной областью К. б. является органи-

зация и проведение экспериментов по снятию статистических и динамических характеристик биол. объектов. До начала проведения таких экспериментов осуществляется постановка задачи (определяют орган или функциональный акт, подлежащий изучению; устанавливают протяженность опыта и граничные условия). Это предполагает формулирование некоторой гипотезы, выразимой в качественных понятиях. После постановки задачи переходят к построению функциональной схемы объекта (перечисляют все входы и выходы; на основании гипотезы из их числа выделяют существенные). Следующий этап — планирование эксперимента (определяют контролируемые входы, выделяют стабилизируемые и изменяемые параметры, режим нагрузок, места и частоту замеров). Для успешного проведения экспериментов очень важно правильно подобрать комплекс измерительной аппаратуры. После этого проводят серию пробных опытов, во время которых отрабатывается методика и определяется применимость сделанных допущений. Закончив предварительную подготовку, приступают к проведению осн. серии опытов для получения характеристик. Матем. обработку результатов осуществляют на ЭЦВМ, вводя в нее данные с помощью *аналого-цифрового преобразователя*.

Общие принципы управления биол. системами с применением методов кибернетики состоят в следующем. **О п р е д е л е н и е** цели **у п р а в л е н и я**, выраженной моделями исходного, промежуточных и конечного состояний системы. Цели устанавливает человек, а количественные динамические модели одного из типов записываются в памяти ЭЦВМ или выражаются аналоговой моделью, напр., статистические модели заболеваний (структурная модель «внутренней сферы» организма или модель психики). Эти модели позволяют прогнозировать естественные изменения системы при разных исходных состояниях. **П е р е ч и с л е н и е** средств **у п р а в л е н и я** с *программами* их воздействия на элементы системы. Например, перечень лекарств с указанием механизма действия в виде изменения характеристик органов. **С о с т а в л е н и е** **а л г о р и т м а** **у п р а в л е н и я**. Расчет по модели изменения системы во времени при разных управляющих воздействиях и выбор оптим. стратегии и тактики управления для достижения цели. Принятие решения и уточнение программы управления. Напр., выбор метода лечения по критериям эффективности в зависимости от исходного состояния больного и программа последовательности применения средств. **К о н т р о л ь** **в ы п о л н е н и я** **п р о г р а м м ы** **у п р а в л е н и я**, предусматривающий систему обратных связей, оценку состояния системы на промежуточных стадиях и коррекцию управляющих воздействий в зависимости от эффекта управления. Это очень важный момент, т. к. возможны только вероятностные модели биол. систем, не позволяющие однозначно предусмотреть ее реакцию на управление.

Управление биол. системами возможно в клинической медицине: диагностика и прогнозирование развития болезни, выбор и проведение лечения вплоть до автомат. управления жизненными ф-циями при острых патологических состояниях; в физиологии — планирование и проведение эксперимента; в психологии — *программированное обучение* или даже воспитание.

Лит.: Парин В. В., Баевский Р. М. Введение в медицинскую кибернетику. М.—Прага, 1966; Амосов Н. М. Моделирование сложных систем. К., 1968; Анохин П. К. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем. М., 1971 [библиогр. с. 58—61]; Эшби У. Р. Конструкция мозга. Пер. с англ. М., 1964 [библиогр. с. 404—407]; Рашевский Н. Некоторые медицинские аспекты математической биологии. Пер. с англ. М., 1966 [библиогр. с. 236—241]. Н. М. Амосов.

**КИБЕРНЕТИКА В ВОЕННОМ ДЕЛЕ** — одно из важных направлений использования новейших научно-технических достижений в области кибернетики и вычислительной техники в интересах военного дела. Формирование кибернетики как новой науки в значительной мере связано с решением некоторых задач, возникших в период 2-й мировой войны. Именно исследование проблемы создания автоматизированных систем для ПВО натолкнуло Н. Винера на мысль о целесообразности выделения общих закономерностей управления и связи в живой природе и технике в новую научную область, названную им *кибернетикой*. Широкое применение К. в в. д. вызвано непрерывным совершенствованием военной техники, стратегии, оперативного искусства и тактики. Рост основных тактико-технических показателей образцов боевой техники, повышение маневренности и скорости боевых машин, усложнение условий их боевого применения уже к началу 2-й мировой войны привели к широкому использованию некоторых средств автоматизации для управления боевой техникой. Так, в авиации были созданы приборы для автоматизированного вычисления прицельных данных при бомбометании и воздушной стрельбе, в ПВО — приборы управления огнем зенитной артиллерии, в военно-морском флоте — системы кораблевождения и управления огнем корабельной артиллерии. В послевоенный период в связи с появлением и развитием ядерного оружия и совершенствованием средств доставки боеприпасов к целям в военном деле произошла подлинная революция, потребовавшая коренной перестройки управления не только боевой техникой, но и войсками.

Современный бой и операции характеризуются массированностью применения сил и средств, высокими темпами передвижения войск, возможностью быстрых и резких изменений обстановки. В таких условиях человек в ряде случаев не может, не прибегая к помощи технических средств, своевременно реагировать на изменения обстановки и принимать правильные решения. Все это привело к бурному внедрению К. в в. д. Вопросы использования кибернетической техники и методов кибернетики в интересах военного дела выделились в обширную область, которую наз.

военной кибернетикой. Она представляет собой науку, изучающую общие закономерности процессов управления войсками, боевой техникой и средствами поражения с целью повышения эффективности их боевого применения. Кибернетические устройства находят разнообразное эффективное применение в большинстве сложных систем вооружения для управления объектами боевой техники и средствами поражения. Прежде всего следует указать на применение автоматических устройств вычислительной техники и устройств передачи информации в ракетных системах (комплексах). Современные ракетные комплексы, независимо от их назначения, насыщены автоматикой, позволяющей до минимума сократить время подготовки их к пуску, повысить надежность и точность движения ракет к цели. Среди таких устройств можно, в частности, отметить автоматы, управляющие режимом подачи компонентов топлива к двигателям установкам, а также системы управления и навигации. Несмотря на некоторую специфику, автоматические системы управления ракетами обладают всеми наиболее характерными чертами кибернетических устройств. Они содержат датчики первичной информации (напр., угловых координат ракеты, линейных ускорений и т. д.), устройства для ее переработки, оформленные в виде малогабаритных бортовых вычислительных машин или же в виде специализированных счетно-решающих устройств, и, наконец, исполнительные механизмы. Чрезвычайно насыщены автоматикой наземные устройства подготовки, контроля и пуска ракет.

Боевая техника, применяемая сухопутными войсками, также начинает все больше и больше оснащаться кибернетическими устройствами, позволяющими повысить точность стрельбы артиллерии и танков, обеспечить автоматическое определение местоположения объектов и др. В войсках ПВО применяются ракетные и авиационные комплексы перехвата воздушных целей, представляющие собой примеры кибернетических систем. Типовая схема ракетного комплекса перехвата воздушных целей (рис. 1) включает радиолокационные станции обнаружения и сопровождения целей, снабженные вычислительными устройствами для определения координат целей, командно-вычислительные устройства, осуществляющие разворот ракетной пусковой установки на цель и пуск ракеты, и, наконец, собственно ракету с соответствующими системами коррекции ее траектории и самонаведения на цель.

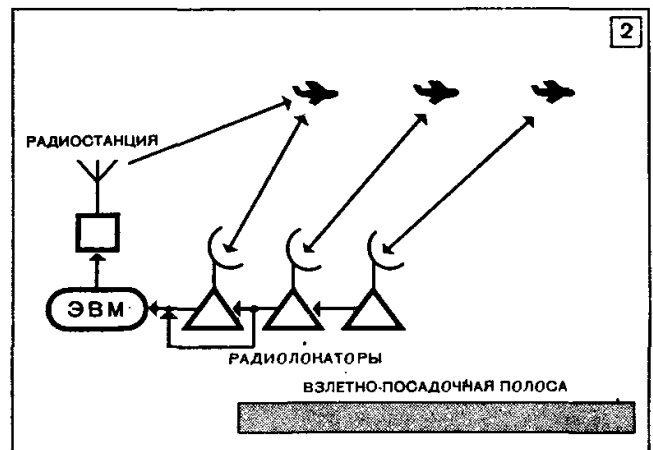
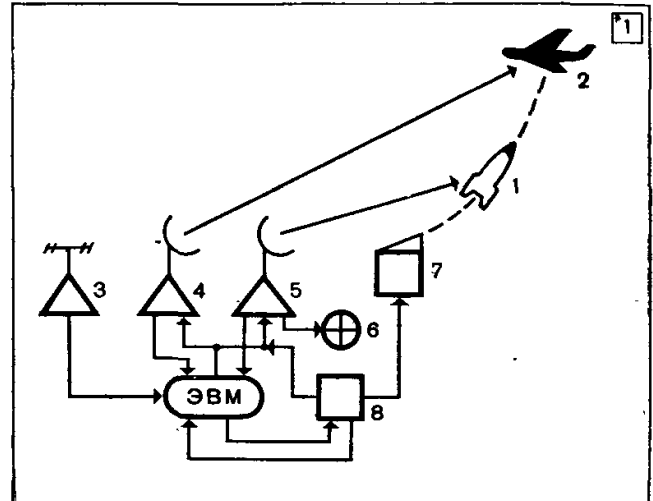
Многогранно применение кибернетики в военной авиации. Здесь можно наметить три основных области: 1) управление вооружением самолета (прицельные системы, системы управления бомбардировочными и артиллерийскими установками, системы пуска ракет и т. п.); 2) управление полетом самолета (*автопилотирование*, системы регулирования двигателей, автоштурманы, бортовые автоматические системы посадки); 3) регулирование движением самолетов в районе аэродромов (рис. 2).

Еще более разнообразным является применение кибернетических устройств и систем в военно-морском флоте. Современные надводные корабли и подводные лодки, обладающие большими скоростями и высокой автономностью действий, вооружены мощным ракетным, артиллерийским, торпедным и бомбовым оружием и оснащены совершенной радиотехнической аппаратурой, автоматизированными и автоматическими средствами поиска, обнаружения и сопровождения целей и приборами управления огнем.

Применение методов кибернетики для управления войсками является сравнительно новой областью ее практического использования. В сущности, для управления войсками всегда использовались по крайней мере два кибернетических принципа — программного управления (расчленение сложных действий на элементарные, заранее отработанные команды) и обратной связи (обязательный доклад об исполнении полученного приказа). В настоящее время все основные процессы, связанные с управлением войсками (добывание данных о противнике, сбор информации о своих войсках и обстановке, анализ и оценка обстановки, принятие решения и доведение его до исполнителей) чрезвычайно усложнились, а располагаемое время на их реализацию неуклонно сокращается. В этих условиях комплексное применение кибернетики для обеспечения оперативного, непрерывного и гибкого управления войсками стало неизбежным, в связи с чем появились автоматизированные системы управления войсками. Однако применение К. в в. д. ни в коей мере не означает снижения роли человека в процессах управления войсками. Напротив, именно благодаря тому, что кибернетическая техника освобождает человека от трудоемкой и утомительной работы по сбору, хранению, обработке и выдаче информации, командующие (командиры) и штабы получают благоприятные возможности для сосредоточения своего внимания на творческом решении наиболее важных вопросов подготовки и проведения операций (боев). Напр., для решения задачи целераспределения важно предварительно определить боевые средства, которые достигают тех или иных целей противника. Соответствующие расчеты могут выполняться *вычислительной машиной*, которая результаты вычислений в наглядной форме передает в штаб. Следующим этапом автоматизации в этом направлении является автоматизированное получение ряда вариантов целераспределения по каким-либо заранее выбранным критериям. Тогда на долю человека выпадает лишь выбор одного из вариантов с учетом факторов, которые пока что не поддаются количественной оценке.

Примерная схема любой автоматизированной системы для управления войсками включает в себя: 1) датчики первичной информации о противнике, своих войсках, состоянии театра военных действий и метеобстановке; 2) линии передачи информации (телефонные, телеграфные, радио- и радиорелейные каналы и др.);

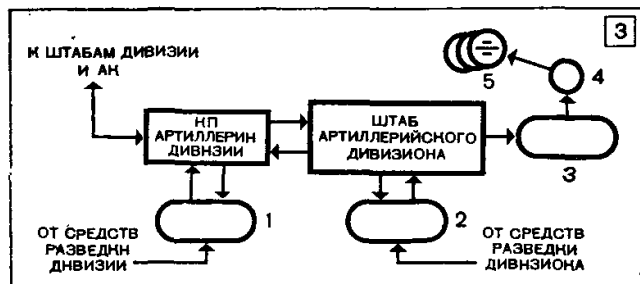
3) вычислительные машины; 4) средства для наглядного отображения и документирования информации и оперативного размножения документов. Условно, в зависимости от решаемых задач, автоматизированные системы управления войсками можно разделить на две больших группы: информационные системы и системы боевого управления. Информационные системы имеют своей задачей сбор, хранение и выдачу информации о противнике и своих войсках, состоянии театра военных действий, метеобстановке. В автоматизированных систе-



1. Схема автоматизированной системы управления зенитными управляемыми ракетами: 1 — зенитная управляемая ракета; 2 — цель; 3 — радиолокатор поиска и обнаружения цели; 4 — радиолокатор сопровождения цели; 5 — радиолокатор наведения ракеты на цель; 6 — индикатор оператора; 7 — пусковая установка; 8 — командный прибор.  
2. Схема системы, обеспечивающей автоматизацию посадки группы самолетов.

мах боевого управления реализуются процессы, непосредственно связанные с управлением войсками. Технически обе системы могут быть совмещены в рамках единой автоматизированной системы. Большинство автоматизированных систем управления войсками являются *иерархическими системами управления*, отображающими систему управления вооруженными силами, принятую в данной стране. Поэтому в состав систем, предназначенных для автоматизированного управления войсками крупных

оперативных объединений, обычно включается ряд *подсистем*, решающих более ограниченный круг задач (см. рис. 3). В частности, одной из важных областей применения К. в в. д. является тыл. С помощью современных вычислительных машин в органах тыла выполняются всевозможные учетно-отчетные работы, планирование использования материальных ресурсов и т. д. В ряде случаев для управления тылом используются специальные автоматизированные подсистемы. Решение расчетных и информационных задач в автоматизирован-



**3. Структурная схема автоматизированной системы TACFIRE управления огнем артиллерии:** 1 — ЭВМ обработки разведанных; 2 — ЭВМ целераспределения; 3 — ЭВМ управления огнем; 4 — командно-индикаторный блок; 5 — артиллерийская батарея.

ных системах управления войсками требует привлечения точных матем. методов. Внедрение таких методов характерно для применения К. в в. д. Все основные процессы по управлению войсками осуществляются в условиях неполной информации о противнике, ибо противник всегда стремится скрыть свое истинное состояние и свои намерения. Поэтому одной из важных особенностей матем. методов, используемых в военном деле, является их направленность на решение задач в условиях риска и неопределенности, на тщательный учет случайных факторов. В связи с этим в теоретическом отношении автоматизированные системы управления войсками и военная кибернетика в целом опираются на такие области математики, как *вероятностей теория, массового обслуживания теория, математическая статистика, теория игр и решений, алгоритмов теория* и др.

Применение К. в в. д., в свою очередь, выдвинуло ряд важных научных и тех. проблем (надежность и живучесть автоматизированных систем, оптимальное взаимодействие человека и автомат. устр-в, в частности вычислительных машин, и др.), требующих для своего разрешения совместной работы военных и военных специалистов.

Лит.: Гончаренко М. Н. Кибернетика в военном деле. М., 1963; Синяк В. С. Военное применение электронных вычислительных машин. М., 1963 [библиогр. с. 166—167]; Петров В. П., Сочивко А. А. Управление ракетами. М., 1963 [библиогр. с. 261]; Абрамов С. А., Батраков В. А. Электронные цифровые машины и снабжение войск. М., 1964 [библиогр. с. 240—241]; Ануреев И. И., Татарченко А. Е. Применение математических методов в военном деле. М., 1967; Прокофьев А. В. Средства механизации и автоматизации в штабах. М., 1969.

*Б. Г. Доступов.*

**КИБЕРНЕТИКА МЕДИЦИНСКАЯ** — направление кибернетики, изучающее проблемы, связанные с процессами управления в медицине и здравоохранении. Предметом исследования К. м. являются медицинская и другие виды информации, системы накопления и переработки информации, системы связи и управления, существующие в человеческом организме и в системе здравоохранения. К. м. опирается на знания, накопленные медициной и здравоохранением, а также на матем. аппарат кибернетики и возможности электронных вычислительных машин. Тех. базой К. м. являются цифровые и аналоговые вычислительные машины широкого назначения и специализированные вычислительные машины со сложными комплексами устройств ввода — вывода данных ПВМ.

Осн. методом познания в К. м. является метод моделирования, основанный на глубоком анализе изучаемого процесса или системы. В К. м. получило широкое развитие моделирование по методу «*черного ящика*» с его макро- и микроподходами. При моделировании по этому методу изучают изменения на входе и выходе системы и по ним стремятся выяснить отношения между элементами системы или ее возможные структуры. Цель любого моделирования — изучение поведения системы в зависимости от действия на нее тех или иных факторов. Под моделью понимают некоторый искусственно созданный объект, в соответствие которому может быть поставлен оригинал. Модель не является точной копией системы. Напр., стандартизированная история болезни, заполняемая в процессе лечения больного, содержит в себе информацию о больном, о динамике параметров (элементов) во время лечения больного, в связи с этим ее можно рассматривать как информационную модель данного больного. Однако «оживляет» эта модель только в мозгу врача или в ЦВМ, когда происходит ее сравнение по сложным алгоритмам с моделями тех или иных болезней, имеющимся в их памяти. Это позволяет дать оценку функций многих систем больного; диагностировать заболевание или комплекс заболеваний; определить степень риска при назначении лекарств; прогнозировать развитие болезни и лечение. Т. о., моделирование позволяет врачу на основании изучения функции системы высказать определенное суждение об изменении ее структуры.

К. м. в СССР начала оформляться как научное направление во 2-й половине 50-х гг. В 1956 была создана первая модель диагностической электронной машины, а в 1957 на всемирной выставке в Брюсселе демонстрировалась модель «искусственной руки», управляемой нервными импульсами человека, которую разработала группа инженеров и врачей в Москве. За рубежом в этот же период была создана модель «искусственного электрического глаза», дающего возможность слепому читать печатный текст с помощью органа слуха. В это же время появились первые сообщения об анализе энцефалограмм и электрокардио-



грамм с помощью ЭВМ, о диагностике с помощью ЭВМ. В 1959 в Неаполе был проведен первый международный конгресс по К. м. Период развития К. м. можно разделить на два этапа. На первом этапе разрабатывались преимущественно методы решения частных задач (диагностика заболеваний, автоматизация обработки энцефалограмм и пр.) и определялись осн. направления К. м. Второй этап характеризуется *системным подходом* к решению задач моделирования и управления организмом человека, системой здравоохранения (см. *Медицинская информационная система*). В К. м., в зависимости от приложения ее методов и идей к различным направлениям медицины, сформировалось несколько науч. направлений. Первое — это физиологическая кибернетика, занимающаяся изучением и моделированием органов и систем человека; второе направление связано с клинической медициной (терапия, хирургия, кардиохирургия, неврология, психиатрия и т. п.); а третье — с проблемами профилактической медицины и управления в здравоохранении. Теория и практика в этих направлениях представляют единое целое, они неразрывно связаны. Помимо моделирования в К. м. применяют сложные системы сбора и переработки информации для управления учреждениями здравоохранения (автоматизированные системы управления больницами, министерствами) и лечебно-профилактическим процессом.

В клинической медицине К. м. занимается: вопросами теории и принципами построения медицинских *информационно-поисковых систем*, обеспечивающих лечебный процесс; построением диагностических и прогнозирующих систем; систем автоматизированного управления человеческим организмом в условиях патологии; теорией диагноза; теорией мед. прогнозирования; теорией управления двигательными функциями больного с помощью управляющей информации, полученной от здорового человека; стандартизацией представлений, созданием классификаций, номенклатур, обеспечивающих возможность применения методов кибернетики в современной медицине. Значительные успехи достигнуты в области *биоэлектрического управления*. Созданы и успешно применяются в клиниках электрокардиостимуляторы, стимуляторы скелетной мускулатуры, протезы конечностей с биоэлектрическим управлением.

В профилактической медицине и здравоохранении К. м. занимается разработкой и созданием различных информационных и управляющих систем, обеспечивающих контроль над чистотой воздуха, почвы, воды, пищи и т. п.; построением единой системы, направленной на охрану здоровья населения городов и сел от эпидемических заболеваний; разработкой принципов и построением автоматизированных систем управления аппаратом и учреждениями здравоохранения (министерство, больницы, поликлиники, здравпункты); разработкой гос. центра мед. информации; мед. документалистикой;

теорией создания систем самообучения населения навыкам санитарии и гигиены и правилам пользования мед. системами; подготовкой кадров для работы в области К. м.

Работы в области К. м. привели к созданию целого ряда приборов и устр-в, с успехом используемых в клинической и экспериментальной медицине. Напр., созданы системы автоматизированного и автоматического анализа электро- и векторкардиограмм, электронные диагностические устр-ва для выявления при массовых исследованиях ЭКГ-патологий.

Применение матем. методов и *вычислительной техники* в системе здравоохранения призвано повысить эффективность работы мед. учреждений. Автоматизация медицины выдвигает ряд вопросов, связанных с *проблемой «человек — машина»* в широком понимании этого понятия.

Лит.: Амосов Н. М., Шкабара Е. А. Опыт постановки диагноза при помощи диагностических машин. «Экспериментальная хирургия и анестезиология», 1961, № 4; Парин В. В. Кибернетика в физиологии и медицине. «Вопросы философии», 1961, № 10; Брайнес С. Н., Свечинский В. Б. Элементы общей теории управления в организме. «Экспериментальная хирургия и анестезиология», 1963, № 5; Амосов Н. М. Регуляция жизненных функций и кибернетика. К., 1964; Парин В. В., Баевский Р. М. Введение в медицинскую кибернетику. М. — Прага, 1966.

А. А. Попов, В. Г. Мельников.

**КИБЕРНЕТИКА ТЕХНИЧЕСКАЯ** — направление кибернетики, в котором изучаются на основе единых для кибернетики в целом научных идей и методов технические системы управления. К. т. является современным этапом развития теории и практики автомат. регулирования и управления (см. *Автоматическое управления теория, Автоматика*), а также научной базой для решения задачи комплексной автоматизации производства, транспортных и других *сложных систем управления* (ирригационные и газораспределительные системы, атомные электростанции, космические корабли и т. д.). Сложные системы управления, в которых как непременный элемент принимает участие *человек-оператор*, называют *системами автоматизированными*, в отличие от *систем автоматических*, функционирующих без непосредственного участия в них человека (см. *Автомат*). Проблема «человек — машина», в которой рассматриваются возможности рационального распределения функций между человеком и автоматически действующими устройствами, является в настоящее время одной из главных в К. т. (как и в *кибернетике* в целом). Именно вопрос об участии человека в системах управления в основном отличает интересы К. т. от интересов ее предшественницы — теории автомат. регулирования и управления. Наибольшее объединение функций человека и автомата достигается в киборгах («кибернетические организмы»), т. е. устройствах, в которых достигнута определенная степень симбиоза в физ. и интеллектуальных действиях человека и тех. средств автоматизации. Киборги находят все более и более широкое применение при решении задач управления объектами, находящимися в таких



условиях, в которых человеку трудно или вовсе невозможно управлять ими непосредственно. Напр., киборги все шире применяют для управления некоторыми процессами в металлург. и хвм. производствах, опасными по радиационному излучению процессами, происходящими в ядерных реакторах и ускорителях заряженных частиц, объектами в космическом и подводном пространствах и пр. (см. *Робот, Робот промышленный, Манипулятор*). Участие человека в управлении агрегатами и технологическими процессами, с одной стороны, и в административном управлении, с другой, также приводит к сращиванию этих двух сфер управленческой деятельности и к созданию единой «человеко-машинной» системы управления. Поэтому, кроме физиологических особенностей человека-оператора, существенное значение стало приобретать и его психологическое состояние, и это породило целую ветвь науч. исследований, именуемых *психологией инженерной*. Главной задачей этой ветви знаний является разработка методов использования знаний о поведении человека при проектировании и эксплуатации сложных человеко-машинных систем управления (или элементов этих систем) для достижения их максимальной эффективности.

При решении ряда задач управления тех. объектами (навигация судов и летательных аппаратов, создание измерительных и контрольных устройств, разработка читающих автоматов и др.) специалисты в области К. т. стремятся использовать все те пути и приемы, которые выработала природа в течение весьма длительного периода ее эволюционного развития, что и привело к формированию большого и самостоятельного науч. направления, именуемого *бионикой*. Это направление, в зависимости от конкретной области исследований, в свою очередь подразделяется на ряд частей и разделов (гидробионику, нейробионику и др.).

Одним из самостоятельных направлений К. т. является *распознавание образов*. Распознающие системы имеют большое научное и практическое значение, их применяют не только при создании *читающих автоматов*, но и при распознавании и анализе ситуаций, характеризующих состояние технологических процессов или физ. экспериментов, а также при разработке мед. автоматизированных диагн. устройств и т. д. К К. т. в определенной мере также относится и задача *идентификации объектов управления*, т. е. задача определения динамических характеристик управляемых объектов на основе наблюдения и измерения некоторых их координат (параметров) и внешних *возмущающих воздействий* (хотя эта задача является частной по отношению к проблеме распознавания образов). Разработка и исследование различных методов идентификации (детерминированных и статистических) представляет собой важное самостоятельное направление в К. т. То же можно сказать и о цикле исследований, проводимых в рамках К. т. в области теории прогнозирования, и

разработку на ее основе автоматически действующих прогнозирующих устройств.

Характерной особенностью современного этапа развития К. т. является широкое использование вычислительных устройств и *вычислительных машин* (аналоговых и цифровых) и при решении исследовательских задач, и при создании различных тех. систем управления. Для создания *автоматизированных систем управления предприятием* (АСУП) и технологическими процессами (АСУТП) (а это задача весьма сложная и многогранная) необходимо применение тех или иных вычислительных средств. Научной базой при этом служат К. т., *информации теория, системотехника и кибернетика экономическая*, причем четкую грань между этими научными направлениями установить не всегда удается. Если ориентироваться на практику системотехнических научно-исследовательских работ, проводимых в последние годы, то условную границу между К. т. и системотехникой можно усмотреть в том, что в К. т. большее внимание уделяют нижним ступеням иерархической лестницы управления производством — агрегатам, технологическим процессам и цеховым системам (см. *Иерархические системы управления*), а в системотехнике уделяют внимание средним уровням управления (административному управлению предприятием, комбинатом или отраслью), а также решению задач автоматизации процессов проектирования и автоматизации сложных научно-экспериментальных работ (геофизическим и гидрофизическим исследованиям и т. д.).

Все уровни управления весьма тесно взаимосвязаны. Поэтому в современных системных исследованиях (см. *Системный подход*) к созданию той или иной системы управления подходят как к целостной проблеме, охватывающей все стадии ее создания (проектирование, разработку, изготовление, испытание, наладку, эксплуатацию и даже консервацию, если эта стадия также существенна). При этом принимают во внимание и чисто тех., и административно-организационные, эконом., социальные, правовые и этические стороны этой целостной проблемы. Создание АСУП требует большой предварительной теор. и инженерной подготовки. Теоретическая подготовка сводится прежде всего к *алгоритмизации производственных процессов*, т. е. к созданию формальных (математических) и неформальных (эвристических) описаний самих управляемых объектов. Для этой цели используют спец. языки описания производственных процессов (GSL, GPSS, TSP, АЛКОПОЛ, ТЕХНОЛ, АЛТОС и т. д.). Кроме того, стремятся найти *алгоритмы управления подсистемами* и системой в целом.

Инженерная часть предварительной подготовки к созданию АСУП заключается в выборе стандартных или в разработке новых тех. средств (вычисл. машин, устройств отображения информации, пультов управления и т. д.), необходимых для функционирования АСУП. Насыщенность систем разнородными тех. устройствами привела к большой значимости

проблемы надежности функционирования АСУП (см. *Надежность кибернетических систем*), причем существенное значение приобретает автомат. контроль систем управления как одно из средств повышения надежности. При решении задачи повышения надежности и общей задачи повышения эффективности функционирования АСУП все больше внимания уделяют вопросам предоставления человеку-оператору необходимой обобщенной визуальной информации. С этой целью созданы различные средства отображения информации, учитывающие психофизиологические возможности человека и предоставляющие ему возможность активно и эффективно участвовать в процессе управления (знаковые индикаторы и специализированные экраны, действие которых основано на использовании оптоэлектроники, лазерных и люминесцентных приборов, голографии и т. д.). Вся эта современная техника систем индикации вместе с тех. средствами связи при создании АСУП приобретает не меньшее значение, чем и сама *вычислительная техника*, используемая в них. Объясняется это тем, что в большинстве такого рода систем управления нет необходимости для оптим. управления априорной информации и человек-оператор должен накапливать ее в процессе эксплуатации системы. Поэтому изучавшиеся в теории автоматического управления различные адаптивные системы (*системы экстремального регулирования*, самонастраивающиеся и самоорганизующиеся) имеют не меньшее значение и при разработке автоматизированных систем управления, являющихся осн. объектом изучения в К. т. В этом проявляется полная преемственность и в определенной мере даже совпадение задач теории автомат. управления и К. т. Это же утверждение относится и к многим другим ветвям научного аппарата, используемого в обоих этих разделах кибернетики. Прежде всего это относится к проблематике исследования динамических свойств изучаемых систем управления — устойчивости, точности управления, помехоустойчивости и т. д., т. е. к проблематике, являющейся главной в научном отношении и для теории автомат. управления, и для К. т., и определяющей их научное содержание.

Наличие человека в системе управления приводит к возникновению многих новых задач, рассматриваемых в К. т., которых раньше при изучении полностью автоматически действующих систем не могло возникнуть. В частности возникает необходимость изучать интеллектуальную деятельность человека в процессе управления (логическое описание его функционирования, *программирование эвристическое*, теоретико-множественные и абстрактно-алгебраические методы описания целенаправленного поведения, процесса обучения и пр.). В связи с многообразием задач, возникающих при изучении человеко-машинных систем управления, возникает необходимость найти некоторые интегральные обобщающие методы исследования, с помощью которых можно было бы с единой точки зрения охватить многие из этих задач. Поэтому для К. т. большое зна-

чение приобретает *систем общая теория* или, более узко, абстрактная теория систем, и можно утверждать, что в настоящее время развитие К. т. идет по пути построения абстрактных моделей сложных систем управления и их изучения. Для этой цели используют различные отрасли знаний: *семиотику* математическую, *множества теорию*, *логику математическую*, *вероятностей теорию*, абстрактную алгебру и т. д.

Язык теории отношений и абстрактной алгебры позволяет формализовать такие понятия, как цель, принятие решения, целенаправленное поведение, *адаптация*, обучение, самообучение, самоорганизация и пр. Логико-матем. язык, применяемый, напр., в форме логических схем алгоритмов, также позволяет с единой точки зрения описывать разнообразные сложные системы. Ими могут быть релейно-контактные схемы (см. *Релейно-контактных схем теория*) или схемы телефонной автомат. станции и т. д., но с помощью этого языка описывается и управленческая деятельность человека-оператора (диспетчера аэропорта, рулевого судна, водителя троллейбуса и т. п.). Описания сложных систем управления с помощью логических схем алгоритмов позволяют ответить только на некоторые общие вопросы, напр., обнаружить некоторые принципиальные преимущества самоорганизующихся систем управления по сравнению с обычными системами. Однако для выявления других свойств системы (точности, устойчивости и пр.) необходимо использовать иные уровни абстрактного описания систем. При этом стремятся найти такой матем. аппарат, который позволил бы охватить наибольшее число возникающих задач. Одной из наиболее удачных в этом отношении является обобщенная трактовка различных динамических задач, встречающихся в К. т., использующая *стохастической аппроксимации метод* или, в более общем случае, вероятностный итеративный метод. С помощью этого метода были рассмотрены с единой точки зрения такие, ранее казавшиеся совершенно разнородными, проблемы, как проблемы оптимальности, адаптации, обучения, распознавания образов, идентификации, фильтрации случайных процессов, надежности и др.

В К. т. и в кибернетике в целом большое значение приобретают методы решения задач, позволяющие преодолеть трудности, возникающие из-за наличия очень большого числа взаимодействующих элементов (подсистем), входящих в соответствующую сложную систему (см. *Многомерные системы автоматического управления*). «Проклятие большой размерности» (по образному выражению амер. математика Р. Беллмана) является камнем преткновения при решении задач устойчивости, оптимальности, распознавания образов, исследования конечных автоматов, при решении экономико-математических задач. Осн. два пути преодоления затруднений, связанных с большой размерностью задач, — это *декомпозиции методы* и методы агрегирования. Наряду с этой проблемой большое значение в К. т.

имеет и *многокритериальности проблема*, заключающаяся в выборе компромиссного решения, т. е. в выборе таких значений управляющих воздействий, чтобы всякое оптим. решение, найденное для каждой из подсистем, было оптимальным (или субоптимальным) и для всей системы в целом. При этом возможны и теоретико-вероятностные, и игровые трактовки задачи. Однако, хотя аналитические методы изучения сложных систем и имеют большое значение для исследования реальных систем управления производством, транспортом и т. д., но во многих случаях их практически не удается применять из-за чрезмерной сложности задач, и поэтому в настоящее время наиболее универсальным путем для более детального изучения сложных тех. систем управления служат методы моделирования.

В отличие от традиционных методов моделирования аналогового, цифрового или гибридного (цифро-аналогового), широко распространенных при исследовании систем автомат. управления, при *моделировании системы «человек — машина»* создаются спец. моделирующие комплексы или даже моделирующие центры. В них, помимо аналоговых и цифровых вычисл. машин, включают различные устройства отображения информации, специализированные пульты, устр-ва связи и др. средства, позволяющие создать для человека-оператора условия функционирования, по возможности близкие к реальным.

Разработаны также специальные языки (*СИМУЛА, СИМСКРИПТ, RTL* и др.), предназначенные для моделирования автоматизированных систем управления.

Таким образом, симбиоз автоматически действующих устройств и людей является, с одной стороны, осн. объектом исследований, проводимых в К. т., а с другой — это универсальное средство для моделирования действительно сложных тех. и других систем управления. Лит.: Ивахненко А. Г. Техническая кибернетика. К., 1962 [библиогр. с. 412—416]; Теория автоматического регулирования, кн. 1—3, ч. 1—2. М., 1967—69 [библиогр. кн. 1, с. 743—763; кн. 2, с. 653—674; кн. 3, ч. 1, с. 588—604, ч. 2, с. 352—365]; Техническая кибернетика в СССР. М., 1968; Кибернетика и вычислительная техника, в. 1. Сложные системы управления. К., 1969; Цянь-Сюэ-Сэн-ь. Техническая кибернетика. Пер. с англ. М., 1956 [библиогр. с. 447—450]; Общая теория систем. Пер. с англ. М., 1966; Техническая кибернетика за рубежом. Пер. с англ. М., 1968; Исследования по общей теории систем. М., 1969. А. И. Кухтенко.

**КИБЕРНЕТИКА ЭКОНОМИЧЕСКАЯ** — направление кибернетики, использующее ее методы и средства с целью исследования и организации процессов в экон. системах. К. э. изучает процессы сбора, накопления, хранения и переработки информации об экон. объектах или явлениях. Предметом К. э. являются процессы управления экономикой страны, отрасли, района, пром. комплекса, производства, отдельного предприятия, участка, нескольких станков или группы людей и т. д.

Методы анализа, применяемые в К. э., помогают находить оптим. режимы управления и строить рациональные системы обработки экон. данных, основанные на широком ис-

пользовании вычисл. техники. Исследования по К. э. сводятся к выбору показателей, необходимых для управления экон. объектами (предприятием, отраслью, группой отраслей); к выбору способов получения, передачи и обработки этих показателей с наименьшими затратами средств; к выбору тех. устр-в обработки информации на различных уровнях управления (выбор техники связи, *вычислительной техники* и др.); к изучению и рекомендации *алгоритмов* и *программ* обработки информации, позволяющих на основе полученных показателей найти необходимое решение в наиболее рациональном (с экон. точки зрения) виде и довести его до исполнителей; к изучению способов контроля и учета выполняемых решений и др.

В социальном аспекте К. э. способствует стиранию граней между умственным и физ. трудом, разрабатывая новую технологию умственного труда в сфере управления на основе современного тех. оснащения. Роль К. э. в современном обществе значительно возрастает в связи с необходимостью совершенствовать экон. организацию как один из краеугольных камней общего процесса социального преобразования.

Первоначально становление К. э. было связано с разработкой матем. моделей экон. систем и явлений, использованием электронной вычисл. техники для исследования этих моделей и для решения задач управления. Применение матем. структур и методов во многом шло по линии применения матем. символики и ликвидации терминологических различий. Это направление развивается и сейчас в рамках *математической экономики* и *эконометрии*. Матем. модели экон. систем и явлений позволяли лучше осмыслить динамику изучаемых систем, выработать действенные рекомендации по рационализации их структуры и методов экон. прогнозирования и управления. Особое значение имело изучение регулирующих факторов в таких моделях, вопросов устойчивости, равновесия, роста, регулирующего характера цен, выявление и подчеркивание обратных связей в экономике, исследование конфликтных ситуаций (в рамках *игр теории*), соотношений между оптимальным функционированием и общей мобильностью экон. систем (см. *Макромодели экономические, Микромодель экономическая, Модели равновесия, Модели роста, Модели экономики*). К. э. занимается вопросами принятия решений в управлении экон. системами, применения *моделей математических* и получаемых на их основе машинно-формальных выводов для принятия решений в реальных ситуациях и постановках, решает вопросы границ и рецептов возможного использования формальных постановок и выводов. Большое внимание уделяется методам эвристического решения задач, экспертного прогнозирования (см. *Экспертных оценок методы* в прогнозировании) и, наконец, построению человеко-маш. систем для решения экон. задач (см. *Система «человек—машина»*). Применение такого рода человеко-маш. систем,

моделирование ситуаций и принятие решения для обучения и выработки более рациональных форм и методов управления (деловые игры) способствует тому, что матем. моделирование становится все более универсальным средством совершенствования эконом. систем, пробным камнем проверки эконом. положений и доктрин.

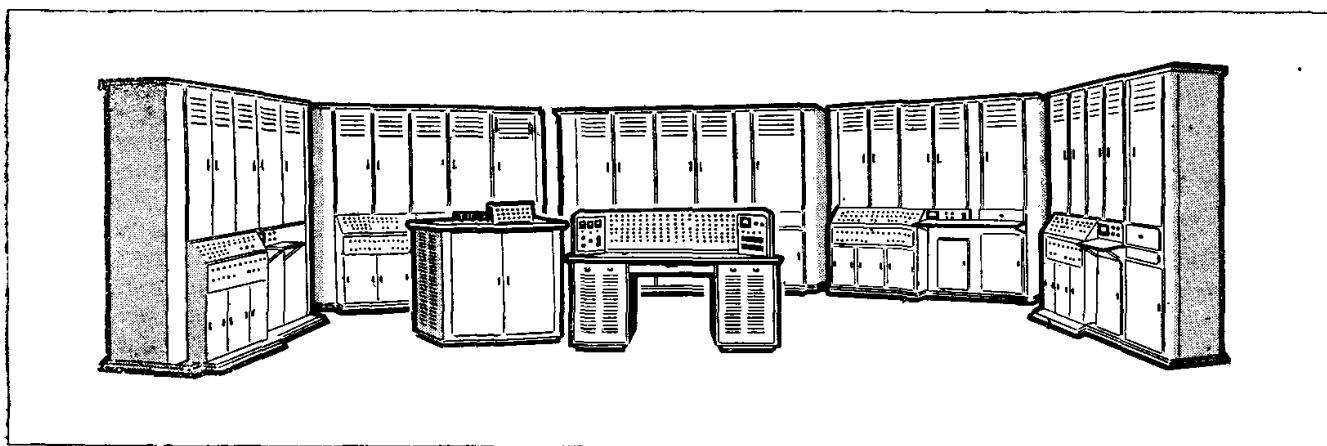
Однако определяющим направлением в К. э. является разработка теории и построение *автоматизированных систем управления* (АСУ) в нар. х-ве, которое стало возможным только в связи с созданием современных тех. средств обработки данных, особенно систем с разделением времени (см. *Режим разделения времени*). Построение АСУ в экономике является составной частью процессов автоматизации, определяющих современную науч.-тех. революцию. Необходимость создания таких систем обуславливается не только их эффективностью в плане совершенствования эконом. систем, роста производительности управленческого труда, но и в плане эффективного использования тех. средств обработки данных и организации информационных процессов в целом, многими социальными требованиями. Быстрый рост производства, углубление специализации, расширение кооперирования производства, обновляемость продукции, эффективное использование ресурсов невозможно без создания АСУ. В рамках К. э. разрабатываются общие вопросы структуры, построения и функционирования автоматизированных систем управления в народном хозяйстве. Особое внимание уделяется вопросам эффективного сбора информации, ее представления, именования, интерпретации, использования и циркуляции в АСУ. Информация в эконом. системах становится предметом глубокого изучения. Разработка информационных и алгоритмических языков, языков моделирования, информационно-поисковых систем и информационно-

дискретной оптимизации (см. *Оптимизационные методы численные*), теории расписаний и др., на теор. и практические разработки в области обработки данных, *математического обеспечения ЦВМ*. Развитие техники обработки данных, общей теории операций исследования и исследования систем также связано с направлением развития и интересами К. э.

Лит.: К о б р и н с к и й Н. Е. Основы экономической кибернетики. М., 1969 [библиогр. с. 253—254]; Процессы регулирования в моделях экономических систем. М., 1961 [библиогр. с. 291—292]; Л а н г е О. Введение в экономическую кибернетику. Пер. с польск. М., 1968.

А. А. Бакаев, В. С. Михалевич, В. В. Шкурба.

«КИЕВ» — электронная цифровая вычислительная машина, предназначенная для решения широкого круга научных и инженерных задач. Разработана в 1958 в Ин-те кибернетики АН УССР. Использована впервые в СССР для исследований по дистанционному управлению технологическими процессами. «К.» (рис.) — асинхронная машина с полностью автономными устройствами. В ней есть оперативное ЗУ параллельного действия на ферритовых сердечниках емкостью 1024 слова, цикл обращения к ОЗУ — 10 мксек; в машине реализованы операции сокращенного умножения и деления. Структура команд — трехадресная. В «К.» впервые применен *адресный язык* программирования как входной язык транслятора. Система операций машины — 32 операции, в т. ч. обращение по адресу 2-го ранга и операции для задания циклов. Форма представления чисел — с фиксированной перед старшим разрядом запятой, длина машинного слова — постоянная, 41 двоичный разряд. Режим работы с плавающей запятой осуществляется программно. Постоянное (одностороннее) ЗУ феррит-трансформаторного типа с циклом обращения 7 мксек и емкостью 512 слов предназначено для хранения сменно-спаянных программ. Цикл работы машины четырехтактный,



Цифровая вычислительная машина «Киев».

справочных систем, по существу, ориентирует на объекты эконом. характера.

К. э. оказала во многом определяющее влияние и на развитие некоторых новых матем. направлений — математического, стохастического и динамического программирования,

длительность такта — переменная, она зависит от вида операции и используемой памяти. Параллельное арифм. устр-во включает двухтактный накапливающий сумматор и 3 регистра; время сложения 6,6 мксек, деления — 275 мксек, среднее быстроедействие 15 тыс.

операций в 1 сек. Внешнее ЗУ состояло из трех магн. барабанов общей емкостью 9 тыс. слов со временем выборки 120 мксек. Элементарная база — импульсно-потенциальная (ламповые элементы). Ввод данных осуществляется с перфолент, перфокарт, телеграфных линий связи, преобразователей непрерывных величин в дискретные, устр-в чтения графиков. Устр-во вывода — цифроречитательное или перфоратор.

Лит.: Глушков В. М., Ющенко Е. Л. Вычислительная машина «Киев». К., 1962 [библиогр. с. 181—182]; Дашевский Л. Н., Погребинский С. Б., Шкабара Е. А. Вычислительная машина «Киев». К., 1964 [библиогр. с. 321—323]. Л. Г. Хоменко.

**КЛАСС ЗАМКНУТЫХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ** — такой класс функций  $\mathcal{M}$ , что 1) вместе с каждой функцией  $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}$  классу  $\mathcal{M}$  принадлежит функция  $f(y_1, \dots, y_n)$ , где не все  $y_i$  должны быть различными (замкнутость относительно отождествления переменных); 2) вместе со всякими  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in \mathcal{M}$ ,  $f_i(x_{i_1}, \dots, x_{i_{p_i}}) \in \mathcal{M}$  классу  $\mathcal{M}$  принадлежит функция  $f(x_1, \dots, f_i(x_{i_1}, \dots, x_{i_{p_i}}), \dots, x_n)$  (замкнутость относительно суперпозиции). К. з. ф. а. л. является, напр., класс всех ф-ций алгебры логики.

**КЛАСС ИНВАРИАНТНЫХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ** — множество  $Q$  функций алгебры логики такое, что: 1) если функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in Q$ , то к классу  $Q$  принадлежат и все функции, получающиеся из  $f$  путем переименования (без отождествления) переменных; 2) если функция  $f_1(x_1, \dots, x_n) \in Q$ , то к классу  $Q$  принадлежат и все функции, получающиеся из  $f$  путем любой подстановки констант на место (не обязательно всех) переменных; 3) если функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in Q$ , то к классу  $Q$  принадлежат и все функции, получающиеся из  $f$  путем удаления или введения фиктивных переменных (переменная  $x_i$  наз. фиктивной, если

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \equiv \\ \equiv f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Мн-во всех К. и. ф. а. л. имеет мощность континуума. Изучение К. и. ф. а. л. позволяет глубже понять алгоритм. трудности синтеза миним. схем, реализующих функции алгебры логики. М. И. Кратко.

**КЛАСС ПРЕДПОЛНЫХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ** — класс замкнутых функций алгебры логики, который не совпадает с классом всех функций и не содержится целиком ни в каком замкнутом классе, отличном от класса всех функций. В алгебре логики существует только пять предполных классов — классы функций, сохраняющих константу 0 и 1, класс самодвойственных функций алгебры логики, класс монотонных функций алгебры логики и класс линейных функций алгебры логики. Для  $k$ -значных логик все К. п. ф. а. л.

исчерпываются шестью семействами, но число этих классов  $\pi(k)$  растет очень быстро  $\pi(k) \sim \left[ \frac{k-1}{2} \right]$

$\sim \delta(k) \cdot k \cdot 2^{Ck-1}$ , где  $\delta(k) = 1$  — при нечетном  $k$  и  $\delta(k) = 2$  при четном  $k$ . Напр., известно, что  $\pi(2) = 5$ , но  $\pi(6) = 15\,237$ , а  $\pi(7) = 7\,854\,724$ .

В терминах К. п. ф. а. л. выражаются критерии полноты. Набор ф-ций является полным, если он не принадлежит целиком никакому К. п. ф. а. л. Но при  $k \geq 6$  эти критерии становятся уже малообозримыми.

Лит.: Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В. О предполных классах в  $k$ -значных логиках. «Доклады АН СССР», 1969, т. 186, № 3. М. И. Кратко.

**КЛАССИФИКАЦИИ ИЕРАРХИЧЕСКИЕ** — классификации, в которых каждый подкласс имеет один и только один непосредственно предшествующий ему (включающий его) класс (отношение сильной иерархии). Между всеми подклассами, входящими в один класс, существует отношение соподчинения. К. и. информации документальной являются важнейшими видами традиционных языков информационно-поисковых, их применяют для рас-пределения документов научных по отраслям знаний в соответствии с содержанием этих документов. Они наз. также библиотечно-библиографическими и классификациями и отличаются от классификаций наук более строгим соответствием формально-логическим правилам построения (для однозначного определения места документа или его поискового образа), а также соответствием особенностям классифицируемых объектов (для деления документов не только по содержанию, но и по виду издания, их назначению, языку их текста и т. п.). Схемы этих классификаций обычно издаются в виде основных таблиц и таблиц определителей (или типовых делений). В основных таблицах все отрасли знания и их разделы расположены в логической последовательности, причем деление каждый раз производится только по одному основанию. В таблицах определителей отражаются общие признаки, повторяющиеся для многих документов. Всем разделам и определителям присваиваются условные обозначения — индексы, которые по структуре могут быть номерными и ступенчатыми. В качестве номерных индексов используются порядковые номера подразделений классификации, ступенчатые индексы отражают ее логическую структуру и позволяют производить неограниченную детализацию схем.

История К. и., и в частности библиотечно-библиографических, восходит к глубокой древности. В настоящее время применяются десятки различных схем, из которых наибольшее значение имеют «Десятичная классификация» М. Дьюи (1876), «Растяжимая классификация» Ч. Кеттера (1879), «Классификация Библиотеки Конгресса США» (1901), «Универсальная десятичная классификация» — УДК (1905—07), «Библиографическая классифика-

ция Г. Блисса» (1935). УДК остается наиболее распространенной международной универсальной системой, которая является обязательной для классификации литературы по точным, естественным и тех. наукам в СССР. Наряду с ней в СССР широко применяется советская «Библиотечно-библиографическая классификация» (1960—1968).

Наряду с достоинствами, которые заключаются в явном и привычном обозначении родо-видовых отношений между понятиями, К. и. имеют ряд ограничений. Эти классификации, в соответствии с формально-логическими правилами их построения, не позволяют легко и быстро отражать процесс интеграции науки, устанавливать классы для новых направлений на стыке отд. дисциплин, производить многоаспектное индексирование документов и их поиск по любому, заранее не предусмотренному сочетанию характеристик. Эти ограничения успешно преодолеваются в фасетных классификациях, начало которым положила «Классификация при помощи двоеточия» Ш.-Р. Ранганатана (1933). Вместо единого ряда делений в каждом основном классе, здесь имеется несколько таблиц, каждая из которых построена на основе к.-л. одной характеристики или аспекта, получивших название «фасетов». Индекс, отражающий содержание документа, строится из обозначений, принятых в каждой такой таблице и соединяемых при помощи двоеточия. Фасетные классификации явились шагом вперед от традиционных информационно-поисковых языков к дескрипторным языкам.

Лит.: Шамурин Е. И. Очерки по истории библиотечно-библиографической классификации, т. 1—2. М., 1955—59 [библиогр. т. 1, с. 322—382; т. 2, с. 459—536].

Р. С. Гиляревский.

**КЛАССИФИКАЦИЯ АВТОМАТИЧЕСКАЯ** — отнесение автоматическим устройством объектов из некоторого множества к тому или иному классу из заданного (конечного) набора классов. В основе К. а. лежит анализ информации о каждом объекте, которая вводится в устр-во. Проблема К. а. относится к проблеме *распознавания образов*, и в ее решении используются многие понятия и методы распознавания образов. В частности, в одном из вариантов решения вводимая в устр-во информация о классифицируемом объекте интерпретируется как совокупность признаков. Каждому признаку сопоставляется координата (многоградационная или двоичная, в зависимости от природы признака) в некотором пространстве признаков, где всякий предъявленный объект отображается точкой. При удачном выборе признаков точки одного класса группируются в компактные скопления со сравнительно легко аппроксимируемыми границами или, в вероятностной постановке, распределениями вероятностей. Предъявленный объект в зависимости от того, куда попадает в пространстве признаков отображающая точка, классифицируется в соответствии с принятым *решающим правилом*. К. а. применяется в мед., тех. диагностике, геофиз. разведке, информационно-поисковых системах и т. п.

В. С. Файн.

**КЛЮЧЕВОЕ СЛОВО** — слово или устойчивое словосочетание естественного языка, используемое для выражения некоторого аспекта смыслового содержания документа (или запроса). При использовании метода координатного индексирования поисковые образы представляют собой множества К. с., которые в этом случае наз. также у н и т е р м а м и. Между К. с. могут иметь место отношения синонимии или условной смысловой эквивалентности, т. е. синонимии с точки зрения данной *информационно-поисковой системы*. Накопление К. с. путем содержательного анализа научно-тех. текстов или алгоритмически, напр., сравнением слов текста с фиксированным списком неключевых слов, является важным этапом при выборе исходной лексики дескрипторных языков *информационно-поисковых*; отобранные К. с. объединяются далее в *дескрипторы*. В дескрипторных словарях (информационно-поисковых *тезаурусах*) даются отсылки от К. с. к соответствующим дескрипторам. В настоящее время во многих научных журналах даются К. с. публикуемых в них статей.

Н. А. Куземская.

**КОБОЛ** — язык программирования, ориентированный на решение задач обработки данных. Запись алгоритма обработки данных, или программа, выглядит в этом языке как ряд предложений, составленных из англ. слов, напоминающих по форме англ. текст, благодаря чему можно легко овладеть правилами пользования языком (в СССР принят русский вариант языка). Программа обработки данных, называемая К.-программой, описывается в этом языке точно заданным, стандартизированным способом, что делает возможным автоматический перевод этой программы во внутренний язык любой машины, для которой составлена спец. программа, называемая К.-транслятором. 1-й вариант языка разработан представителями амер. фирм и опубликован в 1960, в 1961 опубликован 2-й вариант языка, в 1965 — 3-й — значительно расширенный вариант, а в 1968 — стандарт языка. Сущностью обработки данных, на которую ориентирован К., является многократное повторение однотипных операций над последовательными группами данных. Данные, подлежащие обработке, представляются в К. в виде входных массивов (исходные объекты обработки) и выходных массивов (результаты обработки). Массив состоит из некоторой совокупности *записей* и обычно хранится на магнитных лентах, дисках или на перфокартах. В начале массива записываются т. н. метки массива — этикетка, позволяющая отличить один массив от другого. За этикеткой следуют расположенные в определенном порядке записи массива, после последней из которых в массиве содержится указание о конце массива.

Программа в К. состоит из четырех разделов. 1-й раздел — о т о ж д е с т в л е н и я — содержит название программы и др. информацию, необходимую для ведения документации. 2-й раздел — о б о р у д о в а н и я —



определяет ЭВМ, на которой будет производиться трансляция К.-программы, и ЭВМ, на которой будет производиться счет по созданной транслятором рабочей программе. В этом же разделе определяются внешние устр-ва, на которых будет располагаться каждый из массивов. 3-й раздел — **д а н н ы х** — описывает форматы входных и выходных данных, подлежащих обработке, и способы организации данных в массивах.

По своему смыслу описание характеризует изображение данного на листе бумаги, а не способ размещения его в памяти машины, а именно: описывается, из каких знаков данное составлено (буквы, цифры и т. д.), сколько цифр содержится в числе, какова последовательность колонок в некоторой таблице, сколько в ней строчек, каков способ редактирования колонок, каково содержание колонок к моменту начала решения задачи и т. д. Формат отд. колонки таблицы задается с помощью т. н. шаблона — строки символов из определенного набора; каждый из символов набора имеет строго определенный смысл, напр., один из них обозначает вхождение буквы, другой — цифры, третий — положение десятичной точки, четвертый — правило редактирования данных и т. д.

Появление определенного символа в строке шаблона указывает, что на соответствующей позиции в данном расположен символ определенной категории (буква или цифра и др.) или что к символу на данной позиции следует применить определенное правило редактирования. Каждому отд. данному и каждой выделенной группе данных присваивается определенное название и т. н. номер уровня — двузначное число, с помощью которого задается упорядоченность данных в таблице. Для указания, что некоторое данное входит как составляющее в групповое данное, его описание помещают за описанием объемлющего его группового данного в пределах одной записи и присваивают ему номер уровня больший, чем номер уровня группового данного; каждой записи соответствует наименьший номер уровня 01, поскольку запись в К. есть наивысшая форма организации данных.

В секции массивов раздела данных описываются особенности массивов, используемых в задаче, — организация меток в массиве, группирование записей и типы записей, содержащихся в данном массиве. 4-й раздел — **п р о ц е д у р** — описывает действия, которые выполняются над данными при обработке. Каждое действие задается в форме оператора, состоящего из глагола, определяющего действие, и одного или более операндов — значений, названий (обозначений) данных, подвергающихся воздействию операторов. Группа последовательно записанных операторов, оканчивающаяся точкой, наз. **п р е д л о ж е н и е м**. Предложения объединяются в параграфы, которые, в свою очередь, могут объединяться в секции.

Программист присваивает параграфам и секциям названия (метки), которые позволяют

обратиться к соответствующему участку программы. В качестве операторов задаются следующие: 1) операторы ввода — вывода, обеспечивающие обмен информацией между внешней средой (перфокарты, магнитные ленты и др.) и внутренней памятью машины: **ОТКРЫТЬ** — подготавливает массив к работе; **ЧИТАТЬ** — переносит очередную запись входного массива из внешней среды в оперативную память, после чего она становится доступной для обработки; **ПИСАТЬ** — отправляет запись из оперативной памяти в выходной массив; **ЗАКРЫТЬ** — оканчивает обработку массива; **ПРИНЯТЬ** — запрашивает некоторую порцию информации; **ВЫДАТЬ** — выдает на пульт часть информации; 2) арифметич. операторы — выполняют отд. арифметич. действия (**СЛОЖИТЬ**, **ВЫЧЕСТЬ**, **УМНОЖИТЬ**, **РАЗДЕЛИТЬ**) или вычисляют по ф-ле (**ВЫЧИСЛИТЬ**); 3) оператор перемещения данных с одновременным редактированием передаваемого данного к формату принимающего поля (**ПОМЕСТИТЬ**); 4) оператор подсчета или замены вхождений определенного символа в данном (**ПРОСМОТРЕТЬ**); 5) оператор сортировки массива (**СОРТИРОВАТЬ**); 6) операторы управления последовательностью: **ПЕРЕЙТИ** — передает управление в указанную в операторе точку программы; **ИЗМЕНИТЬ** — изменяет указанную в программе последовательность выполнения операторов, заменяя название метки в операторе перехода; **ВЫПОЛНИТЬ** — позволяет в определенной точке программы выполнить некоторую группу операторов заданное к-во раз и затем продолжить выполнение программы от указанной точки в обычном порядке; **ЕСЛИ** — проверяет выполнение заданных условий и в зависимости от результата проверки устанавливает порядок выполнения операторов.

Для указания сведений о данных и действий над ними (названия свойств данных, операторов и т. д.) в язык К. введены т. н. зарезервированные слова (около 200 спец. слов), которые запрещено использовать как названия данных и процедур. К.-программа записывается на спец. бланках, где каждая строка бланка перфокартируется на отд. перфокарте. Раздел процедур и раздел отождествления не зависят от ЭВМ, на которой будет исполняться программа, раздел оборудования полностью определяется этой ЭВМ. В разделе данных лишь отд. фразы служат для более полного использования особенностей машины, а в остальном этот раздел также не зависит от ЭВМ реализации. Исходя из этого, пользователи ЭВМ различных классов могут легко обмениваться программами.

Применение языка К. упрощает подготовку задачи для ЭВМ и ее отладку, облегчает обучение программированию, позволяет вести строгую документацию программ в стандартизированной форме. Успех применения языка привел к разработке точного описания стандарта К. и особенностей реализации этого языка. В 1968 принят амер. стандарт языка К., основывающийся на языке в редакции



1965. Согласно этой редакции, язык имеет четко выраженную модульную структуру и состоит из т. н. ядра, содержащего средства для обработки данных во внутренней памяти машины, и семи модулей, каждый из которых реализует ту или иную функцию процесса обработки. К ним относятся: обработка таблиц (организует обращение к индивидуальным элементам из списка аналогичных элементов или из таблицы, все строки которой идентичны по форме); последовательная обработка записей из массива (включает описание средств организации массивов и операторы, организующие обработку данных последовательную записей из массива); произвольная обработка записей из массива (содержит описание организации массивов, размещенных в массовой памяти, и операторы, позволяющие осуществить обработку данных произвольную записей); сортировка данных (организует сортировку массивов); составление отчетов (содержит конструкции языка, которые позволяют задать формат страницы при выдаче данных, а также расположение выходных данных на печатной странице); сегментация программ (содержит указания, позволяющие сегментировать рабочую программу, составленную при трансляции К.-программы, если первая не помещается целиком в оперативную память); библиотека (содержит средства, позволяющие включать в К.-программу составленные ранее фрагменты, записанные в языке К.). В каждом из модулей выделен ряд уровней сложности, что позволяет разработчикам транслятора выбирать в качестве входного языка подмножество, соответствующее требованиям применения и возможностям оборудования, оставаясь в то же время в рамках стандарта. В Советском Союзе разработаны трансляторы с русского варианта языка К. для ряда отечественных машин.

Лит.: Ющенко Е. Л. [и др.]. КОБОЛ (Программированное учебное пособие). К., 1973; USA Standard COBOL. New York, 1968. Л. П. Бабенко.

**КОД** (от лат. *codex*) — универсальный способ отображения информации при ее хранении, передаче и обработке в виде системы соответствий между элементами сообщений и сигналами, при помощи которых эти элементы можно зафиксировать. Применяется для представления дискретной информации в линиях и каналах связи, системах автоматики, вычисл. устройствах и др. системах, используемых в различных областях техники. Отображение информации в виде К. широко используют и живые организмы.

Пусть дано  $m$ -во возможных элементов сообщений  $B = \{b_i\}$ , где  $i = 1, \dots, N$ , и некоторый алфавит  $A$  с символами  $a_j \in A$ , где  $j = 1, \dots, m$ . Конечная последовательность символов  $a_j$  наз. словом в данном алфавите.  $M$ -во слов в алфавите  $A$  наз. К., если оно поставлено во взаимно однозначное соответствие с  $m$ -вом  $B$ . Каждое слово, входящее в К., наз. кодовым словом (кодовой

комбинацией). Число символов в кодовом слове наз. длиной слова. Для записи кодовых символов  $a_j$  используются различные обозначения в виде цифр, букв и спец. знаков. Число различных значений  $m$ , которые может принимать каждый кодовый символ, наз. основанием К.

Кодовое слово  $k = (a_{n-1}, \dots, a_i, \dots, a_0)$  длины  $n$  при этом можно рассматривать как  $n$ -разрядное число в системе счисления с основанием  $m$ :

$$k = \sum_{j=n-1}^0 a_j m^j = a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_1 \times m + a_0.$$

Кодовые слова могут иметь одинаковую или различную длину. В соответствии с этим К. наз. равномерным или неравномерным.

Неравномерные К. применяют в системах кодирования, учитывающих статистические свойства сообщений с целью минимизации средней длины слова на элемент сообщения. Существуют эффективные методы кодирования информации, учитывающие их статистическую структуру (код Шеннона — Фано, код Хаффмена). Неравномерные К. широко применяют в телеграфии. Наиболее известным из этих К. является код Морзе, предназначенный для кодирования алфавитно-цифровой информации при передаче ее по телеграфным каналам. Особый класс среди неравномерных К. представляют К. без запятой (префиксные). Эти К. не требуют разделительных знаков между кодовыми словами и обладают свойством самосинхронизации, позволяющим однозначно разделять кодовые слова в последовательности сообщений.

Наибольшее распространение в системах обработки и передачи информации получили равномерные К. Основание К. в большинстве случаев равно двум (двоичные К.). Выбор такого основания обычно зависит от особенностей построения систем обработки и передачи информации, использующих дискретные элементы с двумя устойчивыми состояниями. Равномерные двоичные К. широко используются для представления входной информации ЦВМ и систем передачи и обработки данных. При вводе двоично-кодированной информации в ЦВМ для более компактной записи часто используют К., основания которых являются целой степенью числа 2 (восьмиричный, шестнадцатеричный). Удобством этих К. является простота преобразования в двоичный и обратно.

Для представления числовой информации в ЦВМ широкое распространение получили двоичные позиционные К. с естественным распределением весов разрядов  $2^{n-1}, \dots, 2^i, \dots, 2^0$  (где  $n$  — число разрядов). С целью упрощения алгоритмов выполнения арифм. операций с учетом знака и конечности разрядной сетки операндов применяются спец. К. для представления относительных чисел: прямой, обратный, дополнительный. Во всех

этих К. для представления знака используется спец. *знаковый разряд*.

В **п р я м о м** К. знак кодируется значением «0» для положительных чисел и «1» — для отрицательных чисел, а абсолютная величина числа представляется двоичным позиционным К. Прямой К. удовлетворяет требованию автомат. получения знака произведения и частного и удобен при выполнении операций умножения и деления. Однако он не обеспечивает замену вычитания чисел сложением их кодов, и это затрудняет его использование при выполнении операций сложения и вычитания. Указанного недостатка лишены обратный и дополнительный К., отличающиеся от прямого К. лишь способом представления отрицательных чисел.

**О б р а т н ы й** К. отрицательного числа образуется путем замены каждой двоичной цифры положительного числа того же абсолютного значения, а именно «0» на «1», а «1» на «0». Если при суммировании чисел в обратном К. сумма изображений выходит за пределы диапазона представления чисел, необходимо из суммы вычесть число, кратное  $(2^n - 1)$ . С этой целью при суммировании обратных К. выполняется циклический перенос из старшего разряда в младший. Циклический перенос несколько усложняет операцию сложения чисел, т. к. при переходе через нуль необходим один лишний такт суммирования. Достоинством обратных К. является простая связь их с прямыми, поскольку преобразование прямой К. — обратный К. и наоборот является поразрядной операцией.

В **д о п о л н и т е л ь н о м** К. для представления отрицательного числа используется дополнение положительного числа той же абс. величины до модуля  $2^n$ . Преимуществом дополнительного К. перед обратным является упрощение операции суммирования относительных чисел, т. к. при суммировании дополнительных К. не требуется циклический перенос в *сумматоре*. Преобразования прямого К. в дополнительный и обратно не являются поразрядными операциями и включают в себя наряду с логической операцией инвертирования числа также операцию сложения с единицей в младшем разряде. Описанные способы кодирования чисел легко обобщаются и на случай К. с основанием, отличным от 2.

Наряду с двоичными позиционными К. в ЦВМ широко применяют и двоично-десятичные К. В этих К. каждая десятичная цифра представляется в некотором двоичном К. Наиболее распространено кодирование десятичной цифры четырьмя двоичными (тетрадой). Применяют несколько систем кодирования десятичных цифр двоичными тетрадами: К. «8, 4, 2, 1», К. «2, 4, 2, 1», К. «7, 4, 2, 1», К. с избытком 3 и др. К. «8, 4, 2, 1» является естественным представлением десятичных цифр в двоичной системе, т. к. именно такими являются естественные веса двоичных разрядов в позиционном двоичном К. Остальные К. также являются взвешенными, однако отличаются весами раз-

рядов, и благодаря этому возникают некоторые новые свойства. Так, К. «2, 4, 2, 1» (код Айкена) обладает свойством дополнения до 9, что упрощает выполнение в этом К. арифм. операций над относительными числами. Аналогичным свойством обладает и К. с избытком 3 (код Скибитца), значения чисел в котором сдвинуты на 3 по отношению к естественному К. «8, 4, 2, 1». К. «7, 4, 2, 1» интересен тем, что тетрады в нем содержат не более двух единиц. Применяют и двоично-десятичные К., в которых каждая десятичная цифра кодируется пятью и более двоичными. Избыточность таких К. можно использовать для контроля и коррекции передачи и обработки данных. Наиболее известным К. этого класса является К. «2 из 5», в котором каждая кодовая комбинация содержит две единицы и три нуля. К. «2 из 5» позволяет обнаруживать многие характерные ошибки при представлении числа (см. *Коды корректирующие*). Подобные свойства имеют и двоично-десятичный К. «с избытком 11», и К. «3а+2» (код Даймонда), обладающие, кроме того, свойствами дополнения и в этом смысле эти коды аналогичны К. «с избытком 3».

Помимо позиционных систем представления чисел существуют также **н е п о з и ц и о н н ы е** (с и м в о л и ч е с к и е) системы. Одной из наиболее исследованных непозиционных систем является система счисления остаточных классов (ССОК). Число  $N$  в ССОК представляется в виде упорядоченного набора остатков (вычетов) по взаимно простым основаниям  $p_1, \dots, p_i, \dots, p_n: N \infty (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ , где  $\alpha_i$  — наименьший вычет  $N$  по модулю  $p_i$ . Система оснований  $p_1, \dots, p_i, \dots, p_n$  определяет диапазон представления чисел  $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ . Важной особенностью ССОК является то, что рациональные арифм. операции (сложение, вычитание и умножение) в этой системе производятся независимо по каждому основанию, и это позволяет существенно увеличить скорость выполнения этих операций. Другим преимуществом ССОК является удобство выполнения операций с контролем и коррекцией результата, т. к. ошибки локализованы в пределах оснований. Коды корректирующие в ССОК можно получить за счет расширения системы оснований включением в нее специально подобранных контрольных оснований. Осн. недостатком ССОК являются трудности выполнения операций, требующих знания позиционных характеристик чисел (определение знака, положения числа в диапазоне, переполнения и т. п.), а также трудности представления чисел с плавающей запятой.

Другим известным классом К., использующим непозиционную систему представления чисел, являются **р е ф л е к с н ы е** К., характерным среди которых является код Грея. В коде Грея комбинации, представляющие соседние по величине числа, отличаются лишь в одной кодовой позиции. Такие К. хорошо удовлетворяют требованиям аналогово-цифрового преобразования, устраняя неоднозначность считывания величины угла в преобразо-

вателях с кодирующими дисками и сводя к минимуму возможные ошибки преобразования. Кодовые позиции числа в коде Грея связаны с соответствующими позициями этого числа в естественном двоичном К. соотношением:  $\gamma_i = (a_{i+1} \oplus a_i)$ , где  $(\gamma_n, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_1)$  — представление числа  $N$  в коде Грея;  $(a_n, \dots, a_i, \dots, a_1)$  — представление числа  $N$  в естественном двоичном К.;  $\oplus$  — операция суммирования (сравнения) по модулю 2. Недостатком кода Грея является сложность выполнения в нем арифм. операций, поэтому при вводе в ЦВМ он обычно преобразуется в позиционный К.

В системах автоматики и специализированных вычисл. устр-вах применяют и не двоичные К. В таких кодах каждый кодовый символ может принимать  $m$  различных значений, что позволяет более экономно кодировать сообщения. Причинами, затрудняющими использование не двоичных систем кодирования, являются технические трудности построения элементов, способных надежно хранить и обрабатывать информацию, представленную числом состояний, больше двух. Соответственно усложняются также логические и арифм. операции в не двоичных К. Однако в некоторых случаях такие системы целесообразны с точки зрения оптимизации к-ва используемого оборудования.

Лит.: Карцев М. А. Арифметика цифровых машин. М., 1969 [библиогр. с. 559—575]; Супрун Б. А. Первичные коды. М., 1970 [библиогр. с. 155—161]; Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 [библиогр. с. 783—820]. О. М. Рязкин.

**КОД СЕМАНТИЧЕСКИЙ** — знак информационного языка, представляющий собой (в отличие от дескриптора в узком смысле слова) производную единицу, которая состоит из более простых единиц — семантических множителей. К. с. обеспечивает аналитическое задание *отношений парадигматических* (а в некоторых языках и синтагматических). К. с. применяется обычно в информационных языках, передающих разнообразные парадигматические отношения между словами (подкласс 3.3 парадигматической классификации — см. *Язык информационно-поисковый*). К. с. является в известном смысле аналогом сложного слова естественного языка, отражая явным образом некоторые связи между понятиями. Это позволяет на формальном уровне выявлять общность и различие между объектами, описанными при помощи К. с. Напр., в языке системы «БИТ» К. с.  $R_{001}X_{401}R_{202}X_{306}R_{202}X_{506}$  имеет значение «самолет», а  $R_{001}X_{401}R_{202}X_{306}R_{202}X_{507}$  — «вертолет». Здесь буквы  $X$  — семантические множители, а  $R$  — символы, указывающие на наличие определенного парадигматического отношения между К. с. в целом и соответствующим семантическим множителем. Первый код интерпретируется следующим образом: «вид ( $R_{001}$ ) летательного аппарата тяжелее воздуха ( $X_{401}$ ), имеющий ( $R_{202}$ ) силовую установку ( $X_{306}$ ) и крыло ( $X_{506}$ )», второй — «вид летательного аппарата тяжелее воздуха, имеющий силовую установку и несущий винт ( $X_{507}$ )».

Э. Ф. Скоросходько.

**КОДИРОВАНИЕ АВТОМАТНОЕ** — кодирование, описываемое с помощью обобщенного конечного автомата, выход которого в каждый момент времени есть некоторое, быть может, пустое слово в выходном алфавите. Большинство задач теории кодирования укладывается в следующую схему: рассматривается класс автоматных кодирований, обладающих определенными свойствами; требуется построить кодирование из рассматриваемого класса, оптимальное в некотором заранее заданном смысле. Обычно критерий оптимальности кодирования так или иначе связан с минимизацией длин выходных слов, в то время как требуемые свойства кодирования могут быть весьма разнообразными. Такими свойствами могут быть существование однозначного обратного отображения (декодирования), возможность исправления при декодировании ошибок различного типа, возможность простой тех. реализации кодирования и декодирования и т. п.

Основы кодирования теории заложил амер. ученый К.-Э. Шеннон (р. 1916). Наиболее полно исследованы К. а. с одним состоянием, называемые алфавитными кодированиями. При алфавитном кодировании  $\phi$  каждой букве  $a_i$  входного алфавита  $A_m = \{a_1, \dots, a_m\}$  ставится в соответствие некоторое слово  $v_i = \phi(a_i)$  в выходном алфавите  $B_r = \{b_1, \dots, b_r\}$ . Произвольное входное слово (сообщение)  $a_{i_1} \dots a_{i_n}$  отображается в слово  $\phi(a_{i_1} \dots a_{i_n}) = \phi(a_{i_1}) \dots \phi(a_{i_n}) = v_{i_1} \dots v_{i_n}$  в алфавите  $B_r$ . Мн-во  $V_\phi = \{v_1, \dots, v_m\}$  наз. кодом.

Код  $V_\phi$  наз. разделимым, если из любого равенства  $v_{i_1} \dots v_{i_n} = v_{j_1} \dots v_{j_l}$  в алфавите  $B_r$  следует, что  $l = n$  и  $i_t = j_t$ ,  $t = 1, \dots, n$ . Разделимость кода  $V_\phi$  равносильна взаимной однозначности алфавитного кодирования  $\phi$ . В частности, код является разделимым, если никакое кодовое слово не является началом другого. Такие коды (и соответствующие им алфавитные кодирования) наз. префиксными. Существуют разделимые, но не префиксные коды. Для любого разделимого кода  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$  в алфавите  $B_r$  выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^m r^{-l_i} \leq 1, \quad (1)$$

где  $l_i$  — длина слова  $v_i$ . Справедливо и обратное: если  $(l_1, \dots, l_m)$  — набор целых положительных чисел, для которых выполняется приведенное выше неравенство, то в алфавите  $B_r$  существует префиксный код  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ , в котором слово  $v_j$  имеет длину  $l_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Если числа  $l_j$  упорядочены по возрастанию, то, согласно Шеннону, в качестве слова  $v_j$  можно взять первые после запятой  $l_j$  символов

разложения числа  $\sum_{i=1}^{j-1} r^{-li}$  в бесконечную  $r$ -ичную дробь. Код  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$  наз. **сильно разделимым**, если из любого равенства  $v_{i_1} v_{i_2} \dots = v_{j_1} v_{j_2} \dots$  бесконечных последовательностей в  $B_r$  следует, что  $i_t = j_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$ . Простейшим примером разделимого, но не сильно разделимого кода является код  $\{0, 01, 11\}$ . Автомат  $\mathfrak{B}$  со входным алфавитом  $B_r$  и выходным  $A_m$  наз. **декодирующим** для алфавитного кодирования  $\varphi$ , если существует такое число  $t$ , что автомат  $\mathfrak{B}$  выдает каждое слово  $a_{i_1} \dots a_{i_n}$  через  $t$  тактов после того, как в него поступило слово  $\varphi(a_{i_1} \dots a_{i_n})$ .

Для алфавитного кодирования  $\varphi$  существует декодирующий автомат тогда и только тогда, когда код  $V_\varphi$  является сильно разделимым. Код  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$  наз. **вполне разделимым**, если в алфавите  $B_r$  невозможны равенства вида  $\beta v_{i_1} \dots v_{i_k} = v_{j_1} \dots v_{j_l} \beta$ , где  $\beta$  — непустое начало слова  $v_{j_1}$ , отличное от  $v_{j_1}$ . Для алфавитного кодирования  $\varphi$  существует дефинитный декодирующий автомат тогда и только тогда, когда код  $V_\varphi$  является вполне разделимым. Автомат дефинитный позволяет в течение ограниченного времени устранить влияние сбоев во входной последовательности или в работе самого автомата. Для распознавания указанных свойств кода  $V = \{v_1, \dots, v_m\}$  строится вспомогательный граф, вершины которого — непустые слова, являющиеся и началами, и окончаниями некоторых кодовых слов. При этом вершина  $\beta$  соединяется с  $\beta'$  ребром, направленным от  $\beta$  к  $\beta'$ , если существует кодовое слово  $v_i$  такое, что  $\beta = v_i \beta'$  или  $v_i = \beta \beta'$ . Построение завершается объединением всех вершин, соответствующих кодовым словам, в одну общую вершину, обозначаемую символом  $\Lambda$ . Код  $V$  является: 1) разделимым, 2) сильно разделимым или 3) вполне разделимым тогда и только тогда, когда в построенном графе нет соответственно: 1) ориентированных циклов, проходящих через вершину  $\Lambda$ ; 2) ориентированных циклов, в которые можно попасть из вершины  $\Lambda$ ; 3) никаких ориентированных циклов.

Наиболее законченные результаты в теории кодирования связаны с построением кодов, обладающих миним. избыточностью при заданных значениях свободных параметров. Предложенные конструкции используются на практике при сжатии информации и выборке её из памяти. В простейшем варианте задачи предполагается, что последовательные появления букв входного алфавита  $A_m = \{a_1, \dots, a_m\}$  статистически независимы и подчинены некоторому распределению вероятностей  $P = \{p_1, \dots, p_m\}$  ( $p_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ ).

Каждое К. а. ф характеризуется средним числом  $L_\varphi(P)$  букв выходного алфавита  $B_r$ , приходящихся на одну букву входного алфавита  $A_m$ . Для алфавитного кодирования  $L_\varphi(P) = \sum_{i=1}^m p_i l_i$ , где  $l_i$  — длина слова  $\varphi(a_i)$  в алфавите  $B_r$ . Если К. а. ф является взаимно однозначным, то  $L_\varphi(P) \geq H_r(P) = \sum_{i=1}^m p_i \log_r \frac{1}{p_i}$ .

Величина  $I_\varphi(P) = L_\varphi(P) - H_r(P)$  наз. **избыточностью кодирования  $\varphi$  при распределении  $P$** . Задача состоит в отыскании в заданном классе взаимно однозначных кодирований кодирования, обладающего миним. избыточностью. Так как при  $l_i = \lceil \log_r \frac{1}{p_i} \rceil$  выполняется неравенство (1), то

по методу Шеннона можно построить алфавитное префиксное кодирование с избыточностью, меньше единицы (здесь и далее  $\lfloor x \rfloor$  — наименьшее целое, не меньше числа  $x$ , а  $\lceil x \rceil$  — целая часть числа  $x$ , т. е. наибольшее целое, не превышающее числа  $x$ ).

Одним из осн. достижений теории кодирования является метод Хаффмена построения префиксного алфавитного кодирования, имеющего миним. избыточность в классе всех взаимно однозначных алфавитных кодирований. Существенного уменьшения избыточности можно достичь, разбивая сообщения на блоки длины  $k$  и используя алфавитное кодирование  $\varphi_k$  этих  $m^k$  блоков. Методами Шеннона или Хаффмена можно построить префиксное кодирование  $\varphi_k$  блоков длины  $k$  такое, что

$I_{\varphi_k}(P) < \frac{1}{k}$ , причем эта оценка не может быть улучшена по порядку (при  $k \rightarrow \infty$ ) ни для какого распределения  $P$ , кроме распределения, при котором все числа  $\log_r \frac{p_i}{p_j}$ ,  $1 \leq i <$

$< j \leq m$ , являются целыми. Методы Шеннона и Хаффмена применимы в том случае, когда известно **распределение вероятностей**. Для случая неизвестных вероятностей доказано, что существует префиксное кодирование  $\varphi_k$  блоков длины  $k$  такое, что для любого распределения вероятностей  $P$  имеет место  $I_{\varphi_k}(P) <$

$\frac{(m-1) \log_r k + c}{2k}$ , где  $c$  — некоторая величина, не зависящая от  $k$ . С другой стороны,

установлено, что для любого префиксного кодирования  $\varphi_k$  блоков длины  $k$  существует распределение  $P$  такое, что  $I_{\varphi_k}(P) >$

$\frac{(m-1) \log_r k - d}{2k}$ , где  $d$  — некоторая величина, не зависящая от  $k$ .

Большинство работ, относящихся к теории кодирования, посвящено задаче построения

кодов, допускающих исправление ошибок (см. Коды корректирующие). Были исследованы преимущественно т. н. блочные коды, являющиеся подмножествами мн-ва  $B_r^n$  всех слов длины  $n$  в алфавите  $B_r = \{0, 1, \dots, r-1\}$ . При этом оказалось удобным рассматривать алфавит  $B_r$  как кольцо вычетов по  $\text{mod } r$  или как поле Галуа  $GF(r)$ , если  $r$  является степенью простого числа, а мн-во  $B_r^n$  рассматривать как  $n$ -мерное векторное пространство над  $B_r$ . Код  $V \subset B_r^n$  наз. линейным, если он образует линейное подпространство размерности  $k$  в пространстве  $B_r^n$ . Под ошибкой типа замещения (или просто ошибкой) понимается случайный переход одной буквы алфавита  $B_r$  в другую. В пространстве  $B_r^n$  вводится метрика Хемминга, как число координат, в которых два вектора различаются, или, что то же самое, как миним. число ошибок, переводящих один вектор в другой. Каждый код  $V \subset B_r^n$  характеризуется параметрами:  $n$  — длина кода,  $r$  — основание кода,  $m$  — число векторов кода,  $k$  — размерность линейного кода и  $d$  — кодовое расстояние, равное минимуму расстояний между различными векторами кода. Имеется возможность исправить  $t$  или менее ошибок в каждом векторе, принадлежащем коду  $V$ , тогда и только тогда, когда  $d \geq 2t + 1$ . Избыточность алфавитного кодирования с помощью кода  $V \subset B_r^n$  (при равновероятных входных буквах) характеризуется величиной  $n - \log_r m$ . Поэтому при построении кода с заданным числом исправляемых ошибок желательно минимизировать длину  $n$  и максимизировать число элементов  $m$  (или размерность  $k$  в случае линейных кодов). Код, обладающий макс. числом элементов при заданных значениях остальных параметров, наз. **максимальным**.

Примером кодов для исправления одиночных ошибок являются двоичные линейные коды Хемминга

$$H_n = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in B_2^n, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \alpha_i (\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \dots, \sigma_l^{(i)}) = (0, 0, \dots, 0) \right\},$$

где  $l = [\log_2 n] + 1$  и  $(\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \dots, \sigma_l^{(i)})$  — вектор из 0 и 1, являющийся двоичной записью числа  $i$ , т. е. такой, что  $\sum_{j=1}^l \sigma_j^{(i)} 2^{l-j} = i$ .

Коды  $H_n$  обладают параметрами:  $n$  — любое,  $r = 2$ ,  $k = n - [\log_2 n] - 1$ ,  $d = 3$ .

Вслед за кодами Хемминга были предложены двоичные линейные коды Рида — Маллера порядка  $h$ , которые можно определить как мн-во столбцов значений функций алгебры логики от  $l$  переменных, которые представимы полиномами степени не выше  $h$ . Эти коды

обладают параметрами:  $n = 2^l$ ,  $r = 2$ ,  $d = 2^{l-h}$ ,  $k = \sum_{i=0}^h C_l^i$  и допускают мажоритарный способ исправления  $2^{l-h-1} - 1$  ошибок.

Существенный прогресс в построении корректирующих кодов связан с дальнейшей алгебраизацией пространства  $B_r^n$  в том случае, когда  $r$  является степенью простого числа (в этом случае вместо  $r$  будем писать  $q$ ). Если каждому вектору  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  над полем Галуа из  $q$  элементов  $GF(q)$  поставить в соответствие полином  $\alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$ , то всякий линейный код в  $B_q^n$  можно рассматривать как подпространство в алгебре полиномов по модулю  $x^n - 1$ . Код наз. **циклическим**, если он вместе с каждым вектором содержит все его циклические сдвиги. Линейный код является циклическим тогда и только тогда, когда он образует идеал в алгебре полиномов по модулю  $x^n - 1$ . Т. о., каждый линейный циклический код (ЛЦ код) размерности  $k$  можно рассматривать как мн-во всех полиномов, кратных в алгебре полиномов по модулю  $x^n - 1$  некоторому полиному  $g(x)$  над  $GF(q)$  степени  $n - k$ . Полином  $g(x)$  наз. **порождающим полиномом кода**.

Плодотворным оказался метод построения ЛЦ кодов, основанный на задании корней порождающего полинома, лежащих в некотором расширении поля  $GF(q)$ . В частности, ЛЦ коды Боуза — Чоудхури — Хоквингема (БЧХ коды) для исправления  $t$  ошибок на длине  $n = q^l - 1$  определяются с помощью порождающего полинома, который имеет среди своих корней  $\xi, \xi^2, \dots, \xi^{2t}$ , где  $\xi$  — первообразный элемент поля  $GF(q^l)$ . БЧХ коды обладают параметрами:  $n = q^l - 1$ ,  $r = q$ ,  $d \geq 2t + 1$  и  $k \geq n - \left( 2t - \left\lfloor \frac{2t}{l} \right\rfloor \right) l$ , если  $l > 1$ , или  $k = n - 2t$ , если  $l = 1$ . При  $l = 1$  эти коды (называемые кодами Рида — Соломона) максимальны при любом  $t$ , а при  $q = 2$  и  $t = 1$  они являются циклическими аналогами макс. кодов Хемминга длины  $n = 2^l - 1$ .

Циклические аналоги кодов Рида — Маллера (ЦРМ коды) порядка  $h$  с длиной  $n = q^l - 1$  определяются с помощью порождающего полинома, который имеет в качестве своих корней все степени  $\xi^j$  первообразного элемента  $\xi$  поля  $GF(q^l)$  такие, что сумма цифр в  $q$ -ичном представлении числа  $j$  меньше  $(q - 1)l - h$ . Эти коды имеют параметры:

$$n = q^l - 1, \quad r = q, \\ d = \left( q - h + (q - 1) \left\lfloor \frac{h}{q - 1} \right\rfloor \right) \times \\ \times q^{l-1 - \left\lfloor \frac{h}{q-1} \right\rfloor};$$

$$k = \sum_{i=1}^h T(i, l, q),$$

где  $T(i, l, q)$  — число упорядоченных разбиений числа  $i$  на  $l$  целых неотрицательных слагаемых, каждое из которых не превышает  $q - 1$ . В частности, ЦРМ код 1-го порядка имеет параметры:  $n = q^l - 1$ ,  $r = q$ ,  $d = (q - 1)q^{l-1}$ ,  $k = l$  и является максимальным.

Квадратично-вычетными кодами (КВ кодами) наз. двоичные ЛЦ коды простой длины  $n$ , где  $n \equiv \pm 1 \pmod{8}$ , порождающий полином которых имеет корни  $\xi^j$ , где  $\xi$  — первообразный корень степени  $n$  из единицы, а  $j$  — квадратичный вычет по  $\text{mod } n$ . Размерность КВ

кодов равна  $k = \frac{n+1}{2}$ , а кодовое расстояние

нечетно и удовлетворяет неравенствам  $d^2 > n$ , если  $n \equiv 1 \pmod{8}$  и  $d(d-1) \geq n-1$ , если  $n \equiv -1 \pmod{8}$ . Отметим также двоичные линейные (но не циклические) коды длины  $n = 2^l$  для исправления  $t$  ( $t \geq 2$ ) ошибок, которые определяются с помощью некоторого первообразного элемента  $\xi$  поля  $GF(2^{lt})$  и различных элементов  $\eta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2^l$ ) поля

$GF(2^l)$  следующим образом:  $G_n = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \dots$

$\dots, \alpha_n) \in B_2^n, \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\xi - \eta_i} = 0 \text{ в } GF(2^{lt}) \right\}$ . Ко-

ды  $G_n$  обладают параметрами  $n = 2^l$ ,  $r = 2$ ,  $k \geq n - lt$ ,  $d \geq 2t + 1$  и принадлежат широкому классу линейных кодов.

Для выяснения вопроса о том, насколько те или иные коды близки к максимальным, разработаны оригинальные методы получения оценок допустимых параметров кодов. В частности, для кодов, исправляющих  $t$  ошибок, установлена граница плотной упаковки

$$m \leq \frac{r^n}{\sum_{i=0}^t C_n^i (r-1)^i},$$

которая достигается при  $r = q$ ,  $t = 1$ ,  $n = \frac{q^l - 1}{q - 1}$  ( $l = 1, 2, \dots$ ), а также при  $r = 2$ ,

$n = 2t + 1$ . Кроме того, доказано, что эта граница при  $r = q$  достигается еще лишь для КВ кода  $r = 2$ ,  $n = 23$ ,  $t = 3$ , а также для кода с параметрами  $r = 3$ ,  $n = 11$ ,  $t = 2$ . В случае, когда число  $t$  исправляемых ошибок достаточно мало по сравнению с  $n$ , параметры двоичных БЧХ кодов достаточно близки к границе плотной упаковки. Однако, для кодов, исправляющих фиксированную долю

$\mu = \frac{t}{n}$  ошибок, существенно более сильной (при условии  $\mu < \frac{r-1}{2r}$ ) является верхняя

граница

$$m \leq \frac{(2t+1)r^n}{\sum_{i=0}^s C_n^i (r-1)^i}, \quad (2)$$

где  $s = \left\lceil \frac{r-1}{r} n \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2rt}{(r-1)n}} \right) \right\rceil$ .

Наилучшие коды для исправления фиксированной доли ошибок можно построить методом перебора, их параметры удовлетворяют границе

$$m \geq \frac{r^n}{\sum_{i=0}^{d-1} C_n^i (r-1)^i}, \quad (3)$$

а в случае линейных кодов — границе

$$k \geq \left\lceil \log_q \frac{q^n}{1 + \sum_{i=0}^{d-2} C_{n-1}^i (q-1)^i} \right\rceil.$$

Сближение границ (2) и (3) является одной из осн. нерешенных задач теории кодирования.

Параметры кодов для исправления большого числа ошибок удовлетворяют границе

$m \leq \frac{rd}{rd - (r-1)n}$ , если  $\frac{r-1}{r} < \frac{d}{n} \leq 1$ ,

которая достигается для широкого класса кодов, в частности, ЦРМ кодов 1-го порядка. Для произвольных линейных кодов справед-

лива оценка  $\sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{q^i} \right\rceil \leq n$ , причем для любых

$n$  и  $d$  таких, что  $\frac{q-1}{q} \leq \frac{d}{n} \leq 1$ , существует

линейный код с параметрами  $q$ ,  $n$  и  $d$ , размерность которого равна наибольшему  $k$ , удовлетворяющему этому неравенству.

Наряду с задачей исправления заданного числа ошибок исследовали задачу исправления пачек ошибок длины  $b$ , т. е. ошибок типа замещения, происходящих в пределах отрезка из  $b$  последовательных символов, а также задачу исправления ошибок других типов. Среди осн. результатов, полученных в этих направлениях, отметим следующие. Если  $f(x)$  — неприводимый многочлен степени  $l$  над  $GF(q)$ , порядок корней которого равен  $s$ , а  $h$  — любое целое, которое не делится на  $s$ , то ЛЦ код в  $B_q^n$ , где  $n = \text{н. о. к.}(s, h)$ , с порождающим полиномом  $f(x)(x^h - 1)$  имеет размерность  $k = n - h - l$  и позволяет исправить любую пачку ошибок длины  $b = \min\left(l, \left\lfloor \frac{h+1}{2} \right\rfloor\right)$ .

Двоичный код

$$U_n = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in B_2^n, \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot 2^{n-i} \equiv 0 \pmod{(2n+1)} \right\}$$



позволяет, когда  $(2n + 1)$  — простое число и 2 или  $-2$  является первообразным корнем по  $\text{mod } 2n + 1$ , исправить любую одиночную арифм. ошибку, состоящую в изменении на  $\pm 2^i$  ( $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ) числового значения кодового вектора. Двоичный код

$$W_n = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in B_2^n, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \alpha_i i \equiv 0 \pmod{(n+1)} \right\}$$

позволяет исправить любую одиночную несимметричную ошибку типа замещения (напр., замену символа 0 символом 1), а также исправить любую одиночную ошибку типа выпадения (или вставки) символа, сопровождающуюся уменьшением (соответственно увеличением) на единицу длины вектора. Коды  $U_n$  и  $W_n$  близки к максимальным в классе кодов, исправляющих одиночные ошибки указанных типов. Практическое использование кодов с исправлением ошибок затруднено тем, что стремление к уменьшению избыточности кодов, как правило, приводит к увеличению сложности алгоритма декодирования с исправлением ошибок. Это обстоятельство послужило толчком для глубокого исследования возможных алгоритмов декодирования известных кодов с целью упрощения их.

Велико влияние теории кодирования на решение других задач кибернетики. Известны примеры, когда использование тех или иных кодовых конструкций приводило к существенному продвижению в вопросах, на первый взгляд весьма далеких от традиционных задач теории кодирования. Следует указать на использование кода Хемминга при получении асимптотики миним. числа контактов, достаточного для реализации любой функции алгебры логики от  $n$  переменных; на использование неравенства (1) при оценке сложности реализации формулами одного класса функций алгебры логики; на использование кодов с равными расстояниями между векторами для помехоустойчивого кодирования состояний автомата асинхронного и др. Задачи синтеза самокорректирующихся схем контактных и самокорректирующихся схем из функциональных элементов также подсказаны теорией кодирования, причем при построении асимптотически оптимальных самокорректирующихся схем из функциональных элементов использованы коды для исправления ошибок.

Лит.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 [библиогр. с. 783—820]; Питерсон У. Коды, исправляющие ошибки. Пер. с англ. М., 1964 [библиогр. с. 309—316]; Берлекэмп Э. Алгебраическая теория кодирования. Пер. с англ. М., 1971 [библиогр. с. 449—460].

В. И. Левенштейн.

**КОДИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ АВТОМАТА** — установление соответствия между состояниями автомата и наборами значений кодирующих их переменных. К. с. а. — один из этапов синтеза автоматов структурного.

Каждой кодирующей переменной соответствует элементарный автомат композиции, которая реализует (или должна реализовать) исходный абстрактный автомат. Мн-во значений каждой кодирующей переменной совпадает с мн-вом состояний соответствующего элементарного автомата. Количество кодирующих переменных (количество элементарных автоматов) определяет длину кода. Задача К. с. а. состоит в отыскании такого кодирования, которое удовлетворяло бы некоторым заданным условиям. Эти условия, напр., могут выражать ограничения, накладываемые физ. особенностями элементарных автоматов, требованиями надежности схемы и т. п. Наиболее распространенным является двоичное кодирование. В этом случае кодирующие переменные принимают значения во мн-ве, состоящем из двух элементов (двоичный структурный алфавит), а элементарные автоматы имеют по два состояния.

В качестве конкретных примеров задач кодирования можно назвать: задачу противогоночного кодирования, задачу монотонного кодирования и задачу экономичного кодирования состояний. Условия противогоночного кодирования запрещают возникновение гонок в структурном автомате и выражаются в том, что различие во временах переключения элементарных автоматов не должны влиять на результат при переходе из одного состояния в другое. Монотонное кодирование требует монотонности ф-ций возбуждения структурного автомата. Задача экономичного кодирования состоит в отыскании такого кодирования, которое бы минимизировало функционал аппаратных затрат в реализации структурного автомата. Т. к. для некоторых автоматов невозможно найти кодирование, удовлетворяющее заданным условиям, задача кодирования тесно связана с задачей отыскания достаточных условий существования кодирования с заданными свойствами и алгоритмов проверки этих условий. Проверка существования и отыскание нужного кодирования, как правило, связаны с перебором и имеют характер последовательного анализа вариантов кодирования. В виду трудоемкости этих задач при их решении приходится пользоваться ЦВМ.

Лит.: Мацевитый Л. В., Денисенко Е. Л. О кодировании внутренних состояний некоторых многотактных устройств. «Кибернетика», 1966, № 1; Лазарев В. Г., Пийль Е. И. Синтез управляющих автоматов. М., 1970 [библиогр. с. 392—398].

Ю. В. Капитанова.

**КОДИРОВАНИЯ ТЕОРИЯ** — раздел информатической теории, изучающий способы отождествления сообщений с отображающими их сигналами. Кодирование широко применяется при передаче, хранении и переработке информации в различных системах. Задачей К. т. является наилучшее в некотором смысле согласование источника информации с каналом связи (например, обеспечение максимальной скорости передачи для заданных статистических характеристик сообщений либо обеспечение заданной помехоустойчивости при заданных характеристиках помех в канале, либо обеспе-

чение максимальной скорости переработки информации при арифм. операциях и др.). В соответствии с принятым критерием оптимизации различают несколько направлений в К. т. Наиболее известными из них являются статистическое кодирование и помехоустойчивое кодирование. Объектами кодирования могут быть как дискретные (более развиты), так и непрерывные сообщения. Процесс передачи дискретных сообщений в системе связи схематично можно представить следующим образом. Источник дискретной информации случайным образом выбирает сообщение  $X_k$  из фиксированного множества  $M_1$ . В канал связи поступает сложный сигнал  $Y_k$ , заранее выбранный из мн-ва  $M_2$ . В канале связи сигнал  $Y_k$  под воздействием помех трансформируется в случайный сигнал  $Z$ . После получения его на выходе приемного устр-ва образуется сигнал  $Y_f$ , принадлежащий мн-ву  $\tilde{M}_2$  выходных сложных сигналов. На основании анализа сигнала  $Y_f$  принимается решение об отождествлении его с одним из сообщений  $X_l$ , принадлежащих мн-ву  $M_1$ . Если  $X_l = X_k$ , то переданное сообщение принято правильно. Начала К. т. заложил в 1948 амер. математик К.-Э. Шеннон (р. 1916). Им сформулированы и доказаны два основных результата, которые определили развитие К. т. в последующие годы. Один из них утверждает, что для случая канала без помех возможно осуществить кодирование дискретных сообщений таким образом, чтобы среднее количество двоичных знаков на элемент алфавита  $A$  было как угодно близко, но не менее некоторой величины  $H$  ( $H$  — энтропия источника информации), определяемой статистическими свойствами источника. Указанное кодирование получило название статистического (эффективного).

Допустим, что мн-во  $M_1$  содержит 4 независимых элемента:  $m_1, m_2, m_3$  и  $m_4$  с вероятностями появления их соответственно  $p_1 = 0,5$ ;  $p_2 = 0,25$ ;  $p_3 = p_4 = 0,125$ . Осуществим преобразование сообщений в сложный двоичный сигнал следующим образом:  $m_1 \leftrightarrow 00$ ;  $m_2 \leftrightarrow 01$ ;  $m_3 \leftrightarrow 10$ ;  $m_4 \leftrightarrow 11$ . Если пропускная способность канала связи  $C = 1000$  двоичных единиц в секунду (*битов*), то на передачу одного элемента сообщения требуется два двоичных символа (0 либо 1), а число элементов, передаваемых в секунду, равно 500. Число двоичных знаков, необходимых для передачи сообщения, напр., из  $N = 10\,000$  элементов, равно  $H = 20\,000$ . Приведенный способ кодирования сообщений  $m_1 \div m_4$  не является оптимальным (наилучшим в смысле приближения скорости передачи к максимально возможной). Для построения оптим. кода необходимо учесть статистическую структуру источника сообщений. Применим следующий способ кодирования:  $m_1 \leftrightarrow 0$ ;  $m_2 \leftrightarrow 10$ ;  $m_3 \leftrightarrow 110$ ;  $m_4 \leftrightarrow 111$ . В этом случае средняя длина закодированной последовательности из  $N$  элементов ( $N$  — большое число) равна  $(1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 3 \cdot p_4) = 1,75 N$ . Если  $N = 10\,000$

элементов, то длина закодированного сообщения равна 17 500 двоичных знаков, т. е. она меньше, чем в предыдущем случае. Можно показать, что это значение является минимально возможным.

Второй результат, полученный К. Шенноном, утверждает, что и для канала связи с шумами существует такой способ кодирования конечного количества информации, при котором информация будет передана с какой угодно высокой достоверностью, если только скорость поступления ее не превышает пропускную способность канала связи. Реализация этой возможности неразрывно связана с теорией и техникой *кодов корректирующих* и помехоустойчивых методов приема. Теоремы Шеннона устанавливают только существование оптимальных или близких к ним кодов, но не указывают способа построения их.

В общем случае условия осн. теорем Шеннона выполняются лишь при увеличении длины кодируемых сообщений (к-во элементов алфавита  $A$ , составляющих один элемент мн-ва  $M_1$ ) до бесконечности. При этом необходимо иметь в виду возникновение нежелательной большой задержки передаваемого сообщения во времени, и, кроме того, существенное усложнение кодирующих и декодирующих устройств. Затраты, связанные с усложнением этих устройств, могут оказаться соизмеримыми и даже большими, чем затраты на повышение верности (помехоустойчивости) передачи путем увеличения мощности передатчика, расширения полосы частот канала, усложнения способа приема (выделения полезного сигнала на фоне шумов в приемнике) и т. п.

Исследования в области К. т. ведутся в основном в направлении обоснования и разбора условий осн. теорем Шеннона и в направлении создания наилучших методов кодирования информации в тех ситуациях, когда возможно применение этих методов.

Большое значение придается поискам способов кодирования и декодирования, близких к оптимальным и достаточно простым при аппаратной реализации. Актуальной остается проблема выбора оптим. способа кодирования по комплексному критерию, учитывающему эконом. потери, вызванные задержкой в доставке информации или помехами в канале связи и устройствах обработки информации, а также затраты на усложнение аппаратуры, обусловленное необходимостью применять помехоустойчивое кодирование. Выбор оптим. способа помехоустойчивого кодирования при заданных условиях передачи (характеристиках помех в канале связи) также является сложной задачей. Ее, как правило, решают для фиксированного метода приема. Кроме решения общих задач на оптимум, заключающихся в отыскании кодов, позволяющих достигнуть предельных значений скорости или верности передачи, К. т. рассматривает и ряд более узких задач, в частности, задачу построения кода с миним. *избыточностью сообщений* при заданном количестве элементов этого кода и его заданной корректирующей способности.

Все перечисленные проблемы нельзя считать решенными в полной мере, несмотря на то, что уже имеется ряд практически важных результатов, позволяющих создать хорошие системы передачи информации.

К осн. результатам К. т. относятся: методы построения эффективных неравномерных кодов для коррелированного алфавита  $A$  и некоторых коррелированных последовательностей элементов алфавита  $A$ ; асимптотические оценки корректирующей способности кода при заданном числе  $n$  элементов в кодовом слове и объеме кода  $N$ ; алгебраические методы построения кодов, исправляющих заданные разновидности ошибок; методы декодирования циклических кодов; методы последовательного и мажоритарного декодирования и методы построения кодов, позволяющих обнаруживать и исправлять ошибки при выполнении арифм. и логич. операций. Результаты К. т. широко применяют в *автоматов теории*, технике связи и радиолокации, биологии (при изучении особенностей передачи генетической информации) и в *лингвистике математической*. Статистическое (эффективное) и помехоустойчивое кодирование применимо не только при передаче информации в пространстве, но и при ее арифм. и логич. обработке (см. *Код*), поиске (опознавании) и хранении (передаче во времени). Имеются, в частности, попытки распространить осн. результаты помехоустойчивого кодирования по теории Шеннона и на вычислительные каналы (см. последнюю работу библиографии).

Лит.: Харкевич А. А. Борьба с помехами. М., 1963 [библиогр. с. 273—275]; Добрушин Р. Л. Теория оптимального кодирования информации. В кн.: Кибернетику — на службу коммунизму, т. 3. М.—Л., 1966; Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., 1963 [библиогр. с. 783—820]; Фано Р. М. Передача информации. Статистическая теория связи. Пер. с англ. М., 1965; Виноград С., Коуэн Д. Ж. Д. Надежные вычисления при наличии шумов. Пер. с англ. М., 1968 [библиогр. с. 111—112].

Г. Ф. Яныч.

**КОДЫ КОРРЕКТИРУЮЩИЕ** — класс кодов, обладающих свойством обнаруживать с заданной точностью и исправлять возникающие ошибки. Осн. назначением К. к. является повышение помехоустойчивости информационных систем. К. к. применяются в системах передачи, хранения и обработки дискретной информации.

Развитие теории К. к. при передаче информации во многом стимулировалось фундаментальной теоремой К. Шеннона для каналов с шумом, согласно которой при помощи подходящих кодов можно передавать информацию с любой скоростью, не превосходящей пропускной способности канала связи так, чтобы вероятность ошибки после декодирования была произвольно малой. В дальнейшем теория К. к. получила широкие приложения также в задачах хранения и обработки дискретной информации в устройствах автоматики и ЦВМ.

В основу построения различных К. к. положен принцип введения *избыточности сообщений*, заключающийся в том, что при кодировании сообщений добавляется дополнительная информация, придающая осн. информации

сообщений помехозащитные свойства. При декодировании К. к. на приемной стороне канала передачи или обработки информации производится обратная операция выделения информации сообщения, а также информации о возникших ошибках и при необходимости исправление этих ошибок.

Различают К. к. по назначению, корректирующей способности, принципам построения и др. признакам. Наиболее исследованы и получили распространение **б л о к о в ы е к о д ы**, использующие в качестве кодовых слов последовательности из  $n$  символов канала (блоки). Избыточность в блоковые коды вводится вследствие того, что в качестве кодовых слов используется лишь часть всех возможных последовательностей из  $n$  символов. Эта часть слов, составляющих код, подбирается соответственно требуемой корректирующей способности кода. По используемому принципу образования кодовых слов блоковые коды делятся на разделимые и неразделимые. В **р а з д е л и м ы х** кодах кодовые позиции слов разделяются на информационные, содержащие исходную кодируемую информацию, и проверочные, содержащие избыточную информацию, необходимую для коррекции возникающих ошибок. В **н е р а з д е л и м ы х** кодах указанное разделение не может быть выполнено и избыточность вводится в результате перекодирования всей исходной информации. При декодировании неразделимых кодов для извлечения информации сообщения в первоначальном виде требуется обратная перекодировка, что является главным недостатком неразделимых кодов. Наибольшее распространение получили **д в о и ч н ы е К. к.**, хотя ряд важных результатов теории К. к. можно обобщить и на коды с основаниями, отличными от двоичного.

При декодировании полученного слова, быть может искаженного шумом, принимается решение относительно истинного кодового слова. Это решение является наилучшей гипотезой, исходящей из имеющейся информации, и не является абсолютно достоверным ввиду статистического характера гипотезы. Поэтому при конструировании кода решающее значение имеет выбор модели канала с шумом. Известно несколько таких моделей, среди которых наибольшее распространение получил симметричный канал, предполагающий равновероятными ошибки различных типов. Модель этого канала является удобной матем. моделью и ее наиболее интенсивно исследовали, хотя многие реальные каналы описываются этой моделью весьма приближенно.

Другой моделью канала, нашедшей применение в более поздних исследованиях, является асимметричный канал, учитывающий возможность появления ошибок различных типов с разными вероятностями, что характерно для многих реальных каналов. Описано несколько разновидностей моделей асимметричного канала, характеризующихся различными ограничениями на вероятности ошибок разных типов (полностью асимметричные каналы, канал с

частичной асимметрией). Специфичной моделью канала с шумом, также нашедшим применение в теории помехоустойчивого кодирования, является канал со стиранием. Особенностью этого канала является наличие в выходном алфавите канала спец. символа стирания. Искажения входных символов имеют характер стираний (переходы в символ стирания, которым приписывается некоторая вероятность). Стирающий канал отражает свойства некоторых реальных каналов, в которых решающее устр-во на выходе канала имеет область неопределенности, включающую все искаженные сигналы.

Все указанные модели каналов характеризуют возможные искажения произвольного входного символа. Характер распределения ошибок в последовательности символов учитывается различными моделями, среди которых можно выделить: а) модель независимых ошибок, предполагающую вероятности искажений различных символов последовательности постоянными и независимыми (канал без памяти); корректирующая способность кодов для такой модели определяется макс. кратностью обнаруживаемых и исправляемых ошибок; б) модель сгруппированных ошибок (пачек ошибок), учитывающую корреляцию между искажениями последовательности символов на участке ограниченной длины. Наиболее вероятные ошибки, вносимые такой моделью, группируются в пакеты (пачки) и могут быть охарактеризованы макс. длиной пачки. В некоторых моделях дополнительные ограничения устанавливаются также на расположение пачек по длине кодовой последовательности. Известны и др. модели, учитывающие корреляцию искажений в последовательности символов (напр., списком возможных ошибок).

К. к. для симметричного канала наиболее исследованы. Теория этих кодов широко использует алгебр. структуры (группы, кольца, поля, векторные пространства и др.). Для кодов, корректирующих независимые ошибки, важную роль играет понятие кодового расстояния. Расстояние между любой парой двоичных кодовых слов  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, \dots, y_n)$  определяется соотношением:  $d(x, y) =$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i \oplus y_i), \text{ где } d(x, y) \text{ наз. хэммингово-$$

вым расстоянием,  $\oplus$  — операция сложения по модулю 2. Кодовое расстояние является наименьшим хэмминговым расстоянием между кодовыми словами. Кодовое расстояние определяет корректирующие возможности кода по отношению к независимым ошибкам в соответствии со следующим основным свойством: для того, чтобы код обнаруживал все комбинации из  $s$  ошибок и исправлял все комбинации из  $t$  ошибок, необходимо и достаточно, чтобы кодовое расстояние было равно  $(t + s + 1)$ .

Широкий класс кодов для симметричного канала составляют линейные (групповые) коды, совокупность кодовых слов которых образует

абелеву группу по операции сложения по модулю 2. Групповые коды относятся к числу разделимых (систематических) кодов. Для них принято обозначение  $(n, k)$ -код, где  $n$  — длина кодовых слов, а  $k$  — число информационных позиций. Представителем этого класса кодов является код Хэмминга.

Код Хэмминга с обнаружением однократных ошибок (код с контролем на четность) образуется добавлением к информационным позициям одной проверочной позиции, значение которой дополняет до четной сумму единиц всех позиций кодового слова. Такой код имеет кодовое расстояние 2 и позволяет обнаруживать любую однократную ошибку и все ошибки нечетных кратностей.

В коде Хэмминга для исправления однократных ошибок в проверочных позициях размещают символы, являющиеся результатами проверок на четность специально подобранных групп информационных позиций. При отсутствии искажений проверки этих групп на четность (совместно с соответствующими проверочными символами) дают нулевые значения, а каждой однократной ошибке соответствует своя совокупность значений проверок, что позволяет однозначно идентифицировать ошибку, а, следовательно, и исправить ее. Кодовое расстояние в таком коде 3 и может быть увеличено до 4 добавлением общей проверки на четность всех позиций кодового слова. Полученный т. о. код наряду с исправлением однократных ошибок позволяет также обнаруживать произвольную двойную ошибку.

В общем случае линейные (групповые) коды описывают при помощи порождающей либо проверочной матрицы кода. Порождающая матрица  $(n, k)$ -кода имеет размерность  $n \times k$  и состоит из базисных векторов, задающих линейное векторное пространство кодовых векторов. Проверочная матрица  $(n, k)$ -кода имеет размерность  $n \times (n - k)$ . Строки этой матрицы определяют проверочные соотношения между информационными и проверочными позициями кода и могут рассматриваться также как базисные векторы пространства, ортогонального пространству кодовых векторов. Для получения кодового расстояния  $d$  необходимо и достаточно, чтобы любая линейная комбинация из  $d - 1$  или менее столбцов проверочной матрицы была бы линейно-независимой. В частности, проверочная матрица кода Хэмминга с  $d = 3$  может быть получена выбором в качестве столбцов различных ненулевых  $(n - k)$ -позиционных двоичных чисел. Известны и более сложные конструкции проверочных матриц, позволяющие получать коды с  $d > 3$ .

Важным классом групповых кодов являются циклические коды, отличающиеся сравнительно простыми алгоритмами кодирования и декодирования и высокими корректирующими возможностями. Подавляющее большинство наилучших К. к. для симметричного канала относится к числу циклических, либо построено на основе циклических кодов. Циклический двоичный код определяется как

идеал в алгебре линейной полиномов над полем коэффициентов  $\{0,1\}$ . Осн. свойство циклических кодов состоит в том, что вместе со словом  $u$  код содержит и все его циклические перестановки. Структура кода полностью определяется порождающим полиномом  $g(x)$  степени  $(n - k)$  либо проверочным полиномом  $h(x) = (1 + x^n) \cdot g^{-1}(x)$  степени  $k$ , по которым однозначно может быть вычислена порождающая либо проверочная матрицы кода. Другой способ задания циклических кодов основан на использовании корней полинома  $g(x)$ , обычно задаваемых степенями некоторого элемента  $\alpha$ .

Среди всех известных циклических кодов для канала с независимыми ошибками наилучшими по своим корректирующим свойствам являются коды Боуза — Чоудхури — Хоквингема (БЧХ). Эти коды могут быть построены в широком диапазоне кодовых длин и кодовых расстояний. Для любых целых значений  $m$  и  $t$  существует код БЧХ длины  $n = 2^m - 1$  с кодовым расстоянием  $d = 2t + 1$  и содержащий не более чем  $m \cdot t$  проверочных символов. Коды БЧХ задаются обычно корнями порождающего многочлена, являющимися последовательными степенями примитивного элемента  $\alpha$  поля  $GF(2^m)$ :  $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{2t}$ . Известны и др. конструкции кодов БЧХ, в частности, порождаемые и непримитивными элементами поля  $GF(2^m)$ . Коды БЧХ по своей избыточности при заданном кодовом расстоянии довольно экономичны и близки к теоретическому пределу. Код Хэмминга и ряд др. К. к. могут рассматриваться, как частные случаи кодов БЧХ. Др. важным классом циклических кодов являются коды для каналов с пакетами (пачками) ошибок. Наиболее известными кодами этого класса являются коды Файра, определяемые порождающими полиномами вида  $g(x) = p(x) \cdot (x^c + 1)$ , где  $p(x)$  — неприводимый полином степени  $m$ . Они пригодны для широкого диапазона длин кодов и длин корректируемых пачек ошибок.

К числу кодов, исправляющих пачки ошибок, относятся также коды Эйбрамсона и коды Меласа. Широкими возможностями для коррекции пачек ошибок обладают также коды Рида — Соломона и коды БЧХ. Спец. класс К. к. образуют коды, локализующие ошибки. Эти коды являются промежуточными между кодами, исправляющими ошибки и кодами, обнаруживающими ошибки, т. к. позволяют установить местоположение ошибки с точностью до подблока, т. е. нескольких кодовых позиций кодового слова. Такие коды можно построить на базе известных циклических кодов. Коды, локализующие ошибки, представляют интерес для систем передачи с переспросом, использующим обратный канал, для задач помехоустойчивого кодирования многоблочных структур автоматов и др.

Наряду с К. к. для симметричных каналов большой интерес представляют также коды для асимметричных каналов. Учет асимметрии

ошибок реальных каналов передачи и обработки информации во многих случаях позволяет получить более простые конструкции К. к. либо уменьшить необходимую избыточность при заданной корректирующей способности кода. Большинство конструкций К. к. для асимметричного канала основано на весовых представлениях кодовых слов, при которых каждая кодовая позиция взвешена некоторым постоянным весом, а проверочные соотношения являются некоторыми функциями веса кодовых слов. В основу обнаружения асимметричных ошибок при этом положен принцип изменения веса. Наиболее известными кодами этого типа являются коды постоянного веса (коды с постоянным числом единиц), находящие широкие применения в технике связи, преобразующих устр-вах, а также для кодирования десятичных цифр в ЦВМ (коды «2 из 5», «3 из 7»).

Коды для асимметричных каналов обнаруживают произвольные сочетания асимметричных ошибок, однако относятся к числу неразделимых кодов. Аналогом их среди делимых кодов являются коды Бергера — Фреймана. Известны коды, корректирующие асимметричные ошибки и обладающие меньшей избыточностью, чем аналогичные коды для симметричных каналов: коды Кима — Фреймана и Варшамова — Тененгольца, корректирующие однократные асимметричные ошибки, код Тененгольца, корректирующий двойные асимметричные ошибки, коды, корректирующие пачки асимметричных ошибок. Известны также конструкции кодов, корректирующих асимметричные ошибки в многоканальных системах, использующихся при проектировании внеш. запоминающих устр-в ЦВМ и многоканальных систем передачи информации.

В системах обработки информации находят применение К. к., получившие название арифметических. К таким кодам наряду с требованиями коррекции ошибок предъявляются также требования удобства выполнения арифм. операций над кодовыми словами (см. *Операции над числами*). Для оценки корректирующей способности арифм. кодов используют отличные от хэмминговских понятия ошибки и кодового расстояния. Арифм. вес числа  $N$  определяется при этом как минимальное число слагаемых в представлении числа в виде  $N = \sum_i a_i \cdot 2^{j_i}$ , где  $a_i \in \{0; +1;$

$-1\}$ . Арифм. расстояние между числами  $N_1$  и  $N_2$  — арифм. вес разности  $(N_1 - N_2)$  и равно кратности ошибки, переводящей число  $N_1$  в  $N_2$  (либо  $N_2$  в  $N_1$ ). Такое определение расстояния достаточно хорошо отражает специфику ошибок, которые могут возникнуть при выполнении арифм. операций (типа сложения), в т. ч. возможное размножение ошибок по цепи переноса. При оценке корректирующей способности кодов к независимым арифм. ошибкам арифм. расстояние является полным аналогом расстояния Хэмминга. Наиболее широкий класс арифм. кодов образуют  $AN$ -коды, в которых кодируемое число  $N$  представляется

произведением его на специально подобранный множитель  $A$ .

Простейшим кодом с расстоянием 2, обнаруживающим одиночные арифм. ошибки, является код  $3N$ . Известны также  $AN$ -коды, исправляющие одиночные и многократные арифм. ошибки. Параметр  $A$  таких кодов существенно зависит от требуемого кодового расстояния и диапазона кодируемых чисел. В некоторых применениях желательно, чтобы арифм. код обладал свойством самодополняемости. Это свойство может быть получено *сдвигом* значений всех кодовых слов  $AN$ -кода на некоторую константу (по аналогии с самодополняющими двоично-десятичными кодами). Получающиеся таким способом коды наз.  $(AN + B)$ -кодами.  $AN$ -коды и  $(AN + B)$ -коды относятся, как правило, к числу неразделимых кодов. Однако существуют разделимые аналоги  $AN$ -кодов, в которых в качестве проверочных символов используются вычеты числа  $N$  (информационной части кодового слова) по модулю  $A$  или системе модулей  $A_1, \dots, A_s$ . Наибольшую известность получили коды этого типа при  $A = 3; 7$ , обнаруживающие арифм. ошибки. Эти коды используются для контроля арифм. операций в ЦВМ, а также сквозного контроля информационных трактов ЦВМ. Разделимые арифм. коды, исправляющие ошибки, могут быть получены соответствующим подбором системы модулей  $A_1, \dots, A_s$  при  $s \geq 2$ .

Важный класс арифм. кодов образуют коды, использующие представление чисел в *системе счисления* остаточных классов. Корректирующие свойства таких кодов образуются в результате увеличения числа оснований, используемых для представления чисел по сравнению с минимально необходимым при заданном диапазоне чисел. Наличие одного избыточного основания позволяет обнаруживать ошибки, искажающие вычет по любому (одному) из оснований, а два избыточных основания достаточны для исправления всех таких ошибок. Достоинством К. к. в системе счисления остаточных классов является их высокая корректирующая способность. Кроме того, операции, связанные с коррекцией ошибок, в таких кодах хорошо совмещаются с обычными операциями над рабочими основаниями.

Наряду с блоковыми К. к. получили развитие также рекуррентные К. к., которые можно рассматривать как особый способ непрерывной обработки информации. В этих кодах проверочные символы перемежаются с информационными, образуя непрерывную последовательность, неразделяющуюся на блоки. Рекуррентные К. к. исследованы значительно меньше, чем аналогичные блоковые коды. Наиболее изучены коды этого класса, исправляющие пакеты ошибок, имеющие более простые алгоритмы кодирования и декодирования, чем аналогичные циклические коды.

Лит.: Варшамов Р. Р. Математические методы повышения надежности в реальных системах связи. «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1964, № 4; Акушский И. Я., Юдицкий Д. И. Машинная арифметика в остаточных классах. М., 1968 [библиогр. с. 430—433]; Дада-

ев Ю. Г. Арифметические коды, исправляющие ошибки. М., 1969 [библиогр. с. 161—164]; Питерсон У. Коды, исправляющие ошибки. Пер. с англ. М., 1964 [библиогр. с. 309—316]. О. М. Рякин.

**КОЛЕБАНИЯ СКРЫТЫЕ** — колебания в линейных импульсных системах управления, периоды которых кратны периодам замыкания импульсного элемента (ИЭ). Если на входе ИЭ имеется сигнал, содержащий колебания частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , отличающихся на  $2\pi n/T$  ( $T$  — период замыкания ИЭ,  $n$  — целое число), то существование таких колебаний нельзя установить по реакции импульсной системы в дискретные моменты времени, т. к. информация о ее состоянии получается лишь в моменты замыкания ИЭ. Эту особенность наз. иногда *стробоскопическим эффектом*. Как известно, частотные характеристики импульсных систем  $W(j\omega)$  (см. *Частотные характеристики систем автоматического управления*) являются периодическими ф-циями  $\bar{\omega}$  с периодом  $2\pi$  ( $\bar{\omega} = \omega T$ ). Это и вызывает одинаковую реакцию на периодические сигналы с различными частотами  $\bar{\omega}$ , кратными  $2\pi$ . Для исключения К. с. необходимо, чтобы наибольшая частота спектра входного сигнала  $\bar{\omega}_c$  была много ниже частоты замыкания ИЭ  $\bar{\omega}_n = 2\pi$  и, в соответствии с теоремой Котельникова, не превышала:  $\bar{\omega}_c < \pi = \frac{\bar{\omega}_n}{2}$ . В замкнутых им-

пульсных системах зачастую затруднительно заранее установить периоды колебаний, которые могут возникнуть в них. Однако и в этом случае существует условие отсутствия К. с., накладываемое на полюса  $q_v$  передаточной функции  $W(j\bar{\omega})$  разомкнутой системы:  $\| \text{Im } q_v \| < \pi$ . Физический смысл этого условия заключается в том, что период замыкания ИЭ  $T$  должен быть меньше любого из периодов собственных колебаний непрерывной части системы.

А. А. Тунник.

**КОЛМОГОРОВА УРАВНЕНИЯ** — уравнения, описывающие переходные вероятности в теории марковских процессов.

**КОМАНД МОДИФИКАЦИЯ** — автоматическое изменение команд программы в процессе ее выполнения. В команде может быть изменена любая ее часть: код операции, адреса и признаки. Наиболее часто модифицируют адресную часть *команды* при обработке данных, расположенных в различных местах памяти, для настройки *программы* по месту и т. п. С помощью К. м. удается строить компактные программы. Технически К. м. может быть реализована с использованием индексных *регистров*, с помощью косвенной адресации (*фиксаторов*) и т. д.

В. П. Семик.

**КОМАНД СИСТЕМА** — совокупность всех возможных типов команд, реализованных в данной цифровой вычислительной машине, рассматриваемая в соответствии с законом композиции, с помощью которого они конструируются из кодов операций и адресов. На языке К. с. задается *программа* для ЦВМ. К. с. характеризуются к-вом типов операций,



принятыми команды форматами и т. д. Машины, имеющие функционально одинаковые наборы операций, могут иметь различные К. с., отличающиеся, напр., форматами, принятым законом композиции и т. п. Все команды машины могут иметь одну фиксированную длину. Некоторые машины имеют команды двух, трех и более стандартных размеров. Имеются машины с переменной структурой команд. При выборе К. с. учитывают простоту тех. реализации и удобства программирования для ЦВМ. В целях экономии затрат на создание математического обеспечения ЦВМ разрабатывается ряд машин, совместимых по программированию, т. е. имеющих одну и ту же или близкие К. с.

В. П. Семик.

**КОМАНДА** машинная — элементарное предписание цифровой вычислительной машине, предусматривающее выполнение некоторых операций. В К. содержится информация, определяющая действие машины в течение некоторого отрезка времени. К. несет следующую информацию: 1) код операции; 2) имена объектов, участвующих в операции; 3) адрес результата; 4) адрес следующей К.

**КОМАНДЫ ФОРМАТ** — описание машинной команды и ее структурных частей. Формат указывает на организацию команды и метод записи информации. В пределах одной команд системы могут встречаться К. ф., различающиеся структурой частей и длиной командного слова.

**КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ** — часть математики, объектом исследований в которой являются множества, состоящие из дискретных (обособленных) элементов. Мн-ва могут быть различными: конечными, бесконечными, допускающими всюду упорядоченность элементов или имеющими более сложную структуру. Специфика методов К. а. состоит в применении двух видов операций: отбора подмножеств (называемых выборками) и операции упорядочения. Эти операции наз. комбинаторными. Задачи К. а., в основном, делятся на три типа. В задачах 1-го типа решается вопрос о числе возможных решений, т. е. требуемых выборок или расположений (конфигураций). В задачах 2-го типа — о существовании решений, их возможности. В задачах 3-го типа — о способах отыскания оптим. решений, т. е. таких, которые обладают экстремальностью относительно заданного свойства. На развитие К. а. большое влияние оказывают приложения математики, напр., матем. обработка результатов экспериментов. К. а. составляет общую теор. основу т. н. дискретной математики (многих матем. методов кибернетики, графов теории, программирования целочисленного, конечных групп и др.). Оперативную часть К. а. составляют следующие методы: метод непосредственного подсчета числа выборок, метод производящих функций, логические, экстремальные, геометрические и др. методы.

Методы непосредственного подсчета числа выборок известны издавна. Они составляют содержание т. н.

элементарной комбинаторики. Этими методами находят числа  $r$ -выборок, получаемых из  $n$  элементов соответствующего мн-ва. Выборки делят на  $r$ -сочетания, когда принимают во внимание лишь элементы, составляющие выборку, безотносительно их взаимного расположения, и  $r$ -перестановки, когда учитывают и порядок следования элементов. Методы непосредственного подсчета разнообразны. Вывод соответствующих формул базируется в основном на двух логич. правилах: а) правило суммы: пусть из  $n$ -мн-ва  $S$  выборка  $A$  может быть получена  $p$  способами, а выборка  $B$  —  $q$  способами. Выборки  $A$  и  $B$  не могут быть получены одновременно. В такой ситуации выборку  $A$  или выборку  $B$  можно получить  $p + q$  способами; б) правило произведения: если из  $n$ -мн-ва  $S$  выборку  $A$  можно получить  $p$  способами, а после нее  $q$  способами получена выборка  $B$ , то выбор  $A$  и  $B$  в указанном порядке можно осуществить  $pq$  способами.

Среди формул элементарной комбинаторики основными являются:  $P(n, r) = n(n-1) \dots (n-r+1)$  (число  $r$ -перестановок без повторения элементов);  $P = n^r$  (число  $r$ -перестановок с повторениями элементов);

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{число } r\text{-сочетаний});$$

$$C = \binom{n+r-1}{r} \quad (\text{число } r\text{-сочетаний при допущении повторения элементов});$$

$$R = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!} \quad (\text{число упорядоченных разбиений } n\text{-мн-ва на непересекающиеся подмножества, состоящие соответственно из } r_1, r_2, \dots, r_k \text{ элементов}).$$

Число формул элементарной комбинаторики и разнообразие приемов получения их очень велико.

Метод производящих функций сформировался в работах Л. Эйлера и П. Лапласа. Применяют его не только в К. а., но и в теории чисел, вероятностей теории и алгебре. С его помощью изучают последовательности объектов, напр.,  $r$ -выборки из данного  $n$ -мн-ва, или их чисел. Значение метода состоит в том, что он дает возможность оперировать не с отдельными комбинаторными объектами, а с их классами, а это дает определенные практические преимущества. Производящая ф-ция для чисел  $r$ -сочетаний

$$A(t) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} t^r = (1+t)^n = \prod_n (1+t).$$

производящая ф-ция для класса самих  $r$ -сочетаний элементов, обозначаемых здесь  $s_1, \dots, s_n$ , имеет вид

$$A(t) = \prod_{k=1}^n (1 + s_k t) = \sum_{r=0}^n a_r t^r.$$

где  $a_r$  — симметрические ф-ции, представляющие искомые совокупности  $r$ -сочетаний. В случае повторения некоторых элементов  $s_k$ , соответствующие биномы вида  $(1 + s_k t)$  заменяют

полиномами, составленными из тех членов стандартного полинома  $\sum_r s_r t^r$ , в которых степени параметра  $t$  равны числу (или числам) повторений. Производящую функцию для числа  $r$ -перестановок получают в виде

$$(1+t)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} t^r = \sum_{r=0}^n P(n, r) \frac{t^r}{r!} = E(t).$$

В случае, когда допускаются повторения элементов в перестановках, стандартный полином выбирают в виде  $\sum \frac{t^r}{r!}$ . Написать же формулы,

где фигурировали бы сами перестановки, невозможно, ввиду неразличимости порядка сомножителей в произведениях.

Существует большое разнообразие видов производящих ф-ций, обусловливаемое разнообразием классов выборок. Аппарат оперирования с производящими ф-циями оказывается в большинстве случаев очень громоздким. Для придания ему большей алгоритмичности к настоящему времени накоплено сравнительно много средств: спец. операторы, символические исчисления, спец. числа и спец. ф-ции. Степень общности, достигнутой методом производящих ф-ций в К. а., характеризуется тем, что сейчас удается строить производящие ф-ции для неэквивалентных комбинаторных объектов (теория Пойа и ее обобщения). Эти объекты можно наделять «весами», т. е. численными характеристиками, определяемыми условиями задачи, а понятие эквивалентности можно вводить через группу подстановок. Логические методы К. а. служат для анализа структуры конечных дискретных мн-в и для решения вопроса о существовании (или несуществовании) решения комбинаторных задач. Характеризуются тем, что в них перечислительный аспект уступает место логическому анализу, не всегда еще приводящему к регулярным алгоритмам.

Комбинаторные задачи, в которых требуется разделять мн-ва элементов на подмножества в зависимости от того, обладают ли элементы заданной совокупностью свойств или не обладают, решаются в большинстве методом включения и исключения. Осн. ф-ла, выражающая сущность метода: пусть дано  $n$ -мн-во элементов и  $N$ -мн-во свойств  $p_1, p_2, \dots, p_N$ , которыми каждый элемент  $n$ -мн-ва может обладать в некоторой комбинации. Символ:  $\bar{p}_k$  обозначает отсутствие свойства  $p_k$ . Тогда мн-во элементов, не обладающих ни одним из заданных свойств, находится по ф-ле

$$\begin{aligned} n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_N) &= n - \sum_{i=1}^N n(p_i) + \\ &+ \sum_{i,j} n(p_i, p_j) - \\ &- \dots + (-1)^N n(p_1, p_2, \dots, p_N). \end{aligned}$$

Эта ф-ла показывает, что для того, чтобы получить мн-во элементов, указанное в левой части равенства, необходимо из всего  $n$ -мн-ва исключить элементы, обладающие хотя бы одним из заданных свойств. Однако, при этом элементы, обладающие двумя свойствами, оканчиваются исключенными дважды. Поэтому их надо возратить и т. д. Метод, т. о., состоит в попеременном отбрасывании и возвращении подмножеств, что и отражено в его названии. Метод обобщен на случаи, когда речь идет о любых выборках свойств и на случай, когда элементы снабжены весами.

При анализе структуры мн-в, рассматриваемых вместе с некоторой совокупностью их подмножеств, нередко применяют метод замены подмножеств их представителями. В К. а. разработаны необходимые и достаточные условия существования систем различных, общих и др. видов представителей, а для некоторых из них найдены алгоритмы их нахождения. Приложения метода систем представителей многочисленны и разнообразны, напр., в теории сетей при исследовании допустимости потоков.

Рассмотрим класс задач о распределении элементов  $n$ -мн-ва по  $t$  ячейкам. Обусловим, что элементы должны распределяться пачками по  $r$  элементов в каждой. Распределение должно быть таким, чтобы обеспечить попадание в какую-либо  $i$ -ю ячейку  $q_i$  элементов ( $i = 1, \dots, t$ ). В теореме Рамсея (1930) доказано, что существует минимальное  $N(q_1, q_2, \dots, q_t; r)$ -мн-во, начиная с которого заданное распределение оказывается обеспеченным. Однако, до сего времени никакого регулярного алгоритма для определения числа  $N(q_1, q_2, \dots, q_t; r)$  не найдено.

Экстремальные методы К. а. Пусть задано  $n$ -мн-во элементов. На нем определено мн-во  $P$  комбинаторных объектов:  $r$ -перестановок,  $r$ -сочетаний, конечных последовательностей и т. п. На этом мн-ве задана ф-ция  $F$ . Требуется найти экстремум этой ф-ции или же отыскать те элементы (или тот элемент) мн-ва  $P$ , на которых этот экстремум достигается. Напр., имеется мн-во населенных пунктов, расстояние между каждой парой которых известно. Требуется среди всех возможных маршрутов для почтальона найти минимальный.

Для решения задач подобного типа необходимо, во-первых, располагать множеством значений функции  $F$  и уметь делать их перебор и, во-вторых, разработать методы сравнения этих значений. Для облегчения решения таких задач разработаны и применяются большое число алгоритмов. Общая идея всех методов состоит в замене полного перебора всех вариантов частичными переборами меньших объемов. В настоящее время для осуществления этой идеи нет, по-видимому, иного пути, как отбрасывание подмножеств, заведомо не содержащих искомого экстремума, и сужение области перспективных вариантов до размеров, допускающих нетрудный перебор. Методы

при этом получаются весьма разнородными, определенными структурой соответствующих множеств. Наиболее широко применяют следующие три группы методов: локальных оптимизаций, случайного поиска, ветвей и границ. В связи с тем, что решение экстремальных комбинаторных задач связано с преодолением больших вычислительных трудностей, совокупность соответствующих методов сложилась в отдельную область вычисл. математики — дискретное программирование.

Таблично-схемные методы К. а. применяют для исследования комбинаторных расположений. В основе представления об этих расположениях лежит общее понятие системы инцидентностей. Два мн-ва образуют такую систему, если между их элементами установлено соотношение инцидентности, выражаемое понятиями: «принадлежит...», «содержит», «лежит на...», «проходит через...» в зависимости от интерпретации. Изображают системы инцидентности двумерными расположениями — таблицами. В К. а. изучают свойства все более широкого класса таблиц, являющихся интерпретациями комбинаторных задач.

В исследованиях комбинаторных расположений большую роль играет аппарат спец. матриц. Пусть дано  $n$ -мн-во  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  и  $m$ -выборка его подмножеств:  $M(S) = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ . Построим  $(m \times n)$ -матрицу  $A = (a_{ij})$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ , в которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } s_j \in S_i, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Полученная бинарная матрица дает полное описание системы инцидентности. С помощью таких матриц часто не только интерпретируют, но и доказывают теоремы и решают задачи К. а. В зависимости от типа комбинаторных задач при их решении используют различные типы матриц: перестановочные, попарных сравнений, матрицы Адамара, стохастические и др. Современные обобщения этой теории включают изучение классов спец. матриц и инвариантов. Существует много типов комбинаторных таблиц и схем большого практ. и теор. значения, напр., латинские прямоугольники и квадраты, системы троек Штейнера и Киркмана. Большой, активный исследуемый класс таблиц составляет блок-схемы.

Блок-схемы вводятся следующим образом: пусть имеется  $v$ -мн-во элементов  $m_i$  (например, данных эксперимента):  $i = 1, 2, \dots, v$ . Элементы этого мн-ва расположены в  $b$  столбиках-блоках, которые являются подмножествами  $M_1, M_2, \dots, M_b$  исходного мн-ва. Их перечисления не обязательно пусты. Число элементов в блоке  $M_j$  назовем его объемом и обозначим  $k_j$ . Каждый элемент может состоять в нескольких блоках. Пусть  $r_i$  число блоков, содержащих элемент  $m_i$ ,  $\lambda_p$  ( $p = 1, 2, \dots, \binom{v}{2}$ ) — число блоков, в которых появляется  $p$ -я неупорядоченная пара элементов. Т. о.,

блок-схема есть комбинаторное расположение, параметрами которого являются  $v, b, k_j, r_i, \lambda_p$ . Если вместо пар рассматривают тройки или др. выборки элементов, то такие расположения наз. тактическими конфигурациями. Существует большое разнообразие видов блок-схем. Латинские квадраты — пример полных блок-схем, т. е. таких, в которых в каждом блоке содержатся все элементы мн-ва ( $k_j = v$ ;  $j = 1, 2, \dots, b$ ). Системы троек Штейнера — частные виды неполных ( $k_j < v$ ) уравновешенных ( $\lambda_p = \lambda = \text{const}$ ,  $k_j = k = \text{const}$ ,  $r_i = r = \text{const}$ ) блок-схем, для которых  $k = 3$ ,  $\lambda = 1$ . Исследования в области блок-схем сосредоточиваются в настоящее время вокруг проблемы существования (или несуществования) отдельных видов блок-схем, изучения их свойств, нахождения эффективных методов их построения. При исследовании этих таблиц используют результаты теории чисел, групп теории, теории матриц, выпуклых тел и др. При этом выявляется общность теоретических, по существу комбинаторных, основ ряда разделов современной математики.

Геометрические методы К. а. происходят из геом. интерпретаций комбинаторных ситуаций посредством мн-в точек, отрезков и др. При последовательном применении в К. а. подобных интерпретаций выделяют спец. виды геом. систем инцидентностей. Элементы, принятые за первичные, неопределяемые, получили названия: «точки»  $P$  и «линии»  $L$ . Отношение инцидентности  $P \in L$  получило конкретизацию как: «точка  $P$  лежит на линии  $L$ » или «линия  $L$  содержит точку  $P$ ». Эти системы, наконец, были подчинены системам аксиом типа аксиом геометрии. Уточнения и дополнительные разъяснения, либо видоизменения исходных утверждений, приводят к различным видам конечных геометрий, к проблемам комбинаторной топологии, дискретной геометрии, проективной геометрии, геометрической теории чисел, теории графов и комбинаторной геометрии. Простейшими геом. комбинаторными системами являются конечные плоскости, т. е. системы инцидентности двух конечных мн-в (точек и линий), подчиненных системе аксиом проективной геометрии. Однако теория и этих комбинаторных систем еще не разработана, в частности, нет условий существования конечных плоскостей. Среди многообразных систем геом. инцидентностей большое внимание привлекают те системы, где инцидентность вводится между мн-вом элементов и некоторыми мн-вами пар этих элементов.

Большая часть изложенных выше методов К. а. была разработана для тех задач, объекты которых допускали линейную упорядоченность своих элементов. Общая комбинаторная теория, однако, не предполагает необходимости такого ограничения. Последовательное, систематическое развитие комбинаторных методов для мн-в более общей природы — одна из главных задач современного К. а. Отношение порядка (символ:  $\leq$ ) в мн-вах вводится формально посредством аксиом: а) рефлексивнос-

ти:  $a \leq a$  для любого  $a \in S$ ; б) равенства: если  $a, b \in S$  и  $a \leq b$ ,  $b \leq a$ , то  $a = b$ ; в) транзитивности: если  $a \leq b$  и  $b \leq c$ , то  $a \leq c$ . Добавление четвертой аксиомы об отсутствии несравнимых элементов: г) для всяких  $a, b \in S$ , либо  $a \leq b$ , либо  $b \leq a$ , определяет уже мн-во, упорядоченное всюду, или цепь.

Тремя первыми аксиомами определяются *частично упорядоченные множества*; к-во таких мн-в  $S(2) = 3$ ;  $S(3) = 19$ ;  $S(4) = 219$ ;  $S(5) = 4231$ , а среди них неизоморфных:  $S_n(4) = 16$ ;  $S_n(5) = 63$ . Для  $n \geq 6$  результатов еще не получено.

Исследования в области частично упорядоченных мн-в ведутся преимущественно на мн-вах всех подмножеств конечных мн-в и мн-вах всех натуральных чисел, где отношение порядка  $a \leq b$  означает, что  $a$  делит  $b$ . Среди возможных типов частично упорядоченных мн-в большое внимание уделяют *структурам*. К. а. развивается на стыке ряда областей математики. Он испытывал в ходе своего развития сильные влияния. Взаимопроникновение методов иногда доходило до такой степени, что К. а. ошибочно относили к одному из сложившихся к тому времени разделов математики.

*Лит.:* Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ. М., 1972 [библиогр. с. 249—250]; Kaufman A. Introduction à la combinatoire en vue des applications. Paris, 1968; Холл М. Комбинаторика. Пер. с англ. М. 1976 [библиогр. с. 413—418].  
К. А. Рыбников.

**КОМБИНАЦИОННАЯ СХЕМА** — правильная схема, построенная из элементов, являющихся *автоматами без памяти*. Правильной наз. схему без *обратных связей*, соединение элементов в которой выполнено по правилам, которые соответствуют (в функциональном отношении) операции суперпозиции функций. В соответствии с этим оператор, реализуемый К. с., также является некоторой функцией *алгебры логики*. Осн. задачами теории К. с. являются задачи анализа и синтеза этих схем. Задача анализа состоит в нахождении общего конструктивного приема (алгоритма), позволяющего по любой К. с. построить выходные ф-ции этой схемы и по ним определить зависимость сигнала на каждом из ее выходов от сигналов на входах. Решение этой задачи состоит в выписывании суперпозиций, определяемых соединением элементов схемы. Задача синтеза сводится к представлению ф-ций, реализуемых К. с., в виде суперпозиции ф-ций, реализуемых некоторым заранее заданным набором *логических элементов ЦВМ*. Такая задача имеет решение только в том случае, если задаваемое мн-во логич. элементов образует функционально полную систему. Для решения задачи применяют аппарат алгебры логики, получивший развитие в рамках *логики математической*. В этом случае требование функциональной полноты системы логич. элементов выполняется, если ф-ции, реализуемые этими элементами, образуют функционально полный набор.

К. с. с несколькими выходами всегда можно представить в виде некоторой композиции

схем, каждая из которых обладает лишь одним выходом. Это позволяет свести решение задачи синтеза схем с произвольным числом выходов к решению задачи синтеза К. с. с одним выходом, которая, в свою очередь, сводится к задаче построения формулы алгебры логики, представляющей выходную ф-цию схемы. Тесно связанная с ней задача построения оптимальных с точки зрения тех или иных критериев К. с. приводит к задаче минимизации соответствующих аналитических представлений. Хотя на практике очень часто ограничиваются построением аналитического представления выходной ф-ции К. с. и его оптимизацией, выполнение этих задач представляет только частичное решение общей задачи синтеза К. с. и в общем случае может возникнуть необходимость решать следующие задачи: выражать аналитические представления ф-ций, реализуемых К. с., в некоторой заданной системе операторов, обеспечивать требуемое качество физ. характеристик схем, сравнивать различные варианты схем.

Необходимость представлять выходную ф-цию К. с. с помощью некоторой заданной системы операторов возникает в том случае, когда система ф-ций, реализуемая применяемой при построении К. с. системой элементов, не совпадает с базисной системой ф-ций, используемой при построении аналитического представления (напр., в качестве полной используется система элементов, реализующая функцию штрих Шеффера, а в качестве базиса — система, состоящая из функций дизъюнкции, конъюнкции и инверсии). Решение этой задачи состоит в записи ф-ции, реализуемой К. с., в виде суперпозиции ф-ций, реализуемых логич. элементами. В силу полноты системы логич. ф-ций эта задача имеет решение всегда, однако перевод в операторную запись аналитического представления, оптимального с точки зрения к.-л. критерия, в общем случае не приводит к получению записи, оптимальной с точки зрения этого же критерия.

Требуемое качество физ. характеристик К. с. обеспечивается представлением схемы в виде структуры, состоящей из операторов, реализуемых отдельными логич. элементами используемой системы, проверкой того, удовлетворяет ли схема условиям правильности отображения значений логич. переменных в соответствующие им области физ. значений, а также подсчетом временных ф-ций схемы. Представление схемы в виде структуры связано с тем, что операторная запись ф-ции выхода К. с. не учитывает нагрузочных характеристик логич. элементов, а также необходимости их взаимной синхронизации и, следовательно, не дает полного представления о реальной схеме. Указанное представление основывается на нумерации операторов с учетом нагрузочных характеристик соответствующих логич. элементов. При нумерации каждому оператору сопоставляется пара чисел: номер каскада, в котором стоит элемент, и номер элемента в каскаде. Разработаны общие принципы построения К. с. с произвольной значностью струк-

турного алфавита. Наибольшее практическое значение имеет теория К. с. с двузначным структурным алфавитом.

Лит.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]; Рабинович З. Л., Капитанова Ю. В. Общие принципы синтеза комбинационных схем. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1963, т. 3, № 4. Ю. Л. Иваскиев.

**КОМБИНИРОВАННАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА** — то же, что и гибридная вычислительная машина.

**КОМБИНИРОВАННАЯ СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ** — система, использующая одновременно принцип управления по отклонению (принцип отрицательной обратной связи) и принцип управления по возмущению. Первыми К. с. а. у., объединяющими оба этих принципа, были системы регулирования напряжения и тока нагрузки электр. генераторов. Связь по возмущению — току нагрузки электр. генераторов, часто наз. *компаундирующей связью в автоматических системах* регулирования напряжения. Другим примером К. с. а. у. является система регулирования скорости вращения ротора электродвигателя (автоматизированный электропривод). Здесь связь по отклонению регулируемой величины — скорости вращения от заданной, дополняется связью по основному возмущению — моменту нагрузки двигателя. Широкое применение получили К. с. а. у. давления пара, в которых связь по отклонению давления пара от заданного значения дополняется связью по расходу пара.

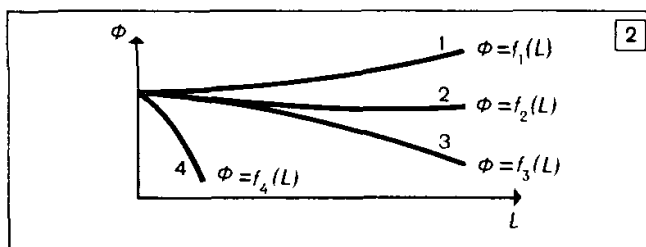
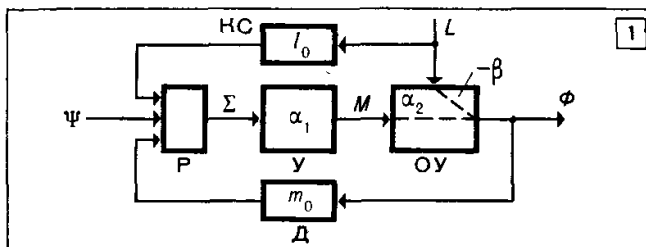
Структурная блок-схема К. с. а. у. приведена на рис. 1.

Одно из преимуществ К. с. а. у. заключается в возможности достаточно широкого изменения наклона статической характеристики системы  $\Phi = f(L)$ , где  $\Phi$  — регулируемая величина, а  $L$  — осн. внешнее возмущение (рис. 2). Эта возможность открывается благодаря соответствующему выбору коэффициента связи по возмущению  $l_0$ . Выбор наклона статической характеристики (статизма системы) не связан с общим коэфф. усиления контура обратной связи. К. с. а. у. может иметь большой наклон характеристики  $\Phi = f(L)$  при высоком коэфф. усиления разомкнутой системы. В частности такая настройка необходима для устойчивой параллельной работы электр. генераторов (или паровых котлов) на общую нагрузку, которая распределяется пропорционально наклонам статических характеристик систем регулирования каждого из генераторов (или котлов).

Второе преимущество К. с. а. у. проявляется при решении проблем динамики и точности. С помощью соответствующих настроек параметров замкнутого и разомкнутого контуров можно независимо обеспечить необходимое качество переходного процесса при требуемом статизме. Соответствующим выбором параметров К. с. а. у. можно достичь выполнения условий *инвариантности систем автоматического управления*.

При выполнении условий инвариантности теоретически возможно устранение и переход-

ной, и установившейся составляющих ошибки системы управления, вызываемых возмущениями, по которым осуществлены компаундирующие связи (достигается полная, или абсолютная, инвариантность). Ошибка, вызываемая другими возмущениями, связью по данному возмущению не устраняется. Физ. объяснение полного устранения ошибки связано с наличием в системе двух каналов для передачи воздействия возмущения на данную инвариантную величину. При этом возможна как недокомпенсация, так и перекомпенсация ошибки



1. Структурная схема комбинированной системы автоматического управления: ОУ — объект управления; Р — регулятор; У — усилитель; КС — компаундирующая связь; Д — датчик;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta$ ,  $l_0$ ,  $m_0$  — коэффициенты усиления; закон регулирования  $\Sigma = \Psi - m_0\Phi - l_0L$ ;  $\Phi$  — регулируемая величина;  $\Psi$  — задающее воздействие;  $L$  — возмущение;  $M$  — управляющее воздействие.

2. Статическая характеристика комбинированной системы: 1 — отрицательный статизм; 2 — астатическая настройка; 3 — положительный статизм; 4 — объект без регулятора.

(отрицательный статизм). Выполнение условий инвариантности не влияет на условия устойчивости системы, т. к. компаундирующие связи носят разомкнутый характер. Это свойство наз. свойством ортогональности условий инвариантности и условий устойчивости.

Весьма близкими по свойствам к К. с. а. у. являются системы автомат. регулирования, в которых можно осуществить т. н. косвенное измерение возмущений (см. *Дифференциальная система автоматического управления*). Широкие возможности в выборе статических и динамических свойств при настройке К. с. а. у. определяют их осн. преимущество по сравнению с некомбинированными системами.

Теория К. с. а. у. имеет специфические проблемы. Связь по возмущению является чисто детерминированной, т. е. требует точного расчета значений параметров системы для каждого объекта управления. А на параметры обратной связи по отклонению регулируемой величины не накладываются такие жесткие требования. Эта связь реализуется и виде т. н. корректора. Корректор должен компенсировать действие всех помех, не учитываемых при

расчете связи по возмущению, и все неточности этого расчета. Общая идея комбинированного управления распространяется на ряд «больших» или «сложных систем управления». В каждой такой системе обычно можно выделить детерминированную часть, поддающуюся детальному анализу, расчету и жесткому планированию, и индетерминированную, для которой такой анализ практически невозможен.

Лит.: Кулебакин В. С. О поведении непрерывно возмущаемых автоматизированных линейных систем. «Доклады АН СССР. Новая серия», 1949, т. 68, № 5; Кулебакин В. С. О выборе оптимальных параметров автоматических регуляторов и следящих систем. «Доклады АН СССР. Новая серия», 1951, т. 77, № 2; Ивахненко А. Г. Техническая кибернетика. К., 1962 [библиогр. с. 412—416]; Ивахненко О. Г., Комаров Б. О. Недокомпенсация, абсолютная инвариантность и перекомпенсация в системах автоматического регулирования. «Автоматика», 1964, № 2.

**КОМБИНИРОВАННЫЕ МНОЖИТЕЛЬНО-ДЕЛИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА** — см. Множительно-делительные устройства.

**КОМЙТ** — язык программирования, ориентированный на описание задач лингвистики математической и машинного перевода, а также для других задач логического характера. Разработан в США. Существует вариант К., расширенный средствами языка ФОРТРАН.

Обрабатываемая К. информация (текст) разбивается в рабочем поле на части — конституэнты, обозначаемые символами (напр., текст, фраза, слово, часть слова), каждая из которых может быть снабжена одним числовым и несколькими логич. признаками. Программа записывается на К. в виде последовательности правил. Правило может состоять из 5 частей: название, выход (обязательные), левая часть, правая часть, координирующая часть (необязательные). Правило определяет обработку последовательности конституэнт, расположенных в рабочем поле и задаваемых левой частью правила. Поиск адекватной цепочки в рабочем поле носит ассоциативный характер. Конституэнты цепочки левой части и рабочего поля считаются адекватными, если совпадают их символы и соблюдается соответственно вложение признаков и их значений. В правой части правила указывается, как обработать найденную цепочку конституэнт. Можно переставлять, зачеркивать и добавлять новые конституэнты в рабочем поле, а также переносить, зачеркивать и пересчитывать признаки конституэнт и пр. В координирующей части может быть указано любое число следующих операций: 1) ввод — вывод в нескольких форматах; 2) управление потоком информации, поступающей в диспетчер и из него; 3) управление операциями поиска в списке (список представляет собой ряд правил, в левой части которых может стоять только одна конституэнт, без признаков; списки могут использоваться для словарей); 4) укрупнение и размельчение конституэнт рабочего поля; 5) операции с «пóлками», играющими роль адресной памяти, а в сочетании с правилами списка, — позволяющими вводить язык более высокого уровня.

Лит.: Ингве В. Х. Язык для программирования задач машинного перевода. В кн.: Кибернетический сборник, № 6. М., 1963. Н. А. Баландина.

**КОММУНИКАЦИОННЫЙ ПРОЦЕССОР** — устройство, обеспечивающее обмен информацией между обработкой данных системой и потребителями. Осн. функции К. п.: коммутация каналов связи, кодирование информации и преобразование формы ее представления, контроль данных, первичная обработка данных (напр., редактирование и т. п.). К. п. управляют спец. программы, а также сигналы центр. процессора системы.

**«КОМПАНИ ИНТЕРНАСЬОНАЛЬ ПУР Л'ИНФОРМАТИК»** (Compagnie internationale pour l'informatique) — главная монополия электронно-счетного машиностроения во Франции. Основана в 1966. Изготавливает вычисл. машины семейства «IRIS». «IRIS-50» — машина 3-го поколения с универсальным матем. обеспечением, предназначенная для управления, научных расчетов и обработки информации в реальном масштабе времени; быстродействие — 4 млн. логических операций в 1 сек. «IRIS-80» — машина общего назначения для работы в режиме разделения времени, имеет 4 центр. процессора параллельного действия с быстродействием каждого — до 1 млн. операций в 1 сек. В 1971 выпущена малогабаритная машина 3-го поколения «Митра-15».

Лит.: Зейденберг В. К., Матвеев Н. А., Тароватова Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М., 1970.

**КОМПАУНДИРУЮЩИЕ СВЯЗИ В АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ** — каналы для формирования и передачи на вход объекта регулирования (управления) воздействий, функционально связанных непосредственно с действующими на объект возмущающими воздействиями, с целью уменьшения (компенсации) влияния этих возмущений на регулируемые координаты объекта или установления определенных зависимостей между регулируемыми координатами и возмущениями. Название заимствовано из области электромашиностроения, где для компенсации реакции якоря машины получили широкое распространение т. н. устройства компаундирования возбуждения по току нагрузки (компаундные обмотки, компаундирующие трансформаторы тока с выпрямителями и т. д. в электр. машинах). К. с. в а. с. являются основой принципа регулирования по возмущению (принцип компенсации). В отличие от обратных связей К. с. в а. с. не влияют на устойчивость системы, но уступают первым в точности регулирования. Поэтому К. с. в а. с. применяются гл. обр. в комбинированных системах автоматического управления, причем осуществляются, как правило, только по осн. возмущениям, доступным для измерения. В общем случае К. с. в а. с. содержат измеритель (датчик) возмущения и, если требуется, его производных, преобразующие устройства и усилитель. Иногда функции измерения, преобразования и усиления могут совмещаться в одном или больше устройствах. По своим характеристикам К. с. в а. с. могут быть как линейными, так и нелинейными связями, с постоянными и переменными параметрами.



Параметры К. с. в а. с. определяются условиями задачи регулирования. При решении задач компенсации выбор параметров производится на основе идей теории инвариантности. Однако выполнение условия полной компенсации (абсолютной инвариантности) обычно ограничено условиями физ. реализуемости параметров К. с. в а. с. В связи с этим в реальных системах полная компенсация или перекомпенсация принципиально легко достижима только в установившихся режимах. См. также *Инвариантность систем автоматического управления*.

Лит.: Ивахненко О. Г. Кібернетичні системи з комбінованим керуванням. К., 1963 [библиогр. с. 471—479]; Уланов Г. М. Регулирование по возмущению. М.—Л., 1960 [библиогр. с. 106—108]; Ивахненко А. Г. Электроавтоматика. К., 1957 [библиогр. с. 440—442]. О. М. Костюк.

**КОМПЕНСАЦИОННЫЙ СПОСОБ НАСТРОЙКИ И ИЗМЕРЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ** — способ ввода исходных данных, а также измерения результатов решения задачи на *аналоговой вычислительной машине (АВМ)*, заключающийся в сравнении настраиваемой или измеряемой величины с известной величиной — эталоном. В АВМ сравниваемые величины являются обычно разностями потенциалов (напряжениями), при этом в случае ввода исходных данных в качестве настраиваемых сравниваемых величин используются напряжения, пропорциональные соответствующим данным (напр., коэффициентам передачи решающего усилителя). Сравнение осуществляется с помощью *нуль-органа*, который представляет собой, как правило, гальванометр или ламповый вольтметр. Нуль-органом может служить также осциллоскоп или специальное устройство, регистрирующее равенство настраиваемой или измеряемой величины и эталонной. Основные требования к нуль-органу: он не должен являться дополнительной нагрузкой ни для настраиваемого (измеряемого) источника, ни для эталонного; чувствительность его должна быть не меньше 10 мв (для АВМ со шкалой 100 е).

Применение компенсационного способа измерения напряжений является особенно эффективным в электрических цепях постоянного тока, так как в этом случае обеспечивается точность измерения порядка 0,01% и выше (в специальных случаях погрешность может быть доведена до 0,001—0,003%). Такая точность и то, что в момент отсчета через нуль-орган ток не протекает, являются основными преимуществами компенсационного способа перед способами прямого измерения и объясняют широкое использование его в АВМ. На рис. приведена типичная схема установки коэфф. передачи потенциометра (с учетом нагрузки) компенсационным способом. Заданный коэфф. передачи устанавливается на прецизионном потенциометре, снабженном лимбом, а напряжение с него подается на вход 2 нуль-органа. Настраиваемый потенциометр, напряжение которого подается на вход 1, регулируется так, чтобы нуль-орган показывал нуль. В больших АВМ описанная процедура выпол-

няется автоматически с применением следящей системы в течение 1—3 сек, при этом погрешность настройки десятиоборотных потенциометров не превышает 0,2%. Основными причинами возникновения ошибок являются ограниченная чувствительность нуль-органа и неточность задания эталонного источника напряжения. При измерении результатов решения (в статическом режиме) вход 1 нуль-органа подключают к измеряемому источнику, а затем вращением лимба прецизионного потенциометра добиваются нулевого показания нуль-

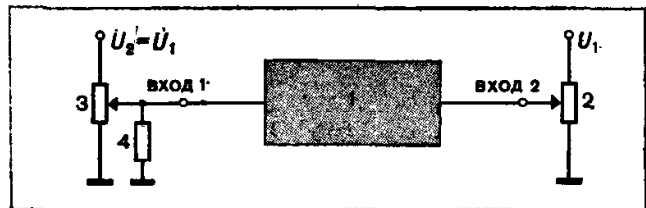


Схема установки коэффициента передачи потенциометра компенсационным методом: 1 — нуль-индикатор; 2 — прецизионный потенциометр; 3 — настраиваемый потенциометр; 4 — сопротивление нагрузки;  $U_1$  — эталонное напряжение;  $U_2$  — опорное напряжение.

органа. Умножая отсчет по лимбу на величину *эталонного напряжения*, получают искомое напряжение. И. Е. Ефимов.

**КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ МАШИН** — соединение двух или более вычислительных машин (ВМ) в одну систему (комплекс) для совместной работы с целью придания этой совокупности ВМ свойств, которыми они порознь не обладали. Различают три основных вида К. м.: комплексирование ЦВМ, комплексирование АВМ и построение комплексов из АВМ и ЦВМ.

а) Комплексирование ЦВМ в зависимости от назначения комплекса, целей комплексирования и состава оборудования осуществляют на разных уровнях. При К. м. на уровне внеш. устр-в любая из машин комплекса может обращаться к любому из внеш. устр-в. Возможен и такой уровень комплексирования, когда «обобществляются» *оперативные запоминающие устройства (ОЗУ)* машин комплекса. Процессы обмена информацией между машинами при этом существенно ускоряются. Наиболее глубокая связь между машинами комплекса устанавливается тогда, когда перекрестные каналы существуют между ОЗУ, *арифметическими устройствами* и даже между блоками управления смежных машин. ЦВМ комплексировать для увеличения общей производительности, созданной вследствие К. м. *вычислительной системы*, повышения эффективности использования отдельных ВМ и их блоков и увеличения надежности работы системы. В различных вариантах К. м. достигаются эффекты функциональной специализации, распараллеливания, общего запоминающего устройства, резервирования и взаимного контроля — т. н. эффекты комплексирования.

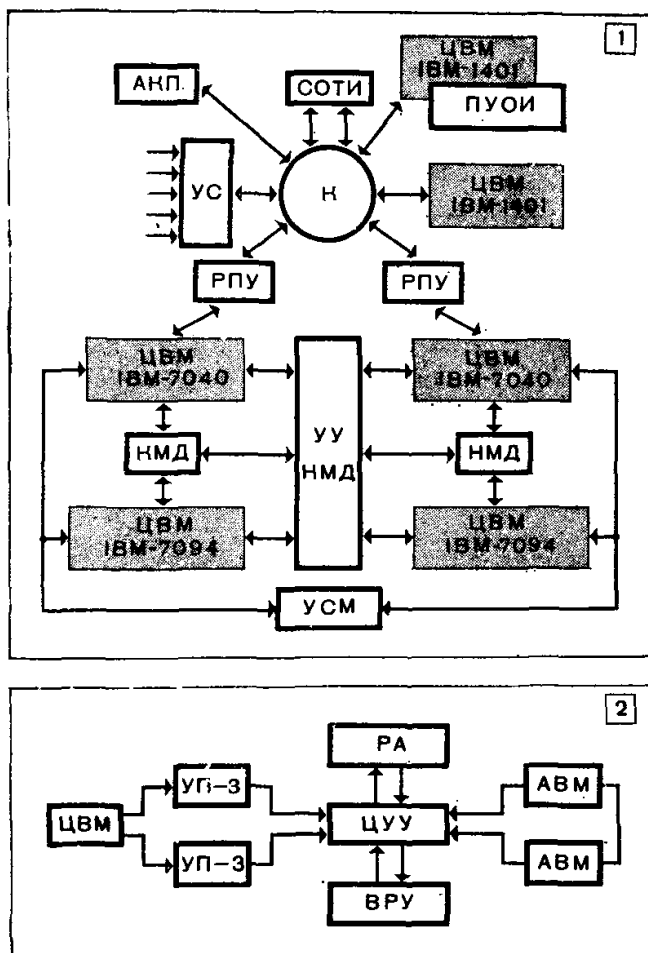
Эффект функциональной специализации состоит в значительном сокращении времени решения широкого класса

задач. Он достигается возложением в процессе работы системы разных спец. ф-ций на соответствующие этим ф-циям машины (мощности). Различают вычисл., обменные, интерпретирующие и др. мощности. К вычисл. мощностям относят ЦВМ с высоким быстродействием арифм. устр-ва; обменными мощностями считают ЦВМ, имеющие многочисленные мощные каналы связи с внеш. устр-вами и устр-вами обмена, хорошо приспособленные к выполнению операций такого рода. Машины с хорошо развитой схемной интерпретацией входного

валяется от расширения возможностей распараллеливания алгоритмов. В случае «обобществления» внешних ЗУ эффект усиливается при функциональной специализации. Эффект резервирования состоит в повышении надежности работы системы путем подмены вышедшей по какой-либо причине из строя машины другой, исправной. Эффект взаимного контроля — уменьшение среднего времени на обнаружение и устранение неисправности в машине, когда существует возможность возложить задачу контроля и диагностики неисправностей при отказе одной из ЦВМ на исправные машины комплекса.

Согласованная работа машин, составляющих комплекс, обеспечивается частично спец. аппаратурой, частично программным путем. Чем глубже связи между машинами комплекса, тем сложнее их реализовать аппаратно. При наличии в комплексе машин, отличающихся по формату команд, по элементной базе и т. п., требуются дополнительные устр-ва сопряжения и согласования. Согласование машин, имеющих разные языки машинные, осуществляется, гл. о., двумя путями: моделированием одной машины на другой и переводом программ на промежуточный символический язык. В первом случае согласование осуществляется с помощью односторонних быстродействующих запоминающих устр-в («эмуляторов»), в которых каждая команда «старой» программы переводится в соответствующие команды «новой» программы. Во втором — входной язык комплекса переводится на спец. промежуточный язык, в определенном смысле близкий ко всем машинным языкам комплекса. Обмен между машинами происходит именно на этом языке. Основу программного согласования работы машин комплекса составляет совокупность спец. программ, называемая *операционной системой* комплекса, которая организует мультипрограммный режим работы отдельных ВМ и всего комплекса в целом, управляет вводом — выводом, осуществляет коммутацию внешней и оперативной памяти, реализует функциональную специализацию, распараллеливание алгоритмов, резервирование и контроль.

Комплексовать ЦВМ можно в *вычислительных центрах* (ВЦ) общего назначения, где имеется, напр., сверхмощная универсальная ЦВМ и несколько средних и малых машин. Последние выполняют обычно достаточно простые функции: обслуживание внеш. устр-в и пультов операторов, сортировку данных и контроль, а также решение малых задач. Мощная ЦВМ используется при этом так, чтобы все ее сложнейшие функциональные блоки были загружены максимально. К. м. существенно повышает производительность ВЦ, способствует равномерной и эффективной загрузке его оборудования и рациональному использованию его мощностей. Возрастает не только к-во и объем решаемых задач, но увеличивается их разнообразие и сложность. ЦВМ комплексируют и в специализированных ВЦ, таких, как крупнейшие аэропорты, системы противо-



1. Схема координационно-вычислительного центра в г. Пассадене (США).  
2. Блок-схема аналого-цифрового комплекса «АЦЭМС-1».

языка, эффективно работающие в *диалога режиме* с оператором, — это интерпретирующие мощности. Конкретные ЦВМ можно одновременно специализировать в нескольких направлениях и, соответственно, применять их в качестве разных мощностей.

Эффект *распараллеливания* состоит в экономии машинного времени и достигается одновременным выполнением на разных машинах параллельных ветвей одного алгоритма. Эффект *общего запоминающего устройства* проявляется в гибкости распределения объема памяти и повышении эффективности его использования. Применительно к оперативному ЗУ этот эффект усили-

воздушной обороны, системы обслуживания космических полетов и т. п. В этих случаях необходимость К. м. вызвана большим объемом решаемых задач и трудностью решения существенной их части в *реальном масштабе времени*. Кроме того, в большинстве таких систем настолько возрастает требование к надежности работы ВЦ, что машины должны работать в дуплексном (двойное резервирование) и даже в триплексном (тройное резервирование) режимах.

Примером комплекса ЦВМ может служить Центральный вычислительный комплекс (ЦВК) координационно-вычислительного центра в г. Пассадене (США) — одного из основных звеньев в системе наземного обеспечения космических полетов на Луну и другие планеты (рис. 1). ЦВК включает в себя две ЦВМ высокой производительности типа «IBM-7094», две ЦВМ средней производительности типа «IBM-7040», две малые ЦВМ типа «IBM-1401», накопители на магнитных дисках (НМД), распределительно-преобразовательные устр-ва (РПУ) и ряд вспомогательных блоков. Обе «IBM-7094» используются в качестве осн. вычисл. мощностей. Машины «IBM-7040» служат обменными мощностями, а также выполняют функции контроля всех элементов ЦВК. Машины «IBM-1401» выступают в роли интерпретирующих мощностей, обслуживая пункт управления обменом информацией (ПУОИ) и устр-ва вывода и отображения информации. РПУ совместно с «IBM-7040» обеспечивают обмен данными с 48 внеш. устр-вами различного быстрого действия. Макс. скорость обмена РПУ и ЦВМ составляет 62 500 слов в 1 сек. НМД имеют емкость по 54 млн. знаков и служат для хранения выходных и необработанных данных от «IBM-7094», а также рабочих программ и констант. Устр-во управления НМД (УУ НМД) дает возможность осуществлять одновременный обмен с одной ЦВМ «IBM-7094» и одной ЦВМ «IBM-7040». Устр-во сопряжения машин (УСМ) обеспечивает обмен между машинами «IBM-7094» и «IBM-7040» 36-разрядными параллельными кодами, включается по запросу любой машины и используется в первую очередь для передачи управляющей информации между рабочими программами машин, а также для контроля при совместном использовании НМД. Связь между устр-вами ЦВК и внешними системами, в состав которых входит аппаратура контроля за полетом (АКП), система обработки телеметрической информации (СОТИ) и узел связи (УС), осуществляется посредством коммутатора (К). Для обеспечения надежной работы ЦВК предусмотрена возможность составления из элементов комплекса нескольких различных конфигураций дублирования и резервирования, одна из которых и выбирается в зависимости от требования к надежности и времени восстановления работоспособности ЦВК в текущий момент.

б) Необходимость комплексирования ЦВМ с АВМ вызвана появлением ряда задач, при решении которых требуется и высокая точность и универсальность цифровых машин, и большое быстроедействие аналоговых. Эти

задачи можно разделить на три группы. К первой группе задач относятся задачи моделирования в реальном масштабе времени динамики объектов, описываемых системами дифф. ур-ний, в которых переменные изменяются с разными скоростями и в разных диапазонах. Точность решения таких задач определяется гл. о. точностью представления медленно изменяющихся переменных. Примером такого типа объектов может служить летательный аппарат. Координаты его центра масс изменяются намного медленнее, чем переменные, описывающие его движение относительно центра масс. Положительный эффект от К. м. в этом случае достигается благодаря тому, что часть системы ур-ний, описывающая быстро изменяющиеся переменные, моделируется на АВМ, а другая часть — на ЦВМ. Ко второй группе задач относятся задачи, связанные с испытанием в процессе проектирования различных конструкций и алгоритмов работы цифровой управляющей машины с включением отдельных реальных узлов системы управления или управляемого объекта. Наличие реальных устр-в в модели требует реального масштаба времени ее работы (который во многих случаях можно осуществить лишь с помощью АВМ). Вместе с тем моделировать цифровую управляющую машину целесообразно в данном случае лишь на ЦВМ. Третья группа задач — это задачи, в которых система дифф. ур-ний является составной частью итерационного цикла. Такими задачами являются, напр., задачи оптим. управления или задачи статистического моделирования. Использование для решения системы дифф. ур-ний АВМ с ускоренным масштабом времени позволяет существенно сократить время решения таких задач.

Состав аналого-цифрового комплекса (АЦК) определяется его назначением. В общем случае этот комплекс содержит следующие части: аналоговую часть, цифровую часть, устр-во сопряжения и центр. пульт управления. В состав АЦК могут входить и вспомогательные узлы: индикационные и регистрационные блоки, узлы согласования, имитирующие блоки и т. п. Цифровая часть может содержать одну ЦВМ или комплекс ЦВМ различного класса и назначения. В аналоговую часть также может входить одна или несколько АВМ. Мощность и тип комплексированных машин определяется объемом и характером предполагаемых задач. Осн. ф-циями устр-ва согласования являются преобразование формы информации из цифровой в аналоговую и наоборот, синхронизация работы машин и управление всеми блоками и частями АЦК с целью координирования их совместной работы и наибольшей автоматизации процесса решения задачи. Блок управления и синхронизации обеспечивает реализацию циклических программ и выдачу разовых команд, а также осуществляет привязку системы к реальному времени. С центр. пульта управления организуют обращение к различным блокам АЦК и реализуют различные режимы работы АЦК.

К таким режимам можно отнести режимы пуска, останова, подготовки задачи, перевода системы на автономную работу отдельных машин, автономной проверки и отладки устр-ва сопряжения и режим тестовой проверки всего АЦК. Характерной особенностью работы с АЦК является необходимость программирования как аналоговой и цифровой части комплекса, так и способа их взаимодействия. В случае, когда аналоговая часть не допускает автомат. ввода информации, соответствующая часть задачи вводится непосредственно коммутацией на наборном поле АВМ и ручной установкой нужных параметров. Если же автомат. ввод в аналоговую часть возможен, вся программа решения задачи вводится в цифровую часть, которая затем полностью управляет аналоговой частью и перед решением задачи и в процессе решения.

На рис. 2 приведена схема аналого-цифрового комплекса «АЦЭМС-1», построенного на базе трехадресной универсальной ЦВМ средней мощности и двух аналоговых машин типа «МН-18». Комплекс «АЦЭМС-1» предназначен для решения нелинейных обыкновенных дифф. ур-ний в реальном масштабе времени и рассчитан на связь с реальной аппаратурой (РА). Для увеличения эффективности решения задач в АЦК созданы условия частичной автоматизации операций ввода и вывода *данных*, контроля результатов набора и решения задач. Работа вычисл. устр-в организуется единой системой управления ЦУУ. В системе имеются три осн. сигнала управления: «пуск», «останов» и «исходное положение», которые используются во всех устр-вах комплекса. Осн. режимами работы комплекса являются решение и контроль блоков. Устр-во преобразования информации УП-3 осуществляет преобразование *машинных переменных*, поступающих из аналоговой части в виде величин напряжений в цифровой код и наоборот. Комплекс «АЦЭМС-1» позволяет моделировать в реальном масштабе времени процессы, скорость изменения сигналов в которых не превышает скорости изменения синусоиды с амплитудой 50 *в* и частотой 5 *гц*. При этом, напр., точность решения задачи продольного полета самолета на один-два порядка выше, чем при решении на аналоговых машинах. Решение той же задачи только на цифровой машине с той же точностью требует увеличения масштаба времени в десять раз.

в) Комплексование АВМ чаще всего связано со специфическими для АВМ ограничениями, накладываемыми на порядок системы решаемых ур-ний, на *к-во* нелинейностей и переменных коэфф. и т. п. В этом случае *К. м.* ведет к простому увеличению вычисл. мощности. При этом осуществляется построение модели системы ур-ний, в которой составными частями являются блоки двух или более аналоговых машин. Никаких существенных мер по стыковке и согласованию работы машин в этом случае принимать не приходится. Однако в ряде случаев комплексование узко специализированных аналоговых машин дает качественный эффект. Напр., комплекс, состоящий из

гидроинтегратора «ИГ-1» и электроинтегратора «ЭГДА-9-60» очень эффективно используют при решении задач конвективного теплообмена в слое. Процесс решения разбивают на последовательность временных интервалов, в каждом из которых сначала методом электрогидродинамических аналогий решается на «ЭГДА-9-60» гидродинамическая часть задачи, а затем, используя полученный результат, методом гидротепловых *аналогий* на «ИГ-1» производится расчет теплового поля в этом временном интервале (см. *ЭГДА, Моделирование на сплошных средах*).

Лит.: Г о л у б е в - Н о в о ж и л о в Ю. С. Многомашинные комплексы вычислительных средств. М., 1967 [библиогр. с. 402—415]; К у д р я ш о в И. А. [и др.]. Аналоговые и комбинированные электронные вычислительные машины. Л., 1969 [библиогр. с. 445—446]; Г л у ш к о в В. М. [и др.]. Некоторые основные направления развития цифровой вычислительной техники. М., 1970 [библиогр. с. 91—94].

Л. А. Казакевич.

**КОМПЛЕКТ ПЕРФОРАЦИОННЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ** — набор устройств, выполняющих основные и вспомогательные операции при обработке информации. В комплекте используют во взаимосвязи одна с другой группы устройств: 1) подготовки перфокарт (*перфораторы, контрольные*, перфораторы репродукционные, считывающие, итоговые); 2) упорядочения массивов перфокарт (сортировочные и раскладочно-подборочные машины); 3) математической обработки информации, нанесенной на перфокарты (*табуляторы* и перфораторы вычислительные электронные); 4) печати данных, нанесенных на перфокарты (расшифровочные машины для перекодирования информации на перфокарты и на печать). Производительность перфорационных вычислительных устройств неодинакова, поэтому их используют в таком количественном соотношении, которое обеспечивает максимальную загрузку высокопроизводительного устройства — табулятора. В типовой *К. п. в.* включают один табулятор, одну *сортировальную машину*, три перфоратора и два контрольного. Потребность и количество этих устройств в комплекте определяется в зависимости от объема и характера обрабатываемой информации. *К. п. в.* входит в оборудование машинно-счетных станций и вычислительных центров. Предназначен для автоматического выполнения массовых вычисл. и вычисл.-записывающих операций при обработке информации. Использовать его целесообразно там, где количество результативных чисел в несколько раз больше количества вводимых или в крайнем случае равно им. Применение *К. п. в.* для механизации учетно-вычислительных работ значительно сокращает сроки составления отчетных сводок, ускоряет документооборот, улучшает качество учетных данных, повышает производительность труда работников учета в 2—3 раза по сравнению с ручной техникой учета.

С. П. Куценко.

**КОМПЬЮТЕР** (англ. computer, от лат. computo — считаю, вычисляю) — принятое в иностранной (гл. обр. англоязычной) литературе название *электронной вычислительной машины*.

**КОНЕЧНОРАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ**, методы сеток — численные методы решения алгебраических, дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, основанные на замене дифференциальных операторов разностными операторами, интегралов — суммами, а функций непрерывного аргумента (н. а.) — функциями дискретного аргумента (д. а.). Такая замена приводит к системе, вообще говоря, нелинейных алгебр. ур-ний, которые в конечном итоге сводятся к линейной системе к.-л. итерационным методом.

Если исходная задача имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + f, \quad (1)$$

$$(x, t) \in \Omega,$$

$$lu = g, \quad (x, t) \in \partial D \times T; \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

где  $\Omega = D \times T$  — цилиндрическая область интегрирования,  $t \in T = [0, t_0]$ ,  $\partial D \times T$  — граница области  $\Omega$ ,  $D$  — ее основание,  $u$  — искомая вектор-ф-ция,  $f$  и  $g$  — заданные вектор-ф-ции,  $x$  — пространственный векторный аргумент,  $A$  и  $l$  — операторы (не обязательно ограниченные), то простейшая схема интегрирования исходного ур-ния имеет вид:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_0 u^n + F, \quad (2)$$

$$(x, t) \in \Omega_h,$$

$$\lambda u^n = G, \quad (x, t) \in \partial D_h \times T; \quad u^0 = u_0.$$

Здесь  $u^n$  — сеточная ф-ция, являющаяся решением разностного ур-ния,  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_0$ ,  $\lambda$  — разностные операторы, зависящие от параметров  $\tau$ ,  $h$  сетки,  $t = n\tau$ ,  $\Omega_h$  — сеточная область, аппроксимирующая некоторым образом область  $\Omega$ ,  $\partial D_h \times T$  — ее граница,  $F$  и  $G$  — сеточные ф-ции, аппроксимирующие ф-ции  $f$  и  $g$  соответственно. Частным случаем схемы (2) является схема с весами, когда  $\Lambda_1 = \alpha\Lambda$ ,  $\Lambda_0 = (1 - \alpha)\Lambda$ ,  $\alpha$  — весовой коэфф. Схема (2) наз. *двухслойной*, т. к. она связывает между собой значения  $u^n$ ,  $u^{n+1}$  разностного решения на двух временных слоях  $n\tau$ ,  $(n+1)\tau$ ; возможны также и многослойные схемы. Если оператор  $E = \tau\Lambda_1$ , где  $E$  — единственный оператор, обратим, то схема (2) может быть представлена в разрешенном виде

$$u^{n+1} = \sigma u^n + \Phi, \quad (3)$$

где оператор  $\sigma$  наз. оператором шага разностной схемы и учитывает краевые условия, а  $\Phi$  — ф-ция, зависящая от  $F$  и  $G$ . Говорят, что оператор  $\Lambda(\tau)$ , зависящий от параметра  $\tau$ , аппроксимирует (приближенно) оператор  $A$ , если  $\|\Lambda(\tau) - A\| u = \varepsilon_n(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Здесь  $u \in U$  — некоторое эталонное семейство ф-ций, на котором проверяется аппроксимация (напр., семейство достаточно гладких ф-ций). Схема (2) наз. *корректной*, или *устойчивой*, если

$\|\sigma\|_B = 1 + O(\tau)$ , где  $\|\sigma\|_B$  означает норму оператора  $\sigma$  в некотором банаховом простр.  $B$  (см. *Пространство абстрактное* в функциональном анализе), которое может зависеть от  $h$ . Схема (2) аппроксимирует ур-ние (1), если  $\Lambda_1 + \Lambda_0 \approx A$ ,  $\lambda \approx l$ . Для линейных систем ур-ний установлены теоремы сходимости, утверждающие, что сходимость разностного решения к решению исходного ур-ния следует из аппроксимации и корректности (устойчивости) разностной схемы.

Если свойства аппроксимации, устойчивости и сходимости имеют место лишь при некотором соотношении между параметрами сетки  $\tau$ ,  $h$ , где  $h = h(\tau)$ , то их наз. *условными*. Если же эти свойства справедливы при любом соотношении между  $\tau$  и  $h$ , то их наз. *абсолютными*. Схема (2) наз. *явной*, если  $\Lambda_1 \equiv 0$ , и *неявной*, если  $\Lambda_1 \neq 0$ . Абсолютно сходящиеся схемы существуют лишь в классе неявных схем. Как правило, при соответствующем выборе параметров схемы (напр., весовых коэфф.) неявные схемы являются абсолютно устойчивыми, они допускают сколь угодно большой шаг  $\tau$ . Но обращение оператора  $E = \tau\Lambda_1$  усложняет алгоритм. В случае одномерных задач неявные схемы реализуют *факторизации методом*; они являются достаточно экономичными. Для многомерных задач неявные экономичные схемы получают с помощью *дробных шагов метода*, который сводит многомерные задачи к последовательности одномерных или более простых задач. Для решения стационарных задач применяют метод стационарирования (установления), в котором стационарное решение рассматривается как предел нестационарного решения со стационарными (или устанавливающимися) краевыми условиями. В соответствии с этим стационарную задачу решают итерационным методом, аналогичным разностному методу интегрирования (2). В отличие от нестационарного случая, оператор  $\sigma$  для итерационного процесса должен быть сильно устойчив, т. е. должен удовлетворять условию  $\|\sigma\|_B = 1 - \varepsilon(h)$ ,  $\varepsilon(h) > 0$ .

При решении нелинейных задач, особенно в механике сплошной среды, применяют комбинации схем интегрирования с итерационными методами (т. н. итерации по нелинейности). Лит.: Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. М., 1962 [библиогр. с. 272—274]; Яненко Н. Н. Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967 [библиогр. с. 189—193]; Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971 [библиогр. с. 538—550]; Рихтмайер Р. Д., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. Пер. с англ. М., 1972 [библиогр. с. 381—413].

**КОНКУРЕНЦИИ МОДЕЛИ** — модели состояния экономической системы в условиях рыночной конкуренции, отражающие соотношение между спросом, предложением и ценами на товары. Состояние равновесия системы заключается в непревышении спроса над предложением на рынке, оно наступает для цен  $\{p^*\}$ , объемов спроса  $\{y_1^*, \dots, y_m^*\}$  и предложения  $\{x_1^*, \dots, x_m^*\}$  при выполнении следующих

ограничений. Во-первых, каждый  $j$ -й производитель отыскивает планы затрат — выпуска  $X_j^*$ , обеспечивающие максимум прибыли в ценах равновесия  $(p^*, x_j^*) = \max (p^*, x_j)$  для  $j = 1, 2, \dots, n$  и  $x_j \in X_j$ , где  $X_j$  — мн-во всевозможных планов затрат — выпуска  $j$ -го производителя. В такой модели математической рассматриваются лишь относительные цены. Поэтому вектор цен нормирован следующим образом  $p = \{p_1, \dots, p_r\}$ ,  $p_v \geq 0$ ,  $\sum_{v=1}^r p_v = 1$ .

Во-вторых, каждый  $i$ -й потребитель максимизирует полезность приобретенных им товаров  $U_i(y_i)$  среди всех возможных векторов потребления при условии, что издержки на приобретение товаров не превышают получаемого дохода:  $(p^*, y_i) \leq (p^*, z_i) + \sum_{j=1}^h \alpha_{ij} (p^*, x_j^*)$ , где  $z_i$  — вектор товаров, которыми располагает  $i$ -й потребитель на начальный период;  $\alpha_{ij}$  — доля  $i$ -го потребителя в прибыли  $j$ -го производителя, обусловленная договором (напр., наличием акций). В-третьих, спрос всех потребителей удовлетворяется товарами, произведенными в системе и имеющимися на начальный период. При этом любой товар, поставляемый сверх имеющегося спроса, получает нулевую цену:  $y^* \leq x^* + z^*$ ,  $(p^*, y^* - x^* - z^*) = 0$ , где вектор  $y^*$  отражает суммарный спрос всех потребителей, т. е.  $y^* = \sum_{i=1}^m y_i^*$ ;

вектор  $x^*$  — суммарный объем производства в системе, т. е.  $x^* = \sum_{j=1}^n x_j^*$ ; вектор  $z^*$  — общий объем товаров в системе для начальной торговли  $z^* = \sum_{i=1}^m z_i^*$ .

Лит.: Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. Пер. с англ. М., 1964 [библиогр. с. 798—819].  
Архангельский Ю. С., Приходько Т. И., Фесенко Е. Д.

**КОНСТРУКТИВНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ В МАТЕМАТИКЕ**, конструктивная математика — направление исследований, ставящее своей главной задачей перестройку важнейших частей традиционной (классической) математики в соответствии со следующими методологическими принципами. 1) Системы матем. объектов, изучаемые в таких теориях, всегда описываются как системы конструктивных объектов. 2) Центр. место занимает изучение соответствий, заданных при помощи алгоритмов. 3) Утверждение о существовании матем. объекта, удовлетворяющего некоторому условию, считается доказанным только тогда, когда указан способ построения такого объекта. Под системой конструктивных объектов понимается система, описанная следующим образом: а) описаны некоторые исходные матем. объекты, которые рассматриваются как

элементарные, нерасчленяемые на части; б) перечислены некоторые способы комбинирования исходных объектов между собой; в) указано условие, которому удовлетворяют те и только те комбинации исходных объектов, которые считаются элементами системы; г) указано условие, при котором два элемента системы считаются равными. При этом используется абстракция потенциальной осуществимости, т. е. процесс построения комбинаций исходных объектов представляется не связанным никакими ограничениями в пространстве, времени или материале. С другой стороны, указанная особенность теорий, принадлежащих к К. н. в м., исключает рассмотрение совокупностей элементов некоторой системы конструктивных объектов безотносительно к какому-либо способу описания этих совокупностей, требующее привлечения абстракции актуальной бесконечности. В конструктивной математике допустимы данные в классической математике определения понятий целого числа, рационального числа, полинома с рациональными коэфф., но не допустимы данные в ней определения вещественного числа, ф-ции, множества и т. п. В соответствии с п. 2 термин «функция» связывается лишь с теми соответствиями, которые описаны посредством задания алгоритма, позволяющего эффективно найти (построить) значение ф-ции по значению аргумента. Аналогичным образом понимаются термины «последовательность», «отображение», «функционал» и т. п. Поэтому некоторые способы задания отображений, используемые в классической математике, не используются в конструктивной. В соответствии с п. 3 в конструктивной математике считаются недопустимыми «чистые» доказательства существования, как, напр., известные доказательства теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывных ф-ций с помощью теоремы Больцано — Вейерштрасса и «основной теоремы алгебры» с помощью теоремы Лиувилля о целых ф-циях. Аналогично, если доказывается утверждение о том, что всякий матем. объект некоторого типа удовлетворяет одному из нескольких условий, необходимо указывать способ, позволяющий узнать, какое из условий выполняется. Исследование конструктивного понимания матем. суждений и конструктивных доказательств составляет предмет спец. раздела матем. логики (см. *Логика конструктивная*). Требования к доказательствам, предъявляемые в конструктивной математике, близки к интуиционистским (см. *Интуиционизм*), но в некоторых пунктах отличаются от них. Исследования основоположников интуиционизма Л. Брауэра и др., наряду с исследованиями норв. математика Т. Сколема (р. 1887) по теории рекурсивных ф-ций и англ. математика А. Тьюринга (1912—1954) по теории алгоритмов, послужили одним из идейных источников К. н. в м. Философско-матем. взгляды современных конструктивистов далеки от интуиционистской философии. Однако К. н. в м. интересно независимо от каких бы то ни было позиций в области философии математики.



В принципе каждой теории классической математики соответствует аналогичная теория конструктивной математики; в этом смысле говорят о конструктивном дифф. исчислении, конструктивной теории множеств и т. п. Соотношение между системами понятий классической теории и соответствующей конструктивной теории в некоторых случаях является довольно сложным. Иногда одному понятию классической теории соответствуют два понятия конструктивной теории и наоборот. В ряде случаев понятие классической математики вообще не находит себе конструктивных эквивалентов, и наоборот, некоторые понятия, определяемые в конструктивной математике, не имеют эквивалентов в классической. Такой же характер носит соответствие между теоремами классической и конструктивной теорий. Иногда для доказательства конструктивного аналога классической теоремы требуется привлечение совершенно новых идей. Работы, посвященные конструктивизации классической математики, принадлежащие большей частью к тому варианту конструктивной математики, который сформировался в 1950-х гг. в работах сов. математика А. А. Маркова (р. 1903) и его учеников, относятся к теории функций вещественной переменной и функциональному анализу (см. *Конструктивный анализ*). Кроме того, уже имеются работы, посвященные конструктивизации теории ф-ций комплексного переменного, теории обобщенных ф-ций, теории вероятностей, теоретико-множественной и комбинаторной топологии и некоторых др. теорий. Различные теории преобразуются при этом в разной степени: элементарная теория чисел и комбинаторика переносятся в конструктивную математику практически без изменений, а из теории множеств сохраняется лишь сравнительно небольшая часть (включая, впрочем, все то, что имеет серьезные приложения к анализу). В целом исследования, принадлежащие к К. н. в м., позволяют в настоящее время сделать вывод, что математические теории, важные для приложений математики, в основном могут быть построены в рамках конструктивной математики.

Главное преимущество конструктивного способа построения математики перед классическим состоит в том, что конструктивная математика дает возможность весьма просто выяснить вопрос о том, по каким исходным данным может быть построено решение той или иной матем. задачи: здесь по формулировке теоремы о существовании матем. объекта сразу можно сказать, по каким исходным данным этот объект может быть построен, а проводимое иногда в классической математике различие эффективных и неэффективных доказательств не всегда приводит к полному решению этого вопроса. Как правило, конструктивная теория выглядит более громоздкой и сложной, чем соответствующая классическая теория. Эта громоздкость составляет осн. недостаток конструктивного подхода к построению математики по сравнению с классическим. Однако в послед-

нее время были достигнуты определенные успехи в разработке методики изложения конструктивных теорий, дающие основание отнести отмененную громоздкость в основном за счет того, что в конструктивной математике еще не выработана удобная форма изложения.

Исследования по конструктивной математике во многом стимулировали развитие логики математической и алгоритмов теории. Установленная в результате этих исследований возможность построения осн. разделов математики существенно разными способами имеет большое принципиальное значение. Дальнейшие исследования в этой области направляются, гл. о., желанием выяснить, не сможет ли конструктивная математика, ввиду наличия у нее существенных преимуществ перед классической, заменить ее. Процессы такого рода имели место в истории математики (например, смена атомистической геометрии Демокрита геометрией Эвклида). Несмотря на успехи, достигнутые К. н. в м., число его сторонников в настоящее время невелико.

Лит.: Марков А. А. О конструктивной математике. — Шанин Н. А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1962, т. 67; Bishop E. Foundations of constructive analysis. New York, 1967; Гудстейн Р. Л. Рекурсивный математический анализ. Пер. с англ. М., 1970.

В. А. Лифшиц.

**КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ**, рекурсивный анализ, вычислимый анализ — название, объединяющее различные течения в основаниях математики и математическом анализе. Как правило, при построении К. а. преследуются все или некоторые из следующих принципиальных целей: 1) построение системы анализа, спец. ориентированной на реальные конструктивные и вычислительные возможности (часто отступающие на второй план при традиционном теоретико-множественном построении анализа); 2) изучение принципиальных границ вычислительных возможностей в анализе, изучение «эффективности» в анализе (в частности, исследование вопроса о том, по каким исходным данным можно эффективно находить те или иные объекты анализа); 3) изучение вычислимых объектов анализа (вычислимых действительных чисел, вычислимых функций над ними и т. п.) самих по себе в том смысле, в котором, напр., в алгебре изучаются группы.

Имеющиеся здесь исследования можно очень грубо разделить на два типа: проводимые в рамках традиционного анализа и формально независимые от него. Первое направление представлено рядом работ, в том числе основополагающими работами А. Тьюринга, С. Банаха и С. Мазура, Э. Шпекера, в которых были, по существу, выработаны современные концепции вычислимого действительного числа. Ко второму типу относятся исследования по интуиционистскому анализу, возникшие в связи с выдвинутой Л. Брауэром интуиционистской программой построения математики и оказавшие существенное влияние на формирование задач и методов К. а., рекурсивный

анализ Р. Гудстейна, а также оригинальная и далеко продвинутая система К. а., развитая в последнее время Е. Бишопом. В Советском Союзе, начиная с 50-х годов, интенсивно разрабатывалась система К. а., относящаяся ко второму типу и являющаяся частью общей программы конструктивного построения математики (см. *Конструктивное направление в математике*). Основополагающий вклад в развитие этой системы (для краткости ее наз. «конструктивный анализ») внесли А. А. Марков, Н. А. Шанин и их ученики. Являясь частью конструктивной математики, К. а. сохраняет характерные черты последней. В частности, рассмотрения ограничиваются конструктивными объектами (чаще всего словами в некоторых алфавитах или объектами, допускающими очевидное кодирование словами) и проводятся в рамках абстракции потенциальной осуществимости с применением спец. конструктивных правил понимания матем. суждений. При этом полностью исключается использование абстракции актуальной бесконечности и интуитивное понятие «эффективности» связывается с одним из точных понятий алгоритма (в большинстве работ, относящихся к рассматриваемой системе К. а., используется понятие нормального алгоритма).

В рамках К. а. получено большое число результатов, интересных как с точки зрения проблематики цели 1-й, так и с точки зрения целей 2-й и 3-й. По существу показана возможность построения средствами конструктивной математики ряда теорий, таких как теория рядов, интегрирования по Риману и Лебегу, теория функций комплексного переменного, теория обобщенных функций и т. п. Получающиеся конструктивные теории обладают, наряду со сходством с одноименными традиционными теориями, и заметными отличиями от них, впрочем отличия эти проявляются не столько в конкретных вопросах, связанных с приложениями анализа, сколько в теор. концепциях (таких, напр., как концепция компактности и т. д.). Фундаментальными понятиями К. а. являются понятия конструктивного действительного числа (КДЧ) и конструктивной функции действительной переменной. Конструктивные действительные числа можно ввести различными (не всегда эквивалентными) способами. Одним из естественных путей является следующий путь, аналогичный канторовскому построению действительных чисел в традиционном анализе. Сначала вводятся натуральные числа, как слова в двухбуквенном алфавите  $\{0, 1\}$  вида  $0, 01, 011, \dots$ . Аналогично определяются рациональные числа, как слова некоторого типа в алфавите  $\{0, 1, -, /\}$ . Определяются отношения порядка и равенства над рациональными числами, а также арифм. операции над ними. Конструктивной последовательностью натуральных чисел (КПНЧ) наз. нормальный алгоритм, перерабатывающий всякое натуральное число в натуральное число. Аналогичным образом трактуется понятие конструктивной последовательности рациональных чисел (КПРЧ). Схемы

нормальных алгоритмов однозначным образом кодируются словами в алфавите  $\{0, 1\}$ ; код данного алгоритма наз. его *записью*. КПНЧ  $\alpha$  наз. регулятором фундаментальности КПРЧ  $\beta$ , если для любых натуральных  $l, m, n$  таких, что  $l, m \geq \alpha(n)$  выполняется неравенство  $|\beta(l) - \beta(m)| < 2^{-n}$ . КПРЧ наз. фундаментальной, если можно построить ее регулятор фундаментальности. Конструктивными действительными числами (КДЧ) наз. рациональные числа, а также слова в алфавите  $\{0, 1, \diamond\}$  вида  $U \diamond V$ , где  $U$  — запись некоторой КПРЧ,  $V$  — запись КПНЧ, являющейся регулятором фундаментальности этой КПРЧ. Описанное понятие КДЧ хорошо согласуется с интуитивным представлением о вычислимых действительных числах как объектах, допускающих эффективную сколь угодно точную аппроксимацию рациональными числами. Для КДЧ можно определить естественным образом отношения порядка и равенства и арифм. операции (причем, последние задаются алгоритмами). Система КДЧ с этими отношениями равенства и порядка и арифм. операциями называется полем. Далее можно ввести в рассмотрение конструктивные последовательности КДЧ (КПДЧ) и определить в том же порядке идей, что и выше, понятие фундаментальной КПДЧ и понятие конструктивной сходимости КПДЧ к данному КДЧ. Относительно такого понятия сходимости система КДЧ оказывается полной: существует алгоритм, находящий, исходя из записи всякой фундаментальной КПДЧ  $\gamma$  и записи ее регулятора фундаментальности, КДЧ, к которому (конструктивно) сходится  $\gamma$ . Методом, аналогичным канторовскому, можно доказать также теорему о конструктивной несчетности множества всех КДЧ, состоящую в том, что осуществим алгоритм, перерабатывающий запись всякой КПДЧ в КДЧ, отличное (в смысле равенства КДЧ) от всех членов этой КПДЧ. Теорема о полноте придает значительное сходство конструктивной и классической теории пределов, особенно сильно проявляющееся в вопросах сходимости тех или иных конкретных, используемых в анализе, последовательностей и рядов. Но здесь имеются и существенные отличия, проявляющиеся, напр., в следующем результате Э. Шпекера: можно построить возрастающую КПРЧ  $\beta$  такую, что всегда  $0 < \beta(n) < 1$  и, несмотря на это,  $\beta$  не является фундаментальной (и, следовательно, не сходится (конструктивно) ни к какому КДЧ).

Понятие конструктивной функции (КФ) является естественным уточнением интуитивного понятия точечной вычислимой функции над вычислимыми действительными числами. Конструктивной функцией (одной действительной переменной) наз. нормальный алгоритм такой, что для любых равных КДЧ  $x$  и  $y$ , если  $F$  применим к  $x$ , то  $F$  применим к  $y$  и  $F(x), F(y)$  — равные КДЧ. В терминах КФ могут быть введены элементарные функции (показательная функция, тригонометрические функции и т. д.), обладающие обычными свойствами; для КФ могут быть развиты теории диффе-

ренцирования, интегрирования по Риману и т. д., близкие к традиционным. Вместе с тем, возможны и необычные с традиционной точки зрения функции: напр., существует всюду определенная КФ, непрерывная на единичном сегменте и неограниченная на нем. Не имеет аналогов в традиционном анализе и теорема, согласно которой всякая КФ конструктивно непрерывна в любой точке, в которой она определена.

Система понятий и методы К. а., позволяя существенно продвинуться с точки зрения цели 1-й, оказались также удобными для выявления вычислительных связей в анализе, поскольку многие теоремы К. а. являются либо утверждениями об осуществимости алгоритмов, строящих некоторые конструктивные объекты по тем или иным исходным данным, либо утверждениями, что такие алгоритмы невозможны. Установлена неразрешимость большого числа естественных массовых проблем анализа. Результаты этого типа (совершенно отсутствующие в курсах традиционного анализа) имеют теор. и практич. ценность, т. к. они выявляют потенциальные вычислительные тупики и способствуют четкому уяснению принципиальных границ вычислительных возможностей. Напр., доказана невозможность следующих алгоритмов (в смысле одного из точных понятий алгоритма): 1) распознающего для произвольного конструктивного действительного числа (КДЧ), равно оно нулю или нет; 2) находящего для каждой сходящейся конструктивной последовательности рациональных чисел то КДЧ, к которому она сходится; 3) находящего для каждой совместной системы линейных уравнений (над полем КДЧ) какое-нибудь ее решение; 4) находящего для каждой непрерывной, кусочно-линейной, знакопеременной функции корень этой функции; 5) находящего для всякой непрерывной, кусочно-линейной на единичном сегменте функции ее интеграл Римана по этому сегменту. Теоремы невозможности алгоритмов часто сопровождаются в К. а. теоремами о существовании алгоритмов, решающих рассматриваемые задачи по более полным исходным данным (сравните теорему о полноте КДЧ и 2-й пример) или с произвольной, наперед заданной точностью (напр., можно построить алгоритм, находящий для каждой всюду определенной знакопеременной конструктивной функции  $f$  и каждого  $n$  КДЧ  $x_{f,n}$  так, что  $|f(x_{f,n})| < 2^{-n}$ ). Сопоставление таких результатов позволяет в ряде ситуаций получить представление о том, как можно корректно ставить ту или иную алгоритм. проблему.

Лит.: «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 52; 1962, т. 67; 1964, т. 72; 1967, т. 93; Вейль Г. О философии математики. Пер. с нем. М.—Л., 1934; Turing A. M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungs problem. «Proceedings of the London Mathematical Society», 1936, series 2, v. 42, part 3; Turing A. M. A correction. «Proceedings of the London Mathematical Society», 1937, series 2, v. 43; Specker E. Nicht Konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis. «The Journal of symbolic logic», 1949, v. 14, № 3; Mazur S. Computable analysis. «Rozprawy matematyczne» [Warszawa], 1963, t. 33 [библиогр.

с. 109—110]; Гудстейн Р. Л. Рекурсивный математический анализ. Пер. с англ. М., 1970; Кушнер Б. А. Лекции по конструктивному математическому анализу. М., 1973 [библиогр. с. 427—440].

Б. А. Кушнер.

«КОНТРОЛ ДЕЙТА КОРПОРЕЙШЕН» (Control Data Corporation) — американская фирма, специализирующаяся на выпуске электронных цифровых вычислительных машин большой производительности для научных расчетов. Основана в 1957. С 1960 выпускает ЦВМ на транзисторах, семейство «CDC-3000» с производительностью 300—800 тыс. операций/сек и семейство «6000» с производительностью 1,5—3,5 млн. операций/сек. ЦВМ «CDC-6600» была первой вычисл. машиной, использующей для увеличения производительности мультипроцессорную структуру из одного центр. и десяти вспомогательных специализированных процессоров. В 1969 фирма выпустила одну из крупнейших в мире ЦВМ (см. «CDC-7600») с производительностью более 10 млн. операций в 1 сек. В 1970 окончилась разработка сверхмощной ЦВМ «Star-100», выполняющей до 100 млн. операций в 1 сек, имеющей информационный банк емкостью до 100 млн. бит и систему ввода — вывода с пропускной способностью 100 млн. знаков в 1 сек. В машине реализован принцип поточной обработки в структуре из нескольких специализированных процессоров и использованы интегральные схемы. С 1972 начат выпуск программносовместимых ЦВМ «Cyber-70». Модели «72», «73» и «74» соответствуют моделям «6400», «6500» и «6600», но отношение производительности к стоимости у них в 1,5—2 раза лучше, и их можно использовать с одним и двумя процессорами. Высокая производительность в них достигается благодаря использованию периферийных процессоров (до 20) для управления периферийными устройствами при количестве каналов ввода — вывода до 24. Последняя машина семейства «Cyber-76» аналогична модели «CDC-7600». Все семейство построено на дискретных компонентах и использует операционную систему «Score».

Лит.: Зейденберг В. К., Матвеев Н. А., Тароватова Е. В. Обзор зарубежной вычислительной техники по состоянию на 1970 г. М., 1970; Sippl C. J. Computer dictionary and handbook. Indianapolis — New York, 1968.

Ю. П. Селиванов.

**КОНТРОЛЬ АВМ** — совокупность операций, связанных с проверкой работы АВМ, локализацией ее отказов, их предупреждением и прогнозированием. По целевому назначению операции К. АВМ делят на следующие группы.

1) Предварительный контроль, который осуществляется перед использованием машины и решением набранной на ней задачи и заключается в общей проверке готовности АВМ к работе (проверка источников питания машины, работоспособности и точности настройки решающих блоков, правильности функционирования систем управления, контроля и регистрации, решение контрольных задач) и контроле набора задач в АВМ.

2) Оперативный контроль — контроль правильности работы АВМ в процессе решения задачи. Заключение о работе

АВМ во время решения часто делается на основе более полного вида контроля — контроля правильности решения. К числу осн. методов оперативного контроля относятся интуитивный, функциональный и схемный. Интуитивный метод основан на глубоком знании оператором машины существа исследуемой на АВМ задачи. При этом оператор непосредственно по характеру поведения выходных характеристик исследуемой системы может оценить работоспособность АВМ. Функциональный метод, к которому в основном относятся контроль решения по обобщенным характеристикам исследуемого на АВМ процесса (напр., по частоте колебаний для колебательных систем) и контроль методом избыточных переменных, связанный с введением избыточности на уровне исходных уравнений или на уровне функциональных блоков структурной схемы моделирования, используется в основном для контроля линейных задач и линейных блоков. Схемный метод — контроль исправности отдельных блоков и систем машины: источников питания, операционных усилителей (перегрузка, дрейф выходной величины).

3) **Диагностический контроль** осуществляется для локализации причины отказа, выявляемого в процессе предварительного и оперативного контроля. Для локализации неисправностей машины используются как интуитивные способы, так и формальные методы поиска, наиболее просто реализуемые в режиме статического контроля. Диагностику отказов АВМ можно производить и на основе метода избыточных переменных.

4) **Профилактический контроль**, выполняемый для увеличения среднего времени безотказной работы АВМ, обычно производится в объеме указанной выше общей проверки готовности АВМ к работе с применением граничных режимов работы, а также с использованием специальных испытательных пультов для тщательной проверки блоков машины.

Лит.: Игнатьев М. В. О решении дифференциальных уравнений в системах с контролем и коррекцией. В кн.: IV Всесоюзная конференция-семинар по теории и методам математического моделирования. К., 1964; Вычислительная техника. Справочник. Пер. с англ., т. 1. М.—Л., 1964. Г. И. Бердяков.

**КОНТРОЛЬ НАБОРА ЗАДАЧ В АВМ** — совокупность операций, связанных с проверкой правильности подготовки к решению набранной на АВМ структурной схемы моделирования. Первый этап — проверка правильности соединений, выполненных на *наборном поле* машины, обычно осуществляется визуально, редко — автоматически. Осн. методом К. н. з. в АВМ является **статический контроль**, заключающийся в сопоставлении напряжений на выходах блоков схемы моделирования с их расчетными значениями при задании контрольных значений переменных набираемой задачи в режиме исходного состояния машины. Структурная схема моделирования в режиме статического контроля не содержит обратных связей, приводящих к неразличимым состояни-

ям при появлении ошибок в схеме. Это позволяет использовать общие методы контроля и диагностики непрерывных и комбинационных систем, легко поддающиеся формализации и автоматизации. Для более полной проверки схемы моделирования (проверки реактивных элементов, устойчивости, предварительной оценки точности решения) используют методы **динамического контроля**, простейшим видом которого является проверка постоянных времени и общей работоспособности интегрирующих блоков, выполняемая в режиме интегрирования при постоянном входном напряжении и фиксированном времени. Проверка схем, воспроизводящих дробно-рациональные передаточные ф-ции, осуществляется сравнением расчетных динамических характеристик схем с экспериментальными. Более сложным видом динамического контроля является проверка схемы моделирования по частям, динамические характеристики которых известны, или путем постепенного усложнения схемы, начиная с простого замкнутого контура с известными характеристиками. Во многих случаях важным этапом является проверка устойчивости схемы при нулевых начальных значениях производных, а также сравнение пробного решения с расчетным в установившемся режиме. Для проверки правильности выбранного масштаба времени этот масштаб увеличивается (обычно в 2 раза) и производится сравнение решений, полученных в двух различных масштабах.

Лит.: Шаповров О. М. Техника работы на электронных моделирующих установках. Л., 1968; Вычислительная техника. Справочник. Пер. с англ., т. 1. М.—Л., 1964. Г. И. Бердяков.

**КОНТРОЛЬ ПРОГРАММНЫЙ** — контроль, устанавливающий с помощью специальных программ отсутствие постоянных ошибок в работе машины или отд. ее устройств, правильность программ для ЦВМ, отсутствие случайных ошибок (сбоев) в работе машины и правильность вычислений. К. п. отсутствия постоянных ошибок в работе машины производят испытательными программами при наладке машины или при ее проверке. К. п. правильности программ ЦВМ является одной из форм отладки программы на машине и осуществляется с помощью спец. *отладочных программ*. К. п. отсутствия сбоев в работе машины выполняется группами команд, включаемых в программу решения задачи.

Примером такого К. п. является **повторный счет**, который осуществляется путем повторного выполнения каждого участка программы при одних и тех же наборах исходных данных и сравнения результатов счета. Если каждый счет приводит к большому к-ву результатов, то применяется контрольное суммирование их и сравнение не самих результатов, а их контрольных сумм или др. показателей. К. п. правильности вычислений при решении задачи осуществляется нередко т. н. способом **контрольных соотношений**. Если получаемые результаты должны удовлетворять к.-л. соотношению, известному заранее и не используемому для получения этих результатов, то в опре-

деленные промежутки вычислительного процесса производится (предусмотренная в программе) проверка — удовлетворяют ли полученные результаты с достаточной степенной точности такому контрольному соотношению.

В ряде случаев в качестве контрольных соотношений используются исходные уравнения. Напр., при решении алгебраич. уравнения  $F(x) = 0$  найденное значение неизвестного  $x = a$  подставляется в исходное уравнение и вычисляется значение функции  $F(a)$ . Если  $|F(a)| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданное малое положительное число, то найденное значение  $x = a$  считается правильным. См. также *Диагностика неисправностей ЦВМ*.

Лит.: Гнеденко Б. В., Корольков В. С., Ющенко Е. Л. Элементы программирования. М., 1963 [библиогр. с. 347—348]; Миронов Г. А. Испытательные программы для контроля электронных цифровых машин. М., 1964 [библиогр. с. 266—267]; Голубев-Новожилов Ю. С. Многомашинные комплексы вычислительных средств. М., 1967 [библиогр. с. 402—415]; Ледли Р. С. Программирование и использование цифровых вычислительных машин. Пер. с англ. М., 1966 [библиогр. с. 628—630]. Г. Д. Фролов.

**КОНТРОЛЬ ЦВМ** — определенный процесс, устанавливающий наличие неисправностей в цифровой вычислительной машине. Эффективность К. ЦВМ выражается через вероятность обнаружения неисправностей ЦВМ, относящихся к одному классу или к разным классам (сбои, отказы одиночные и кратные). К. ЦВМ оценивается также надежностью самого процесса контроля, т. е. возможностью его выполнения при наличии неисправностей. К. ЦВМ складывается из выполнения ряда проверок, во время которых обычно вычисляются значения истинности некоторого предиката, соответствующие наличию и отсутствию неисправностей. К. ЦВМ осуществляется спец. алгоритмами, проверяющими наличие вызванных неисправностями ошибок в результатах выполнения операций ЦВМ (см. *Операции машинные*). Эти алгоритмы требуют для своей реализации дополнительных затрат либо оборудования (т. н. аппаратные средства К. ЦВМ), либо времени. Если одновременно с выполнением всех или некоторых операций (микроопераций) рабочих программ автоматически и без указания составителем рабочей программы выполняются операции алгоритма контроля, реализуемые с помощью аппаратных средств, то ЦВМ имеет автомат. аппаратный контроль.

Распространены два способа охвата рабочего оборудования аппаратным контролем: 1) контроль передач (обычно по четности); 2) контроль по модулю ( $\text{mod } n$ , обычно  $n = 3$ ). Первый позволяет обнаружить все ошибки (нечетной кратности) при простых (без преобразований) пересылках чисел и команд и требует ввести в ЦВМ 5 ÷ 10% дополнительного оборудования. Второй позволяет обнаруживать все однократные ошибки и часть ошибок большей кратности. Чем больше  $n$ , тем выше вероятность обнаружения ошибок большей кратности. Этот контроль требует до 30% дополнительного оборудования и реализуется путем одновременного выполнения арифм. рабочих

и контрольных операций с последующим сравнением их результатов.

В силу непрерывности выполнения аппаратный К. ЦВМ обнаруживает не только отказы, но и сбои. В отличие от аппаратных, программные алгоритмы контроля требуют затрат времени, а не оборудования. Алгоритмами программного контроля являются: периодически выполняемые испытательные программы и расширенные (включением двойного-тройного счета, контрольных соотношений) рабочие программы (см. *Контроль программный*). Осн. задачи, которые решают при создании испытательных программ: 1) построение тестов, обнаруживающих неисправности (одиночные, кратные, явные, неявные — проявляющиеся в тяжелых режимах); 2) построение надежной и быстродействующей последовательности проверок.

Необходимость применения аппаратного или программного контроля определяется назначением ЦВМ. Для ЦВМ, используемых в ответственных системах, применяют аппаратный по модулю и программный контроль, используя последний как средство профилактической проверки всего оборудования (в т. ч. и реализующего аппаратный контроль). Сравнивая программный и аппаратный контроль, учитывают, что дополнительное оборудование аппаратного К. ЦВМ повышает вероятность возникновения неисправности (в пределе до 30%), а программный не позволяет достигнуть максимума полезного времени работы ЦВМ. Применяя К. ЦВМ в процессе профилактических мероприятий, зачастую используют также дополнительное оборудование, позволяющее создавать профилактические режимы работы оборудования (более тяжелые, чем нормальный). Обычно К. ЦВМ дает некоторую информацию о месте неисправности. Для дальнейшего поиска блока, содержащего отказ или породившего сбой, применяется *диагностика неисправностей ЦВМ*.

Лит.: Клямко Э. И. Схемный и тестовый контроль автоматических цифровых вычислительных машин. М., 1963 [библиогр. с. 191]; Миронов Г. А. Испытательные программы для контроля электронных цифровых машин. М., 1964 [библиогр. с. 266—267]; Путинцев Н. Д. Аппаратный контроль управляющих цифровых вычислительных машин. М., 1966 [библиогр. с. 417—418]; Сидоров А. М. Методы контроля электронных цифровых машин. М., 1966 [библиогр. с. 160]; Волков А. Ф., Ведешников В. А., Зенкин В. Д. Автоматический поиск неисправностей в ЦВМ. М., 1968 [библиогр. с. 144—146]. Г. А. Миронов.

**КОНТРОЛЬНИК** — устройство для выявления ошибок, допущенных при перфорации перфокарт. К. выполняют следующие операции: контроль перфорации перфокарт в соответствии с данными на документах; контроль чистых полей перфокарт; пропуск перфокарт без контроля на одну и несколько колонок; автоматическую отметку проверенных колонок перфокарт и годных перфокарт; автоматическую раскладку годных и бракованных перфокарт; подсчет пропущенных через машину перфокарт. К. используют в комплекте перфорационном вычислительном: на отечественном К. модели К45-6 проверяют правильность цифровых

пробивок 45-колонных перфокарт, на модели К80-6 — 80-колонных перфокарт; КА80-2 используются для проверки правильности пробивок на перфокартах. С. П. Куценко.

**КОНТРОЛЬНОЕ СУММИРОВАНИЕ** — один из методов контроля программного, применяемый в основном для проверки сохранности информации при ее групповой передаче или хранении. К. с. заключается в том, что после передачи чисел или после определенного периода их хранения вычисляется сумма этих чисел (как правило, суммирование производится с циклическим переносом), сравниваемая затем с вычисленной ранее. Несовпадение сумм является признаком ошибки.

**КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА** — см. Логических выражений нормальные формы.

**КОНЪЮНКЦИЯ** — булева функция двух аргументов. Обозначают ее знаком & или · и задают следующей таблицей истинности:

X	Y	X&Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

К. соответствует в разговорном языке союзу «и». Она коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна по отношению к дизъюнкции слабой и вместе с ней и с отрицанием ее используют в нормальных формах представления булевых функций. Логические переключательные элементы, реализующие функцию К., наз. схемами совпадения, или вентилями; их широко применяют в схемах ЦВМ.

**КООРДИНАЦИОННО - УПРАВЛЯЮЩИЙ ЦЕНТР ПРЕДПРИЯТИЯ** — см. Автоматизированные системы управления предприятием, Информационно-вычислительный центр предприятия.

**КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА МЕТОД** — метод расчета линеаризованных систем управления замкнутых по траекториям корней характеристического уравнения системы при изменении какого-либо параметра настройки (чаще всего коэффициента усиления). Предложили этот метод независимо один от другого в 1948 К. Ф. Теодорчик (СССР) и В.-Р. Ивэнс (США). Корневым годографом наз. геом. место корней характеристического уравнения замкнутой системы при изменении коэфф. усиления  $K$  от 0 до  $\infty$ . Если представить передаточную функцию разомкнутой системы в виде:  $W_{\text{раз}}(p) = K \times W(p)$ , где  $K$  — коэфф. усиления, то ур-ние, эквивалентное характеристическому ур-нию замкнутой системы, можно записать так:

$$K W(p) = -1. \quad (1)$$

Заменив  $p$  на  $j\omega$ , получим выражения для модуля и аргумента

$$|KW(j\omega)| = 1, \quad \arg |W(j\omega)| = \pm \pi(2h+1) \quad (h=0, 1, \dots), \quad (2)$$

которое лежит в основе К. г. м.

Запишем передаточную функцию разомкнутой системы в виде

$$KW(p) = K \frac{Q(p)}{R(p)},$$

где  $Q(p)$  имеет  $m$  корней  $N_1, \dots, N_m$  (нулей), а  $R(p)$  —  $n$  корней  $P_1, \dots, P_n$  (полюсов), которые должны быть заданы.  $Q(p)$  и  $R(p)$  могут быть представлены как

$$Q(p) = q \prod_{i=1}^m (p - N_i), \quad R(p) = r \prod_{i=1}^n (p - P_i),$$

откуда

$$KW(p) = K \frac{q}{r} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (p - N_i)}{\prod_{i=1}^n (p - P_i)}. \quad (3)$$

Каждый из сомножителей (3) представляет на комплексной плоскости вектор, проведенный из точки  $P_i$  (или  $N_i$ ) в произвольную точку  $p$  под соответствующим углом к вещественной оси:  $\varphi_i$  (для полюсов) или  $\psi_i$  (для нулей) (рис. 1). Если точка  $p_k$  является одним из корней характеристического уравнения замкнутой системы (1), то в соответствии с (2) и (3) должны выполняться соотношения

$$\sum_{i=1}^m \psi_i - \sum_{i=1}^n \varphi_i = \pm \pi(2h+1) \quad (4)$$

и

$$K = \frac{r}{q} \cdot \frac{l_1 \dots l_n}{l_1^0 \dots l_m^0}, \quad (5)$$

где  $l_1 \dots l_m$  и  $l_1^0 \dots l_n^0$  — длины векторов  $(p_k - P_i)$  и  $(p_k - N_i)$  соответственно.

Для построения годографа осн. значение имеет ур-ние (4), куда выражение для коэфф. усиления (5) не входит. Поэтому, если найден корень ур-ния (1) с помощью выражения (4), то значение  $K$  находят из (5) и наносят рядом с соответствующей точкой годографа. Совокупность точек  $p_k$  на плоскости  $p = \sigma + j\omega$  образует  $n$  ветвей корневого годографа при изменении  $K$  от 0 до  $\infty$ , причем число его ветвей равно порядку системы. Но непосредственно отыскивать ур-ния (1) с помощью выражения (4) трудно. В.-Р. Ивэнс разработал правила, позволяющие упростить построение корневого годографа.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_{\text{раз}}(p) = K \times \frac{(p - N_1)}{(p - P_1)(p - P_2)(p - P_3)(p - P_4)}, \quad (6)$$

причем расположение полюсов  $P_1 \div P_4$  и нуля  $N_1$  на комплексной плоскости показано на рис. 2 (крестиками и кружочком соответственно). Применим сначала следующие правила.



1) Отрезки действительной оси, по которым перемещаются действительные корни при изменении  $K$  от 0 до  $\infty$ , являются ветвями корневого годографа и находятся в тех частях оси, справа от которых расположено нечетное общее число действительных нулей и полюсов разомкнутой системы. 2) Ветви, не лежащие на действительной оси, симметричны ей. 3) Ветви корневого годографа начинаются при  $K = 0$  в полюсах  $P_i$ . При  $K \rightarrow \infty$   $m$  ветвей заканчиваются в нулях  $N_i$ , а остальные  $n - m$  — стремятся к бесконечности. Это позволяет сразу определить две ветви корневого годографа:  $P_1 - N_1$  и  $P_2 - \infty$  (рис. 2). Ветви, начинающиеся в полюсах  $P_3$  и  $P_4$ , будут симметричны относительно действительной оси и заканчиваются также на бесконечности. 4) Асимптоты ветвей, уходящих при  $K \rightarrow \infty$  на бесконечность, расходятся лучами из точки  $A$  на действительной оси с абсциссой

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{j=1}^m N_j}{n - m} \quad (7)$$

под углами  $\alpha_i$  к действительной оси, причем

$$\alpha_i = \frac{2i + 1}{n - m} \pi; \quad (8)$$

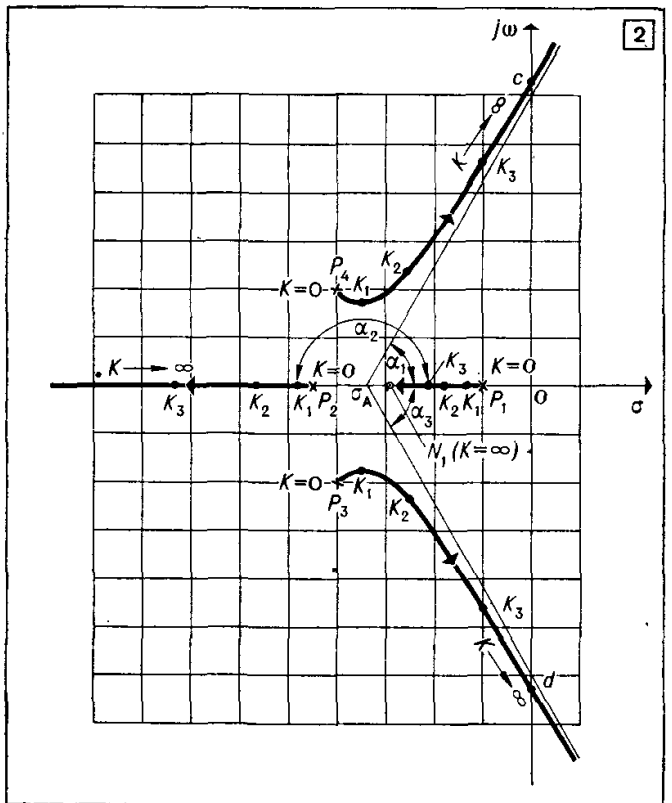
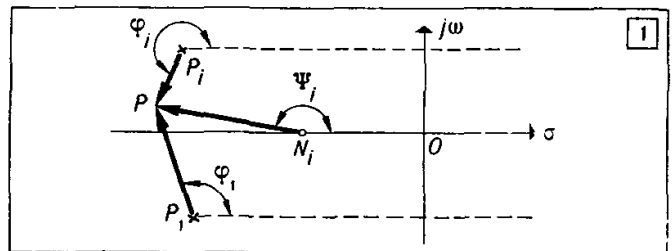
$$i = 0, 1, \dots, n - m - 1.$$

В нашем примере число асимптот  $n - m = 3$ , поэтому из точки с абсциссой  $\sigma_A$  проводим три луча под углами  $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ ;  $\alpha_2 = \pi$ ;  $\alpha_3 = \frac{5}{3}\pi$

(или  $\alpha_2 = -\frac{\pi}{3}$ ) (рис. 2). 5) Точки пересечения корневого годографа с мнимой осью находят либо с помощью *критериев устойчивости* (Гурвица, Рауса, Найквиста или Михайлова), либо с помощью непосредственного применения уравнения фаз (2), что является более предпочтительным для систем высокого порядка. Это же уравнение используется и для определения углов входа корневого годографа в комплексные нули и выхода из комплексных полюсов. Углы входа в вещественные нули и выхода из вещественных полюсов равны  $0^\circ$  или  $180^\circ$ . По этому правилу находят точки  $c$  и  $d$  на мнимой оси, а также углы, под которыми ветви выходят из полюсов  $P_3 - P_4$ . Указанные правила позволяют построить все ветви корневого годографа. После этого следует определить значение  $K$  вдоль годографа, для чего в любую точку  $p^0$  на одной из ветвей проводят векторы  $(p^0 - P_i)$  и  $(p^0 - N_i)$  и вычисляют  $K$  по формуле (5). Разработаны также методы, позволяющие построить корневой годограф по логарифм. частотным характеристикам.

Корневой годограф позволяет определять осн. динамические параметры системы: границу устойчивости (пересечение его с мнимой осью); степень устойчивости (вещественная

часть ближайшего к мнимой оси корня); степень колебательности (отношение мнимой части к вещественной для ближайшего к мнимой оси корня); декремент затухания (величина, обратная степени колебательности) для любого заданного значения коэфф. усиления  $K$  (или другого параметра настройки); время переходного процесса и перерегулирование по величине корней, ближайших к мнимой оси. К. г. м. может быть использован при синтезе *корректирующих устройств*. Существуют спец. приборы и аппаратура, позволяющие автомати-



зировать процесс построения корневого годографа.

Лит.: Удерман Э. Г. Метод корневого годографа в теории автоматических систем. М., 1972 [библиогр. с. 442—446]; Траксел Дж. Синтез систем автоматического регулирования. Пер. с англ. М., 1959. А. А. Туник.

**КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ.** Нахождение всех корней алгебр. многочлена является одной из наиболее часто встречающихся вспомогательных задач, возникающих неоднократно при решении таких важных задач, как устойчивость движения, и др. Рассмотрим детально лишь два наиболее эффективных способа нахождения корней на цифровых и гибридных вычисл. машинах.

Для больших ЦВМ необходимы такие методы нахождения корней многочлена, которые, с одной стороны, были бы универсальными, т. е. пригодными для любых коэфф. (комплексных или действительных), не зависели от входных данных (начального приближения и т. п.), требовали при своей реализации только наличия коэфф. многочлена (минимум информации); с другой стороны, являлись бы быстро сходящимися. Построить такие методы возможно путем создания «гибридов» между методами спуска и методом Ньютона; это связано с отсутствием у поверхности  $F(x, y) = |f(z)|^2$ , где  $f(z)$  — многочлен ( $z = x + iy$ ), экстремумов локальных, отличных от корней.

Пусть  $f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}$  и для некоторого  $z$

$$f(z) \neq 0; \quad f'(z) = 0; \dots; \quad f^{(l-1)}(z) = 0; \\ f^{(l)}(z) \neq 0.$$

Тогда, используя разложение в ряд Тейлора, получим:

$$f(z+h) = f(z) + \frac{f^{(l)}(z)}{l!} h^l + O(|h|^{l+1}); \\ \bar{f}(z+h) = \bar{f}(z) + \frac{\bar{f}^{(l)}(z)}{l!} \bar{h}^l + O(|\bar{h}|^{l+1}).$$

Перемножив эти равенства, получим

$$|f(z+h)|^2 - |f(z)|^2 = \\ = 2 \frac{|\bar{f}(z) f^{(l)}(z)|}{l!} |h|^l \cos(l\varphi + \alpha) + \\ + O(|h|^{l+1}), \quad (1)$$

где  $\varphi = \arg h$ ;  $\alpha = \arg(\bar{f}(z) f^{(l)}(z))$ . При достаточно малом  $|h|$  знак левой части равенства (1) определяется знаком  $\cos(l\varphi + \alpha)$ .

Он отрицательный при  $\frac{\pi(4k+1) - 2\alpha}{2l} < \varphi < \frac{\pi(4k+3) - 2\alpha}{2l}$ , т. е. для каждой фиксированной точки  $z$  есть  $l$  секторов убывания и  $l$  секторов возрастания ф-ции  $F(x, y)$ , где  $l$  — порядок первой отличной от нуля производной ф-ции  $f(z)$  в точке  $z$ . Наискорейшее убывание  $|f(z)|^2$  (наискорейший спуск) будет при  $\cos(l\varphi + \alpha) = -1$ ;  $l\varphi + \alpha = \pi$ ;  $\arg h = \varphi =$

$$= \frac{\pi - \alpha}{l} = \frac{\pi - \arg(\bar{f}(z) f^{(l)}(z))}{l} = \\ = \arg \left[ \left( -\frac{1}{f(z) f^{(l)}(z)} \right)^{1/l} \right];$$

следовательно,

$$h = t \left( -\frac{f(z)}{f^{(l)}(z)} \right)^{1/l}, \quad (2)$$

где  $t > 0$ . Из (1) ясно, что при  $t$  достаточно малом и  $h$ , выбранном согласно равенству (2), будет выполняться неравенство  $|f(z+h)|^2 <$

$< |f(z)|^2$ . Заменяя  $z$  на  $z_k$ ,  $t$  на  $t_k$  и  $h$  на  $z_{k+1} - z_k$ , получим

$$z_{k+1} = z_k + t_k \left( -\frac{f(z_k)}{f^{(l_k)}(z_k)} \right)^{1/l_k}, \quad (3)$$

где  $l_k$  — порядок первой отличной от нуля производной ф-ции  $f(z)$  в точке  $z_k$ .

При  $l_k = 1$  имеем (метод Воеводина)

$$z_{k+1} = z_k - t_k \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}. \quad (4)$$

Т. о., взяв в ур-нии (3) одно из значений корня степени  $l_k$  из комплексного числа, получим единую итеративную схему как для стационарной, так и для нестационарной точек.

Т. к. в ур-нии (3)  $t_k$  заранее неизвестно, то используют следующий итеративный процесс:

$$t_k^0 = \min \left( \sqrt[l_k]{l_k!}, \frac{(l_k+1) |f^{(l_k)}(z_k)|^{1/l_k}}{|f(z_k)|^{1/l_k} |f^{(l_k+1)}(z_k)|^{1/l_k}} \right); \\ z_k^j = z_k + t_k^j \left( -\frac{f(z_k)}{f^{(l_k)}(z_k)} \right)^{1/l_k}; \quad (5)$$

если  $|f(z_k^j)| \geq |f(z_k)|$ , то  $t_k^{j+1} = t_k^j/2$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Ясно, что найдется такой номер  $j$ , для которого будет справедливо неравенство  $|f(z_k^j)| < |f(z_k)|$ . В этом случае полагаем

$z_{k+1} = z_k^j$ . Итеративный процесс (3) и (5) сходится с любого начального приближения к одному из корней алгебр. многочлена. В связи с тем, что  $l_k = 1$ , вблизи искомого корня находится окрестность этого корня, в которой сходится метод Ньютона. Поэтому процесс (3) и (5) после конечного числа итераций  $K$  перейдет в метод Ньютона

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}, \quad (6)$$

т. е. будет сходиться с квадратичной скоростью (для некротных корней). После отыскания одного из корней  $z^{(0)}$  определяют  $f_1(z) = \frac{f(z)}{z - z^{(0)}}$  и находят корень многочлена  $(n-1)$ -й степени  $f_1(z)$  и т. д. до тех пор, пока не будут определены все  $n$  корней алгебр. многочлена.

Указанный способ может быть обобщен на решение след. задачи: определить  $\inf |f(z)|$  в данной области  $D$ , где  $f(z)$  — многочлен. Для этой задачи также всякий локальный экстремум является экстремумом глобальным. При отыскании направления убывания  $|f(z)|$  в  $D$ , необходимо из всех возможных

направлений убывания  $|f(z)|$ , вытекающих из ф-лы (1), определить направление, вдоль которого возможно конечное движение в пределах  $D$ . Шаг  $t_k$  необходимо также подчинить требованию, чтобы точки  $z_k$  оставались в  $D$  (более подробно о такого типа алгоритмах см. *Возможных направлений метод*).

Эффективная реализация К. а. м. с. в. на ЦВМ невозможна без учета всех видов погрешностей, связанных с данной задачей. Абс. погрешность  $\Delta_1$  за счет неточности задания коэфф. многочлена в окрестности корня  $z_0$  оценивается выражением

$$\Delta_1 \approx \frac{1}{|f'(z^{(0)})|} (|z^{(0)}|^n |\Delta a_0| + |z^{(0)}|^{n-1} |\Delta a_1| + \dots + |\Delta a_n|),$$

где  $\Delta a_i$  — абс. погрешности коэфф.  $a_i$ . Если все  $|\Delta a_i|$  не превосходят  $|\Delta|$ , то

$$\Delta_1 \approx \frac{(1 - |z^{(0)}|^{n+1})}{(1 - |z^{(0)}|) |f'(z^{(0)})|} \cdot |\Delta|.$$

Абс. погрешность метода  $\Delta_2$  может быть (для некратных корней) оценена по ф-ле

$$\Delta_2 \approx \left| \frac{f(z^{(0)})}{f'(z^{(0)})} \right|.$$

Абс. погрешность округлений при вычислении многочлена  $f(z^{(0)})$  по схеме Горнера оценивается как

$$\Delta_3 \leq \frac{1 - |z^{(0)}|^n}{1 - |z^{(0)}|} \cdot 2^{-\tau-1}$$

при представлении чисел в форме с фиксированной запятой и

$$\Delta_3 \leq \sum_{i=0}^n |a_i z^{(0)n-i}| \cdot 1,06 (2n+1) \cdot 2^{-\tau-1}$$

при  $n \cdot 2^{-\tau} < 0, 1$ , при представлении чисел в форме с плавающей запятой, где  $\tau$  — число двоичных разрядов мантииссы маш. представления числа. Один из целесообразных планов отыскания корней с учетом указанных погрешностей может состоять в следующем. После того, как ориентировочно найдена величина одного из корней, следует вычислить погрешность  $\Delta_1$ . Соответственно, задаются некоторой величиной  $\Delta_2$ , положив для определенности, что она не превосходит  $\Delta_1$ . Ориентируясь на требуемую величину  $\Delta_2$ , можно определить точность, с которой следует вести вычисления, напр., число разрядов  $\tau$  для машин с переменной разрядностью. Если машина имеет постоянную разрядность и метод решения фиксирован, то погрешность округления играет ту же роль, что и погрешность  $\Delta_1$ .

Наиболее распространенным К. а. м. с. в. на гибридных вычислительных машинах является метод сведения к задаче отыскания минимумов ф-ции  $\Phi(x, y) = \Psi(f(z))$ , где  $\Psi(f)$  — положительно определенная, непрерывная

вместе со своими производными ф-ция вида  $\sqrt{\beta^2 + f_1^2} + \sqrt{\beta^2 + f_2^2}$ ,  $f_1$  и  $f_2$  — действительные ф-ции,  $f = f_1 + if_2$ ,  $\beta$  — достаточно малая постоянная величина. Ф-ция  $\Phi(x, y)$  имеет в каждой точке столько секторов убывания и возрастания, каков наименьший порядок производной многочлена  $f$ , отличной от нуля.  $\Phi(x, y)$  не имеет локальных минимумов, отличных от глобального. Для отыскания корней на гибридных вычисл. машинах применяются методы быстрого спуска, в частности, методы покоординатного спуска из различных точек пространства искомых переменных, что обусловлено быстрым отысканием корней из различных точек (время поиска равно 0,5 сек) и хорошей наглядностью поиска корней. На внешних устройствах гибридных вычисл. машин удобно наблюдать траектории поиска корней из различных точек пространства искомых переменных, сечения ф-ции  $\Phi$  плоскостями  $\Phi = C$  и т. д. Для вычисления любого многочлена здесь можно ограничиться такими операциями, как линейная комбинация и перемножение ф-ций, а также суперпозиция ф-ций. Для конструирования ф-лы многочлена с помощью таких операций вводятся дополнительные ур-ния, напр., для многочлена 4-й степени  $z^4 + p_1 z^3 + p_2 z^2 + p_3 z + p_4 = 0$ ,  $p_m = q_m + ir_m$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$ ;  $z = x + iy$ , с помощью дополнительных ур-ний находятся элементы комплексного числа  $z^2 = x_2 + iy_2$ ,  $x_2 = x^2 - y^2$ ,  $y_2 = 2xy$ , после чего

$$\begin{aligned} f_1 &= x_2^2 - y_2^2 + q_1(x_2x - y_2y) - \\ &- r_1(x_2y + xy_2) + q_2x_2 - r_2y_2 + q_3x - \\ &- r_3y + q_4, \quad f_2 = 2x_2y_2 + q_1(x_2y + xy_2) + \\ &+ r_1(x_2x - y_2y) + q_2y_2 + r_2x_2 + \\ &+ q_3y + r_3x + q_4. \end{aligned}$$

Лит.: Загускин В. Л. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. М., 1960 [библиогр. с. 210—213]; Воеводина В. В. Применение метода спуска для определения всех корней алгебраического многочлена. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1961, т. 1, № 2; Кац И. С., Маергойз М. Д. Решение нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений в комплексной области. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1967, т. 7, № 3.

Г. И. Грездов, В. В. Иванов, М. Д. Маергойз.  
**КОРНЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ.** Чаще всего в приложениях встречаются трансцендентные уравнения (см. *Уравнений классификация*) вида

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где непрерывные функции  $f(x)$  комплексной переменной  $x$  могут быть сколь угодно близко аппроксимированы многочленами  $P_n(x)$  при достаточно большой степени  $n$ . Укажем условия, при которых в качестве прил. решения ур-ния (1) можно принять корни  $P_n(x)$  — решения алгебр. ур-ния  $P_n(x) = 0$ . Пусть ф-ция  $f(x)$  определена в области  $D$ , причем  $D$  содержит все решения ур-ния (1), т. е. корни  $f(x)$ , и пусть  $|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon_n$ ,  $x \in D$ .

Обозначим через  $x_n$  какой-либо корень  $P_n(x)$ . Если  $x_n$ , начиная с некоторого  $n$ , попадает в  $D$  и сходится к  $\tilde{x}$ , когда  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , то  $\tilde{x}$  является корнем  $f(x)$ . Пусть теперь  $\tilde{x}$  — какой-либо корень  $f(x)$ ,  $\tilde{x} \in D$  и пусть  $D$  — замкнутое ограниченное мн-во. Обозначим через  $F$  мн-во значений  $\Phi$ -ции  $f$  на  $D$ . Если  $f(x)$  отображает  $D$  на  $F$  взаимно однозначно, то существует обратное отображение, непрерывное на  $F$ . В этом случае и при условии, что  $x_n$ , начиная с некоторого  $n$ , попадает в  $D$ , в любую окрестность  $\tilde{x}$ , лежащую в  $D$ , попадет некоторый корень  $P_n(x)$  для достаточно большого  $n$ . Условие  $x_n \in D$  может не выполняться. Тогда в качестве  $x_n$  следует принять точку, в которой  $|P_n(x)| = \inf_{x \in D} |P_n(x)|$  (см. Некорректно поставленные задачи способы решения).

Т. о., в ряде весьма общих случаев задачу приближенного решения ур-ния (1) можно свести к задаче аппроксимации  $f(x)$  многочленами и к задаче прикл. отыскания корней многочленов (см. Корней алгебраических многочленов способы вычисления).

Если  $\Phi$ -ция  $f(x)$  действительного переменного  $x$  имеет на отрезке  $[a, b]$  первую производную  $f'(x)$ , имеющую, возможно, лишь разрывы 1-го рода, то отыскать все решения ур-ния (1) на  $[a, b]$  можно следующим способом. Выбирается число  $M$ , удовлетворяющее соотношению

$$M \geq \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|; \quad (2)$$

в качестве начального приближения  $x_0$  берется точка  $a$  и проводится итеративный процесс

$$x_{k+1} = x_k + \frac{|f(x_k)|}{M}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

который сходится к ближайшему справа от  $x_0$  решению ур-ния (1). После отыскания одного из решений ур-ния (1)  $x^{(1)}$  с заданной точностью  $\varepsilon$  выбирается новое начальное приближение  $x_0 = x^{(1)} + \varepsilon$  и заново проводится итеративный процесс (3) и т. д. до тех пор, пока не будут найдены все решения на отрезке  $[a, b]$ , т. е. до выполнения неравенства  $x \geq b$ .

Указанные способы целесообразно применять для отыскания всех корней  $f(x)$  с невысокой точностью. Одним из наиболее распространенных методов уточнения корней  $f(x)$  является метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

обладающий квадратичной скоростью сходимости (для некротных корней).

В последнее время повысился интерес к методу секущих

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_kf(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Это связано с тем, что порядок скорости сходимости метода секущих  $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$ , а на каждой итерации, кроме первой, в отличие от метода Ньютона, вычисляется одно значение  $\Phi$ -ции.

Широко применяется для уточнения решения ур-ния (1) итеративный метод Эйткина — Стеффенсена

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k - f(x_k))},$$

обладающий квадратичной скоростью сходимости. Вычисление  $\Phi$ -ции, корень которой ищется, часто бывает трудоемким, длительным и дорогостоящим процессом. Поэтому возникает задача построения оптим. алгоритмов поиска корня.

Решение трансцендентного ур-ния (1) с непрерывной  $\Phi$ -цией  $f(x)$  на гибридной вычислительной машине обычно сводится к задаче отыскания минимума положительно определенной  $\Phi$ -ции  $F(x) = \Phi(f(x))$ . Минимумы  $F(x)$  отыскиваются теми же способами, что и в случае алгебр. многочленов.  $\Phi$ -ция  $f(x)$  на гибридной вычисл. машине строится на наборе алгебр. и трансцендентных непрерывных  $\Phi$ -ций (линейная комбинация,  $x_i^2$ ,  $x_i x_j$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $|x|$ ,  $\max(x_i, x_j, x_k)$ ,  $\min(x_i, x_j, x_k)$  и др.) путем введения дополнительных ур-ний. На выводных устройствах гибридной вычисл. машины удобно наблюдать траектории поиска решений, сечения  $\Phi$ -ции  $F(x)$  плоскостями  $F(x) = C$  и т. д.

При решении ряда трансцендентных ур-ний общего вида на гибридных вычисл. машинах используется метод сведения к решению системы непрерывных трансцендентных ур-ний. Конструктивный анализ многих  $\Phi$ -ций, заданных аналитически, приводит к представлению  $f(x)$  в виде  $f(x) = \Phi(x, x_1, \dots, x_m)$ , где  $\Phi$  — непрерывная  $\Phi$ -ция переменных  $x, x_1, x_2, \dots, x_m$ ,  $x_i = x_i(\Psi_i(x))$ , имеет непрерывную обратную  $\Phi$ -цию  $\Psi_i(x) = \eta_i(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Применив выражение для обратной  $\Phi$ -ции  $\eta_i$ , получим систему  $m + 1$  трансцендентных ур-ний  $\Phi(x, x_1, \dots, x_m) = 0$ ,  $\eta_1(x_1) - \Psi_1(x) = 0, \dots, \eta_m(x_m) - \Psi_m(x) = 0$  с  $m + 1$  неизвестными. Левая часть системы непрерывна по переменным  $x, x_1, \dots, x_m$ , если непрерывны  $\Phi$ -ции  $\Psi_i(x)$ . Если  $\Psi_i(x)$  не удовлетворяют условиям непрерывности, с каждой из них проделывается такая же процедура, как с  $\Phi$ -цией  $f(x)$ , и т. д. до полного устранения разрывных и многозначных  $\Phi$ -ций.

Большинство встречающихся на практике ур-ний содержит приближенные числа. Обычно решают основное ур-ние, т. е. участвующие в его записи числа в процессе решения считаются точными. Как показывает исследование некорректных задач, иногда более правильно решать некоторое вспомогательное регуляризованное ур-ние. Пусть заданное прикл. ур-ние имеет вид  $f(x, a_1(\pm \Delta a_1), a_2(\pm \Delta a_2), \dots$

...,  $a_m (\pm \Delta a_m) = 0$ , где  $x$  — неизвестное,  $a_i (\pm \Delta a_i)$  — заданные с точностью до  $\Delta a_i$  прил. числа. Тогда основное ур-ние имеет вид  $f(x, a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$ . Это ур-ние в окрестности каждого однократного корня  $x^0$  определяет  $x$  как неявную ф-цию от  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Найдем дифференциал этой неявной ф-ции

$$dx = - \frac{1}{f'_x(x^0)} \left( \frac{\partial f}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} da_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_m} da_m \right).$$

Если погрешности  $\Delta a_i$  достаточно малы, то наследственная погрешность определения корня из основного ур-ния

$$\Delta_1 x^0 \approx \frac{1}{|f'_x(x^0)|} (|f'_{a_1}| \Delta a_1 + |f'_{a_2}| \Delta a_2 + \dots + |f'_{a_m}| \Delta a_m).$$

После того как найден приближенный корень  $x^0$ , полезно для контроля вычислить погрешность метода  $\Delta_2 \tilde{x}^0$ . Для этого можно воспользоваться ф-лой Ньютона:  $\Delta_2 \tilde{x}^0 \approx \left| \frac{f(\tilde{x}^0)}{f'(\tilde{x}^0)} \right|$ .

Чтобы избежать случая кратных корней, полезно еще применить ф-лу Ньютона для вычисления корней  $\frac{f(x)}{f'(x)}$ :

$$\Delta_2 \tilde{x}^0 \approx \left| \frac{f(\tilde{x}^0) f'(\tilde{x}^0)}{f'(\tilde{x}^0)^2 - f''(\tilde{x}^0) \cdot f(\tilde{x}^0)} \right|.$$

Целесообразно требовать, чтобы  $\Delta_2 \tilde{x}^0 \leq \Delta_1 \tilde{x}^0$ .

Погрешность  $\Delta_3 \tilde{x}^0$ , получающаяся за счет реализации выбранного алгоритма на вычисл. машине, следует оценивать в зависимости от особенностей этой машины (см. *Погрешностей вычислений теория*).

Лит.: Загускин В. Л. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. М., 1960 [библиогр. с. 210—213]; Черноусько Ф. Л. Оптимальный алгоритм поиска корня функции, вычисляемой приближенно. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1968, т. 8, № 4; Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений. Пер. с англ. М., 1963 [библиогр. с. 209—214]. Г. И. Грездов, В. В. Иванов, М. Д. Майергойз.

**КОРРЕКТИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА** — устройства в системах автоматического управления (САУ), которые обеспечивают заданные показатели качества работы этих систем. К. у. классифицируются: по способу включения в САУ — на последовательные (включаемые в прямую цепь системы), встречно-параллельные (включаемые в местную обратную связь), параллельные и К. у., осуществляющие связи по возмущениям (заданиям) (см. *Коррекция систем автоматического управления*); по характеру преобразуемого сигнала — на непрерывные (на постоянном токе), дискретные

и на переменном токе; по виду зависимости выходных сигналов К. у. от входных — на линейные и нелинейные; по способу осуществления — на пассивные и активные; по принципу действия — на электрические, электромеханические и механические.

Простейшими К. у. являются пассивные четырехполюсники, состоящие из резисторов и емкостей и реализующие следующие *передаточные функции*:

$$1) W_1(p) = \frac{k_1 p}{1 + T_1 p} \text{ — реальное диффе-}$$

ренцирующее звено ( $k_1$  — коэффициент передачи,  $T_1$  — постоянная времени,  $p$  — оператор Лапласа);

$$2) W_2(p) = \frac{k_2 (1 + T_2 p)}{1 + T_3 p} \text{ — при } T_2 > T_3 \text{ —}$$

реальное дифференцирующее звено, при  $T_3 > T_2$  — звено интегрирующего действия ( $k_2$  — коэфф. передачи,  $T_2, T_3$  — постоянные времени);

$$3) W_3(p) = \frac{k_3}{1 + T_4 p} \text{ — инерционное звено;}$$

$$4) W_4(p) = \frac{(1 + T_6 p)(1 + T_7 p)}{(1 + T_5 p)(1 + T_8 p)} \text{ — интегро-диф-}$$

ференцирующее звено,  $T_5 > T_6 > T_7 > T_8$ .

Первое реальное дифференцирующее звено в качестве К. у. применяется только при параллельной и встречно-параллельной коррекции (ВПК), остальные звенья — при последовательной и параллельной коррекциях. Более сложными, с точки зрения технической реализации, являются активные К. у., которые обычно реализуют на *усилителях операционных*. Большими возможностями обладают нелинейные К. у. благодаря тому, что их параметры зависят от величины входного сигнала. Так, при больших сигналах рассогласования нелинейное К. у. уменьшает *демпфирование* системы, а это приводит к расширению полосы пропускания и, следовательно, к более резкой реакции системы, а при уменьшении сигнала рассогласования — увеличивает демпфирование, в результате чего сужается полоса пропускания системы, замедляется реакция системы и этим уменьшается величина перерегулирования. Для коррекции импульсных систем применяют как непрерывные, так и импульсные К. у. Непрерывные К. у. изменяют соответствующим образом характеристики части системы, преобразуя непрерывные сигналы. Импульсные К. у. могут быть осуществлены в виде импульсных фильтров или цифровых вычисл. устройств. Специфические К. у. импульсных систем — К. у., осуществляющие изменения формы управляющих импульсов. Существуют различные методы расчета выше указанных К. у. (см. *Дискретных систем автоматического управления синтез*, *Непрерывных систем автоматического управления синтез*).

К. у. по возмущениям (заданиям) могут быть реализованы, если имеется возможность

осуществить непосредственное измерение соответствующих *возмущающих воздействий* либо, в некоторых случаях, косвенное их измерение, применяя т. н. «дифференциальные вилки» (см. *Дифференциальная система автоматического управления*). О расчете этих К. у. см. *Инвариантность систем автоматического управления и Компаундирующие связи в автоматических системах*. Г. Ф. Зайцев, Ф. Ф. Константинов.

**КОРРЕКЦИЯ ДРЕЙФА НУЛЯ** — уменьшение изменений выходного напряжения усилителей постоянного тока при неизменном входном сигнале, вызванных нестабильностью источников питания, параметров элементов усилителей и влиянием ряда других, трудно контролируемых факторов. Различают ручную, параметрическую и автоматическую К. д. н. Ручная К. д. н. производится периодически путем изменения параметров компонентов (сопротивлений) схемы. При параметрической К. д. н. в схемах усилителей предусматриваются элементы, изменения параметров которых под воздействием факторов, вызывающих дрейф, приводят к компенсации последнего. Из методов автоматической К. д. н. широкое распространение получил метод, при котором в усилителе используется дополнительный бездрейфовый канал усиления на переменном токе с применением *модуляции* и демодуляции входного сигнала. К. д. н. используется в *аналоговых вычислительных машинах*. В. В. Васильев.

**КОРРЕКЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ** — изменение динамических свойств систем автоматического управления (САУ) с целью обеспечения требуемых показателей качества процесса управления (запасов устойчивости, точности, времени регулирования и т. п.). Может осуществляться изменением параметров САУ (коэффициента усиления разомкнутой системы, постоянных времени и т. д.) или ее структуры. Коррекция системы может обеспечиваться с помощью включения дополнительных (корректирующих) устройств в прямую цепь системы (последовательная коррекция), в местную обратную связь (встречно-параллельная коррекция), параллельно одному из элементов системы (параллельная коррекция) или применения комбинированного принципа управления, т. е. включения корректирующей цепи по осн. *возмущающему воздействию* (нагрузке) в *стабилизации системах* или задающему воздействию в *следящих системах*.

Последовательная коррекция позволяет ввести в закон управления составляющие, пропорциональные производным и интегралу от сигнала ошибки. Составляющие, пропорциональные производным, уменьшают время регулирования, но увеличивают чувствительность системы к помехам, а составляющие, пропорциональные интегралу, повышают точность, но уменьшают запасы устойчивости. Встречно-параллельная коррекция, осуществляемая путем включения в систему местной обратной связи (ОС), позволяет, обычно при жесткой ОС, уменьшить время регулирования,

а при гибкой ОС — колебательность *переходного процесса*, т. е. приблизить его к монотонному. В некоторых случаях применяют параллельную коррекцию с помощью подключения *корректирующего устройства* параллельно одному из элементов системы. Наиболее распространенным методом синтеза последовательных, встречно-параллельных и параллельных корректирующих элементов является метод, основанный на применении логарифм. частотных характеристик разомкнутой системы. Коррекция с помощью введения в систему дополнительного сигнала по задающему или возмущающему воздействию позволяет повысить точность работы системы. В отличие от указанных способов коррекции элементы этой цепи находятся вне основного замкнутого контура системы, и их наз. *компаундирующими связями в автоматических системах*. К. с. а. у. по возмущению, рассчитанная по условиям инвариантности, позволяет реализовать очень точные инвариантные системы (см. *Инвариантность систем автоматического управления*). Лит.: Кухтенко А. И. Проблема инвариантности в автоматике. К., 1963 [библиогр. с. 364—371]; Теория автоматического регулирования, кн. 2. М., 1967 [библиогр. с. 653—674].

Г. Ф. Зайцев, Ф. Ф. Константинов.  
**КОРРЕЛЯТОР**, коррелометр, коррелогр — специализированное устройство для автоматического вычисления *автокорреляционных функций* и *взаимных корреляционных функций* стационарных процессов (либо процессов, приводимых к стационарным). Обычно термин «К.» применяется для определения любого преобразователя, выходной сигнал которого можно рассматривать как *корреляционную функцию* входных сигналов. Такие К. широко применяются в радиотехнике, технике автоматического управления и т. д. К., вычисляющий некоторую совокупность значений корреляционной функции, соответствующую определенному интервалу изменения ее аргумента (временных задержек), и снабженный измерительным прибором для отсчетов этих значений, обычно наз. *коррелометром*. К., обеспечивающий автоматическую регистрацию графиков корреляционной функции (коррелограмм) на каких-либо носителях (бумажной ленте, киноленте), наз. *коррелогр*.

При аппаратурном вычислении корреляционных функций стационарных *случайных процессов* предполагается, что эти процессы обладают свойством эргодичности (см. *Эргодическая теория*). Это позволяет использовать в К. усреднение по времени. Вычисление корреляционных функций требует бесконечно большого интервала усреднения, однако на практике всегда приходится ограничиваться интервалом конечной длительности, т. е. К. вычисляет не корреляционную функцию случайного процесса, а ее оценку:

$$A_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) \dot{x}(t - \tau) dt,$$



где  $T$  — интервал усреднения,  $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x$  — центрированное значение случайного процесса  $x(t)$ ,  $m_x$  — математическое ожидание случайного процесса  $x(t)$ . Длительность интервала усреднения зависит от спектрального состава исследуемых случайных процессов и необходимой степени точности вычисления корреляционных функций.

Аналогично вычисляется оценка взаимной корреляционной функции случайных процессов  $x(t)$  и  $y(t)$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{y}(t - \tau) dt,$$

где  $\overset{\circ}{x}(t)$  и  $\overset{\circ}{y}(t)$  — центрированные значения случайных процессов  $x(t)$  и  $y(t)$ .

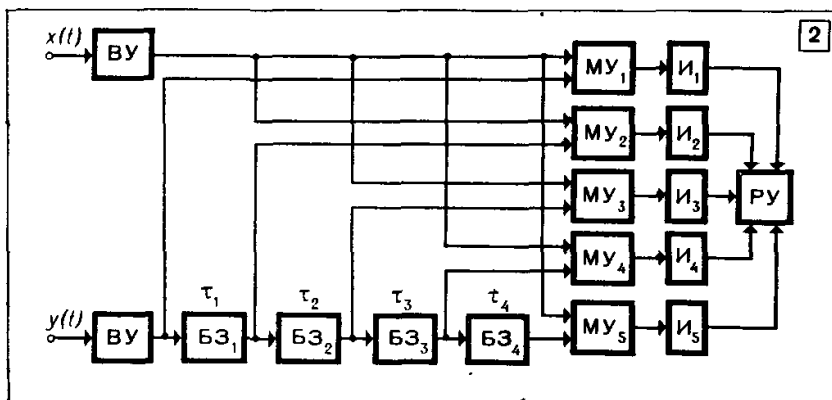
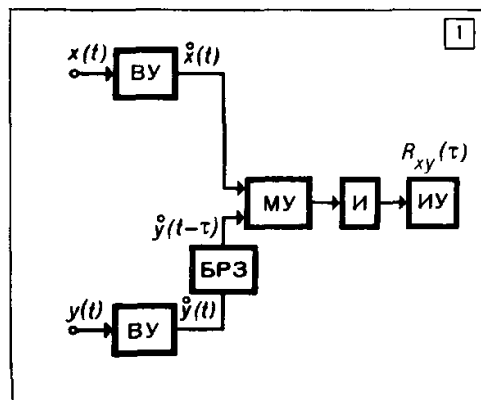
Ввиду того, что практически могут быть реализованы лишь положительные задержки  $\tau$ , при вычислении автокорреляционной функции ее значения определяют только для положительных  $\tau$ , что, однако, не имеет существенного значения, т. к.  $A_x(-\tau) = A_x(\tau)$ . При определении значений взаимной корреляционной функции  $R_{xy}(\tau)$  для отрицательных  $\tau$  учитывают, что  $R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$ . Это позволяет менять местами входные сигналы  $K$ .  $x(t)$  и  $y(t)$  и определять значения взаимной корреляционной функции  $R_{yx}(\tau)$  при положительных  $\tau$ .

Наибольшее распространение нашли  $K$ ., в которых вычисляют корреляционные функции с использованием приведенных выше формул. В этих  $K$ . входные сигналы (задержанный и незадержанный) перемножают, в связи с чем они получили название мультипликационных  $K$ ., или  $K$ . с умножением входных сигналов. Мультипликационный  $K$ . для вычисления взаимной корреляционной функции (рис. 1) осуществляет: преобразование входных сигна-

лов на время  $\tau$  в блоке регулируемого запаздывания БРЗ (см. *Запаздывания блок*); перемножение двух сигналов  $x(t)$  и  $y(t - \tau)$  в множительном устройстве МУ; усреднение полученного произведения в течение интервала времени  $T$  в усредняющем (или интегрирующем) звене И (см. *Устройство интегрирующее*); показ или регистрацию вычисленных значений корреляционной функции, соответствующих заданным значениям аргумента  $\tau$  с помощью индикаторного, или регистрирующего, устройства ИУ.

Процесс вычисления корреляционных функций может осуществляться как последовательным, так и параллельным способом. В первом случае вычисление производится последовательно, точка за точкой, для каждого заданного значения  $\tau$ . Для получения всей кривой корреляционной функции операции вычисления повторяются при различных значениях  $\tau$ , при этом  $\tau$  может изменяться как непрерывно, так и дискретно. Полное время вычисления  $T_{\Pi} = T(N + 1)$ , где  $T$  — время усреднения при вычислении одной точки корреляционной функции,  $N$  — к-во вычисленных точек. Для параллельного способа вычисления  $K$ . выполняется в виде многоканального устройства с числом каналов, равным числу одновременно вычисляемых точек корреляционных функций. Каждый канал содержит свое множительное устройство МУ и усредняющее (интегрирующее) звено И, а также устройство задержки, обеспечивающее запаздывание, соответствующее данной точке корреляционной функции. Упрощенная блок-схема мультипликационного  $K$ . параллельного действия изображена на рис. 2. Использование схем параллельного действия ускоряет время анализа, однако существенно усложняет схему  $K$ .

Наряду с мультипликационным  $K$ . значительное распространение получили  $K$ ., в которых операция умножения осуществляется



1. Блок-схема мультипликационного коррелятора (ВУ — входное устройство).

2. Блок-схема мультипликационного коррелятора параллельного действия, вычисляющего пять точек корреляционной функции: БЗ<sub>1</sub>, ..., БЗ<sub>4</sub> — блоки запаздывания; РУ — регистрирующее устройство.

лов  $x(y)$  и  $y(t)$  в соответствующие физ. величины (напряжение, ток, световой поток) с предварительной обработкой их (центрирование, квантование по уровню или по времени и т. д.); относительный сдвиг (задержку) одного из

при помощи двух устройств для возведения в квадрат (квадраторов) с использованием выражения

$$xy = \frac{1}{4} [(x + y)^2 - (x - y)^2].$$

Иногда К. строятся с использованием одного квадратора. В этом случае вычисление корреляционных функций выполняется по формуле

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) \pm y(t - \tau)]^2 dt = \\ = R_x(0) + R_y(0) \pm 2R_{xy}(\tau).$$

К., использующие квадраторы, наз. интерференционными. Существуют и другие методы вычисления корреляционных функций: компенсационный метод, метод диаграмм рассеяния и пр. Значительное распространение начал получать метод аппроксимации корреляционных функций с помощью системы ортогональных функций, при котором определяются коэффициенты разложения корреляционной функции в некоторый ряд (напр., по полиномам Лагерра и др.).

В зависимости от формы представления сигналов при вычислении корреляционных функций различают К. аналоговые (непрерывного действия) и цифровые (дискретного действия). Известен также ряд гибридных К., в которых используется как аналоговая, так и цифровая формы представления сигналов. Наиболее распространены аналоговые К., обеспечивающие при сравнительной простоте устройства удовлетворительную точность вычисления функций (погрешность порядка нескольких процентов). Цифровые К. позволяют получать точность значительно выше по сравнению с аналоговыми, но они более сложны.

Рассмотренные методы и схемы вычисления корреляционных функций часто используются с квантованием исследуемых сигналов как по времени, так и по уровню. Значительное распространение начали получать К. с грубым квантованием сигналов по уровню — релейные, полярные (знаковые) К. и К. Стилтеса, вычисляющие соответственно *релейные корреляционные функции, корреляционные функции полярные и Стилтеса корреляционные функции*. В релейных и полярных К. соответственно, один или оба входных сигнала подвергаются квантованию по двум уровням с использованием информации лишь о знаке исходного сигнала. Благодаря использованию в них элементов дискретной техники, релейные и полярные К. отличаются схемной простотой. Так, вместо множительных устройств в них используются простые схемы совпадения, а вместо блока регулируемого запаздывания — регистры сдвига с регулируемой частотой тактовых (продвигающих) импульсов. Вычисляемые при этом релейные и полярные корреляционные функции отличаются от действительных оценок корреляционных функций на величину некоторой методической погрешности, которую можно учесть при градуировке К. В то же время значительная простота таких К. делает их весьма перспективными во многих областях техники (автоматическое управление, техника связи, техническая диагностика, *корреляционные экстремальные системы* и др.). В К. Стилтеса один из двух исследуемых

случайных сигналов грубо квантуется по нескольким уровням (обычно по 3—4), а другой остается неизменным. Квантованный сигнал подвергается временной задержке и перемножается с неквантованным при помощи обычных схем совпадения. К. Стилтеса сочетает простоту устройства с достаточно высокой точностью вычисления корреляционной функции (при пяти уровнях квантования погрешность составляет лишь доли процента).

Схемные и конструктивные особенности различных К. весьма разнообразны. Так, существуют пневматические, электромех., фотоэлектронные, оптические и электронные К. (последние наиболее распространены).

Лит.: С и н и ц ы н Б. С. Автоматические корреляторы и их применение. Новосибирск, 1964 [библиогр. с. 202—216]; Б а л л Г. А. Аппаратурный корреляционный анализ случайных процессов. М., 1968 [библиогр. с. 150—158]; Ч е г о л и н П. М. Автоматизация спектрального и корреляционного анализа. М., 1969 [библиогр. с. 375—381]; Г р и б а н о в Ю. И., В е с е л о в а Г. П., А н д р е е в В. Н. Автоматические цифровые корреляторы. М., 1971 [библиогр. с. 234—238]; М и р с к и й Г. Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М., 1972 [библиогр. с. 437—452]; Л а н г е Ф. Корреляционная электроника. Пер. с нем. Л., 1963 [библиогр. с. 426—442]. С. Ф. Козубовский.

**КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ** — теория, рассматривающая методы вычисления *корреляционных функций* после линейных и нелинейных преобразований случайных процессов. Применяют ее в *автоматического управления теории*, в статистической радиотехнике, радиолокации, теории связи и в других областях техники. Пусть  $\xi(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , — действительный случайный процесс и пусть  $a(t) = M\xi(t)$  — его математическое ожидание. Корреляционной функцией процесса  $\xi(t)$  наз. ф-ция двух переменных

$$R(t, s) = M[\xi(t) - a(t)][\xi(s) - a(s)].$$

Для стационарных случайных процессов корреляционная ф-ция  $R(\tau)$  зависит от одного переменного  $\tau = t - s$ .

Пусть  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  — действительные стационарные и стационарно связанные случайные процессы, определенные при  $-\infty < t < \infty$  матем. ожиданиями соответственно  $a(t)$  и  $b(t)$ . Взаимной корреляционной ф-цией процессов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  наз. ф-цию

$$R_{\xi\eta}(t - s) = M[\xi(t) - a(t)][\eta(s) - b(s)].$$

Рассмотрим действительный случайный процесс  $\xi(t)$  с нулевым матем. ожиданием и корреляционной ф-цией  $R(t_1, t_2)$ . Корреляционную функцию  $B(t_1, t_2)$  процесса  $\eta(t)$  на выходе линейной системы с импульсной переходной ф-цией  $h(t, s)$  определяют из выражения

$$B(t_1, t_2) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1, s_1) R(s_1, s_2) h(t_2, s_2) ds_1 ds_2.$$

Пусть  $\xi(t)$  — процесс типа «белого шума» с энергетическим спектром  $2N_0$ . Корреляционная ф-ция процесса  $\eta(t)$  на выходе дифферен-

пирующей схемы  $CR$ -цепочки с передаточной ф-цией

$$\varphi(\lambda) = \frac{i\lambda RC}{1 + i\lambda RC}$$

имеет вид

$$B(\tau) = N_0 \delta(\tau) - \frac{N_0 \alpha}{2} e^{-\alpha |\tau|},$$

где  $\alpha = \frac{1}{RC}$ .

Линейную систему, обладающую изменяющимися во времени параметрами, наз. *параметрической*. Параметрической системой является, напр., линия задержки, работа которой описывается выражением  $\eta(t) = \xi(t - f(t))$ , где  $f(t)$  — заданная ф-ция времени. В этом случае корреляционная ф-ция процесса  $\eta(t)$  имеет вид

$$B(t_1, t_2) = R[f(t_1) - f(t_2) + t_2 - t_1].$$

Параметрическими системами являются и амплитудный модулятор, интегрирующая  $RC$ -цепочка с переменными параметрами и т. д. Параметрическая система, параметры которой изменяются случайно, наз. *линейной системой со случайными параметрами*. Такими системами являются, напр., большинство радиоканалов связи.

Важным разделом К. т. с. п. являются нелинейные преобразования случайных процессов. Для вычисления корреляционных ф-ций случайных процессов на выходе нелинейных систем широко используют метод характеристических ф-ций, метод разложения случайного процесса в ряд и метод Винера. Метод характеристических ф-ций предполагает спец. вид *Лапласа преобразования* нелинейной ф-ции, описывающей систему в случае, когда на входе действует *гауссовский случайный процесс* с нулевым матем. ожиданием и нормированной корреляционной ф-цией  $R(\tau)$ . Методом разложения случайного процесса в ряд рассматривают квадратичный преобразователь с последующей линейной фильтрацией полученного процесса. Метод Винера является эффективным методом вычисления корреляционной ф-ции процесса на выходе нелинейной системы. В основе этого метода лежит возможность ортогонального представления нелинейного оператора, описывающего рассматриваемую систему. Если входной процесс является *марковским процессом*, широко применяют методы, основанные на использовании дифф. и интегр. уравнений. К. т. с. п. применяют в аппаратурных методах анализа случайных процессов. В качестве примеров могут служить коррелометры — приборы, предназначенные для измерения корреляционных ф-ций физ. процессов, корреляционные приемники обнаружения радиотех. сигналов и т. д. (см. *Коррелятор*).

Лит.: Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1. М., 1966; Деч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. Пер. с англ. М., 1965 [библиогр. с. 196—201].

А. Н. Деменин.  
**КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ** — смешанный центральный момент 2-го порядка случайной функции; для действительного случай-

ного процесса  $\xi(t)$ ,  $t \in \lambda$ , К. ф. определяется равенством  $R(t, s) = M(\xi(t)\xi(s) - M\xi(t) \times M\xi(s))$ ,  $t, s \in \lambda$ , где  $M$  — символ *математического ожидания*. Ф-цию  $R(t, s)$  часто наз. *автокорреляционной ф-цией*. Взаимной К. ф. действительных случайных процессов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$ ,  $t \in \lambda$ , наз. функция  $R_{\xi, \eta}(t, s) = M\xi(t)\eta(s) - M\xi(t)M\eta(s)$ ,  $t, s \in \lambda$ . К. ф.  $R(t, s)$  вещественна и неотрицательно определенная, она характеризует энерг. свойства процесса  $\xi(t)$ . См. также *Корреляционная теория случайных процессов*.

**КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛЯРНАЯ** (знаковая) — функция, характеризующая степень связи между знаками стационарного случайного процесса  $x(t)$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  (в этом случае она наз. *полярной автокорреляционной функцией*). Функция, характеризующая степень связи между знаком стационарного случайного процесса  $x(t)$  в момент времени  $t_1$  и знаком другого случайного стационарного и стационарно связанного с ним процесса  $y(t)$  в момент времени  $t_2$  наз. *полярной взаимной корреляционной функцией*. Эти функции определяют соответственно выражениями:

$$R_{xx}^{**}(t_1, t_2) = M[\operatorname{sgn}\{x(t_1) - m_x(t)\} \times \operatorname{sgn}\{x(t_2) - m_x(t)\}],$$

$$R_{xy}^{**}(t_1, t_2) = M[\operatorname{sgn}\{x(t_1) - m_x(t)\} \operatorname{sgn}\{y(t_2) - m_y(t)\}],$$

где  $R_{xx}^{**}(t_1, t_2)$  — полярная автокорреляционная ф-ция случайного процесса  $x(t)$ ;  $R_{xy}^{**}(t_1, t_2)$  — полярная взаимная корреляционная ф-ция случайных процессов  $x(t)$  и  $y(t)$ ;  $M$  — символ операции матем. ожидания;  $m_x(t)$ ,  $m_y(t)$  — матем. ожидания процессов  $x(t)$  и  $y(t)$ . К. ф. п. принимают значение в пределах от  $-1$  до  $+1$ . Если рассматриваемые процессы  $x(t)$  и  $y(t)$  эргодичны (см. *Эргодическая теория*), то для вычисления К. ф. п. может быть использовано усреднение по времени в соответствии с выражениями

$$R_{xx}^{**}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \operatorname{sgn} \overset{\circ}{x}(t) \operatorname{sgn} [\overset{\circ}{x}(t + \tau)] dt$$

$$R_{xy}^{**}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \operatorname{sgn} \overset{\circ}{x}(t) \operatorname{sgn} [\overset{\circ}{y}(t + \tau)] dt,$$

где  $\tau = t_2 - t_1$ ,  $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$ ,  $\overset{\circ}{y}(t) = y(t) - m_y(t)$ .

Если процессы  $x(t)$  и  $y(t)$  нормальны и обладают нормальным (гауссовым) совместным распределением, то нормированные автокорреляционная  $\rho_{xx}(\tau)$  и взаимная корреляционная

$\rho_{xy}(\tau)$  ф-ции этих процессов связаны, соответственно, с полярной автокорреляционной  $R_{xx}^{**}(\tau)$  и взаимной корреляционной  $R_{xy}^{**}(\tau)$  функциями соотношениями

$$\rho_{xx}(\tau) = \sin \left[ \frac{\pi}{2} R_{xx}^{**}(\tau) \right],$$

$$\rho_{xy}(\tau) = \sin \left[ \frac{\pi}{2} R_{xy}^{**}(\tau) \right].$$

К. ф. п. применяют в технике автомат. управления, связи, радиолокации и др. областях. Лит.: Козубовский С. Ф. Загальна теорія квантування за рівнем та її застосування до визначення кореляції. «Автоматика», 1963, № 1; Veltman В. Р., Kwakernaak Н. Theorie und Technik der Polaritätskorrelation für die dynamische Analyse niederfrequenter Signale und Systeme. «Regelungstechnik», 1961, Bd. 9, № 9; Вельтман Б. П., ван ден Бос А. Применение релейного коррелятора и коррелятора совпадения знаков в автоматическом регулировании. В кн.: Труды II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 1. М., 1965.

С. Ф. Козубовский.

**КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ СИСТЕМА** — система экстремального регулирования, задачей которой является поддержание экстремального значения выходного сигнала коррелятора (взаимной корреляционной функции его входных сигналов). Различают одномерные К. э. с., в которых максимизируемая корреляционная функция зависит от одного аргумента (временного сдвига между

изображений). Примером простейшей одномерной К. э. с. может служить автомат. корреляционный измеритель скорости движения металла при прокатке (рис.). На поверхность металла, движущегося со скоростью  $v$ , проектируются в виде двух резких световых штрихов изображения нитей двух осветителей О, находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга. Фотодатчики Ф воспринимают переменную яркость этих световых штрихов, обусловленную неравномерной поверхностной структурой металла. Получаемые на выходе фотодатчиков случайные сигналы  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , пропорциональные яркости штрихов, усиливаются усилителями У и подаются на вход коррелятора К (очерчен пунктиром), состоящего из блока регулируемого запаздывания БРЗ, множительного устройства МУ и интегратора И. К выходу коррелятора подключают измерительный прибор. Входные сигналы коррелятора подобны по форме, но сигнал правого фотодатчика отстает во времени на величину транспортного запаздывания  $\tau_T$  (рис., б):

$$f_2(t) \approx f_1(t - \tau_T), \quad \tau_T = \frac{l}{v}.$$

Выходной сигнал коррелятора  $R(\tau)$  (рис., в) представляет собой оценку взаимной корреляционной функции входных сигналов

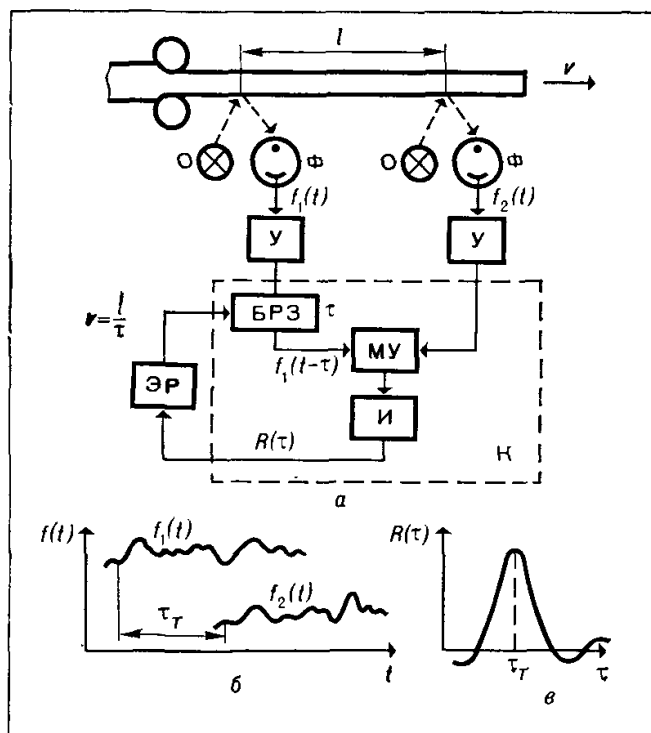
$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t - \tau) f_2(t) dt = \\ = \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t - \tau) f_1(t - \tau_T) dt.$$

Он максимален при  $\tau = \tau_T$ , т. е. при равенстве введенного регулируемого запаздывания  $\tau$  транспортному запаздыванию  $\tau_T$  сигнала, снимаемого с правого фотодатчика. Т. о. коррелятор представляет собой объект регулирования с экстремальной характеристикой. Регулятор экстремальный ЭР подключается к выходу коррелятора и воздействует на БРЗ так, чтобы автоматически поддерживалось максимальное значение взаимной корреляционной

функции  $R(\tau)$ . При этом  $\tau = \tau_T$ ,  $v = \frac{l}{\tau}$ , а

значение скорости отсчитывается непосредственно по шкале БРЗ. Следовательно в К. э. с. объектом регулирования является коррелятор, регулируемой величиной — выходной сигнал коррелятора, а регулирующим воздействием — сигнал, управляющий БРЗ.

Осн. областями применения К. э. с. являются автоматизация управления производственным процессом (в металлургии, химии, пищевой пром-сти, энергетике и т. п.) и навигация (космическая, морская). Одномерные К. э. с. используются главным образом в качестве измерителей параметров движения различных объектов — скорости (автомат. корреляционные измерители скорости), расстояния (корреляционные радиолокаторы и эхолоты), направления (корреляционные пеленгаторы), а также



Корреляционная экстремальная система для измерения скорости движения проката: а — блок-схема; б — входные сигналы коррелятора; в — выходной сигнал коррелятора.

входными сигналами коррелятора), и многомерные, в которых она является функцией нескольких (двух и более) аргументов (пространственных сдвигов и поворотов совмещаемых

расходов различных жидких, сыпучих и газообразных веществ и многокомпонентных смесей (корреляционные расходомеры). В таких К. э. с. параметры движения определяются путем измерения временных интервалов (относительного временного сдвига) между двумя случайными сигналами. Для измерения применяется компенсационный метод, при котором измеряемая величина (временной интервал) сравнивается с некоторой эталонной величиной (калиброванной временной задержкой). Этот метод позволяет осуществлять измерения с очень высокой точностью (относительная погрешность измерения составляет доли процента). Многомерные К. э. с. применяются в качестве автомат. ориентаторов при движении объектов по радиолокационным картам местности и по звездным картам, а также в устройствах для автомат. настройки электронной аппаратуры. Действие этих систем основано на совмещении двух изображений (эталонного и сравниваемого) путем автомат. отыскания максимума их взаимных корреляционных функций. В качестве эталонного изображения используют спец. карту заданного маршрута движения объекта, с которой сравнивается, напр., изображение участка местности, получаемое на экране радиолокатора, установленного на движущемся объекте. При этом каждое из сравниваемых изображений рассматривается как двумерная реализация некоторой стационарной случайной функции (распределение коэффициента яркости или прозрачности). Для вычисления взаимной корреляционной функции совмещаемых изображений используются оптические корреляторы.

Достоинством К. э. с. являются высокая точность, бесконтактность (отсутствие непосредственного контакта с объектами, параметры движения которых измеряются), возможность пассивного получения входных сигналов (т. е. использования естественной информации, которая содержится непосредственно в самих движущихся объектах, без облучения их внешним источником), возможность полуактивной работы (использования случайных сигналов, отраженных движущимся объектом) и др.

Лит.: Красовский А. А. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. М., 1963 [библиогр. с. 455—465]; Козубовский С. Ф. Автоматические корреляционные измерители скорости. К., 1963; Медведев Г. А., Тарасенко В. П. Вероятностные методы исследования экстремальных систем. М., 1967 [библиогр. с. 447—454]; Поиск экстремума (Математические методы и автоматические системы). Томск. 1969; Козубовский С. Ф. Корреляционные экстремальные системы. Справочник. К., 1973 [библиогр. с. 197—221].

**КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АППАРАТУРНЫЙ АНАЛИЗ** случайных процессов — автоматическое вычисление автокорреляционных функций и взаимных корреляционных функций случайных процессов с помощью специализированных вычислительных устройств — корреляторов (коррелометров, коррелографов). Целью К. а. а. является исследование корреляционных связей между различными случайными величинами и функциями

или между значениями одной и той же случайной функции при разных значениях аргумента. К. а. а. может осуществляться либо после окончания процесса путем автомат. ввода в коррелятор информации, ранее зафиксированной на каких-либо носителях (бумаге, магн. ленте, киноленте, перфоленте и т. п.), либо одновременно с исследуемым процессом (в реальном масштабе времени), путем ввода в коррелятор текущих значений сигналов, получаемых с датчиков или преобразователей, непосредственно связанных с процессом (оперативный корреляционный анализ).

Случайные процессы при К. а. а. могут подвергаться квантованию по времени или (и) по уровню. В результате квантования по времени реализация случайного процесса приобретает вид случайной последовательности, удобной для ввода в цифровой коррелятор. Квантование непрерывной реализации случайного сигнала по уровню приводит к представлению последнего в виде функции ступенчатой, для обработки которой можно применять элементы дискретной техники, что позволяет существенно упростить аппаратуру, необходимую для К. а. а. (при незначительной потере точности анализа).

Методы К. а. а. можно классифицировать как по виду матем. операций, которые положены в их основу (усреднение по времени, усреднение по множеству, преобразование Фурье для спектра мощности сигнала), так и по способу выполнения операций (аналоговый и дискретный; к последнему можно отнести также методы релейной и полярной корреляции и *Статьи о корреляционных функциях*).

К. а. а. широко применяют в радиоэлектронике и технике связи — для определения характеристик сигналов и систем передачи информации, в акустике — для изучения шумов различной природы, в автомат. управлении — для определения динамических характеристик управляемых объектов, в биологии и медицине — для анализа электроэнцефалограмм и электрокардиограмм, в аэронавигации — для измерения высоты и скорости полета самолетов и т. п.

Лит.: Синицын Б. С. Автоматические корреляторы и их применение. Новосибирск, 1964 [библиогр. с. 202—216]; Мирский Г. Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М., 1972 [библиогр. с. 437—452]; Балл Г. А. Аппаратурный корреляционный анализ случайных процессов. М., 1968 [библиогр. с. 150—158]; Ланге Ф. Корреляционная электроника. Пер. с нем. Л., 1963 [библиогр. с. 426—442].

С. Ф. Козубовский.

**КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД РАСПОЗНАВАНИЯ** — метод распознавания образов, при котором для каждого класса распознаваемых объектов в декартовом пространстве признаков задается эталонная область и любой распознаваемый объект относится к классу, соответствующему ближайшей эталонной области; последняя формируется путем допустимых преобразований одного или нескольких эталонных векторов класса.

К. м. р. получил название благодаря своему распространенному частному случаю, когда

поиск ближайшей эталонной области эквивалентен определению того из классов  $j = 1, \dots, I$ , для которого достигается абсолютный максимум скалярного произведения вектора признаков распознаваемого объекта  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и нормированного эталонного вектора класса  $e_j(\beta) = (e_{j1}(\beta), \dots, e_{jn}(\beta))$ , зависящего от параметров  $\beta$  допустимых преобразований эталонов:  $x$  относится к классу  $j^*$ , если  $f(x, j^*) = \max_j f(x, j)$ , где функция  $f(x, j) = \max_{\beta \in B_j} \sum_{i=1}^n x_i e_{ji}(\beta)$ . Здесь  $B_j$  — мн-во значений параметров  $\beta$  допустимых преобразований эталона  $j$ -го класса. Нормировка эталонного вектора такова, что при любом преобразовании  $\beta$  сумма его компонент равна нулю, а модуль (длина вектора) — единице. К. м. р. используют, напр., для распознавания машинописных знаков одного типа шрифта. Признаками  $x_1, \dots, x_n$  являются измерения черноты клеток двумерной сетчатки (растра), на которую проектируется распознаваемый знак. Эталоны (до нормировки) — это «типичные» в определенном смысле изображения каждого из знаков алфавита на сетчатке. Параметр допустимых преобразований задает все возможные сдвиги (переносы) эталона по сетчатке.

К. м. р. можно рассматривать как вариант т. н. кусочно-линейных методов распознавания образов, когда вместо прямого перечисления эталонов каждого класса задается их параметрическая зависимость в форме эталонной области  $E_j = \{e_j(\beta) | \beta \in B_j\}$ . Близость к последней в некоторой заданной метрике определяет сходство (см. *Сходства критерии*) распознаваемого объекта с объектами этого класса. Осн. достоинство К. м. р. — инвариантность к заданным допустимым преобразованиям эталонов, а также инвариантность к преобразованиям вектора признаков вида  $\alpha_1 x + \alpha_2 u$ , где  $u$  — вектор с единичными компонентами, а  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — произвольные величины ( $\alpha_1 > 0$ ). В рассматриваемом примере это обеспечивает инвариантность метода к так называемым «оптическим» преобразованиям распознаваемых знаков (равномерному изменению черноты клеток сетчатки и контрастности линий знака) и к переносам знаков по сетчатке.

К. м. р. можно вывести как статистический алгоритм распознавания (см. *Статистические методы распознавания*), если ввести определенные предположения о статистических характеристиках распознаваемых объектов и считать оптимальным алгоритм, в котором строятся оценки макс. правдоподобия для всех параметров допустимых преобразований эталонов каждого класса.

К. м. р. или близкие к нему методы были реализованы в ряде современных читающих автоматов (напр., отечественный автомат ЧАРС или амер. автомат CDC 915 Page Reader). При распознавании машинописных букв одного типа шрифта К. м. р. позволяет полу-

чить среднюю частоту ошибок порядка  $10^{-3} \div 10^{-5}$ .

Лит.: Читающие автоматы и распознавание образов. К., 1965; У и л с о н Р. Оптические читающие устройства. Пер. с англ. М., 1969. Г. Л. Гимельфарб. **КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ ЧИТАЮЩИЙ АВТОМАТ** — см. *Читающий автомат корреляционный*.

**КОРРЕЛЯЦИЯ** в теории вероятностей — стохастическая (вероятностная) зависимость между случайными величинами, не имеющая, вообще говоря, строго функционального характера. Простейшей и наиболее употребительной численной характеристикой корреляционной зависимости между случайными величинами  $\xi$  и  $\eta$  с математическими ожиданиями  $a_\xi$  и  $a_\eta$  и дисперсиями  $\sigma_\xi^2$  и  $\sigma_\eta^2$  соответственно является т. н. коэффициент К., определяемый ф-лой:

$$R = \frac{M(\xi - a_\xi)(\eta - a_\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta},$$

где  $M$  — символ математ. ожидания. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы (в вероятностном смысле, см. *Независимость* в теории вероятностей), то  $R = 0$ . Всегда  $|R| \leq 1$ , причем  $|R| = 1$  тогда и только тогда, когда  $\xi$  и  $\eta$  линейно

зависимы (в последнем случае  $\eta = R \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} (\xi - a_\xi) + a_\eta$ ). В общем случае величина  $\eta^* = R \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} (\xi - a_\xi) + a_\eta$  дает наилучшее линейное приближение для величины  $\eta$  в том смысле, что

$$M(\eta - \eta^*)^2 = \min_{C_1, C_2} M(\eta - C_1 \xi - C_2)^2,$$

где минимум берется по всевозможным постоянным  $C_1$  и  $C_2$ . Если  $R = 0$ , то величины  $\xi$  и  $\eta$  наз. некоррелированными. Если  $\xi$  и  $\eta$  — независимы, то они и некоррелированы. Обратное утверждение в общем случае неверно; однако, если величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют совместное нормальное распределение, то из некоррелированности  $\xi$  и  $\eta$  следует их независимость. Коэфф. К. величин  $\xi$  и  $\eta$  характеризует лишь степень их линейной зависимости: он может равняться 0 даже тогда, когда между величинами  $\xi$  и  $\eta$  существует строго функциональная (разумеется, нелинейная) зависимость. Пусть  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  — независимые наблюдения пары случайных величин  $\xi, \eta$ . В математической статистике в качестве прил. значения неизвестного коэфф. К.  $R$  между величинами  $\xi$  и  $\eta$  используют т. н. статистический коэффициент К.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_x S_y},$$



где  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ , а  $\bar{y}$  и  $S_y^2$  определяются аналогично по наблюдениям  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

При большом  $k$ -ве наблюдений  $n$  статистический коэфф.  $K$  близок к теор. коэфф.  $K$ . В матем. статистике разработаны методы оценок точности определения  $R$  по  $r$ . См. также *Коррелятор*, *Корреляционная функция*. Н. П. Слободенюк.

**КОШИ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ.** Задача Коши (з. К.) для системы обыкновенных дифф. ур-ний (о. д. у.) сформировалась в связи с необходимостью решения некоторых типичных задач естествознания. Эти задачи являются, как правило, задачами с начальными условиями для канонических систем. Такие задачи обычно преобразуют к виду з. К. для нормальной системы о. д. у. Ниже излагаются некоторые способы решения преимущественно последней задачи.

В квадратурах з. К. для о. д. у. решается весьма редко. Особый интерес в этой связи представляет случай, когда система о. д. у. является линейной. В общем случае вопрос о конструировании приближений решения з. К. для о. д. у. связывают с вопросом о существовании этого решения. Теорему существования обычно доказывают либо методом последовательных приближений Пикара, либо методом ломаных Эйлера; условие единственности можно выбирать или в форме Липшица, или в другой форме за рамками теоремы существования.

Метод Пикара получил свое дальнейшее развитие в методе двусторонних приближений Чаплыгина, центр. частью которого является теория дифф. неравенств. Однако методы Пикара и Чаплыгина при реализации их на ЭВМ с фиксированной разрядной сеткой могут приводить к неустойчивым вычислениям. Наиболее приспособленными методами приближенного решения з. К. для о. д. у. на ЭВМ с фиксированной разрядной сеткой оказались т. н. разностные методы, которые возникли в результате обобщения метода Эйлера. Идея этого метода состоит в том, что з. К. для ур-ния

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

сводят к з. К. для разностного ур-ния

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad (2)$$

называемого ныне ур-нием Эйлера, где  $y_k$  — пригл. значение для  $y(x_k)$  — точного решения з. К. для о. д. у. (1),  $x_k = x_0 + kh$ ,  $h > 0$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Рассматривая для ур-ния (2) задачи (названные позднее задачами Коши) прежде всего как метод приближенного решения з. К. для о. д. у. (1), Эйлер стремился уточнить его. С этой целью он построил асимптотическое

разложение

$$y(x_k) = y(x_{k-1}) + hy'(x_{k-1}) + \dots + \frac{h^s}{s!} y^{(s)}(x_{k-1}) + O(h^{s+1}), \quad (3)$$

где  $h$  — шаг интегрирования,  $x_k$  — узлы сетки. С помощью этого разложения ему удалось понять причины низкой точности метода, определяемого ур-нием (2) (оно получается из (3) при  $s = 1$  в результате отбрасывания остаточного члена и замены  $y(x_k)$  через  $y_k$ ), и наметить пути их устранения. Однако методы высших степеней (степенью метода наз. наивысшая степень многочлена, для которого метод точен), построенные с помощью разложения (3), оказались громоздкими из-за сложности вычислений, необходимых для получения  $y''$ ,  $y'''$ ,  $\dots$ .

Стремясь обойти названную выше трудность, англ. матем. Дж. Адамс в результате интегрирования о. д. у. (1) вдоль искомого решения и замены подинтегр. ф-ции интерполяционным многочленом в форме Лагранжа (см. *Интерполирование функций*) получил асимптотическое разложение, аналогичное (3):

$$y(x_k) = y(x_{k-1}) + h \sum_{i=0}^n \beta_i f(x_{k-i}, y(x_{k-i})) + O(h^{n+2}), \quad (4)$$

где  $n$  — степень интерполяционного многочлена,  $\beta_i$  — числа, получаемые в результате интегрирования коэфф. Лагранжа. Из (4) получают т. н. ф-лы Адамса, которые приводятся в разностной форме:

$$y_k = y_{k-1} + h \left( f_{k-1} + \frac{1}{2} \nabla f_{k-1} + \frac{5}{12} \nabla^2 f_{k-1} + \frac{3}{8} \nabla^3 f_{k-1} + \frac{251}{720} \nabla^4 f_{k-1} + \frac{95}{288} \nabla^5 f_{k-1} + \frac{19087}{60480} \nabla^6 f_{k-1} + \dots \right) -$$

явная, или экстраполяционная, и

$$y_k = y_{k-1} + h \left( f_k - \frac{1}{2} \nabla f_k - \frac{1}{12} \nabla^2 f_k - \frac{1}{24} \nabla^3 f_k - \frac{19}{720} \nabla^4 f_k - \frac{3}{160} \nabla^5 f_k - \frac{863}{60480} \nabla^6 f_k - \dots \right) -$$

неявная, или интерполяционная формула, где  $\nabla^i f_k$  — разность назад,  $f_k = f(x_k, y_k)$ . Аналогичным способом получают ф-ла Нистрема

$$y_k = y_{k-2} + h \left( 2f_{k-1} + \frac{1}{3} \nabla^2 f_{k-1} + \frac{1}{3} \nabla^3 f_{k-1} + \frac{29}{90} \nabla^4 f_{k-1} + \frac{14}{45} \nabla^5 f_{k-1} + \dots \right) -$$

явная и ф-ла центральных разностей

$$y_k = y_{k-2} + \left( 2f_{k-1} + \frac{1}{3} \nabla^2 f_k - \frac{1}{90} \nabla^4 f_{k+1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{756} \nabla^6 f_{k+2} - \dots \right)$$

— неявная. Последние две ф-лы наз. ф-лами типа Адамса. По явным ф-лам обычно производят счет с шагом  $h$  и пересчет с шагом  $qh$  ( $q = \frac{1}{2}$  или  $q = 2$ ); шаг выбирают из требования, чтобы полученные в результате этого приближенные решения отличались друг от друга не более, чем на наперед заданную величину. Неявные ф-лы составляют основу прогнозирующе-исправляющих методов, методов Адамса: по явной ф-ле производится счет с шагом  $h$  (предсказание), затем по неявной ф-ле степени, на единицу большей, чем степень явной ф-лы, с шагом  $h$  производится «исправление». Шаг  $h$  выбирается, исходя из требования, чтобы предсказанное и исправленное «решения» отличались друг от друга не более, чем на наперед заданную величину. Ф-лы Адамса, приведенные выше ф-лы типа Адамса, и другие ф-лы того же типа фиксированной степени в ординатной форме можно записать так:

$$A_h y_k \equiv \sum_{i=0}^m \alpha_i y_{k-i} - h \sum_{i=0}^n \beta_i f_{k+l-i} = 0, \quad (5)$$

где  $l, m, n$  — целые числа,  $m > 0$ ,  $n \geq 0$ ;  $\alpha_i, \beta_i$  — действительные числа,  $\alpha_0 \neq 0$ ,  $\alpha_m \neq 0$ ,  $\beta_0 \neq 0$  и  $\beta_n \neq 0$ . Недостающие начальные значения для ф-лы (5) выбираются так, чтобы разность между двумя начальными значениями имела по крайней мере порядок  $O(h)$ . Значения  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ ,  $m$  и  $n$  получаются либо в результате преобразования ф-л Адамса и ф-л типа Адамса, приведенных выше, либо методом неопределенных коэфф. при заданных  $m$  и  $n$ , исходя из требований: 1) разрешимости ур-ния (5) с соответствующими начальными значениями; 2) сходимости метода, определяемого ф-лой (5) с соответствующими начальными значениями; 3) максимальности степени аппроксимации ур-ния (1) ур-нием (5), т. е. из требования, чтобы в разложении  $A_h y(x_k) = O(h^{s+1})$  натуральное  $s$  было максимальным. При  $l < 0$  получаются явные ф-лы, при  $l = 0$  — неявные, при  $l > 0$  — неявные с забеганием вперед; при  $m = 1$  и  $l = -1$  или  $l = 0$  — ф-лы Адамса.

В связи с тем, что разностное ур-ние (5) имеет порядок, вообще говоря, выше первого, возникает вопрос об устойчивости метода, определяемого ф-лой (5), решение которого сводится к требованию, чтобы разностный опе-

ратор  $\sum_{i=0}^m \alpha_i y_{k-i}$  был устойчивым или условно

устойчивым по Ляпунову. При  $m = n$  и  $l \leq 0$  устойчивые методы вида (5) могут быть самое большее — степени  $n + 1$ ; при четном  $n$  воз-

можны устойчивые ф-лы степени  $n + 2$ , напр., ф-ла Симпсона  $y_k = y_{k-2} + \frac{h}{3} (f_k + 4f_{k-1} + f_{k-2})$ , степень которой равна 4.

С целью преодоления трудности, возникшей у Л. Эйлера, нем. математика К. Рунге и В. Кутта построили еще одно асимптотическое разложение для  $y(x_k)$ :

$$R_{hy}(x_k) \equiv y(x_k) - y(x_{k-1}) - p_1 k_1(h) - \dots - p_r k_r(h) = O(h^{s+1}), \quad (6)$$

где  $r$  — заданное натуральное число,  $k_i(h) = hf(\xi_i, \eta_i)$ , причем  $\xi_i = x_{k-1} + \alpha_i h$ ,  $\alpha_1 = 0$ ;  $\eta_i = y_{k-1} + \beta_{i,1} k_1(h) + \dots + \beta_{i,i-1} k_{i-1}(h)$ ,  $\beta_{10} = 0$ ;  $p_i, \alpha_i$  и  $\beta_{ij}$  — некоторые действительные числа, получаемые, исходя из требования, чтобы в разложении (6) натуральное  $s$ , называемое степенью метода, было максимальным (эти числа определяются, вообще говоря, неоднозначно). Ниже приводятся примеры ф-л Рунге — Кутты: при  $r = 2, s = 2$ :  $p_1 = \frac{1}{3}$ ,

$$p_2 = \frac{3}{4}, \alpha_2 = \frac{2}{3}, \beta_{21} = \frac{2}{3}; \text{ при } r = 3, s =$$

$$= 3: p_1 = \frac{4}{9}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{2}{9}, \alpha_2 = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_3 = \frac{3}{4}, \beta_{21} = \frac{1}{2}, \beta_{31} = 0, \beta_{32} = \frac{3}{4}; \text{ при } r =$$

$$= 4, s = 4: p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{3}, p_4 =$$

$$= \frac{1}{6}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{1}{2}, \alpha_4 = 1, \beta_{21} = \frac{1}{2},$$

$$\beta_{31} = 0, \beta_{32} = \frac{1}{2}, \beta_{41} = \beta_{42} = 0, \beta_{43} = 1. \text{ Ф-лы}$$

Адамса, типа Адамса и Рунге — Кутты, как известно, распространяются на случай системы о. д. у.

Важной положительной особенностью методов Рунге — Кутты по сравнению с методами Адамса и типа Адамса является то, что они допускают расчеты на неравномерных сетках, а последние предполагают равномерные сетки. Если задана неравномерная сетка  $\sigma = \langle x_0 = a < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b \rangle$ , подразбивающая отрезок  $[a, b]$ , то числа  $h_k = x_{k+1} - x_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  наз. шагами сетки  $\sigma$  и  $h = \max_k h_k$  — ее нор-

мой. Положительное число  $\lambda$  и положительная непрерывно-дифференцируемая на  $[a, b]$  ф-ция  $\varphi(x)$  наз. соответственно параметром и ф-цией распределения шагов сетки  $\sigma$ , если  $h_k = \lambda \varphi(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-2$  и  $h_{n-1} \geq \lambda \varphi(x_{n-1})$ . Для произвольной сетки существует ф-ция распределения шагов, при которой параметр равен ее норме. Ф-лы Рунге — Кутты всегда явные, и поэтому шаги сетки интегрирования по ним можно находить способом «счета и пересчета».

Для метода Адамса или устойчивого (условно устойчивого) метода типа Адамса или метода Рунге — Кутты степени  $s$  на соответствующей произвольной сетке при достаточной гладкости вектор-функции  $f$  справедлива мажорантная априорная оценка погрешности метода

$$\delta_k = y(x_k) - y_k = O(h^s), \quad (7)$$

равномерная относительно  $k$ , обеспечивающая сходимость каждого из названных методов. Она не пригодна для расчета шагов из-за ее грубости. Более точной оценкой погрешности названных методов служит априорное асимптотическое ее разложение

$$\delta_k = \lambda^s \cdot C \cdot \int_{x_0}^{x_k} \Omega(\xi, x_k) \Psi(\xi, y(\xi)) \varphi^s(\xi) d\xi + O(\lambda^{s+1}), \quad (8)$$

справедливое при достаточной гладкости вектор-функции  $f$ , где  $C$  — константа, являющаяся функционалом от применяемого метода,

$\Omega(\xi, x)$  — матрицант матрицы  $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=y(x)}$ ,  $\Psi(x, y(x))$  — значение вдоль графика  $(x, y(x))$  дифф. оператора  $\Psi[f]$ , определяемого равенством  $A_h y(x_k) = h^{s+1} \cdot C \cdot \Psi(x_k, y(x_k)) + O(h^{s+2})$  для метода Адамса или типа Адамса и равенством  $R_h y(x_k) = h^{s+1} \times C \cdot \Psi(x_k, y(x_k)) + O(h^{s+2})$  для метода Рунге — Кутты; для метода Адамса или типа Адамса  $\lambda$  следует положить равным шагу  $h$  равномерной сетки при  $\varphi(\xi) \equiv 1$ . Апостериорное асимптотическое разложение погрешности названных методов можно получить из разложения (8) в результате замены в нем точного решения  $y(x)$  кусочно-линейным непрерывным заполнением приближенного решения  $y_k$  (непрерывным заполнением сеточной ф-ции  $y_k$  наз. ф-ция  $\varphi(x)$ , удовлетворяющая условию  $\varphi(x_k) = y_k$ ).

Доказано, что среди неявных устойчивых ф-л типа Адамса наивысшей степени при четном  $n$  не существует ф-лы, для которой константа  $C$  в разложении (8) достигает минимума, т. е. оптим. ф-лы типа Адамса. Однако можно построить ф-лы типа Адамса, близкие к оптимальным.

При интегрировании з. К. для о. д. у. (1) на отрезке  $[a, b]$  методом Рунге — Кутты можно построить сетку  $\sigma = (\lambda, \varphi_0)$ , которая на совокупности сеток, удовлетворяющих усло-

вию нормировки  $\int_a^b \frac{dx}{\varphi(x)} = b - a$ , обеспечи-

вает минимум функционала  $\int_a^b \Omega(\xi, b) |\Psi(\xi,$

$y(\xi))| \varphi^s(\xi) d\xi$  при условии, что ф-ция  $\Psi(\xi, y(\xi))$  не меняет знака на отрезке  $[a, b]$ . Такие сетки наз. асимптотически оптимальны-

ми. Если после этого параметр  $\lambda$  выбрать так, чтобы вдоль сетки  $(\lambda, \varphi_0)$  мера погрешности соответствующего прибр. решения не превышала наперед заданной величины, то получится асимптотически оптим. сетка, обеспечивающая асимптотически гарантированную меру погрешности прибр. решения (см. *Погрешностей вычислений теория*).

При реализации на ЭВМ с фиксированной разрядной сеткой того или иного из описанных выше методов решения з. К. для о. д. у. (1) из-за погрешности округления, вместо сеточной ф-ции  $y_k$ , получается сеточная ф-ция  $y_k^*$ , называемая численным решением рассматриваемой задачи. Разность  $d_k = y_k - y_k^*$  является погрешностью за счет округлений, а разность  $D_k = y(x_k) - y_k^* = \delta_k + d_k$  — полной погрешностью численного решения. При этом неустранимая погрешность, происходящая из-за погрешности входной информации, считается равной нулю, ибо решаемая з. К. рассматривается пока как точно поставленная.

Традиционный подход к учету погрешности за счет округлений, выработанный в *вычислительной математике*, состоит в том, что осуществляется такая организация счета, при которой мера погрешности метода оказывается значительно больше, чем мера погрешности за счет округлений. Этот принцип можно сформулировать в виде требования, чтобы главный член асимптотического разложения полной погрешности совпадал с главным членом асимптотического разложения погрешности

метода:  $D_k = \lambda^s \cdot C \cdot \int_{x_0}^{x_k} \Omega(\xi, x_k) \Psi(\xi, y(\xi)) \times$

$\times \varphi^s(\xi) d\xi + O(\lambda^{s+1})$ . Последнее составляет условие выбора шагов сетки прибр. интегрирования. Численные эксперименты на модельных задачах подтверждают существование таких шагов, которые принято называть асимптотическими.

Из сказанного явствует, что выбор сетки при интегрировании с заданной мерой погрешности з. К. для о. д. у. описанными выше методами представляет большие трудности. Поэтому возникли двусторонние разностные методы как типа Адамса, так и типа Рунге — Кутты. Рассмотрим последние, так как первые не привели к удовлетворительным алгоритмам. Преимущество двусторонних методов заключается в том, что если за прибр. решение з. К. для ур-ния (1) принять полусумму двусторонних приближений, то их полуразность составит тонкую мажорантную оценку погрешности этого приближения.

Двусторонние методы типа Рунге — Кутты получаются, исходя из требований, чтобы в асимптотическом разложении

$$R_h y(x_k) = h^{s+1} \cdot \alpha \cdot \Psi(x_k, y(x_k)) + O(h^{s+2}) \quad (9)$$

натуральное  $s$  принимало макс. значение и  $\alpha$  было параметром. Пары двусторонних ф-л

получаются, если  $\alpha$  придавать значения противоположных знаков с одинаковыми модулями. Двусторонность приближений достигается выбором достаточно малых шагов (и, может быть, значений  $\alpha$ ), исходя из требования, чтобы знак разложения (9) совпадал со знаком его главного члена. Кроме того, при выборе шагов (и значений  $\alpha$ ) учитываются требования, чтобы мера вычисл. погрешности численного решения была существенно меньше меры погрешности метода, и требование гарантированной оценки меры полной погрешности численного решения. Приведем примеры двусторонних ф-л:

$$\begin{aligned} \text{при } r=2, s=1, \Psi[f] = f_x: \alpha = \frac{1}{24}, \quad p_1 = 0, \\ p_2 = 1, \alpha_2 = \frac{11}{24}, \beta_{21} = \frac{1}{2}, \alpha = -\frac{1}{24}, \\ p_1 = 0, p_2 = 1, \alpha_2 = \frac{13}{24}, \beta_{21} = \frac{1}{2}; \text{ при } r= \\ = 3, s=2, \Psi[f] = f_x f_y + f_x f_y^2: \alpha = 1, p_1 = \frac{1}{6}, \\ p_2 = \frac{1}{6}, p_3 = \frac{2}{3}; \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \frac{1}{2}, \beta_{21} = 1, \\ \beta_{31} = \frac{7}{4}, \beta_{32} = -\frac{5}{4}, \alpha = -1, p_1 = \frac{1}{6}, \\ p_2 = \frac{1}{6}, p_3 = \frac{2}{3}, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \frac{1}{2}, \beta_{21} = 1, \\ \beta_{31} = -\frac{5}{4}, \beta_{32} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Большое к-во пар ф-л в одном алгоритме используется в связи с необходимостью «обходить» нули оператора  $\Psi[f]$ .

Понятие неустранимой погрешности по своей природе выходит за рамки вычисл. математики, ибо ее изменение связано с изменением погрешности входной информации, получаемой, как правило, экспериментально. Оценка же неустранимой погрешности может быть полезной при определении целесообразной погрешности, с которой должна решаться рассматриваемая задача.

Основу для получения оценок неустранимой погрешности составляют т. и. ур-ния в вариациях. Пусть з. К. для о. д. у.

$$y' = \tilde{f}(x, y) \quad (10)$$

обозначает «точное» матем. описание некоторой естественнонаучной задачи, а з. К. для о. д. у. (1) — приближенное и заданное ее описание.

Пусть  $y(x)$  — точное решение названной з. К. для о. д. у. (10). Тогда ур-ние в вариациях для ур-ния (1) запишется так:

$$u' = F(x, y(x), u) u + \tilde{f}(x, \tilde{y}(x)) - f(x, \tilde{y}(x)), \quad (11)$$

где  $u(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$ ,  $F$  — матрица  $N$ -го порядка, элемент  $F^{(ij)}$  которой равен нулю, если  $u^{(j)} = 0$ , в противном случае  $F^{(i,j)}$  равен соответствующей частной разделенной разнос-

ти ф-ции  $f^{(i)}(x, y)$  по переменной  $y^{(j)}$ ,  $N$  — размерность вектора  $y$ . Поскольку на практике весьма часто з. К. для ур-ния (10) отличается от з. К. для ур-ния (1) лишь начальными условиями, целесообразно назвать способы оценки вектор-функции  $u(x)$  при  $\tilde{f}(x, y) - f(x, y) \equiv 0$ . В этом случае весьма тонкие оценки могут быть получены либо с помощью многочисленных модификаций метода двусторонних приближений Чаплыгина с учетом необходимых конкретных свойств ур-ния (11), либо с помощью 2-го метода Ляпунова, если какая-либо норма любого решения ур-ния (11) монотонно не возрастает, либо с помощью иного тонкого метода, учитывающего конкретные свойства ур-ния (11). Пусть  $G(x, u)$  — симметричная квадратичная форма от  $u$  с коэффициентами, быть может, зависящими от  $x$ , представляющая квадрат названной нормы, а  $M(x)$  — максимум полной производной от  $G(x, u)$  по  $x$  в силу ур-ния (11), вычисленный в ограниченной замкнутой части пространства, содержащей решение  $u(x)$ . Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} |u^{(i)}(x)| \leqslant (G(x_0, u(x_0)) A_{N-i}^{(i)}(x)/A_N(x))^{1/2} \times \\ \times \exp \frac{1}{2} \int_{x_0}^x M(\xi) d\xi, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где  $A_N(x)$  — дискриминант формы  $G(x, u)$ ,  $A_{N-i}^{(i)}(x)$  — минор, получающийся из  $A_N(x)$  вычеркиванием  $i$ -ой строки и  $i$ -го столбца.

В случае, если  $\tilde{f}(x, y) - f(x, y) \neq 0$ , для получения тонких оценок вектор-функции  $u(x)$  можно применять уже названные методы или их обобщения.

Для решения з. К. для о. д. у. с невысокой точностью можно применять аналоговые устройства. З. К. для системы канонических ур-ний, каждое из которых является ур-нием 2-го порядка, встречается весьма часто. В связи с этим для таких з. К. разработаны неопосредованные способы приближенного решения, аналогичные упомянутым выше.

Лит.: Горбунов А. Д. Разностные уравнения и разностные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1967; Гайсарян С. С. О выборе оптимальных сеток при численном интегрировании задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В кн.: Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов, в. 2. К., 1969; Бахвалов Н. С. Лекции по численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В кн.: Материалы Международной летней школы по численным методам, в. 2. К., 1970 [библиогр. с. 127—135]. А. Д. Горбунов.

**КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ АВМ** — условное название зависимости, которая определяет связь между входными и выходными сигналами решающих элементов, предназначенных для решения некоторых задач, или совокупностью этих элементов. Коэфф. передачи безынерционных линейных решающих элементов равен отношению выходного сигнала к входному, поэтому масштабное звено, напр., имеет

коэфф. передачи, равный некоторой константе. Коэфф. передачи линейного инерционного решающего элемента наз. иногда передаточной функцией.

Лит. см. к ст. Аналоговая вычислительная машина. В. Ф. Евдокимов.

**КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛНОТЫ ПОИСКА** — один из параметров, характеризующих эффективность работы информационно-поисковой системы.

К. п. п.  $R = \frac{a}{a+c}$ , где  $a$  — число релевантных документов, выданных системой в ответ на информационный запрос, а  $c$  — число релевантных документов в информационном массиве системы, не выданных системой. К. п. п. связан с коэффициентом потерь информации при поиске  $Q$  соотношением  $R = 1 - Q$ . См. Релевантность документа, Эффективность информационного поиска техническая. Э. Ф. Скороходько.

**КОЭФФИЦИЕНТ ТОЧНОСТИ ПОИСКА** — один из параметров, характеризующих эффективность работы информационно-поисковой системы.

К. т. п.  $P = \frac{a}{a+b}$ , где  $a$  — число релевантных документов, выданных системой в ответ на информационный запрос, а  $b$  — число нерелевантных документов, выданных при этом системой. К. т. п. связан с коэффициентом шума поискового  $S$  соотношением  $P = 1 - S$ . См. Релевантность документа, Эффективность информационного поиска техническая. Э. Ф. Скороходько.

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА** — задача получения решения дифференциального уравнения (или системы уравнений) в заданной области при заданных дополнительных ограничениях на решение в точках ее границы. Эти ограничения имеют вид одного или нескольких равенств и наз. к р а е в ы м и у с л о в и я м и (к. у.). Матем. уравнение К. з. для системы обыкновенных дифф. уравнений порядка  $N$  могут быть записаны так:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad g(x_0, x_l) = 0, \quad t \in [0, l], \quad (1)$$

где первая ф-ла означает векторную запись системы дифф. уравнений, вторая — векторную запись к. у., а  $x_0 = x(0)$ ,  $x_l = x(l)$ . Размерность  $r$  вектора  $g(x_0, x_l)$  может и не совпадать с  $N$ . При  $r < N$  К. з. наз. н е о о п р е д е л е н н о й, при  $r = N$  — о п р е д е л е н н о й, при  $r > N$  — п е р е о п р е д е л е н н о й. В приложениях чаще всего встречается случай, когда  $r = N$ , поскольку в этом случае имеются широкие классы К. з., обладающих единственным решением. Вообще же К. з. может и не иметь решения. Практически установить априори разрешимость К. з., как правило, весьма сложно. Если к. у. имеют вид  $g_1(x_0) = 0$ ,  $g_2(x_l) = 0$ , то К. з. наз. задачей с расщепленными к. у. Бывают практические задачи для систем обыкновенных дифф. уравнений, в которых дополнительные ограничения более сложны, чем в (1), напр.:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x), \quad g(x_0, x_1, x_2, \dots, x_l) + \\ &+ \int_0^l \varphi(\tau, x) d\tau = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x_i = x(t_i)$ ,  $t_i$  — заданные точки из  $[0, l]$ , а  $\varphi(\tau, x)$  — заданная вектор-функция. Такие задачи наз. о б о б щ е н н ы м и К. з. Если  $\varphi \equiv 0$ , то задача (2) наз. м н о г о т о ч е ч н о й К. з., а задачу (1), которая является частным случаем задачи (2), наз. д в у х т о ч е ч н о й К. з. Задача с к. у.  $g(x_\alpha) = 0$ , заданным только в одной точке  $t_\alpha \in [0, l]$ , наз. о д н о т о ч е ч н о й К. з. Решение такой задачи сводится к отысканию всех решений  $x_\alpha^*$  системы  $g(x_\alpha) = 0$  и решению затем задач Коши  $dx/dt = f(t, x)$ ,  $x(t_\alpha) = x_\alpha^*$ . Задача (2) может быть просто приведена к виду (1), но с увеличенным порядком системы дифф. уравнений. Если  $f(t, x)$ ,  $g(x_0, x_l)$  линейны по  $x$ ,  $x_0$ ,  $x_l$ , то К. з. наз. л и н е й н о й. Общий вид линейной К. з. таков:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad Bx_0 + Cx_l = d, \quad (3)$$

где  $A, B, C$  — заданные матрицы, а  $f, d$  — заданные векторы.

Одним из основных источников К. з. являются вариационные задачи, появляющиеся при исследовании физ. систем с сосредоточенными параметрами. Условия минимума обычно встречающихся функционалов в виде одномерных интегралов представляют собой во многих случаях ур-ния К. з. *Понтрягина принцип максимума* позволяет сводить к К. з. и неклассические вариационные задачи, когда область ограничений на управления замкнута, — т. е. задачи на построение оптим. управлений. К. з. для обыкновенных дифф. ур-ний возникают также при решении К. з. для ур-ний с частными производными методом прямых и при различных др. способах сведения многомерных К. з. к одномерным. Линейные однородные К. з. (т. е. задачи типа (3) с  $f = 0$  и  $d = 0$ ) получаются при исследовании собственных частот колебаний физ. систем.

К. з. для ур-ний с частными производными встречаются обычно в связи с ур-ниями эллиптического типа, поскольку такие задачи имеют широкое практическое применение в механике упругого тела, гидромеханике, при исследовании теплопередачи, электромагнетизма, а также в др. областях физики (см. *Эллиптического типа дифференциальных уравнений в частных производных способы решения*). Но математически К. з. может быть сформулирована для любого ур-ния с частными производными или системы таких ур-ний. В приложениях часто формулируются К. з. для самосопряженного эллиптического ур-ния 2-го порядка

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = f, \quad (4)$$

где  $k, f$  могут зависеть как от пространственных координат, так и от решения с его производными. Распространенность ур-ния (4) объясняется тем, что оно выражает закон сохранения массы или энергии для бесконечно малого объема. По типу к. у. различают 1-ю, 2-ю и 3-ю К. з. для ур-ния (4). В 1-ой К. з. (задаче Дирихле) задаются значения решения на границе  $\Gamma$  области:  $u = \beta$ , во второй (задаче Неймана) — значения норм. производной на  $\Gamma$ :  $\partial u / \partial n = \beta$ , а в 3-й К. з. — условие  $\partial u / \partial n + \alpha u = \beta$  на  $\Gamma$ . Во всех трех формулах  $\alpha, \beta$  — это ф-ции координат точек границы, но они могут зависеть также от решения и его производных. Для ур-ния (4) встречается еще смешанная К. з., когда к. у. имеют различный тип на разных участках границы, и задача с косой производной, в которой к. у. на  $\Gamma$  имеет вид:  $\partial u / \partial s + \alpha u = \beta$ , где  $s$  — направление, не совпадающее с направлением нормали к  $\Gamma$ . Частным случаем ур-ния (4) являются ур-ния Лапласа (при  $k = 1$  и  $f = 0$ ), Пуассона (при  $k = 1, f$  не зависящему от решения  $u$ ), Гельмгольца (при  $k = 1, f = cu + d$ , где  $c$  и  $d$  могут зависеть только от координат). Если коэфф. ур-ния (4) и к. у. не зависят от решения, то К. з. наз. линейной. К. з. для эллиптических ур-ний порядка, выше 2-го, возникают в задачах механики упругого тела и в гидромеханике вязкой жидкости. Если порядок ур-ния  $2n$ , то для определенности задачи должны быть заданы на границе области  $n$  к. у. На тех же участках границы, которые заранее не определены, а находятся в процессе решения К. з., к-во к. у. должно быть на единицу больше. К. з. с неизвестной заранее границей встречаются при исследовании течений жидкости со свободными поверхностями или нескольких несмешивающихся жидкостей, при исследовании теплопередачи с фазовыми переходами вещества (плавлением, испарением и т. п.). К. з. для системы ур-ний эллиптического типа возникают в механике упругого тела, в магнито-гидродинамике, в задачах термоупругости, т. е. обычно там, где необходимо исследовать взаимное влияние различных физ. процессов. Кроме того, такие К. з. получаются из вариационных задач для физ. систем с распределенными параметрами. Условия существования решения К. з. исследованы достаточно полно лишь для задач с простыми к. у.

Термин К. з. применяется иногда также для граничных задач теории ф-ций комплексного переменного.

Лит. см. к ст. Краевых задач способы решения.

В. Е. Шаманский.

**КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ** — ограничения в виде одного или нескольких уравнений, заданных в точках границы области, где ищут решение краевой задачи.

**КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ.**

Краевой задачей (к. з.) наз. совокупность двух систем интегро-дифференциальных уравнений (см. Уравнений классификация) и функциональных соотношений, относящихся к неизвестной функции  $\bar{u}(t, \bar{x})$  (скалярной или векторной), из которых первая система (1)

определена в некоторой области  $\Omega$  переменных  $t, \bar{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$ , а вторая (2) — на части или на всей границе  $\Sigma$  области  $\Omega$ , а также, может быть, на некоторых подмногообразиях  $\Sigma_i \subset \Omega$ , имеющих размерность, меньшую, чем размерность  $\Omega$ . Для определенности будем считать, что система (1) имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = L(t, \bar{x}, \bar{u}, D\bar{u}, S\bar{u}), \quad (1)$$

где  $\bar{u}(t, \bar{x}) = \{u_1(t, x_1, \dots, x_m), \dots, u_n(t, x_1, \dots, x_m)\}$ ,  $L$  — векторная ф-ция своих аргу-

ментов,  $D = \{D_1^{\alpha_1}, \dots, D_m^{\alpha_m}\}$ ,  $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $D_i^{\alpha_i} =$

$$= \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i \leq p \quad (p \text{ — порядок системы}),$$

$S\bar{u} = \iiint k(t, \bar{x}, \bar{u}) d\bar{x} dt$  — интегральный оператор, в котором интегрирование производится по всем или по части переменных  $t, \bar{x}$ . Область  $\Omega$  есть открытый цилиндр в простр.  $t, x_1, \dots, x_m$  с основанием  $Q$ , лежащим в плоскости  $t = 0$ , осью, параллельной оси  $t$ , и боковой поверхностью  $\Gamma$  (см. рис.). В этом случае говорят, что  $\Omega$  есть топологическое произведение  $Q$  на открытый интервал  $H = \{0 < t < T\}$ ;  $\Omega = Q \times H$ ;  $\Gamma = \gamma \times H$ ,  $\gamma = \partial Q$  (граница  $Q$ ). Ограничения для ф-ции  $\bar{u}$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} l(t, \bar{x}, \bar{u}, D\bar{u}, S\bar{u}) &= 0, \quad t, \bar{x} \in \Gamma, \text{ а) } \\ \bar{u}(0, \bar{x}) &= \bar{u}_0(\bar{x}), \quad \bar{x} \in Q \text{ б) } \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где  $l$  — векторная ф-ция всех аргументов, определенная на  $\Gamma$ , операторы дифференцирования  $D$  имеют порядок  $q$ , как правило, меньший, чем  $p$ ,  $s$  — некоторый оператор, определенный на  $\Gamma$ . Ур-ния (1) и (2) описывают нестационарную краевую задачу (н. к. з.), или задачу Коши, ур-ния (1) описывают развитие некоторого процесса; ур-ния (2а) определяют краевые условия, условия (2б) — начальные данные. Н. к. з. описывают большей частью поведение некоторой физ. системы (атом, молекула; ансамбль атомов и молекул, образующий твердое, жидкое или газообразное тело; вакуум, заполненный излучением; размножение нейтронов в реакторе и т. д.).

Интегро-дифф. ур-ние (1) соответствует континуальной модели математической (см. Численные методы) физ. процесса, краевые условия (2а) эффективно описывают взаимодействие физ. системы с окружающей средой, начальные данные (2б) описывают начальное состояние системы. Если операторы  $L, l, S, s$  и ф-ция  $\bar{u}(t, \bar{x})$  не зависят от  $t$ , то условие (2б) отбрасывается, и мы приходим к стационарной краевой задаче (с. к. з.). Если операторы  $L, l, S, s$  являются линейными, то к. з. является линейной, в противном случае — нелинейной. В случае линейной н. к. з. уравнения (1) и



(2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = L(t, \bar{x}) \bar{u} + \bar{f}(t, \bar{x}), \quad t, \bar{x} \in \Omega, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} l(t, \bar{x}) \bar{u} &= \bar{g}(t, \bar{x}), \quad t, \bar{x} \in \Gamma, \quad \text{а) } \\ \bar{u}(0, \bar{x}) &= \bar{u}_0(\bar{x}), \quad \bar{x} \in Q, \quad \text{б) } \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где операторы  $L(t, \bar{x})$  и  $l(t, \bar{x})$  линейны. Ф-ции  $\bar{f}(t, \bar{x})$ ,  $\bar{g}(t, \bar{x})$  (ф-ция краевых условий) и  $\bar{u}_0(\bar{x})$  (ф-ция начальных данных) наз. входными данными н. к. з. (3), (4). Линейная н. к. з. (3), (4) наз. корректно поставленной, если решение  $\bar{u}(t, \bar{x})$  задачи (3), (4) единственно и непрерывно зависит в некоторой норме, метрике, или вообще топологии от входных данных задачи. Если  $\bar{f}(t, \bar{x}) = 0$ ,  $\bar{g}(t, \bar{x}) = 0$ , к. з. (3), (4) является однородной и справедлив принцип суперпозиции: вместе с решениями  $\bar{u}_1(t, \bar{x})$ ,  $\bar{u}_2(t, \bar{x})$  задачи (3), (4) решением будет также  $C_1 \bar{u}_1(t, \bar{x}) + C_2 \bar{u}_2(t, \bar{x})$ . В этом случае  $\bar{u}(t, \bar{x})$  представляется в виде

$$\bar{u}(t, \bar{x}) = S(t) \bar{u}_0(\bar{x}), \quad (5)$$

где  $S(t)$  — линейный ограниченный оператор в некотором банаховом простр.  $B$  (см. Пространство абстрактное в функциональном анализе) ф-ций  $\bar{v}(\bar{x})$ , удовлетворяющих краевому условию  $l(\bar{v}) = 0$ ; при этом для каждого  $t \in H$   $\bar{u}(t, \bar{x}) \in B$ , и справедливо соотношение

$$\|S(t)\|_B \leq M(T) < \infty. \quad (6)$$

Если  $\bar{f}(t, \bar{x}) \neq 0$ , то при достаточно гладких коэфф. и входных данных ур-ния (3), (4) справедливо представление

$$\bar{u}(t, \bar{x}) = S(t, 0) \bar{u}_0(\bar{x}) + \int_0^t S(t, \tau) \bar{f}(\tau, \bar{x}) d\tau, \quad (7)$$

где  $S(t_2, t_1)$  — оператор перехода, удовлетворяющий соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(t_2, \bar{x}) &= S(t_2, t_1) \bar{u}(t_1, \bar{x}), \\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T, & \quad \text{а) } \\ S(t_3, t_1) &= S(t_3, t_2) S(t_2, t_1), \\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq T & \quad \text{б) } \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

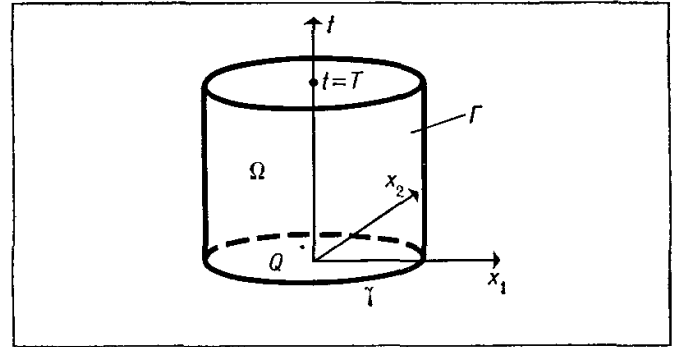
$\lim_{t_2 \rightarrow t_1 + 0} S(t_2, t_1) = I$  (тождественный оператор).

При этом  $S(t, 0) = S(t)$ .

Осн. метод решения задачи Коши (3), (4) заключается в ее аппроксимации конечномерными задачами Коши. Это производится различными способами. К классическим методам относится метод Рунге — Галеркина (метод проектирования), к более поздним — метод прямых и метод конечных разностей.

В последнее время наметилось сближение классических методов проектирования с конечноразностными на основе т. н. вариацион-

но-разностных схем. В связи с развитием ЭВМ конечноразностный метод стал наиболее универсальным для решения систем (3), (4). Особенно эффективным он является для нелинейных систем (1), (2), позволяя автоматически в процессе решения линейровать задачу. Конечноразностные методы позволяют решать н. к. з. шаг за шагом с помощью явной или неявной схемы. В последнем случае приходится решать на каждом шаге некоторую с. к. з. Т. о., в неявных схемах решение н. к. з. сводится к повторному решению с. к. з.



Область интегрирования нестационарной краевой задачи в фазовом пространстве  $t, x_1, x_2$ .

Прямое решение с. к. з., т. е. сведение с. к. з. к задаче Коши, возможно только в простейших случаях. Так, задача

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - k^2(x) u = f(x); \quad \frac{du(0)}{dx} = 0; \quad u(1) = 1 \quad (9)$$

сводится к совокупности трех задач Коши:

$$\frac{dl}{dx} = k^2(x) - l^2(x), \quad l(0) = 0; \quad (10a)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) - l(x)y, \quad y(0) = 0; \quad (10б)$$

$$\frac{du}{dx} = l(x)u + y(x), \quad u(1) = 1. \quad (10в)$$

Задачи (10) интегрируются на отрезке  $[0, 1]$ , первые две в направлении возрастания  $x$ , последняя — в обратном направлении. Все три задачи устойчивы. Такой метод решения с. к. з. называется методом дифф. факторизации. Более употребительна конечноразностная факторизация, которая применяется к разностному аналогу с. к. з. При выполнении определенных условий одномерная конечноразностная с. к. з.

$$\Lambda \bar{u} = \bar{f} \quad (11)$$

решается методом векторной или скалярной факторизации. Здесь  $\Lambda$  есть одномерный конечноразностный аналог оператора

$$L = \sum_{k=0}^p a_k \frac{d^k}{dx^k}. \quad (12)$$

где  $a_k$  — квадратные матрицы размерности  $n$  в простр. переменных  $u_1, \dots, u_n$ . Применение векторной факторизации к решению одномерной с. к. з., как правило, является экономичным в том смысле, что к-во операций, приходящееся на точку сетки, ограничено константой, зависящей от оператора  $\Lambda$ , но не от к-ва  $N$  точек сетки. Прямое перенесение метода одномерной факторизации на многомерные с. к. з. приводит к т. н. методу матричной факторизации. Однако этот метод не является экономичным, т. к. к-во итераций, приходящееся на точку сетки, зависит от общего к-ва точек сетки  $N$  и возрастает, как положительная степень  $N$ . В частных случаях возможно представление многомерной с. к. з. как некоторой задачи Коши. Иногда в ур-нии (1) с. к. з.

$$L\bar{u} + \bar{f} = 0 \quad (13)$$

одно переменное, напр.  $x_1$ , может быть выделено, так что (13) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} = \Phi \bar{u} + \bar{f}, \quad (14)$$

где оператор  $\Phi$  не зависит от  $D = \frac{\partial}{\partial x_1}$ . Если при этом  $\Gamma$  содержит ось  $x_1$  и краевые условия на оси  $x_1$  определяют  $\bar{u}_0(x_2, \dots, x_m)$ , то при соответствующей структуре оператора  $\Phi$  и краевых условиях на  $\Gamma$ , обеспечивающих корректность задачи, с. к. з. может быть прямо решена, как задача Коши. Таким способом могут быть решены, напр., задачи обтекания тела сверхзвуковым потоком идеальной жидкости или задача обтекания вязким потоком в приближении пограничного слоя. В большинстве случаев для решения с. к. з. прибегают к итерационным методам, большинство которых основано на асимптотических свойствах решений н. к. з.

Известно, что решение  $u(t, \bar{x})$  задачи Коши для ур-ния теплопроводности со стационарными краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \Delta u + f(\bar{x}), & t, \bar{x} \in \Omega; & \text{а)} \\ u(t, \bar{x}) &= g(\bar{x}), & \bar{x} \in \gamma; & \text{б)} \\ u(0, \bar{x}) &= u_0(\bar{x}), & \bar{x} \in Q & \text{в)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

обладает следующим асимптотическим свойством:

$$u(t, \bar{x}) \rightarrow u(\bar{x}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (16)$$

При этом ф-ция  $u(\bar{x})$  не зависит от выбора  $u_0(\bar{x})$  и является решением с. к. з.

$$\left. \begin{aligned} a^2 \Delta u + f(\bar{x}) &= 0, & \bar{x} \in \Omega; & \text{а)} \\ u(\bar{x}) &= g(\bar{x}), & \bar{x} \in \gamma. & \text{б)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Т. о., решение с. к. з. (17) может быть получено предельным переходом (16) из решения н. к. з. (15). Асимптотическое свойство (16) справедливо для решений многих н. к. з., в том числе

и нелинейных, и используется для получения решений соответствующих с. к. з. Такой метод наз. методом стационарирования (установления). В методе установления итерационная схема решения с. к. з. может просто совпадать с конечноразностной схемой интегрирования соответствующей н. к. з. Явные схемы конечноразностного решения просты в реализации, но требуют большой затраты машинного времени. Неявные схемы простой аппроксимации (см. *Дробных шагов метод*) могут реализовываться с любым шагом по времени, однако при этом на каждом шаге вновь приходится решать с. к. з. аналогичного вида. Для того, чтобы избежать этого и получить экономичную схему интегрирования, прибегают к методу приближенной факторизации в сочетании со схемой универсального алгоритма. Так, если  $L$  — сильно эллиптический оператор, то с. к. з.

$$Lu + f(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in Q; \quad u(\bar{x}) = g(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \gamma \quad (18)$$

ставится в соответствие релаксационный процесс

$$\left. \begin{aligned} \Psi \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(\bar{x}), & t, \bar{x} \in \Omega; & \text{а)} \\ u(t, \bar{x}) &= g(\bar{x}), & \bar{x} \in \gamma; & \text{б)} \\ u(0, \bar{x}) &= u_0(\bar{x}), & \bar{x} \in Q, & \text{в)} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $\Psi$  — релаксационный оператор, имеющий факторизованную структуру

$$\Psi = \prod_{i=1}^n \Psi_i, \quad \Psi_i = I + \alpha L_i, \quad (20)$$

$\Psi_i$  — операторы, легко обратимые, большей частью одномерные, и такие, что процесс с дискретным временем

$$\Psi \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = Lu^n + f^n \quad (21)$$

сходится для всех  $\tau$ . Предельная ф-ция  $u(\bar{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, \bar{x})$  не зависит от  $u_0(\bar{x})$  и дает решение с. к. з. (18).

Для решения с. к. з. с постоянными коэфф. с успехом применяется классический метод точечных источников, сосредоточенных нагрузок и т. д., который представляет решение с. к. з. как суперпозицию элементарных решений, соответствующих «сосредоточенным в точке» условиям (условия типа  $\delta$ -ф-ции). Этот метод приводит к интегр. ур-ниям первого или второго рода для ф-ции источников  $\bar{\varphi}(\bar{x})$  на границе

$$\bar{g}(\bar{x}) = \int K(\bar{x}, \bar{s}) \cdot \bar{\varphi}(\bar{s}) d\bar{s} + \alpha \bar{\varphi}(\bar{x}), \quad \bar{x}, \bar{s} \in \gamma, \quad (22)$$

где ядро  $K(\bar{x}, \bar{s})$  может быть и сингулярным. При  $\alpha = 0$  имеем интегр. ур-ние Фредгольма 1-го рода, при  $\alpha \neq 0$  — ур-ние Фредгольма 2-го рода.

После дискретизации ур-ния (22) приходим к системе линейных ур-ний (плохо обусловленной в случае  $\alpha = 0$ ), которая решается прямыми или итерационными методами. Формальный разностный аналог (22) имеет меньшую размерность, нежели разностный аналог (21), однако решения обеих этих систем сравнимы во времени, т. к. в (22) имеем полностью заполненную матрицу, в то время как в (21) имеем матрицу лишь с несколькими ненулевыми диагоналями.

Следует выделить особый класс с. к. з. — задачи на собственные значения и задачи с переменным спектром. В с. к. з. на собственные значения содержится параметр  $\lambda$ , при частных значениях которого с. к. з. теряет единственность решения; эти значения  $\lambda$  наз. *собственными значениями* с. к. з.; мн-во собственных значений образует спектр задачи. Так, если  $L$  — самосопряженный положительный оператор

$$L = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (23)$$

то с. к. з.

$$Lu = \lambda u, \quad \bar{x} \in Q, \quad u(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \gamma \quad (24)$$

имеет дискретный счетный спектр вещественных значений  $\lambda_k$  (все положительные) и соответствующую ему систему взаимноортогональных собственных ф-ций  $u_n(\bar{x})$ , являющихся решением с. к. з. (24).

Конечноразностный аналог с. к. з. (24) приводит к задаче линейной алгебры о полном спектре симметричной матрицы, для которой имеются эффективные методы решения. Иногда требуется найти собственное значение, обладающее некоторым экстрем. свойством (собственное значение, максимальное или минимальное по модулю, по вещественной или мнимой части и т. д.). В этом случае применимы также методы установления.

С. к. з. с переменным спектром соответствуют задаче (24), когда спектр оператора  $L$  является знакопеременным. Тогда применяют также итерационные методы более сложной структуры, напр., многослойные с выбором оптим. параметра релаксации.

К важным нелинейным с. к. з. приходят при отыскании стационарных и автомоделей решений в газовой динамике. При этом дифф. ур-ния, описывающие автомоделное решение, имеют, как правило, особенности в граничных точках и в заранее неизвестных точках внутри. Общая теория таких краевых задач еще не разработана.

*Лит.:* Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.—Л., 1963 [библиогр. с. 677—734]; Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., 1966; Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1966; Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967 [библиогр. с. 189—193]; Яненко Н. Н. Введение в разностные методы математической физики, ч. 1—2. Новосибирск, 1968 [библиогр. ч. 2, с. 379—385]; Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Си-

стемы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., 1968 [библиогр. с. 585—592]; Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., 1971 [библиогр. с. 510—512]; Годунов С. К. Уравнения математической физики. М., 1971; Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А. Итерационные методы и квадратичные функционалы. Новосибирск, 1972 [библиогр. с. 176—203]; Курант Р. Уравнения с частными производными. Пер. с англ. М., 1964 [библиогр. с. 793—813]; Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Пер. с англ. М., 1970 [библиогр. с. 559—564].

Н. Н. Яненко.

**КРАЙНЯЯ ТОЧКА**, вершина выпуклого множества  $X$  линейного пространства  $E$  — такая точка  $x$ , которая не может быть представлена в виде  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ , где  $x_1 \neq x_2$ , — некоторой точки мн-ва  $X$ ,  $0 < \lambda < 1$ . К. т. наз. еще экстремальной точкой *выпуклого множества*.

Напр., в конечномерном евклидовом пространстве  $E^n$  К. т. являются вершины многогранника, точки границы шара. Мн-во  $X$  может не иметь К. т. (напр., открытый шар).

В пространстве  $E^n$  всякое непустое замкнутое ограниченное выпуклое мн-во  $X$  имеет К. т.; каждая точка мн-ва  $X$  может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации К. т.

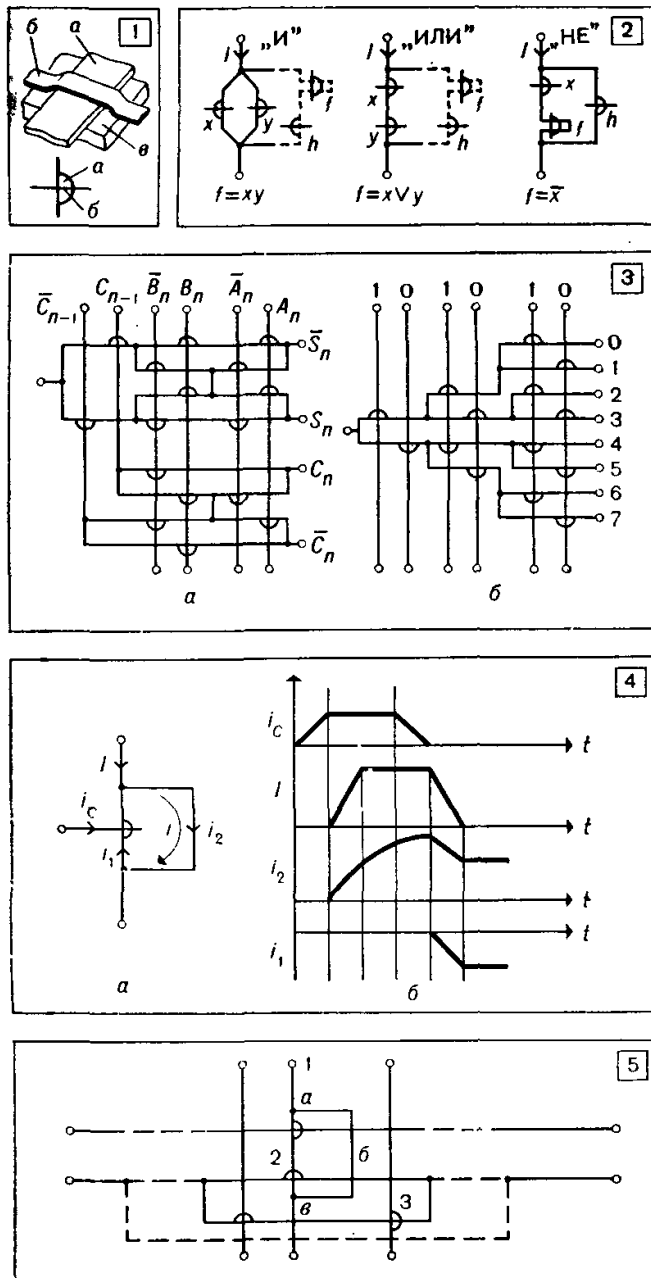
Ю. М. Данилин.

**КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ СПОСОБЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ** — см. *Кубатурные формулы*.

**КРИОГЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ** — элементы, основанные на использовании явления сверхпроводимости. Существует несколько типов их: персисторы, персистатроны, криотроны, колотроны, криосары, криосисторы, туннельтроны и др. Наиболее перспективны *криотроны* и *туннельные криотроны*.

**КРИОТРОН** — сверхпроводниковое устройство, сопротивление управляемого элемента которого изменяется в зависимости от величины управляющего магнитного поля. Используется как один из *криогенных элементов вычислительной техники*. Первоначально (с 1955) К. выполнялся в виде проволочной конструкции, состоящей, напр., из танталового стержня, являющегося вентилем, и обмотки на нем, изготовленной, напр., из ниобиевой проволоки и выполняющей ф-ции затвора. С 1957 применяются пленочные К. (рис. 1), представляющие собой разделенные изоляцией пересекающиеся пленки — вентиль (а) и затвор (б), находящиеся над экраном (в), улучшающим прямоугольность переключательной характеристики К. и увеличивающим его быстродействие. Используются преимущественно К. пленочные; проволочные — только как средство для моделирования новых криотронных устр-в. В туннельном К. с помощью тока в пленочном затворе осуществляется подавление туннельного эффекта между двумя другими пленками. Туннельные К. перспективны благодаря их высокому быстродействию (время переключения — пикосекунды), малым рабочим токам (единицы *ма*), малой выделяемой мощности (менее  $10^{-15}$  Дж на переключение), высокой степени миниатюризации и интеграции, во сложны в изготовлении.

К. можно использовать для построения самых разнообразных схем, применяемых в вычисл. технике: логических — переключателей, дешифраторов, сумматоров комбинационных и т. д.; запоминающих — элементарных ячеек адресного и ассоциативного ЗУ, триггеров, регистров, накапливающих счетчиков; усилителей малых сигналов, формирователей выходных и управляющих сигналов; измерительных и преобразовательных схем; примыкающих к вычисл. системам датчиков магнитного поля



1. Конструкция (вверху) и условное обозначение (внизу) криотрона.
2. Примеры логических элементов «И», «ИЛИ» и «НЕ» на криотронах.
3. Схемы комбинационного сумматора (а) и дешифратора (б) на криотронах: А и В — слагаемые;  $C_{n-1}$  — перенос из предыдущего разряда;  $C_n$  — перенос в следующий разряд;  $S_n$  — сумма.
4. Схема персистентного контура (а) и токовые диаграммы (б) в нем.
5. Схема ассоциативного запоминающего элемента на криотронах.

и низких температур, генераторов и преобразователей частоты и т. п. Чрезвычайно простой по конструкции, К. обладает переключательными характеристиками, аналогичными характеристикам электронных ламп или полупроводниковых приборов. Форму этих характеристик можно изменять, меняя детали конструкции К. или соотношение между размерами вентиля и затвора. Напр., К. со сверхпроводящим экраном под вентилем имеет ступенчатую переключательную характеристику, необходимую для схем релейного типа и формирователей, а К. без экрана — линейную характеристику, необходимую для усилительных, преобразовательных и измерительных схем. Изменяя отношение ширины вентиля К. к ширине его затвора, можно менять коэффициент усиления посредством дополнительного магнитного поля смещения и т. д.

На основе К. обычно реализуют ф-ции двузначной логики. При построении двузначных логических элементов двум значениям логич. переменных соответствуют такие два режима работы К.: сопротивление вентиля отсутствует (состояние сверхпроводимости) и имеется (состояние сверхпроводимости разрушено). Первое состояние обеспечивается, если ток в затворе отсутствует или величина его меньше критической; второе — когда ток затвора больше критического. Хотя абсолютная величина сопротивления вентиля во втором состоянии очень мала ( $10^{-3}$ — $10^{-5}$  ом), она превышает сопротивление сверхпроводящего вентиля в бесконечное число раз.

На рис. 2 показаны способы реализации логич. операций «И», «ИЛИ» и «НЕ» в схемах на основе К. Аналогично можно реализовать и др. функционально полные наборы. В схемах, изображенных на рис. 2, использован принцип вытеснения тока сверхпроводимости из левой ветви контура в правую ветвь, когда сочетанию входных сигналов  $x$  и  $y$  соответствует единичное значение ф-ции  $f$ . Выходной сигнал в схемах «И» и «ИЛИ» — это ток в правой ветви, который можно использовать как ток затворов К. нагрузки; в схеме «НЕ» — это ток в левой ветви. Специфическая особенность таких элементов состоит в том, что после отключения входных сигналов  $x$  и  $y$  элементы не возвращаются в исходное состояние, т. е. ток из правой ветви не может спонтанно переключиться в левую. Для возвращения любого из элементов в исходное состояние этот ток можно вытеснить сигналом возврата  $h$  с помощью вспомогательного К. Возможен также и другой принцип построения логич. схем, при котором наряду с сигналами переменных  $x, y, \dots$  используются еще и сигналы их инверсий  $\bar{x}, \bar{y}, \dots$ .

На рис. 3 показаны схемы комбинационного сумматора (а) и дешифратора (б) на К., построенные с использованием этого принципа. В 1962 была доказана принципиальная возможность построения ЦВМ целиком из криотронов и обусловлена специфика ее организа-

ции, однако областью применения логич. криотронных элементов пока остаются блоки управления адресного и ассоциативного криотронного ЗУ и сами ячейки адресного и особенно запоминающего устройства ассоциативного.

Для хранения информации в криотронной схеме основным является способ, базирующийся на использовании циркуляции тока сверхпроводимости в замкнутом сверхпроводящем контуре в течение сколь угодно длительного времени. Такой ток наз. *персисторным*. Запись персисторного тока в контур поясняется рис. 4. Ток записи  $I$  вначале поступает в правую ветвь, индуктивность которой в несколько раз больше, чем у левой ветви, но ее активное сопротивление всегда равно нулю, а в левой ветви сверхпроводимость в момент записи разрушается током  $i_c$ . После снятия  $i_c$  не происходит перераспределения токов между ветвями, если величина тока  $i_2$  меньше собственного критического тока в правой ветви. Но в момент выключения тока  $I$  электромагнитная энергия, запасенная в индуктивности правой ветви, перераспределяется по всему контуру, в результате чего в нем замыкается персисторный ток  $i_2 = -i_1$ , который может существовать до момента записи К. током  $i_c$ . Изображенный на рис. 4, а персисторный контур является основой *ячеек запоминающего устройства* адресных и ассоциативных устройств. Кроме персисторного контура, в состав этих ячеек вводятся дополнительные К. для адресного управления считыванием и записью информации, а в ассоциативной памяти — еще и для выполнения логич. операций, связанных с ассоциативным поиском — логич. сравнения, наложения запрета (маски) и т. д. На рис. 5 показана схема ассоциативного запоминающего элемента на четырех К. Здесь контур  $a b c a$  — персисторный. В его ветви  $ac$  производится сравнение записанной информации с признаком опроса, поступающим по шине 1. При несовпадении записанной информации с признаком опроса записывается К. 2. Считывание производится с помощью криотрона 3.

Внедрение устр-в на К. в вычисл. технику сдерживается слабо развитой технологией больших *интегральных схем*. Такие устр-ва могут представлять практический интерес, если они по своим характеристикам будут значительно превосходить аналогичные устр-ва на некриогенных элементах: напр., если ассоциативные ЗУ будут иметь емкость  $10^6$  бит, а адресные —  $10^8$  бит и частоту обращения порядка мегагерца. Это станет возможным, когда в одном технологическом цикле будут изготавливаться платы, имеющие сотни тысяч элементов.

Лит.: Кан Я. С., Михайлов Г. А., Рахубовский В. А. Макет ЦВМ на криотронах с программным управлением. «Механизация и автоматизация управления», 1966, № 3; Ченцов Р. А. Криотроника. «Электронная техника. Серия 15. Криогенная электроника», 1969, в. 1; Алфеев В. Н. Криогенная электроника. «Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника», 1970, т. 13, № 10; Бремер Дж. Сверхпроводящие устройства. Пер. с англ. М., 1964; Гейндж Р. Криоэлектронное

гибридное запоминающее устройство сверхбольшой емкости с произвольной выборкой. «Труды Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике США», 1968, т. 56, № 10.

И. А. Артеменко, И. Д. Войтович, Г. А. Михайлов.

## КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

— совокупность принимаемых (поступающих) показателей, позволяющих оценивать качество работы систем автоматического управления (САУ). Критерии можно разделить на две большие группы. Наиболее употребительная и универсальная группа — интегральные критерии — функционалы, числовые значения которых служат мерой качества САУ. Вторая группа критериев основана на задании определенного расположения полюсов системы и применяется исключительно для оценки качества линейных систем. В отличие от непосредственных оценок показателей качества, К. к. с. а. у. связаны определенными зависимостями с параметрами САУ, и это позволяет использовать их при решении задач синтеза.

Весьма распространенной является оценка качества по обобщенному интегральному критерию  $I = \int_0^T f(x) dt$ , где  $f(x)$  — функция пе-

ременных, характеризующих состояние системы, напр., величины переходной составляющей погрешности  $x(t)$  и ее производных, управляющих воздействий и т. д. Из этого критерия в зависимости от вида  $f(x)$  можно получить оценки для различных частных случаев, напр.:

1)  $f(x) = 1$  (тогда  $I = \int_0^T dt$  — время переходного процесса);

2)  $f(x) = x(t)$ ,  $f(x) = |x(t)|$  (тогда  $I = \int_0^T x(t) dt$ ,  $I = \int_0^T |x(t)| dt$  — интегральные оценки);

3)  $f(x) = x^2(t)$  (тогда  $I = \int_0^T x^2(t) dt$  — квадратичная погрешность).

Для линейных систем большинство оценок приведенного типа можно получить без прямого интегрирования дифф. уравнений САУ и построения переходных процессов. Однако для нелинейных систем эти оценки нельзя применять без решения уравнений системы и построения функции  $x(t)$ , а это ограничивает их применение. Аналогичные К. к. с. а. у. используются при оценке дискретных систем (см. Дискретных систем автоматического управления синтез).

При действии на САУ случайных возмущений распространенным критерием качества динамической точности служит средняя квадратичная погрешность, являющаяся характеристикой рассеивания возможных значений случайной величины относительно их среднего значения и определяемая как положительное

значение квадратного корня из дисперсии случайной величины:

$$\sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx},$$

где  $m_x$  — математическое ожидание  $x$ ,  $p(x)$  — плотность вероятности.

Для стационарной случайной функции  $\sigma_x$  определяется аналогично, но с усреднением во времени:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x(t)]^2 dt},$$

где  $T$  — длина отрезка на экспериментальной кривой  $x(t)$ .

Наряду с этими оценками при синтезе систем со случайными воздействиями используют удельный риск, общий риск и др. К. к. с. а. у. (см. *Дуальное управление*).

Критерии распределения корней дают возможность, если известны корни характеристического уравнения (полюсы передаточной функции) и корни числителя оператора замкнутой системы (нули передаточной функции), получить некоторые характеристики переходного процесса. Возможна и обратная задача — так расположить корни на комплексной плоскости, даже не зная их величин, чтобы переходный процесс удовлетворял определенным требованиям. Осн. критериями здесь являются затухание  $\eta$ , представляющее собой абсолютную величину действительной составляющей корня, расположенного ближе других к мнимой оси, и колебательность  $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ , где  $2\varphi$  — угол, охватывающий сектор комплексной полуплоскости с вершиной в начале координат, внутри и на границе которого находятся все корни. Обе эти величины могут быть определены без решения характеристических уравнений. Критерии  $\eta$  и  $\mu$  могут быть связаны определенными соотношениями как с параметрами системы, так и с осн. характеристиками переходного процесса. Применяются также различные частотные критерии, которые основаны на использовании преобразований Фурье и Лапласа для получения обобщенных частотных характеристик, определяющих переходный процесс при ненулевых начальных условиях в широком классе воздействий. При этом в качестве исходных данных можно использовать не только дифф. уравнения, но и экспериментально полученные частотные характеристики.

В частном случае нулевых начальных условий воздействия типа *функции ступенчатой*

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin t\omega d\omega$$

показатели качества оцениваются по свойствам вещественной частотной характеристики  $P(\omega)$  без вычисления интеграла. Связь критериев с показателями переходного процесса обычно осуществляется в виде неравенств.

Лит.: Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., 1960; Красовский А. А., Попов Г. С. Основы автоматической и технической кибернетики. М.—Л., 1962 [библиогр. с. 596—600]; Фелдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., 1966 [библиогр. с. 594—618]; Теория автоматического регулирования, кн. 1. М., 1967 [библиогр. с. 743—763]. О. Л. Цыганков.

**КРИТЕРИЙ СЕМАНТИЧЕСКОГО СООТВЕТСТВИЯ** — набор правил, по которым в данной автоматизированной информационно-поисковой системе формально определяется степень семантической близости поискового образа документа и поискового предписания с целью принятия решения о релевантности документа относительно информационного запроса. В К. с. с. обычно содержится информация о необходимой для релевантности пороговой величине степени семантической близости.

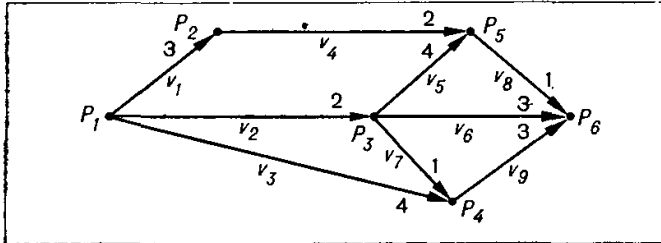
Наиболее простой К. с. с. предполагает полное совпадение поискового образа документа с поисковым предписанием. Примером применения такого К. с. с. могут служить *информационно-поисковые системы* (ИПС), основанные на использовании алфавитно-предметных и библиотечно-библиографических классификаций, хотя в последних применяется также критерий совпадения начала поискового образа документа (цифрового или буквенно-цифрового индекса) с индексом запроса. Критерий «на совпадение» редко применяется в ИПС, основанных на использовании дескрипторных языков; наиболее распространенным простым К. с. с. в ИПС дескрипторного типа является критерий «на вхождение», требующий наличия в составе поискового образа документа всех *дескрипторов* поискового предписания. Однако требование полного совпадения поискового образа документа с поисковым предписанием (или полного «вхождения» дескрипторов предписания) ограничивает возможности реальных ИПС. Поэтому осн. часть разработанных К. с. с. для существующих ИПС учитывает возможность частичного совпадения поискового образа документа с поисковым предписанием. При этом для релевантности документа относительно информационного запроса требуется не только наличие частичного совпадения, а и превышающая пороговое значение степень такого совпадения. Если величина частичного совпадения поискового образа документа с поисковым предписанием, возможно корректируемая в процессе функционирования ИПС, достигает заданного значения, то документ считается релевантным и выдается в ответ на информационный запрос. Существует много вариантов К. с. с., наличие которых обусловлено особенностями информационно-поискового языка, используемого в ИПС, а также конкретными задачами, решаемыми данной ИПС.

Л. Э. Пшеничная.

**КРИТИЧЕСКИЙ ПУТЬ** — последовательность технологически взаимосвязанных работ сетевого плана-графика, соединяющая начальное и конечное события и имеющая максимальную «длину», где под длиной понимается суммарная продолжительность всех работ, входящих в последовательность. Напр., сетевой



график (рис.) имеет два К. п.: первый проходит через  $v_2, v_5, v_8$ , второй — через  $v_3, v_6$  (цифры рядом со стрелками указывают продолжительность работ, изображаемых этими стрелками). Понятие К. п. используется при управлении комплексом работ, выполняемых в соответствии с сетевым план-графиком. При этом работам, лежащим на К. п., уделяется особое внимание, поскольку всякая задержка в выполнении любой из них приводит к срыву срока окончания всего комплекса работ. Такой



Сетевой график.

метод планирования и управления называют иногда методом «критического пути».

И. К. Цикунев.

**КУБ ФЕРРИТОВЫЙ** — предназначенный для хранения информации блок *оперативного запоминающего устройства*, собранный из *матриц запоминающих* на ферромагнитных сердечниках, пленочных магнитопроводов и т. п. **КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ** — формулы вида

$$\int_{\Omega} p(x) f(x) dx \cong \sum_{j=1}^N C_j f(x^{(j)}), \quad (1)$$

где  $\Omega$  — область интегрирования в  $n$ -мерном евклидовом пространстве (см. *Пространство абстрактное* в функциональном анализе),  $p(x)$  — фиксированная функция (*весовая функция*),  $f(x)$  принадлежит достаточно широкому классу функций,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , точки  $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$  называются узлами и числа  $C_j$  — коэффициентами К. ф. Узлы обычно принадлежат  $\Omega$ , но это требование не является необходимым. Сумма в (1) является обобщением суммы Римана и наз. *кубатурной суммой*. При  $n=1$  ф-ла (1) и сумма в правой части наз. *квадратурными*. Кубатурная сумма принимается за прилбл. значение интеграла из левой части ф-лы (1).

Один из способов получения К. ф. основан на интерполировании (см. *Интерполирование функций*). Выберем  $M(m, n) = (m+n)!/m!n!$  точек  $x^{(j)}$  ( $j=1, \dots, M(m, n)$ ) в  $\Omega$ , которые не лежат на алгебр. гиперповерхности порядка  $m$ . Построим интерполяционный многочлен степени  $m$  ф-ции  $f(x)$  по ее значениям в  $x^{(j)}$  и запишем прилбл. равенство

$$f(x) \cong \sum_{j=1}^{M(m,n)} L_j(x) f(x^{(j)}), \quad (2)$$

где  $L_j(x)$  — многочлен влияния узла  $x^{(j)}$ . Он равен 1 в  $x^{(j)}$  и 0 в остальных узлах. Умно-

жив обе части равенства (2) на  $p(x)$  и интегрируя по  $\Omega$ , получим К. ф. вида (1), в которой  $N = M(m, n)$  и

$$C_j = \int_{\Omega} p(x) L_j(x) dx. \quad (3)$$

Считаем, что существуют  $\int_{\Omega} p(x) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} dx$

( $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — неотрицательные целые числа), которые наз. *моментами*  $p(x)$ . К. ф.,  $M(m, n)$  узлов которой не лежат на алгебр. гиперповерхности порядка  $m$ , а коэфф. определяются равенством (3), наз. *интерполяционной*.

Коэфф.  $C_j$  можно находить и из линейной алгебр. системы, которую получим, если запишем, что К. ф. точна для всех одночленов степени, меньшей или равной  $m$ , от  $n$  переменных. Это основано на том, что интерполяционная К. ф. точна для таких многочленов. Обратное утверждение: К. ф. с  $M(m, n)$  узлами, точная для многочленов степени, меньшей или равной  $m$ , является интерполяционной, верно не всегда. Приведем соответствующую теорему. Для того, чтобы К. ф. (1), точная для многочленов степени не выше  $m$ , была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$[\varphi_1(x^{(j)}), \varphi_2(x^{(j)}), \dots, \varphi_{M(m,n)}(x^{(j)})]_{j=1}^N$$

размера  $N \times M(m, n)$  был равен  $N$ . Здесь через  $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$  обозначены одночлены от  $n$  переменных, занумерованные так, что одночлены меньшей степени имеют меньший номер, а одночлены одной и той же степени занумерованы в любом порядке. В частности,  $\varphi_1(x) = 1$ .

Если  $\Omega$  и  $p(x)$  обладают симметрией, то в ряде случаев удастся построить К. ф., точные для многочленов степени, меньшей или равной  $m$ , с к-вом узлов, меньшим  $M(m, n)$ . Уменьшение к-ва узлов достигается путем их спец. выбора.

Для простейших областей, в частности для куба, шара, симплекса и  $p(x) = 1$  можно построить К. ф.  $n$ -кратным применением квадратурных ф-л. Напр., если  $\Omega$  — куб:  $-1 \leq x_i \leq 1, i=1, \dots, n$ , то с помощью, скажем, квадратурной ф-лы Гаусса с  $k$  узлами  $t_i$  и коэфф.  $A_{i_k}$  получим К. ф.

$$\int_{\Omega} f(x) dx \cong \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^k A_{i_1} \dots A_{i_n} f(t_{i_1}, \dots, t_{i_n}),$$

имеющую  $k^n$  узлов и точную, когда

$$f = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

где  $0 \leq \alpha_i \leq 2k-1$  ( $i=1, \dots, n$ ). Недостатком таких ф-л является быстрое увеличение к-ва узлов при возрастании  $n$ .

Среди К. ф., точных для многочленов степени, меньшей или равной  $m$ , большой интерес представляют имеющие наименьшее к-во узлов.

В случае, когда  $m = 1, 2$ , такие ф-лы построены при любом  $n$  и для произвольных  $\Omega$  и  $p(x) \geq 0$ ; при этом наименьшее к-во узлов равно 1 в первом случае и  $n + 1$  — во втором. При  $m \geq 3$  наименьшее к-во узлов зависит от области  $\Omega$  и весовой ф-ции. Напр., при  $m = 3$  для области с центр. симметрией и  $p(x) = 1$  наименьшее к-во узлов равно  $2n$ , а для симплекса и  $p(x) = 1$  оно равно  $n + 2$ . Этими двумя примерами и исчерпывается случай  $m = 3$  при любом  $n$ ; при  $m > 3$  и  $n > 2$  К. ф. с наименьшим к-вом узлов не известны даже для областей частного вида. При  $n = 2$  случай, когда  $m = 3$ , исследован для произвольной  $\Omega$  и неотрицательной  $p(x)$ , менее полные результаты получены для  $m = 4, 5$ .

Приведем еще два результата о знаке коэфф. К. ф. в предположении, что  $p(x) \geq 0$  в области  $\Omega$ . Если  $\Omega$  ограничена и замкнута, то существует К. ф. с  $M(m, n)$  узлами, точная для многочленов степени, меньшей или равной  $m$ , и такая, что узлы принадлежат  $\Omega$  и коэфф. неотрицательны. Вопрос о фактическом построении такой ф-лы остается открытым. Если К. ф. с вещественными узлами и коэффициентами точна для многочленов степени, меньшей или равной  $m$ , то среди ее коэфф. имеется не менее  $M(l, n)$  положительных, где  $l = [m/2]$  — целая часть числа  $m/2$ . Отсюда следует, что  $M(l, n)$  — нижняя граница для к-ва узлов такой ф-лы. Пусть  $X$  — банахово пространство ф-ций, заданных на  $\Omega$ , такое, что остаточный член К. ф. (1)  $l(f)$  (разность между интегралом и кубатурной суммой) является линейным функционалом в  $X$ . Норма функционала

$$\|l\| = \sup_{\|f\|=1} l(f)$$

характеризует качество К. ф. (1) для ф-ций пространства  $X$ . Другой подход к построению К. ф. основан на минимизации  $\|l\|$  как ф-ции узлов  $x^{(j)}$  и коэфф.  $C_j$ ; искомой К. ф. (при фиксированном к-ве узлов). Даже при  $n = 1$  этот подход осуществлен лишь в простейших частных случаях. Для любого  $n$  важные результа-

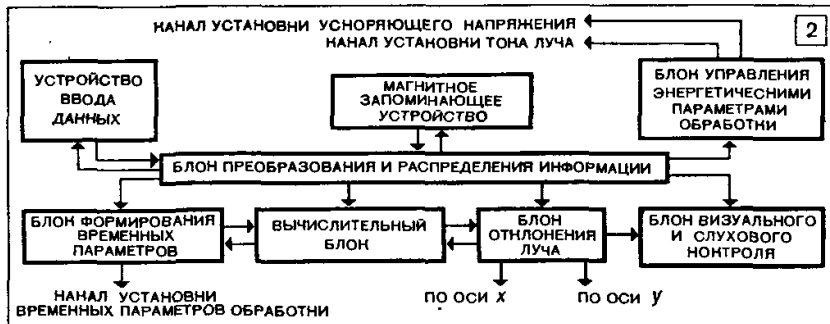
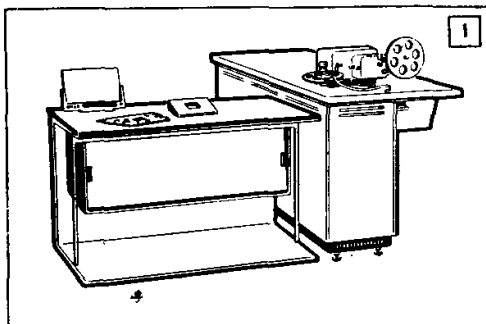
в частности, берется пространство  $L_2^m(E_n)$ , где  $m > n/2$  и искомая К. ф. должна быть точной для всех многочленов степени меньшей  $m$ .

Для вычисления кратных интегралов применяют также метод статистических испытаний — т. н. *Монте-Карло метод* и метод, основанный на использовании теории чисел.

Лит.: Бусленко Н. П. [и др.]. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). М., 1962 [библиогр. с. 313—327]; Коробов Н. М. Теоретические методы в приближенном анализе. М., 1963 [библиогр. с. 214—216]; Соболев С. Л. Лекции по теории кубатурных формул, ч. 1—2. Новосибирск, 1964—65 [библиогр. ч. 1, с. 191]; Крылов В. И., Шулгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., 1966 [библиогр. с. 324—360]; Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., 1967. И. П. Мысовских.

«КИВ-67» — специализированная цифровая управляющая машина. Предназначена для управления процессами электроннолучевой (ионнолучевой) микрообработки материалов. Это первая отечеств. машина такого типа. Разработана в Ин-те кибернетики АН УССР в 1967.

В машине (рис. 1) реализован удобный для технологов входной язык, позволяющий записывать исходную информацию в цифробуквенной форме. Процесс обработки разбивается на этапы, в пределах каждого из которых энергетические характеристики луча и временные параметры не меняются. По одной команде машина способна отработать любую из пяти произвольно расположенных в пределах растра элементарных геометрических фигур нужных размеров: точечный растр, ряд прямоугольников, наклонная линия, окружность или дуга, площадь, ограниченная с двух сторон наклонными с любым углом наклона или дугами требуемого радиуса. Комбинируя эти фигуры и связи между ними и задавая их отработку в нужной временной последовательности при различных энергетических характеристиках пучка и временных параметрах облучения, можно управлять воспроизведением сложных рисунков, созданием компонентов интегральных схем, изготовлением разнообразных



1. Специализированная управляющая машина «КИВ-67».  
2. Блок-схема машины «КИВ-67».

ты получил сов. математик С. Л. Соболев (р. 1908). Эти результаты связаны с минимизацией  $\|l\|$  как ф-ции коэфф.  $C_j$ ; при этом узлы  $x^{(j)}$  предполагаются фиксированными и образующими правильную решетку. В качестве  $X$ ,

фильер, производством микросварки и т. д. Каждая команда состоит из десяти слов, в которых содержатся данные о законе перемещения луча по поверхности обрабатываемой подложки, координаты первой и последней облучаемых точек, значения тока электронного

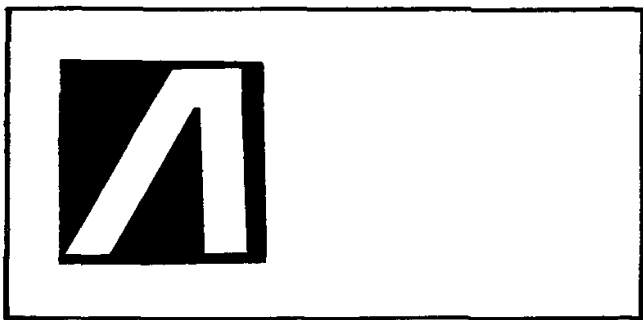
луча и ускоряющего напряжения, длительность рабочих импульсов и пауз между ними, а также количество импульсов. Координаты точек задаются числом шагов с указанием номера квадранта (область обработки составляет  $2000 \times 2000$  шагов). Режим обработки может быть импульсным или квазинепрерывным (в последнем случае луч не выключается при перемещении от точки к точке). Блок формирования временных параметров (рис. 2) регулирует по программе длительности импульсов и пауз между ними при любом их соотношении в диапазоне от 2 мксек до 10,2 сек. Число импульсов облучения в каждой точке может достигать 2047. Программы обработки могут быть введены с перфоленты, от другой цифровой вычислительной машины или с пульта управления. Хранятся они в оперативном запоминающем устройстве объемом 4096 двенадцатиразрядных слов. Блок отклонения луча содержит преобразователь кодов в отклоняющий ток, построенный по принципу сумми-

рования на нагрузке формируемых стабилизаторами токов, величины которых соответствуют значениям разрядов двоичных чисел. Амплитуда тока луча задается в процентах от максимального значения, что позволяет стыковать машину с разнотипными электроннолучевыми установками. Основу вычислительного блока составляет перестраиваемый на отработку различных элементарных геометрических фигур линейно-круговой *интерpolator*, собранный на двух цифровых интеграторах.

Отладка программ и контроль за правильностью их ввода, а также проверка состояний блоков машины в процессе управления осуществляется с помощью блока визуального контроля, построенного на трубке с темновой записью и плоском электролюминесцентном экране, и акустического индикатора.

*Лит.:* Глушков В. М., Деркач В. П. Об автоматизации изготовления микросхем. «Механизация и автоматизация управления», 1967, № 5.

В. П. Деркач.



**ЛАГ И ТАГ СИСТЕМЫ** — разновидности Поста исчислений, отличающиеся специфическими правилами вывода. ЛАГ системы имеют правила вида  $s_{i_1} \dots s_{i_\beta} \rightarrow E_i$ , которые применяются следующим образом: если первые  $\beta$  букв слова суть  $s_{i_1} \dots s_{i_\beta}$ , то в нем стирается первая буква, т. е.  $s_{i_1}$ , и справа к этому слову дописывается слово  $E_i$  ( $E_i$  может быть и пустым). ТАГ системы имеют правила вида  $s_i \rightarrow E_i$  и для нее указано, кроме этих правил, еще некоторое целое положительное число  $\beta$ . Применение правил вывода в ТАГ системах заключается в следующем: если слово начинается буквой  $s_i$ , то в нем стираются первые  $\beta$  букв и справа приписывается слово  $E_i$ . Если исходное слово имеет длину  $\leq \beta$ , то правила вывода к нему не применимы.

С каждой системой правил вывода связываются следующие две основные проблемы: 1) проблема остановки: рекурсивна или нет совокупность всех тех слов, начиная с которых процесс применения правил вывода обрывается; 2) проблема выводимости: для каждого ли слова является рекурсивной совокупность всех тех слов, которые получаются за конечное число применений правил вывода.

Существуют такие ЛАГ и ТАГ системы, что проблема выводимости для них алгоритмически неразрешима. Пусть  $\varepsilon$  — максимальная длина правых частей правил вывода,  $\bar{\varepsilon}$  — минимальная длина их. Показано, что при  $\beta = 2$ ,  $\varepsilon = 3$  и  $\bar{\varepsilon} = 1$  существует ТАГ система с неразрешимой проблемой остановки и при  $\beta = \varepsilon = 2$  — такая же ЛАГ система.

Лит.: Wang H. Tag systems and Lag systems. «Mathematische annalen», 1963, В. 152, Н. 1.

М. И. Кратко.

**ЛАГРАНЖА ЗАДАЧА** — вариационная задача на условный экстремум. Формулируется так: среди кривых  $y(x)$ , удовлетворяющих дифф. ур-ниям связи

$$\Phi_i(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y = (y_1, \dots, y_n), \\ i = 1, \dots, m, \quad m < n$$

и граничным условиям

$$\Phi_i(x_1, y(x_1)) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \\ k \leq n + 1,$$

$$\eta_j(x_2, y(x_2)) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \\ p \leq n + 1,$$

найти такую, на которой функционал

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$$

достигает экстремального значения.

Чтобы решение задачи существовало, ф-ции  $y, \Phi_i, \varphi_i, \eta_j, f$  должны удовлетворять определенным требованиям (см. *Больца задача, Задача с подвижными концами*). Вместо дифф. ур-ний связи (1) ограничения могут задаваться ур-ниями  $g_i(x, y) = 0, i = 1, \dots, m, m < n$ ; концы  $x_1$  и  $x_2$  могут быть фиксированными. Л. з. — частный случай задачи Больца, поэтому теория задачи Больца переносится на Л. з. С помощью Лагранжа правила множителей Л. з. сводится к задаче без ограничений.

Лит. см. к ст. Вариационное исчисление.

Ю. М. Данилин.

**ЛАГРАНЖА ПРАВИЛО МНОЖИТЕЛЕЙ** — метод решения задач на условный экстремум, заключающийся в построении системы уравнений, которой должен удовлетворять экстремум функции  $f(x) \equiv f(x_1, \dots, x_n)$  на множестве  $\Omega$ , определяемом системой ур-ний  $g_i(x) = 0, i = 1, \dots, m$ , где  $m < n$ . Рассмотрим задачу отыскания точки  $x^*$ , для которой

$$f(x^*) = \min \{f(x) \mid x \in \Omega\}. \quad (1)$$

Пусть в точке  $x^*$  по крайней мере один из определителей  $m$ -го порядка матрицы

$$I = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля. Для того, чтобы вектор  $x^* \in \Omega$  являлся решением задачи (1), необходимо, чтобы нашлись  $m$  чисел  $u_1, \dots, u_m$ , которые вместе с вектором  $x^*$  удовлетворяют следующей системе из  $m + n$  ур-ний с  $m + n$  неизвестными:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = 0,$$

$$j = 1, \dots, n, \quad g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Функция  $F(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x)$  называется

функцией Лагранжа, а числа  $u_1, \dots, u_m$  — множителями Лагранжа.

Р. А. Поляк, М. Е. Примаков.  
**ЛАПЛАСА ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ** — преобразования, устанавливающие связь между оригиналами и изображениями решетчатых функций. Прямое Л. д. п. функции решетчатой  $f[n]$  и смещенной решетчатой функции  $f[n, \varepsilon]$  определяется соответственно следующими соотношениями:

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{-qn} \quad (1, a)$$

и

$$F^*(q, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n, \varepsilon] e^{-qn}. \quad (1,6)$$

Здесь  $q = sT$  — комплексное число, наз. параметром Л. д. п.,  $T$  — интервал дискретности решетчатой функции,  $s$  — параметр обычного Лапласа преобразования. Значение  $\operatorname{Re} q = \sigma_c$ , для которого при  $\operatorname{Re} q > \sigma_c$  ряды (1) сходятся, а при  $\operatorname{Re} q < \sigma_c$  — расходятся, наз. абсциссой сходимости. В (1) решетчатые ф-ции  $f[n]$  и  $f[n, \varepsilon]$  наз. оригиналами, а ф-ции комплексной переменной  $F^*(q)$  и  $F^*(q, \varepsilon)$  — изображениями. Соотношения (1) сокращенно записываются в виде:

$$F^*(q) = D\{f[n]\} \rightarrow f[n] \quad (2,а)$$

и

$$F^*(q, \varepsilon) = D\{f[n, \varepsilon]\} \rightarrow f[n, \varepsilon], \quad (2,б)$$

где  $D$  — символ Л. д. п., а  $\rightarrow$  — знак соответствия между оригиналом и изображением.

Часто пользуются также следующими преобразованиями:

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] z^{-n} \quad (3,а)$$

и

$$F^*(z, m) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT, mT] z^{-n}. \quad (3,б)$$

где  $z = e^{sT}$ . Эти Л. д. п. наз. соответственно  $z$ -преобразованием и модифицированным  $z$ -преобразованием и обозначаются так:

$$F^*(z) = z\{f[nT]\} \rightarrow f[nT] \quad (4,а)$$

и

$$F^*(z, m) = Z_m\{f[nT, mT]\} \rightarrow f[nT, mT]. \quad (4,б)$$

Помимо односторонних Л. д. п., приведенных выше, пользуются также двухсторонними Л. д. п., которые определяются (1) или (3), если суммирование ведется в пределах  $-\infty \leq n \leq \infty$ . Если оригиналы равны нулю при  $n < 0$ , то двухстороннее Л. д. п. совпадает с односторонним.

Любую решетчатую ф-цию  $f[n]$  (с постоянным интервалом дискретности) можно представить в виде суммы  $N$  решетчатых ф-ций  $f_j[n]$ , называемых компонентами с пропуском:

$$f[n] = \sum_{j=0}^{N-1} f_j[n], \quad (5)$$

где

$$f_j[n] = \begin{cases} f[n] & \text{при } n = j + kN; \\ 0 & \text{при } n \neq j + kN, \end{cases}$$

$j = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $N \geq 2$ .

$z$ -преобразование этих компонент, или т. н.  $z$ -преобразование с пропуском, определяемые по формуле (2), можно

представить в виде

$$\begin{aligned} F_j^*(z) &= z\{f_j[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_j[n] z^{-n} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(j + kN) z^{-j-kN}. \end{aligned} \quad (6)$$

Это преобразование можно определить и по изображению исходной решетчатой ф-ции

$$F_j^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \frac{F(\omega)}{\omega} \frac{\omega^j z^{-j}}{1 - \omega^N z^{-N}} d\omega, \quad (7)$$

где  $F(\omega) = F^*(z)|_{z=\omega}$ , а  $M$  — замкнутый контур, разделяющий особенности  $\frac{F(\omega)}{\omega}$  и

$\frac{1}{(1 - \omega^N z^{-N})}$ . При исследовании дискретных систем с амплитудно-импульсной модуляцией 2-го рода (см. Модуляция импульсная) иногда применяют т. н.  $p$ -преобразование, которое представляет собой обычное преобразование Лапласа ф-ций  $f_p(t)$ , определяемых следующим образом:

$$f_p(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } nT \leq t \leq (n+m)T, \\ 0 & \text{при } (n+m)T < t < (n+1)T, \end{cases} \quad (8)$$

$0 < m < 1$ .

Преобразование, устанавливающее связь между изображениями  $F_p(s)$  и  $F(s)$  ф-ций  $f_p(t)$  и  $f(t)$  соответственно, обозначаются через  $P[F(s)]$  и определяется следующей формулой:

$$F_p(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(v) \frac{1 - e^{-mT(s-v)}}{(s-v)[1 - e^{-T(s-v)}]} dv, \quad (9)$$

где  $F(v) = F(s)|_{s=v}$ , а  $\Gamma$  — контур интегрирования, охватывающий все полюсы  $F(v)$ .

$p$ -преобразование распространяется также на ф-ции  $f_n(t)$ , определяемые так:

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t_n \leq t \leq t_n + h_{n+1}; \\ 0 & \text{при } t_n + h_{n+1} < t < t_{n+1}; \end{cases} \quad (10)$$

$h_{n+1} < t_{n+1} - t_n$   
 $n = 0, 1, 2, \dots$

и используется при анализе дискретных систем с конечным временем съема данных, в которых одновременно происходит частотно-, широтно- и амплитудно-импульсная (2-го рода) модуляция.

Обратные Л. д. п., позволяющие по изображениям определить оригиналы, даются формулами обращения:

$$f[n] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\pi}^{c+i\pi} F^*(q) e^{qn} dq \quad (11,а)$$

$$f[n, \varepsilon] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\pi}^{c+i\pi} F^*(q, \varepsilon) e^{qn} dq, \quad (11, б)$$

где  $c > \sigma_c$ .

Для изображений, представляющих собой дробнорациональные функции по  $e^q$  (или  $z$ ), применяют формулы разложения, аналогичные таковым в обычном преобразовании Лапласа; применяют также методы, основанные на разложении изображений в ряд Лорана

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}. \quad (12)$$

При этом в (12) члену  $c_k z^{-k}$  соответствует значение решетчатой функции в момент времени  $n = k$ , т. е.  $c_k = f[n]_{n=k}$ . Связь между изображениями по Лапласу и Л. д. п. устанавливается соотношениями:

$$F^*(q, \varepsilon) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{(q+2\pi ir)\varepsilon} F(q + 2\pi ir); \quad (13, а)$$

$$F^*(q) = 1/2 f[0] + \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(q + 2\pi ir) \quad (13, б)$$

$$F(q) = \int_0^1 e^{-q\varepsilon} F^*(q, \varepsilon) d\varepsilon, \quad (14)$$

которые записывают иногда в виде

$$F^*(q, \varepsilon) = \mathcal{D}\{F(q)\}; \quad (15, а)$$

$$F(q) = \mathcal{D}^{-1}\{F^*(q, \varepsilon)\}. \quad (15, б)$$

Соотношения, подобные (11) и (13) — (15), свойственны и  $z$ -преобразованиям. Подобно (15, б), для обозначения обратных преобразований используют символы  $D^{-1}$ ,  $z^{-1}$ ,  $Z_m^{-1}$ ,  $P^{-1}$ . В практических расчетах широко используют таблицы изображений для наиболее распространенных функций, что позволяет находить оригиналы без обращения к общим формулам обратного Л. д. п.

Л. д. п. используются при исследовании дискретных систем автомат. управления, приближенном исследовании непрерывных систем, решении разностных уравнений и т. д.  
Лит.: Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963 [библиогр. с. 926—963]; Проблемы теории импульсных систем управления. Итоги науки. М., 1966 [библиогр. с. 173—174]; Фридланд Б. Импульсные системы регулирования с периодически меняющимися параметрами. В кн.: Труды I Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению, т. 2. М., 1961; Джурин Э. Импульсные системы автоматического регулирования. Пер. с англ. М., 1963 [библиогр. с. 445—450]; Дёж Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и  $z$ -преобразования. Пер. с нем. М., 1971.

Ю. В. Кременуло.

**ЛАПЛАСА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ** — преобразования, определяемые соотношениями:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st} ds, \quad (2)$$

где  $f(t)$  — функция действительной переменной  $t$ , ( $0 \leq t < \infty$ ),  $s = \sigma + it$  — комплексное число. Интеграл в ф-ле (1) наз. и нтегралом Лапласа (и. Л.), ф-ция  $f(t)$  наз. оригиналом, а ф-ция комплексной переменной  $F(s)$  — изображением (преобразованием или трансформацией Лапласа) ф-ции  $f(t)$ . Для сходимости и. Л. необходимо и достаточ-

но, чтобы: а)  $\int_0^A f(t) dt$  существовал при любом конечном  $A > 0$  и б) существовало такое число  $\sigma = \sigma_0 > 0$ , при котором  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma_0 t} \times$

$\times \int_0^t f(t) dt = 0$ . Если  $f(t)$  принадлежит к классу

кусочно-непрерывных функций, то условием сходимости и. Л. является существование таких чисел  $M > 0$  и  $\alpha > 0$ , при которых  $|f(t)| < M e^{\alpha t}$  при любых  $t$  ( $0 \leq t < \infty$ ). Если существует число  $\sigma = \sigma_c$  такое, что при  $\text{Re } s > \sigma_c$  и. Л. сходится, а при  $\text{Re } s < \sigma_c$  — расходится, то оно наз. абсциссой сходимости, а прямая  $\text{Re } s = \sigma_c$  наз. осью сходимости и. Л. Аналогично определяется абсцисса абсолютной сходимости  $\sigma_a$  и ось абсолютной сходимости  $\text{Re } s = \sigma_a$  и. Л. Помимо прямого одностороннего Л. п., определяемого ф-лой (1), пользуются также двухсторонним Л. п., при котором интегрирование ведется в пределах  $-\infty \leq t \leq \infty$ . Если оригинал равен нулю при  $t < 0$ , то двухстороннее Л. п. совпадает с односторонним.

Обратное Л. п., позволяющее по изображению определить оригинал, дается (при  $\sigma > \sigma_a$ ,  $\sigma_a < \infty$ ) ф-лой (2) (формула обращения (Меллина)), если  $f(t)$  кусочно-непрерывна и имеет в каждой точке производную или производные слева и справа. Ф-ла, подобная (2), имеет место и для двухстороннего Л. п. Для вычисления интеграла в (2) используют методы теории ф-ций комплексного переменного (изменение пути интегрирования, вычисление вычетов); применяют также разложение  $F(s)$  в различные ряды (степенные, ряды по показательным ф-циям и т. д.) и др. численные методы. Существуют также обширные справочные таблицы, позволяющие непосредственно находить изображения по оригиналам и наоборот.

Соотношения (1) и (2) иногда записывают соответственно в виде  $F(s) = L\{f(t)\}$  и  $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ , где  $L$  и  $L^{-1}$  — символы прямого и обратного Л. п.

Л. п. широко используются при решении дифференциальных и интегральных уравне-



ний, анализе и синтезе систем автоматического управления, в связи, электротехнике и др. областях науки и техники.

Лит.: Конторович М. И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. М., 1955; Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1961 [библиогр. с. 508—520]; Харкевич А. А. Спектры и анализ. М. 1962 [библиогр. с. 235—236]; Гарднер М. Ф., Бэрнс Дж. Л. Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными. Пер. с англ. М., 1961 [библиогр. с. 530—546]; Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. Пер. с нем. М., 1971. Ю. В. Крементуло.

**ЛЕЖАНДРА—КЛЕБША УСЛОВИЕ** — необходимое условие экстремума для вариационных задач, полученное с использованием второй вариации функционала. Формулируется Л.—К. у. так: для того, чтобы функционал

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx,$$

определенный на кривых с фиксированными концами, достигал на кривой  $C$  минимума (максимума), необходимо, чтобы вдоль этой кривой выполнялось условие

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} \geq 0 \quad (\leq 0).$$

Л.—К. у. для *Больша задачи*: чтобы функционал  $I(y)$  достигал минимума на допустимой кривой  $C$ , удовлетворяющей правилу множителей, необходимо, чтобы вдоль нее выполнялось неравенство  $\frac{\partial^2 F}{\partial y_k' \partial y_j} \delta_k \delta_j \geq 0$  при любых

$(\delta_1, \dots, \delta_n) \neq 0$ , удовлетворяющих уравнениям  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} \delta_k = 0$ .

Лит. см. к ст. *Вариационное исчисление*.

Ю. М. Данилин.

**ЛЕНТА МАГНИТНАЯ** — лента из прочной гибкой пленки, покрытая ферромагнитным

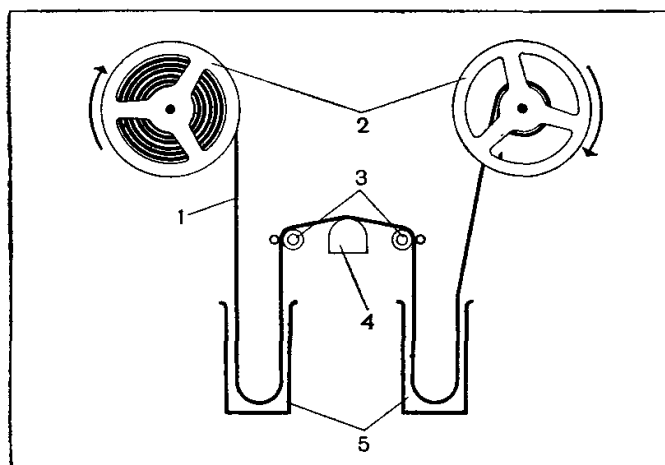


Схема лентопротяжного механизма.

слоем, предназначенная для записи, хранения и воспроизведения информации. Пленка бывает, напр., на триацетатной или лавсановой основе и т. п. На базе Л. м. строят внешние

запоминающие устройства большой емкости — накопители на Л. м. (НМЛ). Во время работы (см. рис.) лента (1), перематываясь с катушки на катушку (2) при помощи ведущих роликов (3) лентопротяжного механизма, перемещается относительно блока магн. головок (4) — БМГ, касаясь его в области рабочих зазоров магн. головок МГ. Инерционность катушек с лентой компенсирует спец. демпферный узел (5). Запись и считывание производит БМГ, головки которого расположены по линии, перпендикулярной движению носителя. Каждой МГ соответствует своя магн. дорожка на ленте, т. е. запись производится параллельно-последовательно, строка за строкой. Скорость рабочего движения ленты порядка 1—4 м/сек. На катушке вмещается 750—1000 м ленты. Емкость катушки может быть порядка  $200 \times 10^6$  —  $400 \cdot 10^6$  двоичных знаков. Основным недостатком Л. м. является большое время выборки (отскакивания) информации (достигает нескольких минут). Р. Я. Черняк.

**ЛИНГВИСТИКА МАТЕМАТИЧЕСКАЯ** — прикладная математическая дисциплина, основной задачей которой является разработка точных методов изучения естественных языков.

Возникновение Л. м. во 2-ой пол. 50-х годов 20 ст. было вызвано прежде всего внутр. потребностями лингвистики, стимулировано оно и развитием автоматического перевода (см. *Машинный перевод*), потребовавшего уточнения некоторых лингвистических понятий. Кроме автоматического перевода, методы Л. м. применяются и в других отраслях лингвистики. Не являясь частью собственно лингвистики, Л. м. тем не менее развивается в тесном контакте с ней; вместе с тем внутри Л. м. возникают и самостоятельные проблемы, не всегда имеющие непосредственные приложения в лингвистике. В Л. м. широко используются методы *алгоритмов теории, автоматов теории и алгебры*.

Функционирование языка естественно представлять себе как процесс преобразования некоторых объектов, которые можно назвать «смыслами», в объекты другой природы — «тексты», и наоборот. Содержательные соображения подсказывают расчленение этого преобразования на этапы. Напр., при одном из наиболее грубых членений некоторый этап может состоять в переходе от «смыслов» к «синтаксическим структурам» — наборам элементов предложений, соединенных «синтаксическими связями», но еще не расположенных в линейную последовательность. На следующем этапе получается линейная последовательность слов, а затем слова превращаются в *цепочки звуков* (см. *Модель «смысл ↔ текст»*).

Для формального описания такого процесса необходимо построить матем. понятия, служащие моделями «смыслов», «текстов» и результатов промежуточных этапов (чтобы модель «работала», эти объекты должны быть конструктивными). Этапы преобразования естественно моделировать эффективными отображениями соответствующих множеств объектов друг в друга. Картина, однако, осложняется

тем, что указанное преобразование неоднозначно, и таковы же все или почти все (в зависимости от способа членения) промежуточные этапы. Это обстоятельство связано с одной из важнейших особенностей языка — явлением синонимии, т. е. возможностью выражать одно и то же содержание различными способами. Поэтому для моделирования этих этапов приходится строить вместо детерминированных систем (алгоритмов) недетерминированные (исчисления), позволяющие для каждого объекта одного «уровня» перечислять соответствующие ему объекты следующего «уровня», а также перечислять для каждого объекта все синонимичные ему объекты того же «уровня». Такие исчисления известны под названием *грамматик формальных*.

Небольшая модификация понятия формальной грамматики дает системы, позволяющие перечислять множества «правильных» объектов одного уровня, т. е. таких, которым могут быть регулярным способом сопоставлены к.-л. объекты предыдущих уровней, а также множества пар соответствующих друг другу объектов «соседних» уровней (напр., предложение и его «синтаксическая структура»). Именно такие варианты формальных грамматик к настоящему времени наиболее полно разработаны. При построении формальных грамматик наряду с осн. объектами, моделирующими элементы разных уровней (напр., слова), приходится использовать вспомогательные объекты, представляющие собой отношения на мн-вах осн. объектов или классификации этих последних (напр., грамматические категории). Поэтому возникает необходимость формального изучения таких отношений и классификаций.

Таким образом, можно выделить три аспекта формального описания языка: описание строения языковых объектов различных уровней, описание некоторых спец. отношений и классификаций на мн-вах этих объектов и описание преобразований одних объектов в другие, а также строения мн-в «правильных» объектов. Этим аспектам отвечают три осн. раздела Л. м.: 1) разработка и изучение способов описания структуры отрезков речи; 2) изучение формального строения лингвистически значимых отношений и классификаций на мн-вах языковых объектов (построенные для этой цели формальные системы обычно наз. аналитическими моделями языка) и 3) теория формальных грамматик.

Теорию способов описания структур отрезков речи можно в матем. отношении охарактеризовать как некоторое специальное ответвление *графов теории*, т. к. соответствующие структуры представляют собой, как правило, графы или сходные с графами объекты. Так, для описания синтаксической структуры предложения используются т. н. деревья подчинения (синтаксического) — деревья с дополнительным отношением линейного порядка (отвечающим порядку слов в предложении). Дуги деревьев подчинения обычно помечаются символами типов отношений (напр., «пред-

кативное» — отношение между сказуемым и подлежащим, «определятельное» — отношение между определяемым и определенным и т. п.). Понятие дерева подчинения формализует обычные «школьные» представления о синтаксических связях. Однако даже такая простая формализация позволила обнаружить исключительно важный лингвистический факт — т. н. явление проективности, состоящее в том, что, как правило, между двумя словами  $a$  и  $b$ , такими, что  $a$  подчиняет  $b$ , не может быть ни одного слова, не подчиненного прямо или косвенно слову  $a$  (случай несоблюдения этого правила сравнительно немногочисленны и могут быть закономерно объяснены).

Другим способом представления синтаксической структуры предложения являются системы составляющих, также представимые в виде деревьев. На более близких к смыслу уровнях уже не удается обойтись деревьями и приходится использовать графы более общего вида. В последнее время интенсивно разрабатываются способы описания уровней, промежуточных между синтаксическими и «чисто смысловыми»; достаточно четко разработанных средств описания «чисто смыслового» уровня пока нет.

Теория аналитических моделей языка пользуется, как правило, несложным матем. аппаратом (простейшие понятия *логики математической*, теории множеств и алгебры, в частности, теории полугрупп). Конструкции этой теории отправляются от наборов «неупорядоченных» данных и заканчиваются построением (не обязательно эффективным) систем, в каком-то смысле описывающих строение языка; это позволяет считать такие конструкции «моделями деятельности лингвиста». Одной из гл. задач теории аналитических моделей языка является формализация традиционных лингвистических категорий — таких, как часть речи, падеж, род, фонема и т. п.

Существующие способы формализации («модели») этих категорий можно разделить на два типа. В моделях 1-го типа исходные наборы представляют собой мн-ва цепочек, т. е. линейно упорядоченных последовательностей элементов. В моделях грамматических категорий эти цепочки интерпретируются как «грамматически правильные предложения» (в набор исходных данных можно включать и указания на заведомую неправильность некоторых цепочек). Модели 2-го типа, появившиеся в середине 60-х годов 20 ст. и в случае грамматических категорий позволяющие получить более адекватное приближение к традиционным понятиям, имеют в качестве исходных данных наборы сведений о способности одних элементов подчинять себе другие. Напр., каждый падеж русского (украинского) существительного можно описать как совокупность форм существительных, в некотором точном смысле одинаково управляемых другими словами. С помощью аналитических моделей можно изучать не только *отношения парадигматические*, но и *отношения синтагматические*. Такие модели также можно разделить на два

типа по характеру исходных данных, как указано выше.

К теории аналитических моделей языка примыкает теория лингвистической дешифровки, занимающаяся построением процедур, которые применяются к «неупорядоченным» эмпирическим данным о языке и сходны в этом с аналитическими моделями, но, в отличие от последних, всегда эффективны и позволяют получать не только абстрактные определения, но и конкретные сведения о структуре конкретных языков. Дешифровочные алгоритмы, как правило, сложнее аналитических моделей. Примером могут служить алгоритмы выделения гласных и согласных по тексту.

Теория формальных грамматик занимает центр. место в Л. м., поскольку именно она доставляет средства для изучения собственно функционирования языка. Вместе с тем она выделяется среди других разделов Л. м. большей сложностью аппарата (сходного с аппаратом теории алгоритмов и общей теории автоматов, с которыми имеет много точек соприкосновения) и значительно большей сложностью возникающих в ней матем. задач. Формальные грамматики наиболее хорошо изученных типов представляют собой системы («устройства»), позволяющие порождать или распознавать мн-ва цепочек, интерпретируемые обычно как мн-ва грамматически правильных предложений некоторых языков, а также сопоставлять входящим в эти мн-ва цепочкам описания их синтаксической структуры в терминах систем составляющих или деревьев подчинения. Наибольшее значение среди этих грамматик имеют *грамматики порождающие*, введенные амер. ученым Н. Хомским.

В зависимости от вида правил выделяются различные типы порождающих грамматик: грамматики составляющих (НС-грамматики), бесконтекстные, автоматные и др. Наибольшее значение для лингвистических приложений имеют НС-грамматики (в которых на каждом шаге фактически заменяется только один символ), поскольку они позволяют естественным образом сопоставлять выводимым в них цепочкам системы составляющих. Грамматики более частных типов — бесконтекстные и автоматные — также представляют большой лингвистический интерес. Важную роль в теории порождающих грамматик играет изучение различных классов грамматик, промежуточных между НС-грамматиками и бесконтекстными и между бесконтекстными и автоматными, и выяснение соотношений между соответствующими классами порождаемых языков.

Матем. значение порождающих грамматик определяется тем, что они представляют собой одно из средств эффективного задания мн-в. Класс языков, порождаемых произвольными грамматиками, совпадает с классом рекурсивно-перечислимых мн-в. Особый интерес с этой точки зрения представляют НС-грамматики, бесконтекстные и автоматные грамматики, т. к. порождаемые ими языки примитивно-рекурсивны и, более того, входят в самые низшие классы существующих иерархий примитивно-

рекурсивных мн-в по сложности вычисления (эти языки можно считать «просто устроенными»), и в то же время их достаточно для многих важных матем. приложений. В этой связи приобретает существенное значение изучение классов автоматов, эквивалентных тем или иным классам грамматик, т. е. описывающих те же языки. В частности, автоматные грамматики эквивалентны *автоматам конечным*, бесконтекстные — автоматам с магазинной памятью (см. *Автомат магазинный*), НС-грамматики — линейно ограниченным *Тьюринга машинам*, т. е. таким машинам Тьюринга, которые перерабатывают каждую цепочку, не выходя за пределы того участка ленты, где она записана вначале.

Одним из важных направлений теории порождающих грамматик является изучение сложности выводов. Сложность вывода в грамматике может измеряться различными способами, из которых наиболее универсальными являются два — по числу шагов вывода (временная сложность) и по объему используемой «памяти», т. е. по макс. длине промежуточной цепочки вывода (емкостная сложность). Удаётся получить ряд верхних и нижних оценок временной и емкостной сложности вывода в грамматиках различных классов (причем получение нижних оценок оказывается особенно сложным), а также некоторые сведения о возможности строить для тех или иных грамматик эквивалентные (т. е. порождающие те же языки) с более простыми выводами, и о степени возрастания сложности при переходе от некоторой грамматики к эквивалентной ей грамматике более простого вида. Для НС-грамматик имеются еще и специфические характеристики сложности вывода: глубина по Ингве, степень самовставления, тесно связанные со сложностью систем составляющих, сопоставляемых выводимым цепочкам. Эти характеристики весьма существенны для лингвистических приложений. Для бесконтекстных грамматик важной характеристикой вывода является активная емкость — макс. число вхождений вспомогательных символов в промежуточную цепочку вывода.

Теория сложности выводов в грамматиках во многом параллельна теории алгоритмов сложности, однако далеко не копирует ее. Кроме сложности выводов, изучается и сложность самих грамматик, которую можно измерять, напр., суммой длин левых и правых частей правил или числом вспомогательных символов. К указанным направлениям примыкает изучение сложности распознавания языков, порождаемых грамматиками различных классов. Здесь решаются задачи следующего типа: для того или иного класса грамматик указываются оценки сложности работы автомата некоторого заданного вида (напр., машины Тьюринга с данным числом лент и головок), распознающего язык, порождаемый грамматикой этого класса (распознавать язык — значит для каждой цепочки, поданной на вход автомата, давать ответ на вопрос, принадлежит ли она языку). Сложность

работы автомата можно при этом измерять числом шагов или объемом затрачиваемой памяти. Так, всякий бесконтекстный язык распознается машиной Тьюринга с одной лентой и одной головкой, затрачивающей на работу с любой цепочкой длины  $n$  не более чем  $n^4$  шагов.

Один из разделов теории порождающих грамматик — теория «управления выводом»; она изучает строение мн-в, порождаемых грамматиками при наложении тех или иных ограничений на выводы. Возможность использовать не произвольные, а лишь какие-то определенные выводы лучше отражает ситуацию, имеющую место в естественном языке. Осн. задачи здесь состоят в установлении соотношений между классами языков, порождаемых грамматиками различных типов с различными ограничениями. Примером грамматики с ограничениями на выводы может служить т. н. матричная грамматика, правила которой имеют такой же вид, как в бесконтекстной, но сгруппированы в конечные последовательности (причем одно правило может встречаться несколько раз как в одной последовательности, так и в разных), и правила каждой последовательности разрешается применять только все подряд и в заданном порядке. Класс языков, порождаемых матричными грамматиками, является строго промежуточным между классами бесконтекстных языков и НС-языков.

Большое место в теории порождающих грамматик занимают алгоритм. проблемы, в частности, проблемы существования алгоритмов, распознающих по грамматике определенного класса, обладает ли порождаемый ею язык тем или иным свойством. Очень часто такие проблемы решаются отрицательно. Так, в классе НС-грамматик из «интересных» в содержательном смысле свойств языков оказываются распознаваемыми только свойства типа «содержать данную цепочку»; такие свойства, как «быть пустым», «быть конечным», «иметь пустое дополнение», «иметь конечное дополнение», «быть бесконтекстным языком», в этом классе нераспознаваемы. В классе бесконтекстных грамматик пустота и конечность языка распознаваемы, но пустота и конечность дополнения остаются нераспознаваемыми.

Кроме грамматик Хомского, существуют и иные виды грамматик, предназначенные для описания мн-в цепочек, — грамматики зависимости, сопоставляющие цепочкам деревья подчинения, *грамматики категориальные*, в которых информация о синтаксическом строении языка заключена не в правилах, а в особой структуре вспомогательного словаря, и др. Разрабатываются также концепции грамматик, служащие для переработки не цепочек, а графов — чаще всего деревьев, а иногда и объектов более общей природы. Использование таких грамматик для описания естественных языков позволяет раздельно трактовать синтаксическую структуру предложения и линейный порядок слов, по содержанию относящиеся к разным уровням, и тем самым более адекватно моделировать функциониро-

вание языка. Примером могут служить т. н. лексико-синтаксические  $\Delta$ -грамматики. В них перерабатываемыми объектами являются деревья с пометками в вершинах (интерпретируемыми как лексические единицы) и на дугах (интерпретируемыми как типы синтаксических связей). Правила, как и в грамматиках Хомского, представляют собой правила подстановки.  $\Delta$ -грамматики предназначаются для преобразования одних деревьев в другие, но могут быть использованы и для порождения деревьев.

Л. м. имеет многочисленные приложения не только в исследовании естественных языков, но и в построении и изучении искусственных языков, в особенности *языков программирования*. См. также *Языка модели аналитические*.

Лит.: Кулагина О. С. Об одном способе определения грамматических понятий на базе теории множеств. «Проблемы кибернетики», 1958, в. 1; Сухотин Б. В. Алгоритм лингвистической дешифровки. В кн.: Проблемы структурной лингвистики. М., 1963; Ревзин И. И. Метод моделирования и типология славянских языков. М., 1967 [библиогр. с. 277—290]; Гладкий А. В., Мельчук И. А. Элементы математической лингвистики. М., 1969 [библиогр. с. 188—192]; Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки. М., 1973 [библиогр. с. 349—356]; Хомский Н. Синтаксические структуры. В кн.: Новое в лингвистике, в. 2. М., 1962; Норсгофт J. E., Уилман J. D. Formal languages and their relation to automata. London, 1969 [библиогр. с. 233—238]. А. В. Гладкий.

**ЛИНГВИСТИКА ПРИКЛАДНАЯ** — раздел лингвистики, имеющий непосредственные практические применения. Под практическими применениями понимают: создание и совершенствование систем письменности для бесписьменных народов (напр., в СССР в 20-е годы вырабатывались алфавиты для народов, не имевших до революции письменности); составление двуязычных, многоязычных, терминологических, орфографических и некоторых др. словарей: вопросы перевода, в частности, науч.-тех. текстов; дешифровка неизвестных письменностей (см. *Дешифровка текстов*); стилистическая обработка и редактирование текстов; некоторые вопросы методики преподавания языков; *машинный перевод* с одного естественного языка на другой; автомат. синтез устной речи (создание *читающих автоматов* и пр.); создание *языков информационных* для различных отраслей науки; языков для *взаимодействия человека с вычислительной машиной*; *словарей частотных*, конкордансов и *тезаурусов*; *реферирование автоматическое* и *аннотирование автоматическое* текстов. Л. п. использует традиционные лингвистические методы (описательный, сравнительный, сравнительно-исторический и пр.) и новые методы (структурные и математические) с применением современных тех. средств, в частности ЭВМ.

Новые методы в Л. п. интенсивно развиваются с 50-х годов под влиянием потребностей научно-тех. прогресса — необходимости формализовать и упорядочить языковые средства передачи информации с целью сделать обозримыми большие массивы информации. Эти новые методы вторгаются и в традиционные разделы Л. п. (использование ЭВМ для дешиф-

ровки неизвестных письменностей и для создания различного типа словарей). Современная Л. п. прочно базируется на теор. языковедческих исследованиях и характеризуется связью с др. науками: математикой, физикой (связь лингвистики с акустикой при автомат. синтезе устной речи), зоопсихологией и зоосемиотикой, историей и археологией (дешифровка неизвестных письменностей). В дальнейшем возможны более широкие связи с медициной (изучение особенностей речи при диагностике некоторых заболеваний), криминалистикой (установление авторства на основе лингвостатистических методов) и пр. Имеет место и значительное обратное влияние, когда методы, возникшие для решения прикладных задач, перерастают в важные общелингвистические концепции (представление о порождающих процедурах, *грамматики трансформационные*, модели глубинного синтаксиса и порождение текста по заданной смысловой структуре и др.).

Ф. А. Никитина.

**ЛИНГВИСТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА** — отрасль языкознания, занимающаяся анализом количественных характеристик языка и речи. Осн. исходным материалом Л. с. является текст, рассматриваемый как последовательность лингвистических единиц фиксированного уровня (текст может рассматриваться как последовательность букв, фонем, слогов, морфов, словоформ, предложений). Изучаются статистические характеристики распределения лингвистических единиц в тексте речи и на основе этих данных формируются высказывания о системе языка и механизме порождения текста. Свои важнейшие понятия (напр., понятие генеральной совокупности и выборки), как и матем. аппарат, Л. с. заимствует у *математической статистики*. Так, в качестве выборки могут служить либо тексты, либо лингвистические формы. Соответственно этому меняется представление о генеральной совокупности: генеральной совокупностью может служить совокупность как текстов, так и совокупность единиц, содержащихся в них.

Кроме того, в качестве различных генеральных совокупностей могут рассматриваться инвентари лингвистических форм: в этом случае каждая лингвистическая форма является выборкой (с повторением) из инвентаря форм одного из предшествующих уровней, напр., любые предложения можно рассматривать как выборку слов из инвентаря словоформ, или как выборку морфов из инвентаря морфем, или как выборку звуков речи из инвентаря фонем.

В зависимости от характера исследуемых лингвистических единиц различают *фонологическую статистику*, занимающуюся статистическим изучением закономерностей употребления звуков речи, фонем, слогов и т. п., *морфологическую статистику*, занимающуюся статистическим изучением употребления различных морфологических форм (основ, суффиксов, моделей слов, частей речи и т. п.), *лексическую статистику*, занимающуюся статистическим изучением закономерностей употреб-

ления слов и словосочетаний. *Стилистическая статистика* устанавливает статистическими методами особенности функциональных, жанровых и индивидуальных стилей. Кроме указанных разделов, в Л. с. выделяют также *типологическую статистику*, занимающуюся выработкой количественных типологических признаков языков, и *хронологическую статистику* (глоттохронологию), занимающуюся разработкой методов определения времени расхождения языков. Для всех разделов Л. с. характерно использование понятия частоты лингвистической формы в качестве меры ее употребительности.

Л. с. как науч. дисциплина возникла в связи со стремлением расширить совокупность структурных характеристик лингвистических форм характеристикой их употребительности. При этом исходили из предположения, что любой лингвистической форме присуща априорная вероятность быть употребленной в тексте. Собственно эта вероятность и должна характеризовать употребительность данной лингвистической формы. В качестве способа отыскания этих вероятностей используется выборочный метод статистики, дающий приближенную оценку употребительности лингвистической формы в виде ее относительной частоты. Л. с. изучает не только относительные частоты лингвистических форм и их классов, но и такие характеристики форм, как их размер (длина), сочетаемость (сила связи), распределение в тексте. Различие между текстами может состоять в различном составе форм и в различной их употребительности. Этот факт использует стилистическая статистика, вырабатывая методы сравнения текстов по составу и употребительности форм и получения оценок степени различия текстов. Тексты на различных языках характеризуются различной относительной частотой элементов сходного типа. Это использует типологическая статистика для разработки методов типологического сопоставления языков и получения оценок для т. н. типологических индексов. Напр., отношение числа морфем к числу слов в тексте может служить мерой синтеза языка (наз. его индексом синтетичности). Вьетнамский язык, в котором слова практически одноморфемные, характеризуется индексом синтетичности 1,06 в отличие от эскимосского, в котором индекс синтетичности равен 3,72. Между ними располагаются английский (1,68), русский ( $\approx 1,90$ ) и украинский ( $\approx 1,80$ ) языки.

Отдельную отрасль Л. с. составляют исследования, использующие методы теории информации. В Л. с. сформулирован ряд специфических лингвостатистических задач, таких, как нахождение объема словника текста по его длине, нахождение объема полного словаря писателя по выборке из текстов этого писателя, оценка степени неоднородности текстов на разных уровнях, характеристика статистической структуры текста, установление связей между статистическими характеристиками лингвистических форм разных уровней и др.

В связи с решением этих задач возникли проблемы изучения лингвостатистических распределений. В исследовании структуры языка используются и качественные, и количественные характеристики его элементов, а это позволяет глубже понять механизм языка и принципы его порождения. Данные об употребительности элементов языка, прежде всего слов, широко используются в таких прикладных областях, как преподавание языков, текстология, стенография, машинный перевод, связь и др. См. также *Языка информационные измерения*.

Лит.: Фрумкина Р. М. Статистические методы изучения лексики. М., 1964 [библиогр. с. 111—114]; Перебийнос В. И. Частота и сочетаемость фонем современного украинского языка. К., 1965 [библиогр. с. 38]; Статистичні параметри стилів. К., 1967; Шайкевич А. Я. Опыт статистического выделения функциональных стилей. «Вопросы языкознания», 1968, № 1; Пиотровский Р. Г. Информационные измерения языка. Л., 1968 [библиогр. с. 108—112]; Перебийніс В. С. Кількісні та якісні характеристики системи фонем сучасної української літературної мови. К., 1970; Ермоленко Г. В. Лингвистическая статистика. Краткий очерк и библиографический указатель. Алма-Ата, 1970; Головин Б. Н. Язык и статистика. М., 1971 [библиогр. с. 181—186]; Guiraud P. Problèmes et méthodes de la statistique linguistique. Dordrecht, 1959; Herdan G. The advanced theory of language as choice and chance. Berlin — Heidelberg — New York, 1966.

## ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ —

система автоматического управления, удовлетворяющая условиям линейности (см. *Нелинейная система управления*). Для Л. с. у. справедлив принцип суперпозиции (аддитивности): если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — некоторые (вообще говоря, различные) входные сигналы Л. с. у., а  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  — ее реакции на эти сигналы, то сумма  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$  представляет собой реакцию Л. с. у. на суммарный входной сигнал  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ . Л. с. у. могут быть как автономными, так и неавтономными (см. *Система автономная*, *Система неавтономная*) и обладать как сосредоточенными, так и распределенными параметрами. Простейшим примером Л. с. у. является Л. с. у. с постоянными сосредоточенными параметрами. Процессы в такой системе описываются обыкновенными дифф. уравнениями с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j + b_{ij}u_j),$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

или в матричной форме

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad \sigma = c^T x. \quad (2)$$

Здесь  $x_i = x_i(t)$  — фазовые координаты Л. с. у.;  $u_i = u_i(t)$  — входные сигналы;  $\sigma = \sigma(t)$  — выходной сигнал;  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_i$  — постоянные коэффициенты (параметры Л. с. у.);  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $c = (c_1, \dots, c_n)$  — векторы-столбцы  $n$ -порядка;  $A = \|a_{ij}\|_1^n$ ,  $B =$

$= \|b_{ij}\|_1^n$  — квадратные матрицы размера  $n \times n$ ;  $n$  — порядок системы; символ « $T$ » означает транспонирование.

Кроме дифференциальных уравнений вида (1) или (2), для описания Л. с. у. широко применяется математический аппарат передаточных функций и частотных характеристик (см. *Частотные характеристики систем автоматического управления*). Теория этого класса систем достаточно детально разработана, и это существенно упрощает их анализ и синтез (см. *Систем автоматического управления анализ*, *Систем автоматического управления синтез*). Строго говоря, практически все реальные САУ нелинейны, т. е. не удовлетворяют принципу суперпозиции. Однако многие такие системы (если их нелинейные характеристики достаточно гладки) поддаются линеаризации, которая приводит их уравнения к виду (1) или (2). В этом случае Л. с. у. следует рассматривать как упрощенную (приближенную) модель математическую реальной САУ. Условия, при которых линейную модель можно использовать для исследования устойчивости нелинейной системы, устанавливает теорема Ляпунова (см. *Ляпунова методы*). Такая модель достаточно точно описывает процессы, протекающие в реальной системе, лишь в некоторой (достаточно малой) окрестности заданного режима. Теория Л. с. у. широко используется на практике для расчета (анализа и синтеза) линейных или линеаризованных САУ.

Ю. Н. Чеховой.

**ЛИНЕЙНАЯ ФОРМА**, линейный функционал, ко вектор — скалярная линейная ф-ция векторного аргумента. Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ . Ф-ция  $a(x)$ , определенная на  $V$  и со значениями в  $K$  наз. Л. ф. (линейным функционалом на  $V$ ), если для всех  $x, y \in V$  и  $\alpha \in K$  выполняются равенства  $a(x + y) = a(x) + a(y)$ ;  $a(\alpha x) = \alpha(a(x))$ . В случае конечномерного  $V$  и выбранного базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  для  $V$  Л. ф.  $a(x)$  выражается в виде  $a(x) =$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \xi_i, \text{ где } \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \text{ — координаты}$$

вектора  $x$  в выбранном базисе. В обобщении такого представления, в функциональных пространствах Л. ф. задаются обыкновенно интегралами. Л. ф. на  $V$  сами образуют для операций сложения и умножения на скаляр линейное пространство  $\hat{V}$ , называемое сопряженным (или двойственным) пространством  $V$ .

Для конечномерных  $V$ , пространство  $\hat{V}$  изоморфно исходному пространству  $V$ . В случае функциональных или топологических линейных пространств отдельно рассматриваются те Л. ф., которые непрерывны в топологии пространства; двойственным пространством в этом случае считается совокупность непрерывных функционалов. Л. ф. и операторы линейные — один из главных разделов алгебры линейной, имеющий многочисленное применение в геометрии, функциональном анализе и в



прикладных разделах математики, в кибернетике. В частности, напр., в задачах линейного программирования и в теории игр иногда надо находить такое решение системы линейных неравенств, которое минимизирует некоторую заданную Л. ф., описывающую «стоймость» данного решения. Л. А. Калужнин.

**ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ** — функции алгебры логики, которые можно представить в виде  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n \pmod{2}$ . Каждая Л. ф. а. л. полностью определяется набором своих коэфф.  $a_0, \dots, a_n$ , принимающих значения 0 или 1. Отсюда очевидно, что число всех Л. ф. а. л. от  $n$  аргументов равно  $2^{n+1}$ . В частности, все ф-ции одного переменного линейны. Класс всех Л. ф. а. л. является классом замкнутым функций алгебры логики; более того, он является классом предполным функций алгебры логики.

**ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ** — совокупность способов, обеспечивающих нахождение вектора  $x$  из системы уравнений

$$Ax = y, \quad (1)$$

где  $A$  — квадратная матрица и  $y$  — правая часть системы уравнений. В общей записи  $x = A^{-1}y$  и при любом  $y$  решение существует, если  $\det A \neq 0$ . Практические Л. а. с. у. с. р. различают в зависимости от структуры исходных данных (матрицы  $A$  и вектора  $y$ ), порядка матрицы  $A$  и типа используемых ЭВМ. Л. а. с. у. с. р. имеют исключительно большое значение в практике вычислений. Это объясняется гл. о. тем, что приводящее к линейным алгебр. системам (л. а. с.) линейное по отношению к искомым коэфф. приближение самых разных моделей математических исследуемых реальных процессов оказывается удобным в применении и нередко достаточным в смысле требуемой точности. Задачи решения л. а. с. возникают, в частности, при обработке экспериментальных данных по наименьшим квадратов методу, приближенном решении линейных интегр. и дифф. ур-ний методом конечных разностей и вариационными методами, в методах последовательной линеаризации при решении нелинейных операторных ур-ний и т. п.

Рассмотрим Л. а. с. у. с. р. в зависимости от характерных для практики различий в объеме и структуре исходных данных.

1. Л. а. с. (1) имеет матрицу, близкую к вырожденной, а именно: изменение элементов матрицы  $A$  в пределах точности их задания может привести к чисто вырожденной матрице  $A_0$  ( $\det A_0 = 0$ ). Такие задачи наз. некорректно поставленными. На практике указанные задачи возникают чаще всего тогда, когда реальный процесс описывается системой ур-ний с чисто вырожденной матрицей, но в результате неизбежных погрешностей измерений полученная прил. система (1) имеет матрицу, уже отличную от чисто вырожденной. Возможен также случай, когда  $\det A = 0$ , а прил. вектор  $y$  не удовлетворяет

условиям разрешимости. Иными словами, такая система не имеет «классического» матем. решения. Для построения решения некорректно поставленных задач, даже если они разрешимы, оказываются абсолютно неприемлемыми численные методы, дающие математически точные решения заданной системы (1). Это объясняется тем, что в данной ситуации решение системы весьма чувствительно к малым изменениям исходных данных и математически точное решение «возмущенной» системы (1) может оказаться далеким от состояния реального процесса. В этом случае для построения решения следует использовать методы регуляризации для решения вырожденных л. а. с. (см. Некорректно поставленных задач способы решения). Один из методов регуляризации состоит в том, что вместо системы (1) решается всегда разрешимая система

$$\alpha x + A^*Ax = A^*y, \quad (2)$$

где  $\alpha > 0$ ,  $A^*$  — сопряженная с  $A$  матрица. При определенной зависимости  $\alpha$  от точности исходных данных, напр., при  $\alpha = \sqrt{\epsilon}$ , где  $\epsilon \geq \max(\|\delta A\|, \|\delta y\|)$ ,  $\|\delta A\|$  и  $\|\delta y\|$  — спектральные нормы возможных вариаций соответственно  $A$  и  $y$ , решение системы (2) сходится, когда  $\epsilon \rightarrow 0$ , к т. н. норм. решению системы (1) (к тому из векторов, который дает миним. значение  $\|Ax - y\|$  и имеет миним. значение  $\|x\|$ ). При невозможности варьирования  $\epsilon$  методы регуляризации могут оказаться практически неэффективными. В подобных случаях необходимо переформулировать исходную задачу или изменить условия получения исходных данных.

2. Известно, что возможные вариации  $\delta A$  заданной невырожденной матрицы  $A$  не могут превратить ее в вырожденную матрицу  $A_0 = A + \delta A$ , если выполняется условие

$$\|A^{-1}\delta A\| < 1 \text{ или } \|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1 \quad (3)$$

в любой из норм. В частности, в спектральной норме это означает, что норма возмущения  $\|\delta A\|$  должна быть меньше миним. модуля собственного значения матрицы  $A$  (в случае симметричной  $A$ ) или меньше квадратного корня из миним. собственного значения матрицы  $A^*A$  (для произвольной матрицы  $A$ ). Иными словами, выполнение условия (3) гарантирует выход за пределы 1-го случая. Однако это условие ни в коем случае не обеспечивает близости решений истинной, но не известной нам системы  $\tilde{A}x = \tilde{y}$  и заданной прил. системы  $Ax = y$  ( $\tilde{A} = A + \delta A$ ,  $y = \tilde{y} + \delta y$ ). Даже точные решения этих двух систем при выполнении условия (3) могут весьма сильно отличаться друг от друга. Ф-ла

$$\frac{\|\delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \cdot \frac{\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta y\|}{\|y\|}}{1 - \|\delta y\|/\|y\|}$$

$$(\delta x = \tilde{x} - x)$$



дает верхнюю границу для относительной погрешности решения через относительные погрешности заданных матриц  $A$  и вектора  $y$  при выполнении условия (3). Оценки, полученные по этой ф-ле, обычно весьма завышены. При достаточно малых  $\delta A$  и  $\delta y$  в рамках линейной теории  $\delta x = A^{-1} (-\delta A \tilde{x} + \delta y)$ , откуда

$$\frac{\|\delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \cdot \left( \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta y\|}{\|y\|} \right).$$

Предполагая  $\delta y$  и  $\delta A$  случайными нормально распределенными величинами (см. *Нормальное распределение*), получаем, что в рамках линейной теории  $\delta x$  также нормально распределено и область его возможных значений при заданной вероятности точно совпадает с соответствующим гипер-эллипсоидом рассеивания. При численном решении л. а. с. (1) достаточно попасть в любую точку этого эллипсоида, и это при больших его размерах может облегчить решение задачи, но при этом само решение может потерять практический смысл. В этом случае приходится иметь дело с т. н. плохо обусловленной системой, решение которой имеет лишь устойчивую проекцию на подпространство, образованное собственными векторами матрицы  $A^*A$ , соответствующими большим собственным значениям. Поэтому, если нельзя переформулировать задачу так, чтобы получить достаточно хорошо обусловленную систему, то для заданной плохо обусловленной задачи имеет смысл находить лишь упомянутую устойчивую проекцию. Один из способов отыскания этой проекции может быть основан на предварительном отыскании необходимых собственных чисел и векторов (см. *Собственных значений и собственных векторов матриц способы вычисления*), после чего

$$A^*y = \sum_{k=1}^n \frac{(A^*y, e_k)}{(e_k, e_k)} e_k \text{ и искомая проекция}$$

$$x_{\text{пр}} = \sum_{k=m}^n \frac{(A^*y, e_k)}{\lambda_k (e_k, e_k)} e_k, \text{ где } \{\lambda_k\}_m^n - \text{выбранные большие собственные значения, } e_k - \text{единичные векторы в направлении взаимно-ортogonalных осей. Нередко по практическому смыслу задачи нас устраивает любое } x, \text{ которое}$$

дает достаточно малое значение  $\|\tilde{A}x - \tilde{y}\|$ . Если  $x_\delta$  таково, что  $\|Ax_\delta - y\| \leq \delta$ , то  $\|\tilde{A}x - \tilde{y}\| \leq \delta + \|\delta A\| \|x_\delta\| + \|\delta y\|$  и мы вправе выбрать  $\delta$ , минимизирующее полученную оценку. Функция  $\|Ax - y\|^2$  от  $x$  является всегда выпуклой и квадратической. На этом основаны многие способы минимизации  $\|Ax - y\|$  и тем самым отыскания решения л. а. с.

Системы, рассмотренные выше, — это в какой-то степени особые системы, нередко встречающиеся на практике. Методы решения их появились недавно, и многие детали реализующих их алгоритмов требуют дальнейшего совершенствования.

3. Методы решения хорошо обусловленных систем достаточно хорошо развиты и стали «классическими». Задача состоит в том, чтобы из их многообразия отобрать необходимый минимум при создании оптим. матем. обеспечения конкретных машин и систем. Рассмотрим более подробно лишь отдельные Л. а. с. у. с. р., получившие наибольшее распространение при решении л. а. с. на ЦВМ и АВМ. Прямые (точные) методы обычно применяются при небольшом порядке системы. Из таких методов рассмотрим компактную схему метода Гаусса с аналогом выбора главного элемента по столбцу, метод отражений и метод квадратного корня (последний для положительно определенной матрицы). Везде будем предполагать, что суммы парных произведений компонент векторов вычисляются на ЦВМ с округлением лишь результатов, причем ЦВМ работает в режиме с плавающей запятой.

Компактная схема при  $A = \{a_{ij}\}_1^n, y = \{y_i\}_1^n$  осуществляет непосредственное разложение матрицы  $A$  на две треугольные:  $A = LU$ , где  $L$  — нижняя треугольная с единицами на главной диагонали, а  $U$  — верхняя треугольная. Разложение записывается в виде вспомогательной матрицы

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

элементы которой вычисляются по ф-лам:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad i \leq j;$$

$$l_{ij} = \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) : u_{jj}, \quad i > j.$$

Правая часть преобразуется в вектор  $f$  по ф-ле

$$f_i = y_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} f_k.$$

Решение вычисляется как

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left( f_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k \right), \quad i = n, n-1, \dots, 1.$$

Чтобы обеспечить аналог выбора главного элемента по столбцу, вычисления производят следующим образом. На каждом шаге  $r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) вычисляют выражения  $s_t = a_{tr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{tk} u_{kr}, \quad t = r, r+1, \dots, n$ . Если  $\max_t |s_t| = |s_{r'}|$ , то строки  $r$  и  $r'$  меняют ме-

стами, так что после этого

$$u_{rr} = s_r, \quad l_{tr} = \frac{s_t}{u_{rr}}, \quad u_{rt} = a_{rt} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kt},$$

$$t = r + 1, \dots, n.$$

Аналогичные преобразования выполняют и над элементами правой части. Такой выбор главного элемента обеспечивает  $|l_{ij}| \leq 1$ . Реализация указанного алгоритма на ЦВМ требует хранения  $n^2$  чисел, выполнения  $n$  делений,  $n^3/3$  умножений,  $n^3$  сложений и порядка  $n^2$  логических операций. При этом здесь и дальше учитываются лишь главные степени  $n$ .

Для характеристики точности любого из прямых методов можно использовать понятие эквивалентного возмущения (э. в.), которое указывает, какое изменение исходных данных системы эквивалентно суммарному влиянию погрешностей округления на вычисляемое решение. Обозначим символами с индексом  $t$  вычисленные величины, где  $t$  — число двоичных разрядов мантиссы машинного представления числа. Решение  $x_t$  точно удовлетворяет не системе (1), а системе  $(A + dA)x_t = y + dy$ , где  $dA$  и  $dy$  — соответствующие э. в. Главную часть  $F$  э. в. во всех прямых методах составляют погрешности округления, возникающие при разложении (преобразовании) матрицы  $A$ . В случае компактной схемы:  $L_t U_t \equiv A + F$ , где  $\|F\|_E \leq C_1 \cdot 2^{-t} \|A\|_E$ ,  $C_1$  — константа, зависящая от величины  $\max_{ij} |u_{ij}|$ ;  $\|A\|_E = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$ .

Метод отражений основан на ортогональном преобразовании исходной системы к системе с треугольной матрицей. Преобразования над заданной матрицей  $A = A_1$  выполняются по правилу:  $A_{k+1} = U_k A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$  с помощью матриц отражения  $U_i$ . По данному вектору  $z$  и единичному координатному вектору  $e$  всегда можно построить матрицу отражения  $u = I - 2WW^*$ ,  $\|W\| = 1$  ( $I$  — единичная матрица,  $W$  — матрица-столбец), для которой  $Uz = \alpha e$ . Для этого достаточно положить  $\alpha^2 = (z, z)$ ,  $W = \frac{1}{\rho}(z - \alpha e)$ ,  $\rho^2 = 2[\alpha^2 - \alpha(z, e)]$ .

На 1-ом шаге полагаем  $z = a_1^{(0)}$ ,  $e = e_1$ , где  $a_1^{(0)}$  — 1-й столбец матрицы  $A_1$ ,  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Тогда  $W_1^* = \rho W^* = (a_{11} \pm \alpha, a_{21}, \dots, a_{n1})$ ,  $\alpha^2 = \sum_{i=1}^n a_{i1}^2$ ,  $\alpha$  имеет знак  $a_{11}$ ,

$U_1 = I - kW_1 W_1^*$ , где  $k = \frac{1}{\alpha^2 \pm \alpha a_{11}}$ . В результате  $A_2 = U_1 A_1 = A_1 - kW_1 W_1^* A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & V \\ 0 & B \end{pmatrix}$ , где

$B$  — матрица  $n-1$ -го порядка. Далее процесс повторяется для матрицы  $B$ . Аналогич-

ные преобразования выполняются и над правой частью:  $b_{k+1} = U_k b_k$ . Полученная в итоге система с треугольной матрицей решается простым методом последовательного исключения. Данный алгоритм требует также  $n^2$  ячеек памяти ЦВМ,  $2n-1$  делений,  $2n^3/3$  умножений,  $2n^3/3$  сложений,  $n^3/3$  логических операций и  $n$  операций извлечения квадратного корня. Для него

$$\|F\|_E \leq 3,35(n-1)[1 + 9,01 \cdot 2^{-t}]^{n-2} \times$$

$$\times 2^{-t} \|A\|_E \approx C_2 n 2^{-t} \|A\|_E.$$

Вычислительная схема метода квадратного корня (для положительно определенной матрицы) состоит в представлении  $A$  в виде  $A = S^* S$ , где  $S$  — верхняя треугольная матрица, и решении двух треугольных систем  $S^* z = y$  и  $Sx = z$ . Элементы матрицы  $S$  находят по Ф-лам:

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11}}, \quad s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2},$$

$$s_{ij} = \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj} \right) : s_{ii}.$$

При этом требуется  $n^2/2$  ячеек памяти,  $n$  делений,  $n^3/6$  умножений,  $n^3/6$  сложений,  $n^3$  логических операций и  $n$  операций извлечения квадратного корня. Здесь  $\|F\|_E \leq C_3 \cdot 2^{-t} \|A\|_E$ . Статистический анализ ошибок округления показывает, что мажорантную оценку для метода отражений можно улучшить в  $\sqrt{n}$ , а для методов квадратного корня и компактной схемы в этой оценке можно улучшить лишь постоянные коэффициенты.

Итеративные методы решения линейных систем (1) на ЦВМ применяют обычно при больших  $n$ , а также для уточнения решения при любом  $n$ . Одним из простейших итерационных методов является метод последовательных приближений (м. п. пр.):

$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + y$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, p$ , где  $B = I - A$ ,  $x^{(0)}$  — задано. Для сходимости метода при любом  $x^0$  необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы  $B$  были по модулю меньше 1. Если  $\|B\| < 1$ , то погрешность метода

$$\|x - x^{(p+1)}\| \leq \frac{\|B\|^{p+1}}{1 - \|B\|} \|Ax^{(0)} - y\|.$$

Если  $B$  представлено в виде  $B = T^{-1}GT$  и  $\|G\| < 1$ , то

$$\|x - x^{(p+1)}\| \leq \|T^{-1}\| \|T\| \cdot \frac{\|G\|^p}{1 - \|G\|} \times$$

$$\times \|Ax^{(0)} - y\|.$$

Реализация метода требует  $pn^2$  умножений и сложений. При больших  $p$  и четных  $n = 2l$  это число можно уменьшить примерно вдвое,

используя тождество

$$\sum_{j=1}^{2l} b_{ij} x_j^{(k)} = \sum_{u=1}^l (b_{i, 2u-1} + x_{2u}^{(k)}) \times$$

$$\times (b_{i, 2u} + x_{2u-1}^{(k)}) - \sum_{u=1}^l x_{2u-1}^{(k)} x_{2u}^{(k)} - \alpha_i,$$

где  $\alpha_i = \sum_{u=1}^l b_{i, 2u-1} \cdot b_{i, 2u}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2l$ ,

не зависят от номера итерации  $k$  и вычисляются лишь один раз. Ошибка округления метода

$$\|x^{(p+1)} - x_t^{(p+1)}\| \leq \frac{2^{-l} \max_{0 \leq s \leq p} \|x^{(s)}\|}{1 - q} (1 - q^{p+1}),$$

где  $q < 1$  и равно указанным выше  $\|B\|$  или  $\|G\|$  (учтены лишь члены первой степени относительно  $2^{-l}$ ). М. п. пр. в канонической форме может быть представлен в виде

$$\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + Ax^{(k)} = y, \quad x^{(0)} = x_0,$$

где  $\tau = 1$ . Если  $A$  — симметричная и положительно определенная матрица, то для решения л. а. с. (1) могут быть применены итеративные методы с ускорением сходимости, реализуемые по схеме

$$C \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + Ax^{(k)} = y; \quad (4)$$

$$x^{(0)} = x_0,$$

где  $C$  — симметричная и положительно определенная матрица-регуляризатор, которая выбирается из условий экономичности итеративного процесса, напр., из условий, чтобы число операций на одной итерации было по возможности минимальным, а скорость сходимости процесса — максимальной. Параметр  $\tau$  обычно вычисляется по ф-ле  $\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ ,

где  $\gamma_1(Cx, x) \leq (Ax, x) \leq \gamma_2(Cx, x)$ .

При этом итеративный процесс (4) сходится со скоростью геом. прогрессии, знаменатель которой  $\rho = (\gamma_2 - \gamma_1) : (\gamma_2 + \gamma_1)$ . В отличие от одношаговых (4) двухшаговые итеративные методы в канонической форме записываются в виде

$$C \left[ \frac{x^{(k+1)} - x^{(k-1)}}{2\tau} + \kappa(x^{(k+1)} - 2x^{(k)} + x^{(k-1)}) \right] + Ax^{(k)} = y, \quad (5)$$

где  $x^{(0)} = x_0$ ,  $x^{(1)} = x_1$ ,  $\tau = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}$ ,  $\kappa =$

$$= \frac{\gamma_1 \gamma_2}{4}. \text{ Для процесса (5) } \rho = (\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1}) :$$

$(\sqrt{\gamma_2} + \sqrt{\gamma_1})$ . Указанные итеративные методы являются примерами линейных методов в том смысле, что очередное приближение является линейной ф-цией предыдущего приближения (или предыдущих приближений).

Другую группу итеративных методов составляют вариационные методы: скорейшего спуска, миним. невязок, сопряженных градиентов и др., построенные на принципе минимизации соответствующей квадратичной ф-ции (об этих и некоторых др. методах см. также Численные методы и Операторных уравнений способы решения).

Решение систем линейных алгебр. ур-ний с вещественными коэфф. можно произвести также на АВМ, пользуясь методом аналогий или квазианалогий. Суть метода аналогий заключается в том, что из элементов АВМ собирается цепь, электр. состояние которой описывается системой ур-ний, подобной системе, подлежащей решению. Метод квазианалогий отличается тем, что собирается цепь, ур-ния которой не подобны, а лишь эквивалентны заданному в том смысле, что среди их решений содержатся решения заданной системы. Метод квазианалогий применяют тогда, когда не существует цепи, ур-ния которой подобны заданным, либо тогда, когда такая цепь существует, но является неустойчивой. Наиболее перспективны квазианалоговые модели систем линейных алгебр. ур-ний. Их можно разбить в соответствии с их свойствами на три группы: 1) модели, пригодные для получения нормального решения совместных систем; 2) модели, пригодные для получения нормального решения совместных и несовместных систем при условии, что число ур-ний больше или равно числу неизвестных, а ранг матрицы равен числу неизвестных; 3) модели, пригодные для решения систем общего вида, но дающие решение, приближенное к нормальному. В моделях последней группы реализуется метод регуляризации Тихонова. В моделях, пригодных для получения нормального решения несовместных систем, имеются напряжения, пропорциональные невязкам заданных ур-ний. Относительная погрешность решений систем алгебр. ур-ний, получаемых на АВМ, в зависимости от обусловленности обычно колеблется от нескольких десятых процента до нескольких процентов.

Лит.: Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.—Л., 1963 [библиогр. с. 677—734]; Пухов Г. Е., Боровский Б. А. Принципы построения квазианалоговых моделей систем линейных алгебраических уравнений. В кн.: Доклады четвертой межвузовской конференции по применению физического и математического моделирования в различных отраслях техники, сб. 3. М., 1962; Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. М., 1966 [библиогр. с. 247—248]; Фаддеев Д. К., Кублановская В. Н., Фаддеева В. Н. Линейные алгебраические системы с прямоугольными матрицами. В кн.: Материалы Международной летней школы по численным методам, в. 1. М., 1968; Глушков В. М., Молчанов И. Н., Николенько Л. Д. О наборе программ для реше-

ния систем линейных алгебраических уравнений на машинах серии «Мир». «Кибернетика», 1968, № 6; Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971 [библиогр. с. 538—550]; Форсайт Дж., Мюллер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. Пер. с англ. М., 1969 [библиогр. с. 160—163]; Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Пер. с англ. М., 1970 [библиогр. с. 559—564].  
Б. А. Борковский, В. В. Иванов, И. Н. Молчанов, Л. Д. Николенко.

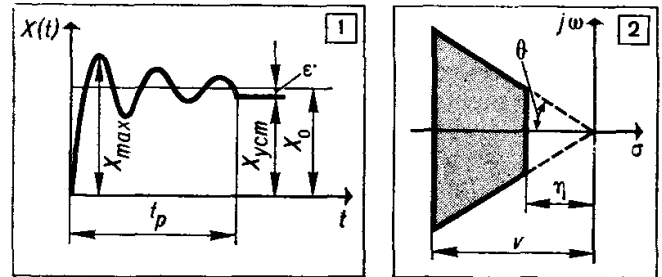
**ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ АНАЛИЗ** — исследование влияния структуры, численных значений параметров и внешних воздействий на динамические свойства и поведение линейных систем. Анализ осуществляется на основе изучения свойств решений дифф. уравнений, описывающих систему. В общем случае автоматические системы описываются нелинейными дифф. уравнениями. Однако процессы, происходящие в некоторых нелинейных системах, несущественно отличаются от процессов в линейных системах, поэтому для анализа таких систем можно применять т. н. линеаризованные уравнения первого приближения. При достаточно малых возмущениях, действующих на систему, по линеаризованным уравнениям можно судить о некоторых важных свойствах исходной системы. Вопрос о законности и границах применимости метода линеаризации в исследовании динамики систем был наиболее полно и до конца исследован рус. математиком А. М. Ляпуновым (см. *Ляпунова методы*). Для анализа свойств линейных систем автомат. управления эффективны методы, основанные на интегральных преобразованиях Лапласа и Фурье, т. н. операторные методы. Осн. содержанием анализа линейных систем является исследование устойчивости, качества *переходного процесса* и точности воспроизведения *управляющего воздействия*.

Исследование *устойчивости* является первой и осн. задачей анализа систем автоматического управления. Для того, чтобы линейная система с постоянными параметрами была асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы действительные части корней были отрицательными (см. *Устойчивости непрерывных систем теория*). Проблема устойчивости (как и вообще анализа линейных систем) была бы исчерпана, если бы достаточно просто можно было вычислить корни. Но ввиду трудностей вычисления корней были разработаны методы оценки знаков действительных частей косвенным путем, по коэффициентам характеристического уравнения на основе т. н. *устойчивости критериев*. Наиболее распространенными являются алгебраические критерии Гурвица и Рауса, частотный критерий Найквиста и графоаналитический критерий Михайлова (см. *Гурвица теорема*).

Часто бывает необходимо установить, при каких значениях параметров, которые входят в коэффициенты характеристического уравнения, система будет устойчивой. Для этой цели наиболее простым и эффективным методом является метод *D-разбиения*. Этот метод заключается в построении кривой, которая яв-

ляется отображением мнимой оси плоскости корней на плоскость параметров системы. Эта кривая разбивает плоскость на ряд областей, каждой из которых соответствует определенное количество корней с отрицательной действительной частью. Путем нанесения штриховки выделяют область, содержащую наибольшее число таких корней, и далее, пользуясь любым критерием устойчивости, проверяют устойчивость для каких-либо значений параметров из этой области. Если система устойчива для этих контрольных значений параметров, то она будет устойчивой для всех значений параметра внутри этой области.

Устойчивость далеко не полностью характеризует динамические свойства системы. Существенны еще и другие показатели, которые



1. Кривая переходного процесса.

2. Область определения корней характеристического уравнения.

в общей совокупности характеризуют *качество процесса регулирования*. Последнее определенным образом связано с качеством переходного процесса — реакции системы на входное воздействие типа единичного толчка. Поэтому качество процесса регулирования можно анализировать по показателям качества переходного процесса (см. *Критерии качества систем автоматического управления*).

Качество переходного процесса анализируется прямым путем — на основе переходной характеристики системы, если последняя известна или легко может быть определена, или же косвенно — по коэффициентам характеристического уравнения и т. д. Применяются следующие показатели качества переходного процесса: время переходного процесса  $t_p$ , величина абсолютной статической *погрешности*  $\epsilon = x_0 - x_{уст}$  или относительной стати-

ческой погрешности  $\Delta = \frac{\epsilon}{x_0}$ , величина пере-

регулирования  $\sigma = \frac{x_{max} - x_0}{x_0}$ , величина

колебательности  $\mu$  (число колебаний за время  $t_p$ ) (рис. 1) и др. Здесь  $x_0$ ,  $x_{уст}$  и  $x_{max}$  — соответственно заданное, установившееся (за время  $t_p$ ) и макс. значения регулируемой величины. Как и в случае анализа устойчивости, разработаны косвенные методы анализа качества линейных автомат. систем, не требующие определения переходной характеристики и вычисления корней характеристического урав-

нения. К косвенным методам анализа качества переходного процесса относятся также методы, основанные на изучении расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости, на использовании частотных характеристик, интегральные методы и др. Если все корни характеристического уравнения расположены внутри трапеции слева от мнимой оси комплексной плоскости (рис. 2), где  $\eta$  — степень устойчивости,  $\operatorname{tg} \theta = \mu$  — величина колебательности, то это свидетельствует о том, что показатели качества будут не хуже заданных значений  $\eta = \frac{\ln 1/\Delta}{t_p}$ ,  $t_p$ ,  $\Delta$  и  $\mu$ ,

определяющих границы этой трапеции. Задача анализа качества и заключается в установлении этого факта. Последний может быть достаточно просто выявлен на основе т. н. метода смещенного характеристического уравнения. Смещенное уравнение  $A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n = 0$  получается заменой  $s$  на  $z - \eta$  в характеристическом уравнении, что соответствует переносу мнимой оси плоскости корней влево на величину  $\eta$ . Кроме того, поворотом мнимой оси на угол  $(90^\circ - \theta)$  против часовой стрелки и соответствующим преобразованием характеристического уравнения получают преобразованное характеристическое уравнение. Если корни преобразованного и смещенного уравнений имеют отрицательные вещественные части, то корни исходного характеристического уравнения все расположены внутри трапеции. Так достаточно просто можно не только установить факт расположения всех корней внутри желаемой области, заданной тех. условиями, но и произвести выбор параметров системы так, чтобы все корни входили в эту область. Это делается путем соответствующего выбора параметров системы, исходя из условий устойчивости смещенного и преобразованного характеристических уравнений.

Для анализа устойчивости и качества переходного процесса применяется также *корневого годографа метод*. Он заключается в построении корневых траекторий — т. е. геом. места всей совокупности значений корней характеристического уравнения в зависимости от изменения какого-нибудь параметра системы. По этим траекториям можно достаточно полно судить об устойчивости и качестве переходного процесса системы. Существенным недостатком этого метода является трудность построения траектории корней.

Рассмотренные методы оценки качества переходного процесса имеют один общий недостаток: не учитывается влияние правой части дифф. уравнения системы, от которой также существенно зависит качество переходного процесса. Действительно, переходная характеристика определяется как решение неоднородного дифф. уравнения системы

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^m x_{\text{вх}}(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_{\text{вх}}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m x_{\text{вх}}(t)$$

при единичном входе  $x_{\text{вх}}(t) = 1(t)$  и нулевых начальных условиях. Правая часть уравнения зависит от того, к какому элементу системы приложено воздействие  $x_{\text{вх}}(t)$ , левая же — не зависит. Изображение по Лапласу переходной характеристики в силу этого уравнения будет

$$X(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \cdot \frac{1}{s}.$$

Учитывая в анализе качества только левую часть уравнения, пользуются фактически искаженной переходной характеристикой

$$X(s) = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \cdot \frac{1}{s},$$

что безусловно влияет на результаты анализа качества. Но при прочих равных условиях качество реального переходного процесса в общем случае тем лучше, чем лучше показатели качества, полученные без учета правой части уравнения, т. е. изложенные выше методы имеют безусловную ценность.

Большое значение имеют частотные методы анализа качества, которые позволяют произвести оценки качества по виду различных частотных характеристик системы.

Наряду с рассмотренными методами для оценки качества широко применяются и интегральные методы, позволяющие учитывать и знаменатель, и числитель передаточной функции, т. е. учитывают не только левую, но и правую части дифф. уравнений системы. Наиболее часто применяют следующие интегральные оценки:

$$I_1 = \int_0^\infty x(t) dt, \quad I_2 = \int_0^\infty x^2(t) dt, \quad I_3 = \int_0^\infty [x^2(t) + k \dot{x}^2(t)] dt,$$

где  $x(t)$  — переходная характеристика. Качество системы тем лучше, чем меньше значения этих интегралов. При анализе качества интегральными методами обычно ставятся две задачи: 1) определить величину интеграла и 2) так подобрать параметры системы, чтобы значение интеграла было минимальным. Обе эти задачи решаются косвенным путем, не требующим определения переходной характеристики. Интегралы  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  могут быть выражены через коэффициенты левой и правой части дифф. уравнения системы, и, следовательно, по ним можно вычислить значения этих интегралов или же минимизировать их соответствующим выбором настроечных параметров системы, входящих в эти коэффициенты.

Одной из важных задач анализа линейных систем управления является исследование вынужденных движений, вызванных внешними воздействиями, т. е. анализ точности воспроизведения управляющего сигнала на фоне помех и вредных возмущений. О последних обычно известно лишь то, что они относятся к определенному классу функций — детерминированных или случайных. Если о возмущениях ничего не известно, кроме того, что они изменяются в заданном диапазоне, то задача может решаться методами теории инвариантности (см. *Инвариантность систем автоматического управления*). При случайном характере помех и возмущений эта задача решается методами теории случайных функций — статистическими методами, суть которых заключается главным образом в оценке точности функционирования системы по величине ее среднеквадратической погрешности. В зависимости от статистических свойств помех и возмущений разработаны различные методы анализа точности линейных систем. Анализ линейных систем с точки зрения точности при изменении параметров системы осуществляют на основе теории чувствительности (см. *Динамические системы. Теория чувствительности*).

Характерно, что анализ точности любыми методами не исключает анализа устойчивости и качества переходного процесса. Для анализа систем со многими регулируемыми величинами, кроме вышеизложенного, решается еще дополнительно задача автономного управления (см. *Автономность*).

Лит.: Воронов А. А. Основы теории автоматического управления, ч. 1. М.—Л., 1965 [библиогр. с. 382—392]; Теория автоматического регулирования, кн. 1. М., 1967 [библиогр. с. 743—763].

А. Г. Шевелев.

**ЛИСП** — списковый язык программирования. Исходная информация записывается в виде списков. Напр., TIMES, ONE, (plus, X, A), Y.

Программа на языке Л. представляет собой рекурсивную функцию символьных выражений, которая строится аналогично арифм. ф-циям из элементарных с помощью условного оператора и оператора суперпозиции. Условный оператор имеет вид  $(p_1 \rightarrow l_1; \dots; p_n \rightarrow l_n)$ . Результатом его выполнения будет выражение  $l_i$ , если  $p_i$  — истинно. Имеется пять элементарных ф-ций: *atom* — булева функция, определяющая, является ли исследуемое выражение атомом — неделимой единицей информации; *eq* — булева ф-ция, устанавливающая равенство двух атомов; *car*, *cdr* — функции, выделяющие из списка первый и остальные элементы соответственно; *cons* — соединение двух списков в один. Кроме элементарных, имеется ряд более сложных ф-ций, которые строятся из них, напр., подстановка в выражение  $z$  вместо всех вхождений символа  $y$  выражения  $x$  запишется в виде следующей ф-ции:

$subst[x; y; z] = [atom[z] \rightarrow [eq[z; y] \rightarrow x; T \rightarrow z]; T \rightarrow cons[subst[x; y; car[z]]; subst[x; y; cdr[z]]]$ .

Здесь  $T$  означает «истина». Эта запись представляет собой пример программы на языке

Л. Л. получил дальнейшее развитие в ряде других языков.

Лит.: Ефимова М. Н. Алгоритмические языки. М., 1965 [библиогр. с. 86]; McCarthy J. Recursive functions of symbolic expressions and their computation by machine, part. 1. «Communications of the Associations for Computing Machinery», 1960, v. 3, N. 4.

Т. А. Гринченко.

**ЛОГИКА КОНСТРУКТИВНАЯ** — раздел логики математической, изучающий логические аспекты конструктивной математики. Задачи Л. к. разделяют на две группы: первая — построение формализованных языков конструктивной математики; более строгая характеристика понятия истинной ф-лы и построение формальных аппаратов логич. вывода для каждого из таких языков; вторая — изучение класса конструктивно истинных ф-л и формального аппарата логич. вывода конструктивной математики при помощи матем. методов. Задачи первой группы решают на основе анализа методов доказательства, складывающихся в процессе становления и развития конструктивной математики (см. *Доказательство. Теория*). Характерные особенности формализованных языков, понятия истинной ф-лы и дедуктивных аппаратов, изучаемых в Л. к., определяются особенностями конструктивной математики, в частности, принципом, согласно которому утверждение о существовании матем. объекта, удовлетворяющего некоторому условию, считается обоснованным только тогда, когда указан способ построения такого объекта (см. *Конструктивное направление в математике*).

Среди формализованных языков, рассматриваемых в Л. к., различают языки логико-математические и логические. Ф-ла логико-матем. языка соответствует какому-то одному суждению из какой-либо области конструктивной математики, а ф-ла логич. языка — целому классу матем. суждений, имеющих одинаковую логич. структуру (благодаря, напр., наличию в таких ф-лах переменных для суждений или предикатов). Наиболее важными логико-матем. языками являются логико-арифм. язык, языки, содержащие переменные для слов и алгоритмов, языки с подчиненными переменными. Примерами логич. языков, изучаемых в Л. к., могут служить языки исчисления высказываний и исчисления предикатов.

Для сходных языков предлагались в некоторых случаях неэквивалентные определения понятия истинной ф-лы, что свидетельствует о существовании различных вариантов конструктивной математики. Наиболее существенные расхождения между различными вариантами существуют во взглядах на приемлемость тезиса Чёрча и принципа конструктивного подбора, выдвинутого сов. математиком А. А. Марковым (р. 1903). Этот принцип состоит в следующем: если для свойства  $P$  натуральных чисел имеется алгоритм, выясняющий для всякого натурального числа  $n$ , обладает ли  $n$  свойством  $P$ , и опровергнуто предположение о том, что ни одно число свойством  $P$  не обладает, то имеется натуральное число со свойством  $P$ .



В качестве обоснования совместимости этого принципа с основным требованием к доказательству существования в конструктивной математике А. А. Марков указывает, что в описанной ситуации можно найти число  $n$ , обладающее свойством  $P$ , путем перебора натуральных чисел (начиная с нуля, в порядке возрастания) и проверки для каждого рассматриваемого числа  $n$ , обладает ли оно свойством  $P$ .

Одно из возможных определений понятия конструктивной истинности формул логики-арифм. языка основано на понятии рекурсивной реализуемости. Индукцией по числу вхождений логич. знаков в ф-лу  $F$  определяется отношение «натуральное число  $n$  реализует ф-лу  $F$ ». По определению, напр., число  $n$  реализует ф-лу  $A \vee B$ , если  $n$  есть номер (внекотором фиксированном упорядочении пар натуральных чисел) пары, первый член которой  $a$  есть 0 или 1, а второй член  $b$  есть число, реализующее ф-лу  $A$  (если  $a = 0$ ), и реализующее ф-лу  $B$  (если  $a = 1$ ); число  $n$  реализует ф-лу  $\forall x A(x)$ , если  $n$  — номер общерекурсивной ф-ции  $\varphi$ , такой, что для любого  $k$  число  $\varphi(k)$  реализует ф-лу  $A(k)$ . Принимая тезис Чёрча, арифм. ф-лу считают истинной тогда, когда существует реализующее ее число. Напр., ф-ла вида  $\forall x (P(x) \vee \neg P(x))$  реализуема тогда и только тогда, когда существует алгоритм распознавания у числа  $x$  свойства  $P$ . Другим средством характеристики понятия конструктивно истинной ф-лы является указание алгоритма, перерабатывающего произвольную ф-лу в ф-лу некоторого простого типа или в ф-лу более простого языка, рассматриваемую как «разъяснение», «расшифровка» исходной ф-лы. Таков алгоритм выявления конструктивной задачи, переводящий произвольную ф-лу языка (по существу, эквивалентного логики-арифм. языку), позволяющего формулировать суждения о словах и алгоритмах, в ф-лу вида  $\exists x_1 \dots x_n A$ , где  $A$  не содержит знаков  $\vee$ ,  $\exists$ , или в ф-лу, вообще не содержащую этих знаков. В основу этого алгоритма положены идеи, близкие к идее реализуемости, тезис Чёрча и принцип Маркова. Описаны также алгоритмы, устраняющие в ф-ле подчиненные переменные. Условием истинности ф-лы логич. языка естественно считать истинность всех ф-л некоторого логики-арифм. языка, обладающих той же логич. структурой. Таково, напр., понятие реализуемости ф-л исчисления высказываний.

Дедуктивные системы Л. к. часто получают из соответствующих классических систем, отбрасывая неприемлемые аксиомы, схемы аксиом или правила вывода, чаще всего — *исключенного третьего закон* или закон двойного отрицания. Так получают конструктивное исчисление высказываний, конструктивное исчисление предикатов, конструктивную арифметику. Такие системы могут быть расширены, напр., присоединением аксиом истинных конструктивно, но не классически, как ф-ла  $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists f \forall x P(x, f(x))$ , где  $x, y$  — переменные для натуральных чи-

сел,  $f$  — переменная для общерекурсивных ф-ций.

Одной из осн. задач Л. к. является исследование корректности и полноты аппаратов логич. вывода (относительно того или иного определения понятия конструктивно истинной ф-лы), т. е. исследование того, всякая ли доказуемая ф-ла истинна (корректность) и всякая ли истинная ф-ла доказуема (полнота). Из теоремы о корректности для арифметики (всякая ф-ла логики-арифм. языка, доказуемая в конструктивной арифметике, — реализуема) вытекает реализуемость каждой пропозициональной ф-лы, доказуемой в конструктивном исчислении высказываний. *Гёделевы теоремы о неполноте* имеют место не только для классических, но и для конструктивных логики-арифм. исчислений, так что для всех достаточно богатых логики-арифм. языков конструктивной математики не могут быть указаны полные аппараты логич. вывода. Вопрос о полноте важнейших логич. исчислений решается в классической логике и в Л. к. по-разному. В то время как в классической логике исчисление высказываний и исчисление предикатов оказываются полными, существуют реализуемые пропозициональные ф-лы, недоказуемые в конструктивном исчислении высказываний. В задачи Л. к. входит также исследование логич. исчислений вне связи с понятием истинной ф-лы, в частности, исследование проблемы разрешимости, отыскание классов ф-л, для которых доказуемость в конструктивном исчислении эквивалентна доказуемости в соответствующем классическом исчислении, построение погружающих операций из конструктивных исчислений в классические и из классических в конструктивные, построение исчислений, приспособленных для поиска логического вывода, и алгоритмов поиска логического вывода (см. *Генцена формальные системы*).

Значение Л. к. для развития конструктивной математики обусловлено тем, что с помощью ее понятий и теорем можно разъяснять конструктивное понимание матем. суждений, исследовать, насколько глубоко различия между конкретными теориями конструктивной математики и соответствующими классическими теориями, а также между различными вариантами теорий конструктивной математики.

*Лит.*: Шанин Н. А. О конструктивном понимании математических суждений. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 52; Марков А. А. О конструктивной математике. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1962, т. 67; Шанин Н. А. О рекурсивном математическом анализе и исчислении арифметических равенств Р. Л. Гудстейна. В кн.: Гудстейн Р. Л. Рекурсивный математический анализ. Пер. с англ. М., 1970; Клини С. К. Математическая логика. Пер. с англ. М., 1973 [библиогр. с. 451–465]; Кушнер Б. А. Лекции по конструктивному математическому анализу. М., 1973 [библиогр. с. 427–440]. В. А. Лифшиц.

**ЛОГИКА МАЖОРИТАРНАЯ** — раздел структурной теории автоматов, в котором рассматривают свойства мажоритарного базиса и способы представления в нем логических

функций. Мажоритарный базис состоит из мажоритарной операции:

$$maj(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} a_2, & \text{если } \sum_{j=1}^n x_j \geq a_2; \\ \sum_{j=1}^n x_j, & \text{если } -a_1 < \sum_{j=1}^n x_j < a_2; \\ -a_1, & \text{если } \sum_{j=1}^n x_j \leq -a_1, \end{cases}$$

где  $x_j$  — целые числа,  $x_j \in [-a_1, a_2]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  ( $n$  — нечетное),  $a_2, a_1 > 0$  — операции диаметрального отрицания  $\bar{x} = a_2 - a_1 - x$  (мн-во значений  $x$  должно быть инвариантным относительно этой операции) и констант 1 и 0. Мажоритарный базис представляет собой функционально полную систему элементарных операторов при любом нечетном  $n \geq 3$ . Любая логическая функция может быть представлена в мажоритарном базисе (с произвольно-местной мажоритарной операцией) с помощью разложения функций по переменным, что соответствует каскадному построению сети (см. *Каскадов метод*), реализующей эту функцию. Минимизация функций в этом случае основана на соответствующем выборе способа и порядка исключения переменных. К более экономичной реализации, как правило, приводят методы функциональной декомпозиции в мажоритарном базисе, когда образом декомпозиции является мажоритарная операция, а к составляющим декомпозиции предъявляется ряд требований, связанных с простотой реализации этих функций. Решение задачи декомпозиции сводится к решению систем логич. уравнений в мажоритарном базисе. Наибольшее развитие методы Л. м. получили для трехместной мажоритарной операции в двузначной логике ( $a_1 = a_2 = 1$ ;  $x_j = -1, 1$ ;  $n = 3$ ).

Лит.: Варшавский В. И. Мажоритарная декомпозиция. «Автоматика и телемеханика», 1965, № 9; Варшавский В. И. Мажоритарная операция в многозначной логике. «Кибернетика», 1969, № 2; Овсяевич Б. Л., Розенблюм Л. Я. Проектирование вычислительных и управляющих схем на мажоритарных элементах. Л., 1969 [библиогр. с. 34—35]; Cohn M., Lindaman R. Axiomatic majority-decision logic. «IRE transactions on electronic computers», 1961, v. EC-10, № 1.

Б. Л. Овсяевич.

**ЛОГИКА МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**, формальная логика — дедуктивная математическая теория, которая исследует схемы или формы истинных высказываний, имеющих наибольшую степень общности, т. е. схемы высказываний, истинных для произвольных совокупностей объектов. Она тесно связана с традиционной логикой, т. е. наукой о построении правильных умозаключений: каждой теореме Л. м., содержащей некоторые условия, однозначно соответствует схема правильного умозаключения. Л. м. составляет основу современной логики, вне ее рамок оказываются лишь немногие направления — индуктивная

логика, диалектическая логика. К Л. м. в широком смысле, кроме собственно логич. исчислений, относят ряд матем. наук, возникших под влиянием запросов логики, таких, как *моделей теория*, *алгоритмов теория*, различные алгебры, возникшие при исследовании логич. конструкций, и др. К Л. м. относят и конкретные исследования разных науч. теорий, проводимые с целью выяснения их логич. непротиворечивости и дедукционных возможностей, напр., вопросы оснований математики, логич. исследования языков и т. п. Некоторые из этих теорий тесно связаны с Л. м., другие — отделились от нее и приобрели самостоятельное значение (напр., *булевы алгебры*), так что четко очертить границы Л. м. довольно трудно. В более узком смысле, под термином «Л. м.» понимают науку, объектом изучения которой является математика и другие дедуктивные системы, точнее логическая состоятельность проводимых в них выводов и конструкций, т. е. этот термин относят к логике, развивающейся согласно потребностям математики. Ее наз. также *метаматикой* или *металогикой*.

Логика — наука о построении правильных умозаключений чисто формальным путем, когда исходят из вида посылок, а не их содержания, насчитывает многовековую историю. Довольно большая часть формальной логики была изложена в виде фигур силлогизмов (см. *Силлогистика*) в трудах Аристотеля. В таком виде формальная логика развивалась до середины 19 в. Ее разрабатывали как одно из направлений философии, но заметного практического применения она не находила. В середине 19 в. были предприняты попытки представить логику в виде алгебр. системы и изучать ее теми же методами, что и другие разделы математики. Это направление, первые успешные шаги в разработке которого сделал англ. математик Дж. Буль (1815—64), оказалось чрезвычайно плодотворным. В настоящее время *алгебра логики* играет важную теор. и практическую роль. Несколько позже были предприняты попытки найти в логике обоснование математики. Первые работы в этом направлении принадлежат нем. логик Г. Фреге (1848—1925), англ. ученым А. Уайтхеду (1861—1947) и Б. Расселу (1872—1971). А. Уайтхед и Б. Рассел разработали теорию типов, свободную от известных антиномий теории множеств, в т. ч. и от антиномии Рассела, которая имеет место в системе Фреге. В работах Фреге, Уайтхеда и Рассела была разработана логика предикатов, причем в работах Уайтхеда и Рассела она была тесно переплетена с теорией типов. Большой вклад в развитие современной Л. м. внес нем. математик Д. Гильберт (1862—1943). Хотя выдвинутая им программа обоснования математики оказалась несостоятельной (см. *Формализм* в математике, *Гёделя теоремы о неполноте*), однако при попытке ее осуществления были в значительной степени разработаны проблемы логики. В частности, Д. Гильберт выделил исчисление предикатов как систему, не зависящую

от теории типов. Дальнейшее развитие Л. м. было связано в основном с запросами математики. Большие заслуги здесь принадлежат австр. математику К. Гёделю (р. 1906), амер. математику А. Чёрчу (р. 1903), сов. математику А. И. Мальцеву (1909—68), амер. математику А. Тарскому (р. 1902) и др.

Основу современной Л. м. составляют — исчисление высказываний и исчисление предикатов. Первое оперирует высказываниями (утверждениями), выступающими как единое целое, не рассматривая их субъектно-предикатной структуры. Сложные высказывания получаются из более простых при помощи логич. связок. В исчислении высказываний употребляются не конкретные высказывания, а высказывательные переменные, поэтому здесь изучаются не конкретные высказывания, а высказывательные ф-ции, которые превращаются в высказывания, если все входящие в них высказывательные переменные заменить высказываниями. Истинность или ложность полученного сложного высказывания зависит только от истинности или ложности составляющих высказываний и не зависит от их содержания. Изучение этого исчисления как алгебр. системы составляет предмет алгебры логики.

Все понятия и теоремы исчисления высказываний употребляются в более широкой логич. теории, называемой исчислением предикатов, в котором, в отличие от исчисления высказываний, рассматривают внутр. структуру простых высказываний, из которых потом составляют сложные высказывания. А именно: в высказывании выделяют подлежащее и сказуемое (предикат). Если в данном предложении удалить подлежащее и на его место подставить другое подлежащее, — получим другое высказывание. Т. о., сказуемое (предикат) представляет собой высказывательную форму, определенную на множестве объектов, которые могут выступать в качестве подлежащих. Язык исчисления предикатов намного выразительнее, чем язык исчисления высказываний, с его помощью удастся выразить значительные фрагменты математики (см. *Элементарные теории*). Область применений Л. м. расширяется. Л. м., кроме изучения построения правильных рассуждений в обычном языке, занимается анализом осн. понятий в науке (в частности, в математике). Для этого она привлекает понятия *множеств теории* или арифметики. Таким образом, Л. м. нашла широкое применение в методологии науки. Новой и очень перспективной областью применения Л. м. является *кибернетика*. Кибернетика не только использует результаты, полученные ранее в Л. м., но и стимулирует новые исследования и появление новых науч. направлений. Напр., связь между релейно-контактными схемами и формулами алгебры логики стимулировала развитие алгебры логики. Вопросы полноты ф-ций алгебры логики, их декомпозиции и минимизации разработаны благодаря поиску методов синтеза оптим. схем.

Л. м. широко применяли также в *автоматов теории*, в частности, для описания функционирования автоматов, для задания условий функционирования автоматов, для изучения их вычисл. способности (см. *Меры сложности* в теории автоматов). Перспективным направлением кибернетики является исследование возможностей применения машин для доказательства теорем (см. *Автоматизированный поиск доказательств теорем, Доказательство теорем на ЭВМ*). Развитие таких направлений, как теория предсказаний, автоматизация диагностики и др. требует разработки соответствующих логич. систем в рамках *логик неклассических*. Важные работы проводятся по логич. исследованию естественных и искусственных языков (см. *Лингвистика математическая, Языки программирования*).

Лит.: «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51; Глушков В. М. Введение в кибернетику. К., 1964 [библиогр. с. 319—322]; Менделёв Э. Введение в математическую логику. Пер. с англ. М., 1971 [библиогр. с. 296—309]; Клипп С. К. Математическая логика. Пер. с англ. М., 1973 [библиогр. с. 451—465].

В. М. Глушков, М. И. Кратко.

**ЛОГИКА МИНИМАЛЬНАЯ** — то же, что и *исчисление высказываний минимальное*.

**ЛОГИКА МНОГОЗНАЧНАЯ** — область математики, изучающая свойства функций, принимающих в качестве значений, как и их аргументы, элементы из заданного множества, семейств и алгебр таких функций, в которых в качестве операций выступают операции суперпозиции и некоторые их аналоги. Иногда предмет Л. м. расширяют, включая в нее различные логич. исчисления. Ниже термин Л. м. будет пониматься без такого включения. Л. м. занимает промежуточное положение между *логикой математической*, алгеброй и теор. кибернетикой. Первоначально Л. м. использовали при изучении логич. исчислений (*исчисления высказываний и предикатов*), в которых высказываниям приписывались любое конечное (больше, чем 1) и иногда бесконечное мн-во значений истинности. Это позволяло, помимо общих, рассматривать и спец. задачи матем. логики, связанные с оценкой меры истинности модальных высказываний, а также высказываний, в которых не указано время и место события, и т. п. Исторически первыми системами Л. м. явились двузначное исчисление Дж. Буля (середина 19 в.), позднее оформленное усилиями англ. логика Б. Рассела (1872—1971), нем. логика Д. Гильберта (1862—1943), амер. математика Э. Поста (1897—1954) и др. в двузначную логику (см. *Алгебра логики*); трехзначная логика Лукасевича (1920) и *k*-значная логика Поста (1921). Одновременно Э. Пост предложил рассматривать Л. м. как алгебры и установил целый ряд существенных свойств этих алгебр. С тех пор Л. м. стала важным объектом алгебры. Позже (30—40-е гг. 20 ст.) в процессе развития *кибернетики* выяснилось большое прикладное значение Л. м. Было установлено, что язык Л. м. удобен при описании функционирования сложных электр. схем, и это дало новый толчок к ее развитию. Пограничное по-

ложение Л. м. сыграло большую роль в ее формировании и развитии, поскольку обеспечило постановку новых задач и потребовало разработки новых методов для их решения.

В основе построения Л. м. лежит следующая концепция, обобщающая построение алгебры логики. Исходят из некоторых высказываний, истинность значений которых градуирована и образует некоторое мн-во  $E$ . Отвлекаясь от смысла этих высказываний, интересуются прежде всего их значениями с точки зрения истинности, что позволяет все исходные высказывания разбить на группы, соответствующие одному и тому же значению истинности. Эти значения, а также переменные из алфавита  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ , принимающие в качестве значений указанные величины, объявляются элементарными высказываниями (константами и переменными соответственно). По аналогии с логикой суждений, вводятся некоторые отношения над элементарными высказываниями, точнее, функции, которые, как и их аргументы, принимают в качестве значений константы и которые соответствуют различным логическим связкам над высказываниями. Эти функции, образующие мн-во  $M$ , наз. элементарными. Мн-во  $M$  является подмножеством мн-ва  $P_E$  всех т. н. ф-ций  $|E|$ -значной логики, т. е. функций, зависящих от переменных из алфавита  $X$  и принимающих значения из  $E$  (здесь через  $|E|$  обозначена мощность  $E$ ). Затем вводят понятие формулы, которое соответствует содержательному представлению сложного высказывания, построенного из исходных высказываний. Ф-лы строят из обозначений (элементарных ф-л) вида  $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$  — элементарных ф-ций из  $M$  по правилам подстановки ф-ций друг в друга вместо некоторых переменных и путем подстановки переменных из  $X$  вместо переменных рассматриваемых ф-ций (операции суперпозиции). В результате получается мн-во  $\langle M \rangle$  всех ф-л над  $M$ . Содержательно сложные высказывания при фиксации в них значений истинности исходных высказываний также принимают значения истинности из  $E$ . Эти значения определяются структурой сложного высказывания и логическими связками, входящими в него. Тем самым каждое сложное высказывание определяет некоторую ф-цию  $|E|$ -значной логики (производную связку). Формально каждой ф-ле приписывается ф-ция из  $P_E$  (суперпозиция над  $M$ ), которая является ф-цией, естественно определяемой этой ф-лой. Говорят также, что ф-ла реализует приписанную ей ф-цию. Все суперпозиции над  $M$  образуют мн-во  $[M] \subseteq P_E$ , которое наз. замыканием мн-ва  $M$ . С содержательной точки зрения построение Л. м. завершается указанием мн-в логических связок, сложных высказываний и производных связок. По аналогии с этим и формальное задание Л. м. (точнее:  $|E|$ -значной логики) будет эквивалентно заданию мн-в  $M$ ,  $\langle M \rangle$  и  $[M]$  (говорят также, что Л. м. порождается мн-вом  $M$ ). Эту модель, играющую

важную роль в матем. логике и теор. кибернетике, наз. формульной. Своеобразие подхода теор. кибернетики к Л. м. состоит в рассмотрении Л. м. в качестве управляющей системы. Элементарные ф-лы при этом играют роль элементов, производящих определенные операции, а ф-лы интерпретируются как схемы, построенные из элементов и также осуществляющие переработку входной информации в выходную. Такого рода управляющие системы, известные в кибернетике как схемы из функциональных элементов, играют фундаментальную роль в теоретических и практических вопросах кибернетики.

Существует целый ряд общих проблем Л. м. которые интересны с позиций матем. логики, алгебры и с позиций кибернетики. К их числу относятся, например, вопрос о включении  $M_2 \subseteq [M_1]$  при заданных  $M_1$ ,  $M_2 \subseteq P_E$  (задача о выразимости) и об указании мн-ва всех ф-л из  $\langle M_1 \rangle$ , реализующих ф-ции из  $M_2$  при  $M_2 \subseteq [M_1]$  (задача об описании). Частным случаем задачи об описании является важный вопрос матем. логики об указании всех ф-л, реализующих заданную константу, что, например, эквивалентно для исчисления высказываний построению всех тождественно истинных или соответственно тождественно ложных высказываний. Пограничным вопросом между матем. логикой и алгеброй, примыкающим к задаче об описании, является задача о тождественных преобразованиях. В ней при заданном мн-ве  $M$  требуется выделить в некотором смысле простейшее подмножество пар равных (т. е. реализующих одну и ту же ф-цию) ф-л из  $\langle M \rangle$ , позволяющее путем подстановки выделенных равных ф-л друг вместо друга получить из любой ф-лы все ф-лы, равные ей. Аналогичное место занимает один из важнейших вопросов Л. м. — т. н. проблема полноты, состоящая в указании всех подмножеств  $M_1$  заданного замкнутого, т. е. совпадающего со своим замыканием, мн-ва  $M_2$ , таких, что  $[M_1] = M_2$ . К ней примыкает задача о базисах, состоящая в указании всех полных в  $M_2$  подмножеств  $M_1$ , никакое собственное подмножество которых уже не является полным. Глобальной задачей для Л. м. является задача о строении структуры замкнутых мн-в в данной Л. м. и выяснении ее различных свойств. Характерный для теории управляющих систем вопрос о сложности этих систем, естественно, можно поставить и по отношению к ф-лам и ф-циям из Л. м. При таком подходе типичной является следующая задача о сложности реализации. На мн-ве всех элементарных ф-л некоторым способом вводят числовую меру (сложность формул), которая затем распространяется на мн-во всех ф-л, напр., путем суммирования мер всех тех элементарных ф-л, которые участвуют в построении заданной ф-лы. Требуется для заданной ф-ции указать ту ф-лу (простейшая ф-ла), которая реализует эту ф-цию и имеет наименьшую сложность, а также выяснить, как эта сложность зависит от некоторых свойств рассматриваемой ф-ции. Исследуют различные

обобщения этой задачи. Широкий круг вопросов, связанный с реализацией ф-ций ф-лами с наперед заданными свойствами, в известном смысле примыкает к уже рассмотренному вопросу о сложности реализации. Здесь в первую очередь следует назвать задачу о реализации ф-ций алгебры логики *дизъюнктивными нормальными формами* и связанную с этим т. н. задачу минимизации, а также обобщение этой задачи на ф-ции  $k$ -значной логики при  $k > 2$ . Сюда же относятся задачи о реализации ф-ций ф-лами в некотором смысле ограниченной глубины, когда цепочка подставляемых друг в друга выделенных элементарных ф-л не может превосходить некоторой константы, что при соответствующей интерпретации может быть связано с надежностью или скоростью вычисления ф-ции ф-лами; задачи о декомпозиции, т. е. о реализации ф-ций от  $n$  переменных при помощи ф-л, построенных из элементарных ф-л, реализующих ф-ции, зависящие менее чем от  $n$  переменных, и ряд других.

При рассмотрении ряда задач и в том числе о выразимости, о полноте, об описании структуры замкнутых классов и других, где на первый план выдвигаются соответствия типа мн-во  $M$  и его замыкание  $[M]$  и затухивается иная роль ф-л над  $M$ , кроме их способности порождать новые ф-ции, часто переходят к другой модели Л. м. (термальной), в которой мн-во  $\langle M \rangle$  заменяется мн-вом термов, представляющих собой те же ф-лы, но построенные не из имен индивидуальных ф-ций, а из обобщенных (переменных) имен ф-ций с фиксированной для данного переменного имени арностью. Эти термы фактически играют роль частичных операторов над мн-вом  $M$ . Следующий шаг на этом пути, в некотором смысле упрощающий только что введенную термальную модель, приводит к рассмотрению Л. м. как алгебры. Наиболее употребительной является алгебра, введенная сов. математиком А. И. Мальцевым (1909—67), которая строится следующим образом. Сначала уточняют строение мн-ва  $P_E$  предположением о том, что каждая ф-ция  $f$  с учетом фиктивных переменных зависит от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , где  $n$  зависит от  $f$ . Затем определяются пять операций  $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, *$ . Первые четыре из них являются унарными и фактически действуют на мн-ве индексов переменных ф-ций  $f(x_1, \dots, x_n)$  следующим образом:

$$(\zeta f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1),$$

$$(\tau f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n),$$

$$(\Delta f)(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

$$(\nabla f)(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = f(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}).$$

При этом для одноместной ф-ции  $f$  полагается  $\zeta f = \tau f = \Delta f = f$ . Операция  $*$  бинарная, действует одновременно на индексы переменных

рассматриваемой пары ф-ций  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $g(x_1, \dots, x_m)$  и на саму пару, ставя ей в соответствие ф-цию

$$(f * g)(x_1, x_2, \dots, x_{n+m-1}) = f(g(x_1, x_2, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{n+m-1}).$$

Таким образом приходят к алгебре  $M_E = \langle M; \zeta, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle$ , которую часто и считают основной моделью  $|E|$ -значной логики (операторная модель) и называют алгеброй  $|E|$ -значной логики. Помимо перечисленных задач для этой модели характерна задача о представлении, заключающаяся в описании всех подалгебр  $|E_1|$ -значной логики, изоморфных алгебре  $|E_2|$ -значной логики. Построенные из операторов алгебры  $M_E$  после указания ф-ций, к которым они применяются, фактически легко можно интерпретировать как ф-лы в формульной модели Л. м. и тем самым изучение формульной модели Л. м., а также рассмотрение всех упомянутых выше задач можно проводить на алгебре  $M_E$ . Следует отметить, что все общие задачи для Л. м. приобретают особый смысл и значимость после соответствующего уточнения их постановок и рассматриваемых моделей Л. м. и что в общем случае они, естественно, мало обозримы.

К числу наиболее важных примеров Л. м. можно отнести алгебры  $\mathcal{P}_E = \langle P_E; \zeta, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle$  при  $|E| = k$ ,  $2 \leq k < \aleph_0$ , и при  $|E| = \aleph_0$ , среди которых наиболее детально исследован случай  $k = 2$ . Важнейшим результатом здесь является полное описание Э. Постом структуры всех подалгебр. Мн-во всех подалгебр оказалось счетным, каждая подалгебра строится эффективно и эффективно же указывается включение их друг в друга. Э. Пост показал также, что во всякой подалгебре имеется конечный базис и число ф-ций в нем не превосходит четырех. Из этих результатов легко можно извлечь также решения упомянутых задач о выразимости, о полноте и о базисах. На основе результатов Э. Поста амер. логик Р. Линдон решил задачу о тождественных преобразованиях. В задаче о сложности реализации относительно полных конечных систем советский математик О. Б. Лупанов (р. 1932) для почти всех ф-ций указал поведение меры сложности «простейших» ф-л, реализующих эти ф-ции, и построил соответствующий алгоритм синтеза ф-л. Значительно продвинуто решение задач о построении оптимальных по сложности ф-л, реализующих ф-ции надежно или достаточно хорошо по быстродействию. Вместе с тем следует отметить, что в указанном направлении по отношению к семействам ф-ций, составляющим малую долю от всех ф-ций, а также по отношению к индивидуальным функциям общая теория пока еще далека от своего завершения. Продвинуто вперед решение и других из упомянутых выше задач. Следует подчеркнуть особенность случая  $k = 2$ , с которой связано пристальное внимание

к этой задаче со стороны исследователей. Эта особенность состоит в удачном сочетании простоты рассматриваемой алгебры с возможностью моделировать с ее помощью различные объекты, в том числе путем подходящего кодирования ф-ций и алгебр  $k$ -значных логик при  $k > 2$ . Правда, получающиеся при этом алгебры, являющиеся декартовыми степенями подалгебр алгебры  $\mathcal{P}_E$ ,  $k = 2$  естественно, уже не будут обладать столь прозрачным набором операций, как в алгебрах  $k$ -значных логик.

Менее глубоко исследованы алгебры конечных логик (при  $3 \leq k < \aleph_0$ ). Задача о выразимости до конца решена лишь для конечных систем  $M_1$  и  $M_2$ , при этом указан алгоритм ее решения. Наиболее глубоко разработаны вопросы, связанные с задачами о полноте, о представлениях и о базисах. Здесь для  $\mathcal{P}_E$  следует назвать в первую очередь эффективное описание всех максим. подалгебр, континуальность мн-ва подалгебр и существование подалгебр, имеющих базис любой конечной и счетной мощностей, а также вовсе не имеющих базисов, что указывает на существенное отличие случаев, когда  $k = 2$  и  $k > 2$ ; асимптотические оценки числа максим. подалгебр и числа т. н. простых базисов в  $\mathcal{P}_E$ , т. е. таких, которые теряют свойство полноты после отождествления любой пары переменных у любой из ф-ций этого базиса, а также решение А. И. Мальцевым задачи о представлениях для алгебр  $\mathcal{P}_{E_1}$  и  $\mathcal{P}_{E_2}$ . В области оценок сложностей формул некоторые принципиальные теоремы, например, о порядке сложности простейших формул для почти всех функций можно распространить со случая  $k = 2$  и на случай произвольного натурального  $k$ , однако такой же глубокой теории, как в случае  $k = 2$ , здесь не получено. Имеются некоторые результаты и в задаче о минимизации.

Менее исследована алгебра  $\aleph_0$ -значной логики. Здесь можно выделить для  $\mathcal{P}_E$  установление гиперконтинуальности мн-ва максимальных подалгебр и получение некоторых критериев полноты в предположении, что рассматриваемые системы обладают рядом наперед заданных свойств, например, содержат все одноместные ф-ции и т. п.

Замечное место в проблематике Л. м. занимают вопросы исследования спец. замкнутых классов ф-ций Л. м., которые представляют интерес прежде всего в связи с вопросами интерпретации различных логич. исчислений. Здесь следует назвать уже упомянутые трехзначную логику Лукасевича, которую порождают ф-ции  $1 - x$ ,  $\min(1, 1 - x_1 + x_2)$ , где  $x_1, x_2$  принимают в качестве значений  $0, 1/2, 1$ ,  $k$ -значную логику Поста, которую порождают ф-ции  $x_1 + 1 \pmod k$  и  $\max(x_1, x_2)$ , где  $x_1, x_2$  принимают значения  $0, 1, \dots, k - 1$ , а также Л. м., соответствующие матрицам Ст. Яськовского, Л. м. М. Мак-Нотона и др. Эти исследования представляют интерес как с точки зрения накопления фактов для построения общей теории Л. м., так и с целью установления по-

средством их некоторых новых свойств интерпретируемых логических исчислений.

Как отмечалось, к Л. м. можно отнести также и такие алгебры функций  $|E|$ -значных логик, в которых запас операций несколько отличается от описанного выше. Как правило, это достигается или на пути сужения указанного запаса или путем введения в число операций некоторых функций рассматриваемой алгебры. Существуют и другие содержательные задачи, приводящие к нестандартным моделям Л. м. Как правило, эти задачи связаны с выделением спец. допустимых классов формул из  $\langle M \rangle$ , указание которых приводит к некоторым частичным алгебрам многозначных логик.

Лит.: Яблонский С. В. Функциональные построения в  $k$ -значной логике. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51; Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики. «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8; Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования. «Проблемы кибернетики», 1965, в. 14; Гаврилов Г. П. О функциональной полноте в счетнозначной логике. «Проблемы кибернетики», 1965, в. 15; Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М., 1966 [библиогр. с. 113—115]; Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразия Поста. «Алгебра и логика», 1966, т. 5, в. 2; Rosenberrg I. Über die funktionale vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken. «Rozprawy Československé Akademie věd», 1970, г. 80, N. 4.

**ЛОГИКА ПОРОГОВАЯ** — раздел *структурной теории автоматов*, в котором рассматриваются вопросы анализа и синтеза логических схем из пороговых элементов. Пороговый элемент определяется: ф-цией преобразования входов  $f(X)$ , областью определения которой является булево  $n$ -мерное пространство, а областью значений — мн-во действительных чисел  $N$ ; упорядоченной последовательностью действительных чисел  $T_1 > T_2 > \dots > T_k$  называемых порогами; начальной константой  $s \in \{0, 1\}$ . Закон функционирования порогового элемента описывается *булевой функцией*  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , принимающей значение  $s$  для всех наборов  $\alpha$ , при которых  $T_i < f(\alpha) \leq T_{i+1}$ , где  $i \equiv 0 \pmod 2$  или  $i + 1 \equiv 1 \pmod 2$ , и значение  $s$  для всех остальных наборов. Различают одно-, дву- и  $k$ -пороговые элементы. Вид функционала преобразования входов, а также вид остальных параметров привел к различным моделям пороговых элементов, из которых наиболее характерными являются линейные однопороговые элементы (ЛПЭ) с функционалом преобразования видов  $f(X) =$

$$= \sum_{i=1}^n w_i x_i \text{ и с начальной константой } s = 0.$$

В данном функционале константы  $w_i$  принадлежат мн-ву действительных чисел и наз. *веса мн-ва порогового элемента*. ЛПЭ можно охарактеризовать вектором  $(w_1, w_2, \dots, w_n, T)$ , называемым *структурой ЛПЭ*. Булева ф-ция  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , для которой имеется структура ЛПЭ, реализующего  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , наз. *пороговой*. Факт реали-



зации пороговой ф-ции  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ЛПЭ  $(w_1, w_2, \dots, w_n, T)$  фиксируется таким образом:  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim (w_1, w_2, \dots, w_n, T)$ . Не все булевы ф-ции являются пороговыми. Пороговые ф-ции однородны и полностью монотонны. Монотонную пороговую ф-цию  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , реализуемую на ЛПЭ  $(w_1, w_2, \dots, w_n, T)$  с целыми положительными весами и порогом, можно получить из монотонной симметрической ф-ции  $C_T(x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,w_1}, \dots, x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,w_n})$  путем объединения переменных, имеющих одинаковый 1-й индекс.

Важнейшими задачами Л. п. являются задачи анализа и синтеза логических схем из пороговых элементов. Задача анализа логич. схем из пороговых элементов сводится к определению булевой ф-ции по структуре ЛПЭ или по структуре сети, которая ее реализует. Задача нахождения пороговой ф-ции по структуре ЛПЭ наз. задачей анализа порогового элемента.

Задача синтеза логич. схем из пороговых элементов имеет следующие осн. постановки: 1) определение в соответствии с избранным критерием оптимальной структуры ЛПЭ для реализации заданной пороговой ф-ции; 2) построение *сети логической* из пороговых элементов, реализующей произвольную булеву ф-цию при отсутствии ограничений, накладываемых на параметры пороговых элементов сети; 3) построение логич. сети из пороговых элементов, реализующей произвольную булеву ф-цию при наличии ограничений, накладываемых на параметры пороговых элементов сети.

Наиболее разработана задача в 1-ой постановке. Она сводится к решению следующей системы неравенств:

$$\sum_{i=1}^n w_i \alpha_{ij} > T \text{ при } \varphi(\tilde{\alpha}_j) = 1;$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \alpha_{ij} \leq T \text{ при } \varphi(\tilde{\alpha}_j) = 0,$$

где  $\alpha_{ij}$  — значение аргумента  $x_i$  на наборе с номером  $j$ ;  $\varphi(\tilde{\alpha}_j)$  — значение булевой ф-ции  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на наборе аргументов  $\tilde{\alpha}_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj})$ .

Наибольший практический интерес представляет задача отыскания такого решения системы неравенств, при котором линейная форма  $R = T + \sum_{i=1}^n w_i$  обращается в минимум. Особенностью 2-й постановки является наличие широкого нерегулярного базиса. Как правило, решение данной задачи получают применительно к фиксированной структуре сети, напр., к однорядной, порогово-дизъюнктивной, порогово-конъюнктивной и т. п. При 3-й постановке задачи синтеза учитываются характеристики физ. устр-в, описываемых мо-

делью порогового элемента. Некоторые ограничения на параметры пороговых элементов могут привести к классическим постановкам задачи синтеза, напр., синтезу в базисе «И», «ИЛИ», «НЕ», синтезу в мажоритарном базисе.

Ввиду того, что система пороговых элементов является функционально полной, с помощью логич. сети из пороговых элементов можно реализовать любую булеву ф-цию. Задача синтеза сети из пороговых элементов решается неоднозначно; поэтому при синтезе сети вводят определенные критерии качества: сложность сети, ее быстродействие, надежность и т. п.

Лит.: Вавилов Е. Н. [и др.]. Синтез схем на пороговых элементах. М., 1970 [библиогр. с. 363—364]; Бутаков Е. А. Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов. М., 1970 [библиогр. с. 315—326]; Дергузов М. Пороговая логика. Пер. с англ. М., 1967 [библиогр. с. 337—341].

**ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ ВЫСШИХ СТУПЕНЕЙ** — комплекс направлений в логике математической и основаниях математики, исследующий языки высших ступеней и логические исчисления высших ступеней. В основном, в такие языки, кроме индивидуальных переменных, входят предикатные переменные (одной или нескольких «ступеней» или «типов»). Их разрешается связывать *кванторами*, а также подставлять на места аргументов других предикатных переменных при выполнении определенных условий, налагаемых на типы переменных. Такие языки и связанные с ними *исчисления* возникли в связи с теоретико-типовым подходом к основаниям математики, предпринятым англ. учеными Б. Расселом (1872—1971), А. Уайтхедом (1861—1947) с целью построения основ математики, свободных от теоретико-множественных и логических парадоксов.

С появлением работ польск. (ныне амер.) логика А. Тарского (р. 1902), заложивших основы современной логической *семантики*, начинается развитие семантического, или теоретико-модельного, направления в Л. п. в. с. Ныне это направление доминирует настолько, что чаще всего именно его называют Л. п. в. с. Его важность и необходимость состоит, в частности, в том, что языки 1-ой ступени недостаточны для выражения важнейших матем. концепций. К тому же введение в рассмотрение нестандартных интерпретаций для теорий высших ступеней позволяет применять для их изучения развитый аппарат *моделей теории*, а также дает возможность находить для этих теорий новые интересные истолкования. Отправные понятия Л. п. в. с. определяются следующим образом. Пусть  $\mathcal{T}$  — наименьшее из мн-в слов в алфавите  $\{0, (\cdot)\}$ , содержащих 0, и вместе с любыми словами  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  слово  $(\tau_1 \dots \tau_n)$ . Элементы  $\mathcal{T}$  наз. *типами*. Примеры типов: 0, (0), (00), ((0)), ((00 (0))). Понятие ступени типа  $\tau$  (обозначение —  $St \tau$ ) определяется так:  $St 0 = 0$ ,  $St (\tau_1 \dots \tau_n) = 1 + \max \{St \tau_1, \dots, St \tau_n\}$ . Напр.,  $St (0) = 1 + \max St 0 = 1$ ,  $St (00) = 1$ ,  $St ((00)0) = 1 + \max \{St (00), St 0\} = 2$ . Пусть  $A$  — ка-



кое-нибудь мн-во, а  $(A^\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$  — семейство мн-в, такое, что  $A^0 = A$ ,  $A^{\tau_1 \dots \tau_n}$  — мн-во всех подмножеств декартова произведения  $A^{\tau_1} \times \dots \times A^{\tau_n}$ . Элементы мн-ва  $A^\tau$  ( $\tau \in \mathcal{T}$ ) наз. *отношениями* типа  $\tau$  на  $A$ . (Всякое, напр., двухместное отношение  $R$  — отношение в обычном матем. смысле — между элементами мн-ва  $A$  взаимноопределимо с мн-вом  $a_R^{(00)} \in A^{(00)}$  таким, что  $\langle a_1 a_2 \rangle \in a_R^{(00)}$  равносильно  $a_1 R a_2$ ). Отсюда ясно, что сформулированное выше определение понятия «отношение» уточняет обычный матем. смысл термина «отношение». Отношения типа 0 на  $A$  — это элементы  $A$ ; отношения типа (00) — двухместные отношения на  $A$ ; отношения типа ((0)) — наборы подмножеств  $A$ , и т. п.

Формальный язык  $L^\omega$  содержит символы логич. операторов (логич. связки и кванторы), равенство и для каждого типа  $\tau$  — последовательность  $x_0^\tau, x_1^\tau, \dots$  переменных типа  $\tau$ . Выражения видов  $x_i^\tau = x_j^\tau$  и  $x_i^{\tau_1 \dots \tau_n} x_1^{\tau_1} \dots x_n^{\tau_n}$  наз. атомарными ф-лами. Исходя из понятия атомарной ф-лы, определяют (обычным образом) понятия ф-лы и предложения. Ступенью ф-лы наз. наивысшая из ступеней входящих в нее переменных, увеличенная на единицу. Через  $L^n$  обозначается фрагмент языка  $L^\omega$ , располагающий переменными лишь таких типов  $\tau$ , что  $\text{St } \tau < n$ . Этот фрагмент наз. языком  $n$ -ой ступени.

Пусть  $(A_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$  — такое семейство мн-в, что  $A_\tau \subset A^\tau$  для всякого типа  $\tau$  и  $A_0 = A$ . Понятие выполнимости формулы на  $(A_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$  определяется по Тарскому, переменные типа  $\tau$  интерпретируются как элементы  $A_\tau$ . Формула наз. истинной на  $(A_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$ , если она выполняется на  $(A_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$  при всех значениях свободных переменных (принадлежащих соответствующим мн-вам  $A_\tau$ ). По аналогии с исчислениями предикатов 1-ой ступени строятся исчисления предикатов высших ступеней. Семейство  $(A_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$  наз. *правильным* для данного исчисления, если на нем истинны все аксиомы этого исчисления, а каждое правило вывода сохраняет на нем истинность. Амер. логик Л. Генкин доказал, что всякая ф-ла исчисления предикатов высших ступеней, истинная на всех правильных (для этого исчисления) семействах, доказуема в этом исчислении.

Среди различных видов интерпретаций языков высших ступеней особый интерес представляют интерпретации, стандартные в следующем смысле. Говорят, что данная ф-ла стандартно выполняется на мн-ве  $A$ , если она выполняется на семействе  $(A^\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$ , где  $A^0 = A$ . Формула стандартно истинна на  $A$ , если она истинна на  $(A^\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$ . Формула наз. стандартно выполнимой (общезначимой), если она стандартно выполнима (истинна) на некотором

(исяком) непустом мн-ве (см. *Тождественно истинная формула*). Изучение вопросов, связанных со стандартными интерпретациями, предполагает достаточно содержательную теоретико-множественную базу. Является ли какая-либо ф-ла стандартно общезначимой, вообще зависит от положенной в основу *множеств теории*. Напр., свойство мн-ва быть вполне упорядочиваемым выразимо формулой 2-ой ступени. Является ли эта ф-ла стандартно общезначимой, зависит от того, имеет ли место в этой теории множеств аксиома выбора. Формулы  $\alpha$  и  $\beta$  наз. стандартно эквивалентными, если  $\alpha \leftrightarrow \beta$  есть стандартно общезначимая формула. Говорят, что ф-ла  $\beta$  логически, или стандартно, следует из  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , если ф-ла  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$  стандартно общезначима. Для исчисления предикатов 1-ой ступени понятия логич. и дедуктивного следования совпадают в силу полноты этого исчисления. Из *Гёделевых теорем о неполноте* следует, что для исчислений высших ступеней понятие дедуктивного следования — более сильное: множество гёделевых номеров всевозможных кортежей  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \rangle$  ф-л этого исчисления таких, что  $\beta$  логически следует из  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , не только не является рекурсивно перечислимым, но не появляется ни в каком разумном расширении иерархии Клини — Мостовского (так что, в частности, исчисления предикатов высших ступеней не полны относительно общезначимости при стандартных интерпретациях, т. е. для стандартных интерпретаций упомянутая выше теорема Генкина не имеет места). Поэтому в исследованиях, относящихся к стандартным интерпретациям, приходится использовать преимущественно теоретико-множественные средства. Излагаемые ниже результаты относятся к стандартным интерпретациям и доказуемы в рамках теории мн-в Цермело — Френкеля. Для всякой ф-лы можно эффективно построить стандартно эквивалентную ей регулярную ф-лу той же ступени, т. е. такую ф-лу в предваренной форме, в которой нет квантора по переменной большей ступени, следующего за квантором по переменной меньшей ступени. Класс регулярных ф-л будет обозначаться через  $L$ . Ф-ла из  $L$  наз. монадической, если типы связанных переменных в ней принадлежат мн-ву  $\{0, (0), ((0)), \dots\}$ . Для монадических предложений 2-ой ступени проблемы выполнимости, общезначимости и проблема спектра (состоящая в отыскании характеристики классов мощностей всех мн-в, на которых предложения истинны) решаются эффективно. Положение меняется для ф-л высших ступеней: для всякой ф-лы  $n$ -ой ступени  $\sigma$  можно эффективно построить стандартно эквивалентную ей монадическую формулу  $(n + 1)$ -ой ступени; если  $n \geq 3$ , то можно эффективно построить стандартно эквивалентную  $\sigma$  на бесконечных мн-вах монадическую ф-лу  $n$ -ой ступени. Следовательно, применительно к бесконечным мн-вам выразительные возможности языка  $n$ -ой ступени ( $n \geq 3$ ) те же, что и для его монадического фрагмента.

Особое место класса  $L^2$  ф-л 2-ой ступени является следующей теоремой:  $L^2$  является классом сведений по выполнимости для  $L^0$ , т. е. существует эффективная процедура, переводящая всякую ф-лу в ф-лу из  $L^2$ , одновременно с нею выполнимую или невыполнимую.

Пусть  $\kappa_n$  — наименьший из таких кардиналов  $\kappa$ , что всякая выполнимая формула из  $L^n$  выполняется на мн-ве мощности, не большей  $\kappa$ . В силу теоремы Лёвенгейма—Сколема  $\kappa_1 = \aleph_0$ . Для  $n > 1$  кардиналы  $\kappa_n$  равны  $\kappa_2$  и «необозримо» велики: они больше многих недостижимых и даже измеримых кардиналов (если таковые имеются). Это указывает, что уже проблемы семантики языка 2-ой ступени вызывают необходимость рассмотрения очень больших кардиналов.

Моделью формулы  $\sigma$  наз. всякая пара  $\mathfrak{A} = \langle A, F \rangle$ , где  $A$  — непустое мн-во, а  $F$  — ф-ция, определенная на переменных  $x_n^T$ , свободно входящих в  $\sigma$ , такая, что 1)  $F(x_n^T) \in A^T$ , 2)  $\sigma$  выполняется при интерпретации каждой свободной переменной  $x_n^T$  как  $F(x_n^T)$ , а связанных переменных  $x_n^T$  — как всевозможных элементов  $A^T$ . Из приведенных результатов следует, что изучать общие свойства классов моделей для ф-л 2-ой ступени (и даже, как можно показать, для ф-л вида  $\forall x^{(0)} (\alpha)$ , где  $\alpha$  не содержит связанных предикатных, т. е. неиндивидных, переменных), так же трудно, как изучать свойства классов моделей для ф-л сколь угодно высоких ступеней. Отсюда ясна безнадежность поисков на традиционных путях сильных и общих теорем, относящихся к языку  $L^2$  и подобных известным теоретико-модельным теоремам. В связи с этим приобретает интерес изучение семантики языков, промежуточных между языками 1-ой и 2-ой ступеней, и некоторых их модификаций, в частности, языков 2-ой ступени с одноместными предикатными переменными, интерпретируемыми как конечные подмножества индивидов, языков, содержащих переменные, интерпретируемые как конечные последовательности индивидов, и языков, содержащих лишь индивидные переменные, но допускающих счетные конъюнкции и дизъюнкции. Один из таких промежуточных языков применяют в автоматической теории (см. *Язык логический для задания автоматов*).

Стандартно выполнимая ф-ла  $\alpha$  из  $L^n$  наз.  $L^n$ -полной, если для всякой ф-лы  $\beta$  из  $L^n$  общезначимо  $\alpha \rightarrow \beta$  или  $\alpha \rightarrow \neg\beta$ .  $\alpha$  наз.  $L^n$ -пополнением ф-лы  $\beta$  из  $L^n$ , если из  $\alpha$  логически следует  $\beta$ , а  $\alpha$  —  $L^n$ -полна. Стандартно выполнимая ф-ла наз. категоричной, если все ее модели (интерпретации) изоморфны. В предположении гёделевской аксиомы конструктивности для всякой стандартно выполнимой ф-лы из  $L^n$  ( $n > 1$ ) существует ее  $L^n$ -пополнение, являющееся категоричной ф-лой (и, значит, для всякой ф-лы из  $L^n$  ее  $L^n$ -полнота равно-

сильна категоричности). Эта теорема в некотором смысле двойственна гёделевской теореме неполноты, устанавливающей, в частности, что существует выполнимая ф-ла 1-ой ступени, не имеющая  $L^1$ -пополнения. Вместе с тем, природа этих теорем одна и та же: достаточно богатые выразительные возможности языков  $L^n$  (еще более усиливаемые аксиомой конструктивности), влекущие (в силу теоремы Тарского) неопределимость понятия истины для этих языков средствами самих этих языков. Вскрывая ограниченность (в этом «метасмысле») выразительных возможностей таких языков, теорема Тарского вскрывает и ограниченность дедуктивных возможностей связанных с ними исчислений, проявляющуюся как существование дедуктивно неполных формул.

*Лит.:* Бочвар Д. А. Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления. «Математический сборник. Новая серия», 1938, т. 4, в. 2; Бочвар Д. А. К вопросу о парадоксах математической логики и теории множеств. «Математический сборник. Новая серия», 1944, т. 15, в. 3; Зыков А. А. Проблемы спектра в расширенном исчислении предикатов. «Известия АН СССР. Серия математическая», 1953, т. 17, № 1; Когаловский С. Р. К семантике теории типов. «Известия высших учебных заведений. Математика», 1966, № 1; Tarski A. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. «Studia Philosophica», 1936, v. 1; Robinson A. Non-standard analysis. «Proceedings of the Royal Academy of Sciences», 1961, ser. A, v. 64; Аддисон Дж. Теория иерархий. В кн.: Математическая логика и ее применения. Пер. с англ. М., 1965; Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y. Foundations of set theory. Amsterdam, 1958.

С. Р. Когаловский.

**ЛОГИКИ НЕКЛАССИЧЕСКИЕ** — логические системы, в основе которых лежит иное, чем в классической логике, истолкование традиционных логических операций *отрицания*, *конъюнкции*, *дизъюнкции*, импликации и кванторов. В некоторых Л. н. к числу исходных традиционных логических связей добавляются такие, как «необходимо», «возможно», «разрешено», «будет» и др.

Л. н., одно из направлений современной логики *математической*, начали развиваться в начале 20 в. Появление одной из первых систем Л. н. — интуиционистской, связано с критикой одного из осн. законов классической логики — *исключенного третьего закона*: из любых двух противоречащих друг другу суждений одно — истинно. В матем. логике этот закон формулируется так: для каждого предложения  $A$  либо  $A$  либо не  $A$ . С критикой этого закона выступил в 1908 голл. математик Л. Брауэр. В своей критике он исходил из осн. принципа *интуиционизма*: существование в математике — это то же самое, что конструктивность (т. е. возможность построения). В соответствии с этим принципом, напр., предложение: «существует  $x$ , обладающий свойством  $P$ », следует понимать как возможность указать конкретный  $x$ , обладающий свойством  $P$ . Теперь предположим, что высказывание  $A$  — предложение: некоторый элемент мн-ва обладает свойством  $P$ . Если речь идет об элементах некоторого конечного мн-ва, то в принципе возможно перебрать все эти элементы и для

каждого проверить, обладает он свойством  $P$  или нет. Если же это мн-во бесконечно, то такой перебор в принципе невозможен. Можно только надеяться, что удастся найти элемент с нужным свойством или аналитически доказать, что  $A$  неверно, напр., вывести из  $A$  противоречие. Однако общего метода, позволяющего по любому предложению  $A$  установить, верно оно или нет, не существует. Поэтому Брауэр считал необходимым отказаться от принципа исключенного третьего. Классической логике была противопоставлена интуиционистская логика, которую формализовал голл. математик А. Гейтинг в 1930.

В 1910—13 рус. логик Н. А. Васильев предложил логику, которую он назвал «воображаемой». Подобно тому, как «воображаемая» геометрия Лобачевского была результатом отказа от 5-го постулата Евклида, «воображаемая» логика основывалась на отказе от закона противоречия, сформулированного следующим образом: ни одной вещи не принадлежит предикат, противоречащий ей. В «воображаемой» логике возможны три типа суждений: суждение может быть утвердительным ( $C$  есть  $P$ ), отрицательным ( $C$  не есть  $P$ ) и акцидентальным ( $C$  есть  $P$  и есть не- $P$ ). Из истинности, напр., акцидентального суждения следует ложность утвердительного и отрицательного, из ложности утвердительного и акцидентального следует истинность отрицательного. Закон исключенного третьего заменяется, таким образом, законом «исключенного четвертого». При этом сохраняется закон «несамопротиворечия»: одно и то же суждение не может быть одновременно истинным и ложным. Логика Васильева была мало известной и не получила глубокого развития.

Широко известными являются логики *многозначные*, построенные польским логиком Я. Лукасевичем (1920) и амер. математиком Э. Постом (1921). Они являются обобщением классической логики в следующем смысле. В  $k$ -значной логике предложения могут принимать любое из  $k$  истинностных значений, подобно тому, как в классической логике предложения принимают два значения: «истинно» и «ложно». Напр., в трехзначной логике Лукасевича предложения могут быть «истинными», «ложными» и «нейтральными». В 1930 Я. Лукасевич и А. Тарский построили также бесконечнозначную логику. Значением для высказывания в этой логике может быть любое действительное число в интервале от 0 до 1. Истинностное значение рассматривается в ней, как вероятность справедливости высказывания. Высказывания, которые всегда принимают значение 1, являются тавтологиями этой логики.

С критикой т. н. «парадоксов материальной импликации», которые противоречат интуитивному пониманию логического следования, связано построение логик *импликации строгой*. Первую из таких логик разработал амер. логик К. Льюис в 1912—18. Дальнейшую формализацию строгой импликации предложил в 1956 нем. математик В. Аккерман. Ряд ра-

бот, относящихся к формализации логического следования, принадлежит сов. логик А. А. Зиновьеву.

Другой вид импликации, т. н. *коннексивная импликация*, возник при попытке построить логику, в которой справедлив «тезис Аристотеля»: никакое высказывание не может имплицироваться своим собственным отрицанием. Полную непротиворечивую логику с такой импликацией построил совр. логик С. Мак-Колл.

Рассмотрение суждений не только истинных и ложных, но также возможных, необходимых и др. привело к созданию модальной логики. В модальных логиках в качестве исходных логических связей берутся, наряду с традиционными связками, модальные операторы: необходимость, возможность и т. д. Ряд логических исчислений модальной логики построил К. Льюис. Трехзначная и четырехзначная логики Лукасевича также являются модальными логиками. Наряду с «абсолютными» модальностями рассматриваются и относительные, где суждения могут быть необходимы или возможны относительно других суждений. Близкими к модальным логикам являются деонтическая логика, у которой в число исходных связей входят операторы: «разрешено» и «запрещено», временная логика с ее исходным оператором: «будет случай, что...» и другие Л. н.

Существуют два пути построения Л. н. Один из них есть обобщение двузначности классической логики, где все предложения интерпретируются на мн-ве из двух значений. Он состоит в задании логики посредством интерпретации. При этом явно указывается, какие «истинностные» значения могут принимать высказывания и какие из этих значений являются выделенными или отмеченными (аналог значения «истинно» в классической логике). *Логические операции* задаются как ф-ции на мн-ве истинностных значений. Таковы, напр., многозначные логики Лукасевича и Поста. Другой путь построения Л. н. — аксиоматический метод. Подобно тому, как классическую логику можно задать с помощью системы аксиом и правил вывода, Л. н. можно ввести в виде исчисления, т. е. указать аксиомы и правила, позволяющие из аксиом получать все верные в рассматриваемой логике формулы. Таким способом строят интуиционистскую логику, логику строгой импликации и многие модальные логики.

При задании логики в виде *исчисления* одной из осн. проблем является проблема интерпретации, т. е. построения адекватной матрицы для исчисления или хотя бы класса матриц таких (по возможности просто устроенных), чтобы выводимость формулы в исчислении была эквивалентна ее общезначимости в этом классе матриц. При построении логики посредством интерпретации важной проблемой является проблема аксиоматизации, т. е. представления логики в виде исчисления, в котором выводимы все верные в логике формулы и только они. Эта проблема решена для большого класса многозначных логик.

Значительное число исследований в области многозначных логик относится к проблеме функциональной полноты. Она состоит в нахождении условий, при которых через связи из данного произвольного списка можно выразить все мыслимые логические связи исследуемой логики. Как правило, Л. н., которые содержат лишь традиционные логические связи, являются частью классической логики в следующем смысле. В Л. н. отвергаются некоторые постулаты классической логики, однако все формулы, верные в какой-либо из Л. н., являются тавтологиями классической логики (исключение составляет логика коннексивной импликации, в которой верными являются некоторые тождественно ложные формулы).

Модальные логики также согласованы с классической логикой. Все формулы, верные в модальной логике и содержащие только связи классической логики, являются тождественно истинными. Более того, большинство модальных, деонтических и др. логик основаны на классической логике, т. е. верно и обратное: любая тавтология классической логики является верной и в этих Л. н.

Возможна интерпретация некоторых Л. н. с помощью классической логики. Речь идет о семантике, которую предложил современный амер. математик С. Крипке, для интуиционистской и ряда модальных логик. Семантические построения Крипке замечательны тем, что они позволяют объяснить истинность в той или иной Л. н. через классическую истинность в некоторой системе связанных между собой «воображаемых» миров.

Большое внимание при изучении Л. н. уделяется установлению связей между различными логиками. Кроме обычного отношения включения (все верные формулы одной логики являются тавтологиями в другой), большой интерес представляет переводимость одной логики в другую. Напр., по любой формуле интуиционистской логики можно построить формулу модальной логики  $S_4$ , тавтологичность которой в модальной логике эквивалентна справедливости исходной формулы в интуиционистской логике. Это позволяет свести многие проблемы интуиционистской логики к проблемам модальной логики. Модальные логики являются в некотором смысле универсальными, т. к. для многих логик возможен их перевод в подходящие модальные логики.

Из Л. н. интуиционистская и близкая к ней логика конструктивная являются наиболее известными. Критика методов классической математики, провозглашающая необходимость их ограничения, была вызвана обнаружением парадоксов в наивной теории множеств. Устранение парадоксов теории множеств возможно на основе других Л. н. Примером такой логики является трехзначная логика Д. А. Бочвара. В этой логике различаются высказывания, имеющие смысл, и бессмысленные высказывания. При этом предложения, выражающие парадоксы теории множеств, оказываются бессмысленными.

Из других приложений многозначных логик следует отметить построение спец. логических систем для преодоления трудностей в изучении квантовой механики (логика квантовой механики). Различные Л. н. строятся при доказательстве независимости систем аксиом, в частности, для классической логики. Чтобы доказать, что какая-либо аксиома не выводится из остальных, достаточно найти многозначную логику, в которой верны все аксиомы, кроме исследуемой.

При построении и исследовании различного рода кибернетических моделей часто сталкиваются с логикой, отличной от классической. Так, напр., при прогнозировании и диагностике сталкиваются с некоторыми разновидностями модальной логики, при исследовании работы управляющих устр-в — с различными формами временных логик, с логикой вопросов и ответов и т. д. Аппарат многозначной логики удобен при решении вопросов анализа и синтеза управляющих систем и при разработке методов контроля работы управляющих систем. Таким образом, кибернетика и вычисл. техника являются и потребителями различного рода Л. н., и одним из источников возникновения и развития таких логик.

Лит.: Яблонский С. В. Функциональные построения в  $k$ -значной логике. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51; Применение логики в науке и технике. М., 1960; Слинин Я. А. Теория модальностей в современной логике. В кн.: Логическая семантика и модальная логика. М., 1967; Зиновьев А. А. Очерк многозначной логики. В кн.: Проблемы логики и теории познания. М., 1968; Неклассическая логика. М., 1970; Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. Пер. с англ. М., 1965 [библиогр. с. 152—160, 194—195].  
Л. Л. Максимова.

**ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ** — формализация математической (или логической) аксиоматической теории. Л.-м. и. задают языком логико-математическим, списком постулатов (аксиом и правил вывода) и в большинстве случаев снабжают семантикой. Существенными чертами, которыми Л.-м. и. отличаются от аксиоматических теорий традиционной математики, являются: переход от разговорного языка к точному формализованному языку и выявление используемых теорией логич. средств с помощью полного перечисления всех аксиом и всех правил, позволяющих выводить одно утверждение из другого. Язык Л.-м. и. и перечень его постулатов образуют синтаксис. Осн. единица языка Л.-м. и. — формула, которая интерпретируется как высказывание или как высказывательная ф-ция (если формула содержит свободные переменные). Осн. понятие теории Л.-м. и. — понятие вывода (из гипотез). Формула  $A$  (или секвенция — для секвенциальных исчислений, см. Генцена формальные системы), не являющаяся аксиомой, есть вывод ф-лы  $A$  из списка гипотез  $A$ . Аксиома есть свой собственный вывод из пустого списка гипотез. Если  $D_1, \dots, D_n$  — выводы ф-л  $A_1, \dots, A_n$  из списков  $C_1, \dots, C_n$  и  $B$  получается из  $A_1, \dots, A_n$  по одному из правил рассматриваемого Л.-м. и., то  $\{D_1, \dots, D_n, B\}$  есть вывод  $A$  из списка

$C_1 \cup \dots \cup C_n$ . Ф-ла выводима, если имеется ее вывод из пустого списка допущений. По языку Л.-м. и. классифицируются на исчисления первого и более высоких порядков; исчисления первого порядка в свою очередь делят на кванторные и бескванторные. Самое крупное подразделение Л.-м. и. по семантическому признаку — это деление на классические и неклассические исчисления. Классические исчисления содержат (в той или иной форме) постулат, выражающий в интерпретации, что любое высказывание либо истинно, либо ложно. В большинстве случаев таким постулатом является *исключенного третьего закон*  $A \vee \neg A$  или правило разбора случаев: из  $A \rightarrow B$ ,  $\neg A \rightarrow B$  вывести  $B$ . Часто неклассическими считаются также логики, содержащие нетрадиционные логические связи [напр., модальные исчисления со связками  $\Box$  (необходимо) и  $\Diamond$  (возможно)], даже если в них постулирован закон исключенного третьего.

Два Л.-м. и. наз. равнообъемными (эквивалентными), если мн-ва выводимых в них объектов совпадают. Иногда равнообъемность понимается более широко: достаточно, чтобы совпадали мн-ва выводимых объектов спец. вида. Так, при сравнении исчислений предикатов иногда ограничиваются рассмотрением чистых ф-л (в которые никакая переменная не входит и свободно, и связано), а при сравнении генценовских исчислений — рассмотрением сечквенций только вида  $\rightarrow A$  (т. е., по существу, формул). Часто рассматривают мн-во не только выводимых ф-л, но и выводимых (производных) правил: правило [мн-во  $(n + 1)$ -членных систем ф-л  $A_1, \dots, A_n/B$ , называемых применениями этого правила;  $A_1, \dots, A_n$  — посылки;  $B$  — заключение] производно в Л.-м. и., если заключение каждого его применения выводимо из его посылок. От производных следует отличать допустимые правила, присоединение которых не изменяет объема выводимых ф-л: правило подстановки вместо пропозициональной переменной допустимо в классическом исчислении высказываний (сформулированном с использованием схем аксиом), но не производно в нем. Л.-м. и. делятся на логические и собственно логико-математические (прикладные).

Логические исчисления основаны на логич. языках; понятие ф-лы, выводимой в логич. исчислении, служит уточнением и формализацией понятия утверждения, истинного в силу своей логической формы, независимо от истолкования входящих в него символов понятий и отношений. Примеры: классическое исчисление высказываний, исчисление предикатов и др.

Исчисления высказываний — это логич. исчисления, в которых заданы правила оперирования с пропозициональными логическими связками (см. *Логические операции*), но не предусмотрены правила оперирования с кванторами ( $\forall$ ,  $\exists$ ) и предметными переменными, хотя такого рода символы могут быть в языке исчисления. По-

стулаты чаще всего делятся на группы, соответствующие оперированию со связкой: ее введению (доказательству ф-л, содержащих связку) и удалению (использованию уже доказанных ф-л, содержащих связку). Примеры: правило  $\&$ -введения  $\Gamma \rightarrow A, \Gamma \rightarrow B \vdash \Gamma \rightarrow A \& B$ , аксиома  $\&$ -введения  $(\gamma \supset a) \supset ((\gamma \supset b) \supset (\gamma \supset a \& b))$ ; правила  $\&$ -удаления:  $\Gamma \rightarrow A \& B \vdash \Gamma \rightarrow A, \Gamma \rightarrow A \& B \vdash \Gamma \rightarrow B$ . Аксиомы  $\&$ -удаления получаются из правил заменой  $\vdash$  на  $\supset$ .

Среди неклассических исчислений чаще всего упоминаются многозначные логики и конструктивное (интуиционистское) исчисление высказываний (см. *Логика конструктивная*), аксиоматика которого получается удалением схемы  $A \vee \neg A$  (или  $\neg \neg A \rightarrow A$ ) из аксиоматики классического исчисления высказываний.

Важным методом исследования структуры исчислений высказываний является использование матриц — конечных таблиц для связок исчисления, аналогичных обычным таблицам для булевых функций, но имеющих, возможно, несколько выделенных значений (соответствующих значению «истина»). Формула общезначима на матрице, если при любой комбинации значений пропозициональных переменных она принимает одно из выделенных значений; формула опровержима, если она не общезначима. Матрица  $M$  корректна для исчисления, если все выводимые формулы общезначимы на  $M$ . Исчисление наз. финитно аппроксимируемым, если имеется последовательность  $M_n$  матриц, корректных для этого исчисления и таких, что любая невыводимая формула опровержима на одной из матриц этой последовательности. Для финитно аппроксимируемого исчисления разрешима проблема распознавания выводимых формул: чтобы узнать, выводима ли формула  $A$ , следует развернуть процесс порождения формул из аксиом по правилам вывода и процесс поиска опровержения  $A$  на матрицах из последовательности  $M_n$ . Один из этих процессов оборвется через конечное число шагов и даст искомый ответ. Матрица  $M$  адекватна для некоторого исчисления, если для любой формулы общезначимость на  $M$  эквивалентна ее выводимости. Обычная булева матрица адекватна для классического исчисления высказываний; аналогично этому многозначные матрицы адекватны для многозначных исчислений высказываний. Для остальных исчислений высказываний адекватные матрицы обычно невозможны.

Исчисление предикатов (узкое) получается обычно из соответствующего исчисления высказываний путем расширения языка и добавления аксиом  $\forall x A(x) \supset A(t)$  ( $\forall$ -удаление);  $A(t) \supset \exists x A(x)$  ( $\exists$ -введение), где  $t$  — терм, свободный для  $x$  в  $A(x)$ ; а также добавления правил  $C \supset A(x) \vdash C \supset \forall x A(x)$  ( $\forall$ -введение);  $A(x) \supset C \vdash \exists x A(x) \supset C$  ( $\exists$ -удаление), где  $x$  не входит свободно в  $C$  (или соответствующих правил для генценов-

ского варианта). В неклассических исчислениях иногда добавляются отдельные аксиомы, связывающие пропозициональные связки и кванторы. В случае, если имеются исчисления с несколькими сортами переменных в аксиомах  $\forall$ -удаления и  $\exists$ -введения требуется, чтобы  $t$  был термом того же сорта, что и переменная  $x$ .

Исчисление предикатов с равенством — результат добавления к соответствующему исчислению предикатов символа  $=$  с аксиомами:

$$\forall x (x = x), \quad \forall x \forall y \forall z (x = y \supset (x = z \supset y = z)) \text{ и } \forall x \forall y (x = y \supset (A(x) \supset A(y)))$$

для любой формулы  $A$ .

Прикладные исчисления обычно представляют собой формализацию теории некоторых ф-ций и предикатов. Специфические (т. е. нелогические) аксиомы выражают свойства этих ф-ций и предикатов, а логич. аппарат (за исключением бескванторного случая) — соответствующее исчисление предикатов (с равенством, если оно входит в язык рассматриваемой системы). Бескванторные прикладные исчисления либо снабжаются логическим аппаратом исчисления высказываний (чаще всего классического, т. к. основные предикаты оказываются разрешимыми; см. *Алгоритмов теория*), либо (если единственным предикатом является равенство) оформляются в виде исчисления равенств. Аксиомами тогда считают определяющие равенства рассматриваемых ф-ций (напр.,  $x \cdot 0 = 0$ ,  $x \cdot y' = (x \cdot y) + x$ ), а правила вывода формализуют: 1) осн. свойства равенства (рефлексивность, симметричность, транзитивность, возможность замены одного из равных объектов другим); 2) рассуждения методом матем. индукции (чаще всего по образцу: «из  $f(0) = g(0)$ ,  $f(x') = h(x, f(x))$ ,  $g(x') = h(x, g(x))$  можно вывести  $f(x) = g(x)$ » — правило отождествления ф-ций, определяемых одной и той же примитивной рекурсией); 3) рассуждения, соответствующие  $\forall$ -удалению: «из  $A(x)$  можно вывести  $A(t)$ » (правило подстановки вместо свободной предметной переменной). Прикладными исчислениями являются, напр., примитивно рекурсивная арифметика (бескванторное прикладное исчисление), *арифметика формальная*, аксиоматические *множества теории*, элементарная *групп теория*, аксиоматическая проективная геометрия, арифметика 2-го порядка с одноместными предикатами и несколькими ф-циями следования (прикладное исчисление 2-го порядка).

Семантика Л.-м. и. задает интерпретацию переменных матем. символов (символов предикатов и ф-ций) и логических операций. Тем самым определяются модели Л.-м. и. Важным свойством, которым обладают не все Л.-м. и., является семантическая полнота: формула, истинная на всех моделях, выводима. Семантически полными оказываются классическое исчисление высказываний, классическое исчисление предикатов узкое и др. Дедуктивная полнота означает, что каждая формула  $A$  без

свободных переменных выводима или опровержима (т. е. выводима  $\neg A$ ). Из дедуктивной полноты Л.-м. и. следует разрешимость проблемы выводимости — существование алгоритма, позволяющего по каждой формуле узнать, выводима она или нет. Важнейшим дедуктивно полным Л.-м. и. является теория вещественно замкнутых полей (система Тарского). Согласно *Гёделя теореме о неполноте* дедуктивно полные теории редки; всякое Л.-м. и., содержащее некоторый весьма узкий фрагмент арифметики, дедуктивно (и семантически) неполно. Для еще более широкого класса Л.-м. и. (включающего исчисление предикатов, формализованную арифметику и др.) проблема выводимости неразрешима (теорема Чёрча).

Вопросы внутр. структуры Л.-м. и. — непротиворечивость, независимость отдельных постулатов, существование отделенных аксиоматик (т. е. таких, что всякая выводимая формула  $A$  имеет вывод, использующий постулаты лишь для символов, входящих в  $A$ , и, быть может, для импликации), существование интерпретаций одних Л.-м. и. в других и т. д. — исследуются в *доказательствах теории*.

Лит.: Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1973; Клини С. К. Математическая логика. Пер. с англ. М., 1973 [библиогр. с. 451—465]; Чёрч А. Введение в математическую логику. Пер. с англ., т. 1. М., 1960; Карри Х. Б. Основания математической логики. Пер. с англ. М., 1969 [библиогр. с. 518—547].

Г. Е. Минц.

**ЛОГИЧЕСКАЯ РАСПОЗНАЮЩАЯ СИСТЕМА** — *распознающая система*, в которой сигналы, описывающие объекты распознавания, представляют собой наборы логических переменных, а каждый класс объектов определяется некоторой логической (булевой) функцией от этих переменных. Фактическое значение (1 или 0) каждой из переменных, входящих в сигнал, обозначает присутствие или отсутствие одного из признаков, характеризующих распознаваемый объект. Л. р. с. относит объект к классу, для которого соответствующая логическая ф-ция равна 1, если при этом все остальные функции равны 0. В противном случае производится *отказ от распознавания*, либо указывается не один, а несколько классов, к которым может принадлежать объект. Л. р. с. используется при решении некоторых прикладных задач *распознавания образов*, в частности, в *читающих автоматах*. Подходящие признаки и функции обычно выбирают вручную, на интуитивном уровне, реже — на основе автоматического или автоматизированного отбора среди множества признаков и функций, генерируемых случайным образом на ЭВМ.

Примером использования Л. р. с. могут служить читающие автоматы амер. фирмы Ланди — Фаррингтон, предназначенные для чтения машинописных знаков стилизованного шрифта «Селфчек». Признаками в них выступают отрезки прямых линий, из которых составлены знаки шрифта: ГВ, ГС, ГН, КВЛ, КВП, КНЛ, КНП, ДЛ, ДП. Здесь Г — горизонтальный, К — короткий вертикальный, Д — длинный вертикальный, В — верхний,



Н — нижний, С — средний, П — правый, Л — левый. Логические функции, определяющие классы, имеют следующий вид: для цифры 0:

$$\overline{ГВ} \cdot \overline{ГС} \cdot \overline{ГН} \cdot \overline{ДЛ} \cdot \overline{ДП};$$

для цифры 1:

$$\overline{ГВ} \cdot \overline{ГС} \cdot \overline{ГН} \cdot \overline{КВЛ} \cdot \overline{КНЛ} \cdot \overline{ДП};$$

для цифры 2:

$$\overline{ГВ} \cdot \overline{ГС} \cdot \overline{ГН} \cdot \overline{КВЛ} \cdot \overline{КВП} \cdot \overline{КНЛ} \cdot \overline{КНП} \times \\ \times \overline{ДЛ} \cdot \overline{ДП}; \text{ и т. д.}$$

В приведенных логических ф-циях точка обозначает логическое умножение, черта сверху — логическое отрицание. Если в распознаваемом сигнале переменные ГВ, ГС, ГН, КВП и КНЛ равны 1, а переменные КВЛ, КНП, ДЛ и ДП равны 0, то соответствующий знак будет распознан как цифра 2.

Г. Л. Гимельфарб.

**ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ** — операции, с помощью которых из выражений того или иного языка образуют новые выражения этого языка. К Л. о. относятся логические связки, кванторы, оператор дескрипции, оператор абстракции и некоторые др. операторы. Л о г и ч е с к и е с в я з к и — это Л. о. над высказываниями, рассматриваемыми как одно целое, безотносительно к их субъектно-предикатной структуре. В формализованных языках логические связки — это формализация употребляемых в обычных языках союзов и союзных слов «и», «или», «если... то», «тогда и только тогда», частицы «не» и т. п. Различные подходы к формализации смысла этих союзных слов явились одной из причин развития наряду с классической логикой ряда *логик неклассических*. Логические связки могут быть одноместные (сингулярные), двуместные (бинарные), трехместные (тернарные) и т. д. — в зависимости от числа высказываний, которые «связываются» данной связкой. В формальных исчислениях эти связки задаются либо с помощью аксиом — в аксиоматических исчислениях (см. *Исчисление высказываний*), либо с помощью правил вывода — в натуральных исчислениях (см. *Генцена формальные системы*). В алгебре логики их рассматривают как алгебр. операции на множестве из двух значений: 0 и 1. Константы 0 и 1 можно рассматривать как нульместные операции. Осн. одноместной логич. связкой является отрицание, которое обозначается через  $\neg$ ,  $\bar{\phantom{x}}$  (черточка сверху) или  $\sim$  и определяется равенствами:  $\neg 1 = 0$ ,  $\neg 0 = 1$ . Высказывание  $\neg X$  наз. отрицанием высказывания  $X$ . Осн. двухместные логич. связки приведены в табл. В 1-м столбце таблицы помещены формулы вида  $X * Y$  с принятым обозначением для каждой связки  $*$ , во 2-м — некоторые другие изображения формулы, в 3-м — последовательность значений ф-лы  $X * Y$  для значений пары аргументов  $(X, Y)$ , равных соответственно  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  и  $(1, 1)$ , в 4-м — встречающиеся в логике и ее приложениях названия связки (и соответствующей формулы), в 5-м — формулы

с соответствующими связкам словами обычного языка. Выражение  $\mathcal{A}$ , которое что-либо утверждает о переменных объектах  $x_1, \dots, x_n$ , наз. высказывательной формой с этими свободными вхождениями переменных. Эта форма задает высказывательную ф-цию (*предикат*) от аргументов  $x_1, \dots, x_n$ , т. е. функцию со значениями «истинно» или «ложно». Напр., « $x$  есть простое число», « $x > y$ » и « $x^2 + y^2 = z$ ».

Применение квантора общности, квантора существования, оператора дескрипции, оператора абстракции,  $\varepsilon$ -оператора к выражению  $\mathcal{A}$  обозначается соответственно через

$$(\forall x) \mathcal{A}, (\exists x) \mathcal{A}, (ix) \mathcal{A}, (\lambda x) \mathcal{A}, \varepsilon_x \mathcal{A} \quad (1)$$

(где вместо  $x$  может стоять также любая другая переменная). Любое вхождение переменной  $x$  в выражении (1) наз. вхождением, связанным соответствующим оператором (если оно не было уже связано некоторым оператором в  $\mathcal{A}$ ), а выражение  $\mathcal{A}$  наз. областью действия данного оператора. Вхождение, не являющееся связанным никаким оператором, наз. свободным. Форма задает ф-цию только от тех переменных, которые имеют свободные вхождения в эту форму.

**К в а н т о р ы** — это логические операторы, которые позволяют формировать высказывания всеобщности и существования и переводят одну высказывательную форму в другую (обычно с меньшим числом вхождений свободных переменных) или же в высказывание. Если высказывательная форма  $\mathcal{A}(x)$  имеет свободные вхождения переменной  $x$ , то выражение  $(\forall x) \mathcal{A}(x)$  истинно в произвольной области  $D$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{A}(x)$  истинно для каждого элемента  $x \in D$ , а выражение  $(\exists x) \mathcal{A}(x)$  истинно в  $D$  тогда и только тогда, если существует такое  $x \in D$ , что истинно  $\mathcal{A}(x)$ . Очевидно, связывание квантором переменной, все вхождения которой уже связаны, или переменной, вообще не входящей в формулу, не меняет содержания выражения. Оба квантора связаны между собой следующей эквивалентностью:  $\neg (\forall x) \mathcal{A}(x) \leftrightarrow (\exists x) \neg \mathcal{A}(x)$ . Другие обозначения квантора  $(\forall x)$ :  $(x)$ ,  $(Ax)$ ,  $\bigcap_x$ ,  $\bigwedge_x$ ,  $\Pi$ ; квантора  $(\exists x)$ :  $(Ex)$ ,  $\bigcup_x$ ,  $\bigvee_x$ ,  $\Sigma_x$ .

Наряду с этими кванторами употребляют и т. н. ограниченные кванторы  $(\forall x_{\mathcal{A}(x)})$ ,  $(\exists x_{\mathcal{A}(x)})$ , связанные с обычными кванторами следующими эквивалентностями:  $(\forall x_{\mathcal{A}(x)}) \mathcal{B}(x) \leftrightarrow (\forall x) (\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}(x))$ ,  $(\exists x_{\mathcal{A}(x)}) \mathcal{B}(x) \leftrightarrow (\exists x) (\mathcal{A}(x) \& \mathcal{B}(x))$ . Часто употребляется квантор единственности  $(\exists! x) \mathcal{A}(x)$  («существует единственный  $x$  такой, что  $\mathcal{A}(x)$ »), но он также выражается через кванторы  $(\forall x)$  и  $(\exists x)$  следующим образом:  $(\exists! x) \mathcal{A}(x) \leftrightarrow (\exists x) \mathcal{A}(x) \& (\forall y)(\forall z) \times (\mathcal{A}(y) \& \mathcal{A}(z) \rightarrow y = z)$ .

В расширенном исчислении предикатов кванторами могут связываться также предикатные переменные, напр.,  $(\forall F) (\exists x) (F(x) \vee \neg F(x))$ . В формальных теориях кванторы вводятся с помощью аксиом и правил вывода.

Выражение  $\mathfrak{A}$ , которое представляет собой составное название и у которого  $x_1, \dots, x_n$  — список всех переменных, имеющих свободные вхождения в  $\mathfrak{A}$ , наз. предметной формой (или термом) с этими свободными вхождениями. Этот терм задает некоторую функцию от  $x_1, \dots, x_n$ . Напр., «единственное целое число  $x$  больше  $y$  и меньше  $y + 2$ » (это форма с единственной переменной  $y$ , имеющей свободные вхождения в эту форму), « $\sin(x + y)$ » и т. п. О п е р а т о р д е с к р и п ц и и (соответ-

$y_1^0, \dots, y_n^0$  переменных  $y_1, \dots, y_n$  ту функцию (соответственно тот предикат) от аргумента  $x$ , которая (который) каждому значению  $x_0$  аргумента  $x$  сопоставляет значение выражения  $\mathfrak{B}(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ . Таким образом, выражение  $(\lambda x) \mathfrak{B}(x, y_1, \dots, y_n)$  представляет собой предметную форму, которая задает функцию от  $y_1, \dots, y_n$ , принимающую в качестве своих значений некоторые функции (соответственно некоторые предикаты), а именно: для значе-

Обозначение операции	Другие обозначения и представления	Таблица истинности	Логические связи	
			Названия операций	Как читать
$X \& Y$	$\begin{matrix} X Y \\ X \cdot Y \\ X \wedge Y \end{matrix}$	0001	конъюнкция, логическое произведение, логическое «и», функция совпадения	$X$ и $Y$
$X \vee Y$		0111	дизъюнкция, логическая сумма, логическое «или», функция разделения	$X$ или $Y$ ; $(X \text{ и } Y)$
$X \rightarrow Y$	$X \supset Y$	1101	материальная импликация	если $X$ , то $Y$ ; $X$ влечет $Y$ ; $X$ имплицирует $Y$
$X \leftrightarrow Y$	$\begin{matrix} X \equiv Y \\ X \sim Y \end{matrix}$	1001	эквивалентность, функция равнозначности	$X$ тогда и только тогда, когда $Y$ ; $X$ эквивалентно $Y$
$X + Y$	$\begin{matrix} X \vee Y \\ \neg(X \leftrightarrow Y) \\ \neg(X \equiv Y) \end{matrix}$	0110	сумма по модулю 2, раздельная дизъюнкция, отрицание эквивалентности, функция неравнозначности	либо $X$ , либо $Y$ ; $X$ не эквивалентно $Y$
$X   Y$	$\begin{matrix} \neg(X \& Y) \\ \overline{X \wedge Y} \end{matrix}$	1110	Шеффера штрих, отрицание конъюнкции, антиконъюнкция	$X$ и $Y$ несовместны; неверно, что $X$ и $Y$
$X \downarrow Y$	$\begin{matrix} \neg(X \vee Y) \\ \overline{X \vee Y} \end{matrix}$	1000	Пирса стрелка, отрицание дизъюнкции, антидизъюнкция, функция Веоба	ни $X$ , ни $Y$
$X \nrightarrow Y$	$\begin{matrix} X \not\supset Y \\ \neg(X \rightarrow Y) \\ \neg(X \supset Y) \end{matrix}$	0010	отрицание материальной импликации, материальная антиимпликация	$X$ , но не $Y$ ; неверно, что $X$ влечет $Y$
$X \leftarrow Y$	$\begin{matrix} X \subset Y \\ Y \rightarrow X \\ Y \supset X \end{matrix}$	1011	обратная импликация	$X$ , если $Y$ ; если $Y$ , то $X$ ; $Y$ влечет $X$
$X \nleftarrow Y$	$\begin{matrix} X \not\subset Y \\ \neg(Y \rightarrow X) \\ \neg(Y \supset X) \end{matrix}$	0100	отрицание обратной импликации, обратная антиимпликация	не $X$ , но $Y$ ; неверно, что $Y$ влечет $X$

ственно оператор абстракции) переводит высказывательную (соответственно предметную и высказывательную) форму в предметную, обычно с меньшим числом переменных, имеющих свободные вхождения, или же в название определенного предмета. Если  $\mathfrak{B}(x, y_1, \dots, y_n)$  — предметная (соответственно высказывательная) форма, у которой  $x, y_1, \dots, y_n$  — список всех переменных, имеющих свободные вхождения в  $\mathfrak{B}(x, y_1, \dots, y_n)$ , то  $(\lambda x)\mathfrak{B}(x, y_1, \dots, y_n)$  обозначает при заданных значениях

ний  $y_1^0, \dots, y_n^0$  аргументов  $y_1, \dots, y_n$  ее значением является ф-ция (соответственно предикат), задаваемая (задаваемый) выражением  $(\lambda x) \mathfrak{B}(x, y_1^0, \dots, y_n^0)$ .

В формализованных языках, содержащих оператор абстракции, имеется обычно правило преобразования выражения  $((\lambda x) \times \times \mathfrak{B}(x))a$  в выражение  $\mathfrak{A}(a)$ , получающееся заменой всех свободных вхождений переменной  $x$  в  $\mathfrak{B}(x)$  на  $a$ . Отметим, что  $(\lambda x)(\lambda y) \mathfrak{B} \neq (\lambda y)(\lambda x) \mathfrak{B}$ . Выражение  $(\lambda x) 2$  именуется од-

номестную функцию-константу 2. Выражение  $(\lambda x) \sin (y + z)$  есть терм со свободными вхождениями переменных  $y, z$ ; при любых числовых значениях переменных  $y$  и  $z$ , напр., при  $y = 0, z = \frac{\pi}{2}$ , этот терм именует одноместную функцию-константу, в этом примере — ф-цию, принимающую значение  $\sin (0 + \frac{\pi}{2}) = 1$  для каждого числа  $x$ . Амер. математик А. Чёрч (р. 1903) показал, что всякая общерекурсивная ф-ция (см. *Рекурсивные функции*) может быть специальным образом определена с помощью некоторого выражения, образованного из переменных, с помощью двух операций: сочленения и абстракции.

Если  $\mathcal{U}(x, y_1, \dots, y_n)$  — высказывательная форма, у которой  $x, y_1, \dots, y_n$  — список всех переменных, имеющих свободные вхождения в  $\mathcal{U}(x, y_1, \dots, y_n)$ , и если для  $y_1^0, \dots, y_n^0$  существует единственный  $x$  такой, что истинно  $\mathcal{U}(x, y_1^0, \dots, y_n^0)$  (т. е. выполняется условие единственности), то  $(\lambda x) \mathcal{U}(x, y_1^0, \dots, y_n^0)$  обозначает тот единственный  $x$ , для которого истинно  $\mathcal{U}(x, y_1, \dots, y_n)$ . Логика расходится в своих интерпретациях оператора дескрипции для тех случаев, когда указанное выше условие единственности не удовлетворяется. В некоторых формальных системах употребление оператора дескрипции допускается только после того, как доказано условие единственности. Однако при таком подходе может оказаться неразрешимой проблема определения того, какие из выражений языка являются формулами. Др. логики выбирают раз навсегда определенный объект из области значений соответствующих переменных, который объявляется значением результата применения оператора дескрипции в случае, если не выполняется условие единственности. В качестве такого объекта берется, напр., число «0», если объектами системы являются числа, множество всех таких  $x$ , что  $\mathcal{U}(x, y_1^0, \dots, y_n^0)$ , или пустое множество, если в формальной системе нет различий между объектами и множествами, или некоторая индивидуальная постоянная с выделенным для нее обозначением, напр.,  $a^*$ . Если таким объектом считают  $a^*$ , то выражение  $\mathcal{B}(\lambda x \mathcal{U}(x))$  определяется как эквивалентное следующему выражению:

$$(\exists y) [(\forall x) (\mathcal{U}(x) \leftrightarrow x = y) \& \mathcal{B}(y)] \vee \\ \vee [\neg (\exists y) (\forall x) (\mathcal{U}(x) \leftrightarrow x = y) \& \mathcal{B}(a^*)]$$

(«или существует такой  $y$ , что  $\mathcal{B}(y)$  и  $y$  — единственный предмет, для которого  $\mathcal{U}(y)$ ; или такого предмета нет и  $\mathcal{B}(a^*)$ »).

Операторы дескрипции и операторы абстракции можно употреблять не только с предметными переменными, но (в соответствующих системах) и с предикатными и функциональными. В формальных системах, основанных на исчислении предикатов, и те, и др. операторы можно элиминировать (исключить).

Для целей обоснования математики нем. математик Д. Гильберт (1862—1943) построил исчисление с  $\varepsilon$ -оператором, который делает излишним кванторы. Для высказывательной формы  $\mathcal{U}(x)$  выражение  $\varepsilon_x \mathcal{U}(x)$  приблизительно обозначает: «некоторый объект  $x$ , удовлетворяющий условию  $\mathcal{U}(x)$ , если таковой существует, и некоторый произвольный объект в противном случае». В исчислениях с  $\varepsilon$ -оператором имеется аксиомная схема  $\mathcal{U}(x) \rightarrow \mathcal{U}(\varepsilon_x \mathcal{U}(x))$ . Исчисления, совмещающие  $\varepsilon$ -оператор и технику естественного вывода, могут представлять некоторые удобства для машинного поиска доказательства теорем на ЭВМ.

Лит.: Карнап Р. Значение и необходимость. Пер. с англ. М., 1959; Чёрч А. Введение в математическую логику. Пер. с англ., т. 1. М., 1960; Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y. Foundations of set theory. Amsterdam, 1958. В. Ф. Костырко.

**ЛОГИЧЕСКИЙ ЗАДЕРЖИВАЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТ** — элемент, в котором осуществляется строго фиксированная задержка во времени между поступлением входной информации и выдачей информации на выходе. Это достигается применением тактирующей серии импульсов (сигналов опроса), которые синхронизируют весь процесс преобразования информации в схемах на Л. з. э. В функциональном отношении Л. з. э. аналогичен обычному логическому элементу ЦВМ. Как правило, Л. з. э. выполняется на ферритовых сердечниках (см. *Элементные структуры на логических задерживающих элементах*).

Г. И. Корниенко.  
**ЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ АВМ** — элемент, используемый для выбора и коммутации переменных в схеме электрического моделирования, а также для формирования команд переключения в схеме логического управления поиском решения. Для реализации простейших логич. операций непрерывного выбора максимальной или минимальной из нескольких переменных используют пассивные резистивно-диодные цепи, аналогичные схемам совпадения ЦВМ. Реализация нелинейных ф-ций типа сигнатур, которые используются в АВМ для выполнения логич. операций сравнения и условного перехода, производится при помощи спец. схем, обладающих релейной характеристикой. Выходное напряжение такой схемы может принимать два определенных значения и всякий раз скачкообразно изменяется при изменении знака суммы входных сигналов, т. е. схема осуществляет элементарное преобразование аналоговых сигналов в цифровые команды, которые могут использоваться для управления ключами, обеспечивающими изменение структуры моделирующей цепи. В гибридных вычислительных машинах набор схем с релейной характеристикой составляет блок сигнатур, формирующий входные команды цифрового управления из непрерывных сигналов аналогового операционного устройства. Простейшим формирователем цифровых управляющих команд может служить триггер Шмидта, напряжение на выходе которого изменяется при достижении

входным сигналом установленного значения. Порог срабатывания схемы — 0,15—0,3 в.

При моделировании различных процессов и систем на обычных АВМ, а также на АВМ с периодизацией решения широко используются аналоговые компараторы, построенные на базе типовых решающих усилителей. Аналоговый компаратор состоит из усилителя постоянного тока с большим коэфф. усиления и с ограничителями уровня в цепи обратной связи и резисторного устройства сравнения входных сигналов. Точность выполнения такой схемой

ным компонентам, из которых построены Л. э. ЦВМ. Согласно этим признакам ниже указаны осн. варианты цифровых двоичных Л. э. ЦВМ.

Простейшими функциональными типами Л. э. ЦВМ являются схемы совпадения, собирательные схемы и инверторы, которые реализуют переключательные функции наиболее распространенной функционально полной системы (соответственно конъюнкцию, дизъюнкцию и инверсию). Указанные типы Л. э. ЦВМ чаще всего выполняются в виде стандартных сочетаний, напр., для реализации универсаль-

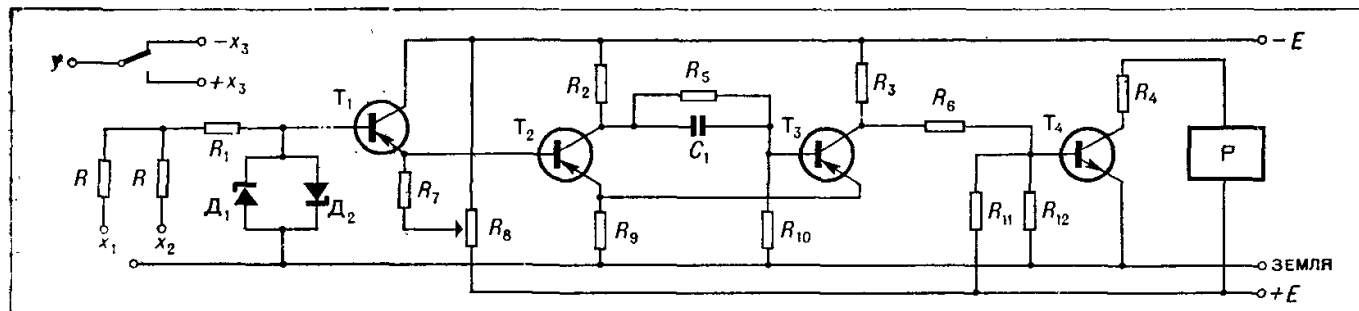


Схема блока операционного реле.

операции сравнения без особых трудностей может быть доведена до 0,01—0,02 в. Л. э. АВМ наз. также спец. блоки операционных реле, которые используются для выполнения операций переключения в заданных местах моделирующей цепи. В состав блока входят схема сравнения, формирователь и исполнительный элемент, который срабатывает при достижении входной величиной заданного уровня. На рис. приведена схема блока операционного реле, который используется в некоторых отечественных АВМ. Входы и выходы блока выведены на *наборное поле*, где оператор соответствующей коммутацией реализует различные зависимости:  $y = x_3 \operatorname{sign} (x_1 + x_2)$ ,  $y = \frac{1 + \operatorname{sign} (x_1 + x_2)}{2} x_3$  и др.

Лит.: Ушаков В. Б. [и др.]. Электронная нелинейная аналоговая вычислительная машина МН-14. М., 1965; Корн Г., Корн Т. Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины. Пер. с англ., ч. 1—2. М., 1967—68 [библиогр. ч. 1, с. 453—456]. Ю. П. Космач.

**ЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ ЦВМ** — техническое устройство для реализации элементарной логической функции, имеющее внешние выводы для приема и выдачи сигналов, соответствующих аргументам и значению функции. Информационными сигналами современных Л. э. ЦВМ в основном служат дискретные значения напряжения, тока и т. п. Такие Л. э. ЦВМ наз. дискретными, или цифровыми. Для упрощения тех. реализации большинство дискретных Л. э. ЦВМ выполнены как двухпозиционные, при этом одно из состояний обозначают «0», другое — «1». Однако применяют и многопозиционные дискретные Л. э. ЦВМ (см. *Многочисленные схемы*). Л. э. ЦВМ различают, в основном, по функциональному назначению, по способу представления информации и способу связи между ними, а также по используемым физ. явлениям и характер-

ных Л. э. ЦВМ с ф-циями  $\overline{X \vee Y}$ ,  $\overline{X \cdot Y}$ ,  $\overline{X \cdot Y \vee Z \cdot U}$  и т. д. (см. *Дискретных элементов система*). Получили развитие и пороговые Л. э. ЦВМ, образующие «1» на выходе в случае, когда алгебраическая сумма сигналов на их входах превышает заданный пороговый уровень (см. *Логика пороговая*). Л. э. ЦВМ, выполняющие, кроме логических ф-ций, и ф-ции усиления выходных сигналов, наз. *активными*, а Л. э. ЦВМ без свойств усиления — *пассивными*. Различают Л. э. ЦВМ с запоминанием (см. *Логический задерживающий элемент*) и без запоминания. У элементов без запоминания отключение информации от входа переводит элемент в исходное состояние, а у Л. э. ЦВМ с запоминанием такое отключение не повлечет изменения состояния.

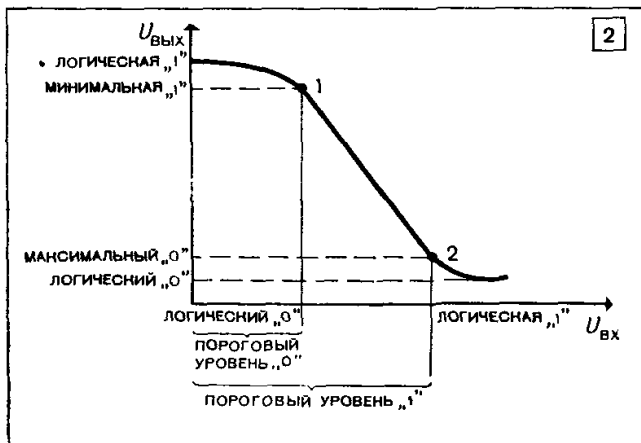
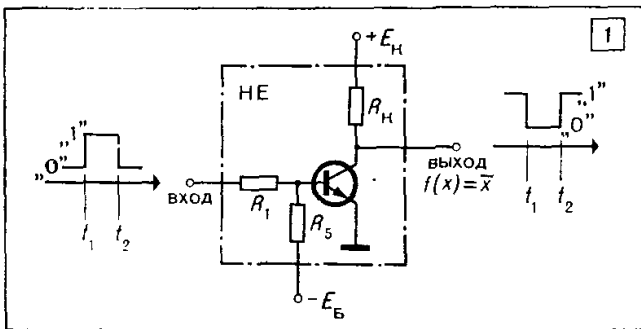
По способу представления информации в способу связи между собой Л. э. ЦВМ принято подразделять на Л. э. ЦВМ потенциального типа (см. *Потенциальная элементная структура ЦВМ*), импульсного типа (см. *Импульсная элементная структура ЦВМ*) и потенциально-импульсного типа (см. *Потенциально-импульсная элементная структура ЦВМ*).

В зависимости от используемых физ. явлений и компонентов Л. э. ЦВМ делят на полупроводниковые (диодные, транзисторные, диодно-транзисторные и т. д.); магнитополупроводниковые (феррит-диодные, феррит-транзисторные); электромеханические (реле и контакторы); Л. э. ЦВМ на вакуумных или газонаполненных лампах и др., напр., оптические, криотронные и химотронные. Наиболее распространены полупроводниковые Л. э. ЦВМ.

Осн. характеристиками цифрового двухпозиционного Л. э. ЦВМ, выполняющего заданные логические функции, являются: сигналы для представления логического «0», логической «1» и помехоустойчивость; коэфф. объеди-

нения по входам «И» и «ИЛИ», коэфф. разветвления по выходу; быстродействие; питающие напряжения и рассеиваемая мощность; габариты и вес; стоимость и надежность, рассматриваемая как совокупность свойств безотказности, восстанавливаемости и долговечности.

Коэфф. объединения по входу Л. э. ЦВМ определяет его максимально возможное количество логических входов, а коэфф. разветвления по выходу показывает, на какое количество логических входов можно подключать одновременно выход данного Л. э. ЦВМ. Для



1. Схема цифрового логического элемента, который реализует функцию «НЕ».  
2. Передаточная характеристика инвертора.

конкретного Л. э. ЦВМ указываются полярность и амплитуда, а в ряде случаев и длительность входных и выходных сигналов. Типовой цифровой Л. э. (инвертор), реализующий функцию «НЕ», представлен на рис. 1. Передаточная характеристика его (рис. 2) отражает зависимость выходного напряжения  $U_{\text{вых}}$  от входного напряжения  $U_{\text{вх}}$  и имеет вид кривой с двумя прямолинейными участками, соответствующими уровням логических «1» и «0», и с узким переходным участком.

Обычно для получения необходимой надежности и быстрого достижения устойчивых точек логических «0» и «1» для Л. э. задают допустимые уровни входных сигналов. Причем из-за разброса параметров входных сигналов и компонент Л. э. ЦВМ, в зависимости от изменения питающих напряжений и температуры окружающей среды, функционирование Л. э. ЦВМ определяют семейства передаточных характеристик. Крайние значения входного сигнала, при которых выходной сигнал Л. э.

ЦВМ равен макс. сигналу «0» или миним. сигналу «1», наз. пороговыми значениями сигналов Л. э. ЦВМ (точки 1 и 2 на рис. 2). Быстродействие Л. э. ЦВМ характеризует среднее время задержки в нем сигнала.

Конструктивно Л. э. ЦВМ чаще всего выполняют в отдельных корпусах или в одном корпусе размещают несколько независимых Л. э. ЦВМ. Известны также варианты с размещением одного Л. э. ЦВМ в нескольких типизированных корпусах. Развитие цифровых Л. э. ЦВМ особенно связано с развитием цифровых электронных вычислительных машин. Л. э. ЦВМ 1-го поколения строили на электронных лампах (подключенных проводниками к сопротивлениям, конденсаторам и индуктивностям), в машинах 2-го поколения — на транзисторах. Последние, исчерпав возможности повышения осн. характеристик Л. э. ЦВМ с подключенными радиодеталями, уступили место микроэлектронным интегральным схемам (машины 3-го и 4-го поколений). Именно интегральные схемы обеспечивают наибольшее возможности повышения быстродействия и надежности и снижения стоимости, веса и габаритов Л. э. ЦВМ и потребляемой ими энергии. Весьма перспективным направлением улучшения характеристик Л. э. считается использование возможностей квантово-оптических приборов типа лазеров (машины 5-го поколения). См. также Микроэлектронная элементная база вычислительной техники. Э. И. Комухаев.

**ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ** — логические выражения (формулы) специального вида. В алгебре логики различают две нормальные формы — дизъюнктивную и конъюнктивную. В обоих случаях это ф-лы, в которых из знаков логических операций содержатся только знаки  $\&$ ,  $\vee$  и  $\neg$ , причем операция отрицания относится только к отдельным переменным. Элементарной конъюнкцией наз. конъюнкцию некоторого числа переменных или их отрицаний такую, что каждая переменная встречается в ней не больше одного раза. Аналогично определяют элементарную дизъюнкцию, напр.,  $x_1 \& \bar{x}_2 \& x_3$  является элементарной конъюнкцией, а  $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$  — элементарной дизъюнкцией. Дизъюнктивной нормальной формой наз. дизъюнкцию некоторого числа элементарных конъюнкций, взятых без повторений, и, аналогично, конъюнктивной нормальной формой — конъюнкцию некоторого числа элементарных дизъюнкций. Напр., ф-ла  $(x_1 \& \bar{x}_2 \& x_3) \vee (\bar{x}_1 \& x_2)$  является дизъюнктивной норм. формой, ф-ла  $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \& (\bar{x}_1 \vee x_2) \& (x_2 \vee x_3)$  — конъюнктивной нормальной формой, а формула  $(x_1 \& \bar{x}_2 \vee x_3) \& \bar{x}_2$  — не является ни конъюнктивной, ни дизъюнктивной нормальной формой.

В логике предикатов употребляют еще предваренные нормальные формы и нормальные формы Сколема. Формулу наз. предваренной нормальной формой, если все кванторы, встречающиеся в ней, выписаны впереди, а

подкванторная часть имеет вид дизъюнктивной или конъюнктивной нормальной формы, напр.,  $\forall x \exists y \exists z \forall u [(P(x, y) \& Q(x)) \vee (P(y, z) \& Q(u))]$ .

Для каждой ф-лы алгебры логики и логики предикатов существует эквивалентная ей (т. е. принимающая одинаковые с ней значения при одинаковых значениях переменных) нормальная форма. Формула наз. нормальной формой Сколема (по фамилии норв. математика Т. Сколема), если она имеет вид предваренной нормальной формы и все кванторы существования, если они есть, предшествуют всем кванторам общности. В логике предикатов не для всякой ф-лы существует эквивалентная нормальная форма Сколема, но для всякой ф-лы существует дедуктивно эквивалентная нормальная форма Сколема. Для исчисления предикатов понятия «эквивалентные формулы» и «дедуктивно эквивалентные формулы» не равнозначны. Две формулы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  наз. дедуктивно эквивалентными, если из аксиом исчисления предикатов и ф-лы  $\mathcal{A}$  посредством правил вывода можно вывести ф-лу  $\mathcal{B}$  и наоборот, из аксиом и формулы  $\mathcal{B}$  можно вывести ф-лу  $\mathcal{A}$ . Очевидно, что эквивалентные ф-лы являются дедуктивно эквивалентными, но не наоборот.

Л. в. н. ф. чрезвычайно удобны при постановке и решении различных проблем логики математической и ее приложений.

Лит.: Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1973. М. И. Кратко.

**ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ** — переменные в языках программирования с блочной структурой, описанные в блоке программы и имеющие смысл, определенный этим описанием, только в данном блоке. Переменные, описанные в начале блока, наз. локализованными в блоке (см. Глобальные переменные). Эти переменные приобретают смысл при входе в блок и теряют его при выходе. Исключения составляют собственные переменные (см. АЛГОЛ-60). Л. п. позволяют использовать в языках программирования с блочной структурой в различных блоках одни и те же идентификаторы и тем самым составлять блоки независимо друг от друга, а также позволяют реализовать динамический принцип памяти распределения. А. И. Халилов.

**ЛОКАЛЬНОГО КОДИРОВАНИЯ ПРИНЦИП** — общий подход к построению методов синтеза схем, реализующих булевы функции (или вектор-функции) из специальных классов функций, основанный на обладающем особыми свойствами кодировании функций наборами из нулей и единиц. Для построения асимптотически оптим. метода синтеза кодирование должно быть асимптотически оптимальным: длина кода должна быть асимптотически равна (двоичному) логарифму числа рассматриваемых ф-ций (от  $n$  аргументов). Кодирование должно быть локальным в том смысле, что для вычисления ф-ции  $f$  на каждом конкретном наборе  $\tilde{\sigma}$  значений аргументов (для «декодирования») достаточно знать сравнительно небольшой отрезок кода. Декодирование так-

же должно осуществляться сравнительно просто. Во-первых, сравнительно просто (в смысле сложности схемной реализации) должны вычисляться «координаты» отрезка кода; напр., номер отрезка кода, если код разбит на отрезки одинаковой длины; номер первого разряда и длина отрезка, если отрезки имеют различную длину. Во-вторых, по набору  $\tilde{\sigma}$ , отрезку кода (и, быть может, «координатам» отрезка кода) сравнительно просто должно вычисляться значение  $f(\tilde{\sigma})$ .

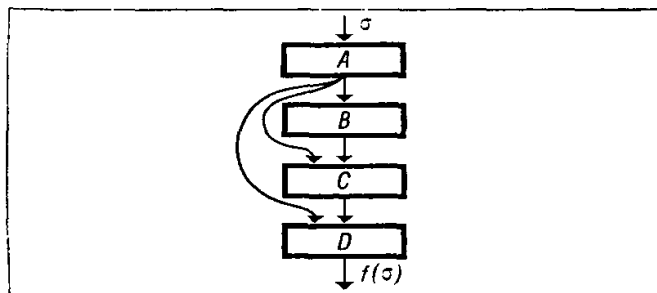


Схема вычисления  $f(x)$  по принципу локального кодирования.

В общем виде схема, построенная для  $f(\tilde{x})$  в соответствии с Л. к. п., состоит из нескольких подсхем (рис.). Подсхема  $A$  по набору  $\tilde{\sigma}$  вычисляет координаты отрезка кода. Подсхема  $B$  по координатам отрезка кода выдает часть кода (фиксированной длины), содержащую требуемый отрезок его. Подсхема  $C$  выделяет из части кода требуемый отрезок кода, подсхема  $D$  вычисляет  $f(\tilde{\sigma})$ . Обычно подсхема  $C$  является универсальной (не зависящей ни от класса  $F$  реализуемых ф-ций, ни от конкретной ф-ции  $f$ ); подсхемы  $A$  и  $D$  не зависят от  $f$ , но зависят от  $F$ ; подсхема  $B$  зависит от  $f$ ; эта подсхема содержит осн. часть элементов всей схемы. Кодирование не обязательно должно быть взаимно однозначным. В небольшом количестве дополнительная информация может содержаться в подсхеме декодирования  $D$ . Л. к. п. фактически сводит задачу синтеза схем к задаче кодирования ф-ций, осп. трудность задачи в этом случае сосредоточена здесь. Особенно удобен Л. к. п. в том случае, если схемы имеют достаточно большие возможности (схемы из функциональных элементов, логические сети и алгоритмы).

Примеры асимптотически оптим. локального кодирования.

1. Пусть  $\mathfrak{S}_n$  — класс симметрических ф-ций  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Кодом ф-ции  $f(x_1, \dots, x_n)$  является набор  $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ , где  $\pi_i$  — значение функции  $f$  на (любом) наборе с  $i$  единицами.

2. Пусть  $\mathfrak{R}^{n,k}$  — класс ф-ций  $f(x_1, \dots, x_n)$ , принимающих значение 1 на  $k$  наборах  $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_k$  значений аргументов. Если  $\frac{\log k}{n} \rightarrow 0$ , то асимптотически оптим. локальным кодом является набор  $\tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_k$  (длины  $k$ ).



3. Пусть  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  набор из нулей и единиц,  $|\tilde{\alpha}| = \alpha_1 2^0 + \alpha_2 2^1 + \dots + \alpha_n 2^{n-1}$  и  $\mathfrak{M}_n$  — класс вектор-функций  $F = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ , удовлетворяющих условию: если  $|\tilde{\alpha}| \leq |\tilde{\beta}|$ , то  $|F(\tilde{\alpha})| \leq |F(\tilde{\beta})|$ . Нелокальный (но асимптотически оптимальный) код вектор-функции  $F$  — это набор длины  $2^{n+1} - 1$ , имеющий  $2^n$  нулей и  $2^n - 1$  единиц, в котором число единиц, стоящих перед  $i$ -м нулем, равно  $|F(\tilde{\alpha})|$ , где  $|\tilde{\alpha}| = i - 1$ . Пусть набор  $\tilde{\pi}$  разбит на  $2^k$  частей:  $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_1, \dots, \tilde{\pi}_{2^k})$  ( $\tilde{\pi}_i$  имеет длину  $2^{n-k+1}$ , кроме  $\tilde{\pi}_{2^k}$ ) и  $\tilde{\rho}_i$  — набор длины  $n$  такой, что  $|\tilde{\rho}_i|$  есть число единиц в наборе  $(\tilde{\pi}_1, \dots, \tilde{\pi}_{i-1})$ . Асимптотически оптим. локальный код для  $F$  (при  $\frac{n}{2^{n-k}} \rightarrow 0$ ) — это набор  $\tilde{\rho}_1 \tilde{\pi}_1 \tilde{\rho}_2 \tilde{\pi}_2 \dots \tilde{\rho}_{2^k} \tilde{\pi}_{2^k}$ .

О. Б. Ляпунов.

**ЛЯПАС** — язык программирования, ориентированный на описание логических задач. К таким задачам относятся, напр., задачи логики математической, автоматов теории, булевой алгебры, графов теории, кодирования теории. Разработан в 1966. Л.-70 представляет собой развитие языка Л., предложенного ранее для применения преимущественно в области логического синтеза дискретных автом. устройств. Л.-70 обладает тремя уровнями. Первый из них близок к языкам машинным и позволяет достаточно полно использовать возможности современных ЦВМ. Его осн. операндами являются булевы векторы и матрицы, над которыми определяется ряд элементарных операций. Второй уровень содержит аппарат для расширения языка путем введения новых операторов, реализуемых подпрограммами, поэтому Л.-70 относится к открытым, растущим языкам. Третий уровень содержит аппарат сегментирования, облегчающий составление больших программ, которые не помещаются целиком в оперативной памяти. Язык Л.-70 положен в основу одноименной системы программирования, осн. блоком которой является быстросействующий транслятор. Все блоки системы оформлены как подпрограммы, их можно использовать при разработке новых программ. Система Л.-70 реализована на отечественных вычисл. машинах «М-20», «БЭСМ-3М», «БЭСМ-4», «Минск-2», «М-220», «Минск-22», «БЭСМ-6».

Лит.: Автоматизация синтеза дискретных автоматов. «Труды Сибирского физико-технического института», 1966, в. 48; Закревский А. Д. Алгоритмический язык ЛЯПАС и автоматизация синтеза дискретных автоматов. Томск, 1966 [библиогр. с. 245—261]; Логический язык для представления алгоритмов синтеза релейных устройств. М., 1966; Закревский А. Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. М., 1971 [библиогр. с. 502—504].

А. Д. Закревский.

**ЛЯПУНОВА МЕТОДЫ** — методы, позволяющие качественно исследовать некоторые важные свойства (напр., устойчивость, диссипативность) решений обыкновенных дифферен-

циальных уравнений, не отыскивая сами решения. Разработал их в 1892 рус. математик А. М. Ляпунов. Они составляют основу теории устойчивости решений обыкновенных дифф. уравнений. Проблема устойчивости впервые возникла из практических задач небесной механики, однако впоследствии было обнаружено, что она возникает во всех научных задачах, связанных с изучением движения любых материальных систем, описываемых обыкновенными дифф. уравнениями. Исследования этой проблемы до А. М. Ляпунова относились к частным случаям движения и не всегда обладали достаточной матем. строгостью. Строгие определения устойчивости, общая постановка задачи, а также корректные методы ее решения (т. н. 1-й и 2-й Л. м.) впервые предложены в диссертации А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения».

Рассмотрим систему дифф. уравнений, описывающую движение некоторой динамической системы:

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y), \quad (1)$$

где  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $g = (g_1, \dots, g_n) — (n \times 1)$ -матрицы (векторы-столбцы),  $g_i = g_i(t, y)$  — некоторые функции независимой переменной  $t$  (обычно — времени) и вектора фазовых координат системы  $y$ , удовлетворяющие условиям существования и единственности решений системы (1). Предположим, что необходимо изучить некоторое частное, т. н. невозмущенное, движение исследуемой динамической системы, которому соответствует частное решение  $y = z(t)$  системы дифф. уравнений (1). Все прочие движения системы, которым соответствуют любые решения  $y \neq z$ , наз. возмущенными движениями, а разности  $x = y - z$  — возмущениями. Подставив в уравнение (1)  $y = x + z$  ( $z$  предполагается известной функцией  $t$ ), получим т. н. уравнение возмущенного движения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (2)$$

где  $f(t, x) = g(t, x + z) - g(t, z)$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Невозмущенное движение наз. устойчивым (по Ляпунову), если для всякого положительного числа  $\varepsilon$  найдется положительное число  $\delta$ , такое, что для всех возмущений  $x(t)$  (или для всех возмущенных движений), для которых в начальный момент  $t = t_0$  выполняется неравенство  $\|x(t_0)\| < \delta$ , при всех  $t \geq t_0$  будет выполняться неравенство

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad (3)$$

где  $\|\cdot\|$  — норма вектора.

**О п р е д е л е н и е 2.** Если невозмущенное движение устойчиво (в смысле определения 1) и при некотором  $\Delta > 0$  для всех возмущений, удовлетворяющих неравенству  $\|x(t)\| < \Delta$ , существует предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ , то невозмущенное движение наз. асимптотически устойчивым (по Ляпунову).

Определения 1 и 2, введенные А. М. Ляпуновым, устанавливают связь между понятием устойчивости и характером изменения во времени (часто говорят — ростом) нормы  $\|x(t)\|$  решения  $x(t)$  уравнения (2). Идея 1-го Л. м. заключается в том, что рост  $\|x(t)\|$  оценивается по шкале ростов, заданной некоторым упорядоченным семейством известных ф-ций  $t$ . А. М. Ляпунов использовал ф-ции  $e^{\lambda t}$ , для которых показателем роста служит параметр (вещественное число)  $\lambda$ . В соответствии с такой шкалой показатель роста решений  $x(t)$  определяется по формуле

$$\lambda = \chi(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\|,$$

где символ  $\overline{\lim} \varphi(t)$  означает верхний предел ф-ции  $\varphi(t)$ . В современной литературе число  $\lambda$  наз. характеристическим показателем (показателем Ляпунова) решения  $x(t)$  (сам А. М. Ляпунов пользовался числом  $\alpha = -\lambda$  и называл его характеристическим числом). Характеристический показатель  $\lambda$  представляет собой функционал, определенный на множестве ф-ций  $\|x(t)\|$ , заданных на полуоси  $(t_0, \infty)$ . Очевидно, что если  $\lambda > 0$ , то  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$ , а если  $\lambda < 0$ , то  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Вообще, чем больше показатель  $\lambda$ , тем «быстрее» растет ф-ция  $\|x(t)\|$ . А. М. Ляпунов доказал ряд теорем о характеристических показателях решений уравнения (2) и о влиянии на показатели различных преобразований, производимых над этим уравнением. 1-й Л. м. позволяет решить задачу об устойчивости, если по виду правой части уравнения (2) удастся вычислить характеристические показатели его решений или, по крайней мере, найти некоторые их оценки. Наиболее исследованы этим методом линейные системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (4)$$

где  $A(t)$  —  $(n \times n)$ -матрица, зависящая от  $t$ . Важные результаты получены для линейных периодических систем вида (4), у которых  $A(t) \equiv A(t + \omega)$ ,  $\omega > 0$ , а также для ряда других частных случаев. Развивая 1-й Л. м., более поздние исследователи использовали в качестве шкалы ростов двупараметрическое семейство функций, напр.  $t^\mu e^{\lambda t}$ . Идеи 1-го Л. м. получили применение и глубокое развитие в трудах многих отечественных и зарубежных ученых.

Идея 2-го (т. н. прямого) Л. м. восходит к известной теореме Лагранжа об устойчивости равновесия консервативной механической системы (1788), в которой утверждалось, что состояние равновесия устойчиво, если в нем достигается минимум потенциальной энергии системы. Строгое доказательство этой теоремы позднее предложил Л. Дирихле. Теорема Лагранжа — Дирихле относится к частному случаю движения, а ее практическое ис-

пользование затруднено необходимостью отыскивать потенциальную энергию системы, что далеко не всегда удается сделать. 2-й Л. м. представляет собой далеко идущее обобщение идеи Ж.-Л. Лагранжа. Для исследования устойчивости движения системы (1) А. М. Ляпунов предложил использовать спец. знакоопределенные пробные ф-ции  $v(t, x)$  (т. н. функция Ляпунова, отдаленный аналог энергетической функции Лагранжа). Факт устойчивости или неустойчивости был связан с наличием такой функции  $v(t, x)$ , производная которой, взятая согласно уравнениям возмущенного движения, обладает спец. свойствами. Так, напр., невозмущенное движение системы (1) устойчиво, если произ-

водная  $\frac{dv(t, x)}{dt}$  функции Ляпунова, взятая вдоль фазовых траекторий системы (2), знакопостоянна и обладает противоположным по отношению к  $v(t, x)$  знаком. А. М. Ляпунов доказал ряд теорем о ф-циях  $v(t, x)$ , составивших основу его 2-го метода, и с их помощью получил некоторые конкретные результаты. Одним из наиболее известных результатов такого рода явилось строгое обоснование метода исследования устойчивости по уравнениям 1-го приближения (метод линеаризации). Этим методом без достаточного обоснования пользовались ранее многие исследователи, однако А. М. Ляпунов доказал, что в ряде случаев такой метод приводит к ошибочным результатам, и сформулировал строгие условия, при которых им можно пользоваться.

Идея 2-го Л. м. оказалась чрезвычайно эффективной и плодотворной. Применением и дальнейшим развитием этого метода занимались многие ученые. На основе 2-го Л. м. были решены задачи об устойчивости в целом (т. е. при любых возмущениях  $x(t)$ ) и в области, об абсолютной устойчивости, о диссипативности (предельной ограниченности решений), об устойчивости на конечном интервале времени и при постоянно действующих возмущениях, об устойчивости дискретных, стохастических систем, систем с запаздыванием и с распределенными параметрами, систем, заданных дифф. уравнениями в банаховом пространстве, и много других задач. Кроме классической проблемы об устойчивости движения, 2-й Л. м. находит применение и в ряде других задач, напр., в задаче о синтезе оптим. систем автомат. управления. Л. м. являются теор. основой решения многих прикладных задач, в том числе задач теории автомат. управления (техн. кибернетики). См. также *Устойчивости дискретных систем теория, Устойчивости непрерывных систем теория*.

Лит.: Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л., 1950; Былов Б. Ф. [и др.]. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966 [библиогр. с. 558—565]; Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., 1966; Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967 [библиогр. с. 466—469]; Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. Пер. с англ. М., 1964 [библиогр. с. 160—161]. Ю. Н. Чеховой.

«М-20» — цифровая электронная вычислительная машина общего назначения, ориентированная на решение сложных математических задач. Разработана в 1958 в Ин-те точной механики и вычисл. техники АН СССР. «М-20» послужила исходной моделью семейства совместимых вычисл. машин. «М-220» и «М-222». Ср. быстродействие — 20 тыс. трехадресных операций в 1 сек. Система счисления двоичная. Способ представления чисел — с плавающей запятой. Разрядность — 45 двоичных разрядов (мантисса — 36 разрядов, знак числа — 1 разряд, порядок — 7 разрядов, признак числа — 1 разряд). Диапазон чисел, с которыми оперирует машина — в пределах от  $2^{-64}$  до  $2^{+63}$ .

Структура команд — трехадресная, с автомат. изменением адресов. Каждый адрес состоит из 12 двоичных разрядов, что позволяет хранить в оперативном запоминающем устройстве (цикл обращения 6 мсек, выполнено на ферритовых сердечниках) 4096 слов. В машине предусмотрены внешние ЗУ на магн. барабанах и лентах. Три магн. барабана дают возможность запомнить свыше 12 тыс. слов, а четыре блока накопителей на магн. ленте позволяют хранить свыше 300 тыс. чисел или команд. Скорость обмена информацией с ОЗУ, без учета времени ожидания, составляет для магн. барабанов 12 тыс., а для магн. лент — 2800 слов в 1 сек. Ввод информации в машину производится с перфокарт со скоростью 100 карт в 1 мин. Подача карт осуществляется широкой стороной с мех. считыванием пробивок. Устройства вывода — быстродействующее печатающее устройство (скорость 15 строк/сек) и выходной перфоратор (скорость 50 карт/мин). Промежуточное буферное ЗУ на магн. барабане позволяет осуществлять одновременно вывод результатов и производить вычисления.

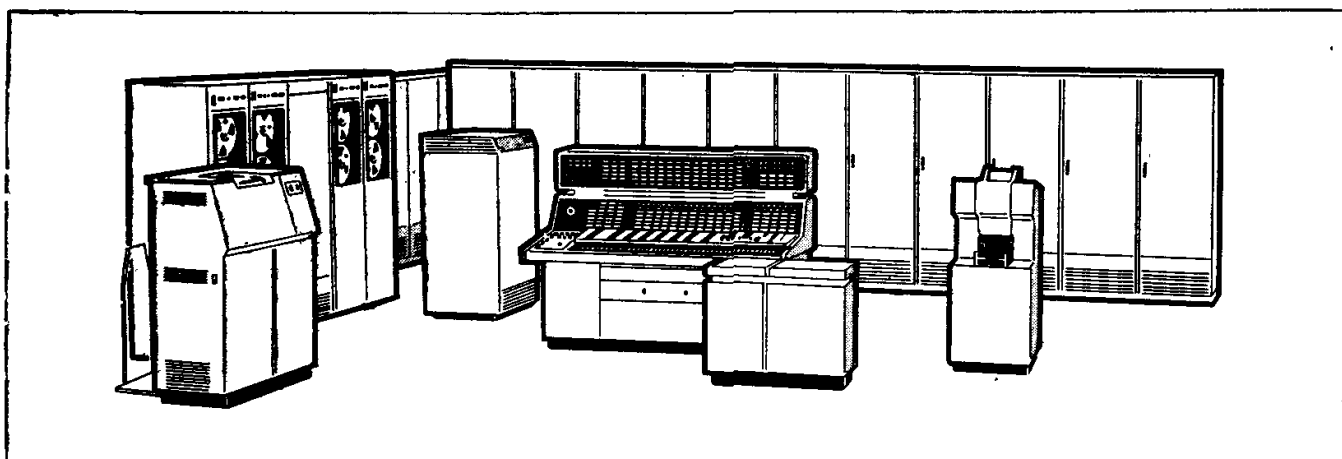
Машина построена по мелкоблочному принципу. Стандартные блоки выполнены на им-



«М-220» — цифровая электронная вычислительная машина общего назначения. Предназначена для решения научно-технических, а также отдельных классов экономических задач. По структуре и системе команд «М-220» аналогична «М-20», но построена на полупроводниковых приборах. Быстродействие — около 27 тыс. трехадресных операций в 1 сек.

Центр. вычислитель состоит из блока управления и арифм. устр-ва; предназначен он для выполнения операций над числами и командами. Оперативное ЗУ (ОЗУ) на ферритовых сердечниках со временем обращения 6 мсек имеет емкость от 4 тыс. до 16 тыс. 47-разрядных слов.

Внешнее ЗУ (ВЗУ) на магн. ленте состоит из 4 лентопротяжных механизмов и одной стойки управления, имеет общую емкость 4 млн. слов. Скорость чтения или записи информации составляет 5 тыс. слов в 1 сек (предусмотрена возможность увеличения емкости накопителя на магн. лентах до 16 млн. слов). ВЗУ на магн. барабане имеет емкость 24 тыс. слов. Кроме того, имеется буферное ЗУ на 1024 слова, используемое для вывода информации. Макс. время обращения к магн. барабану не превышает 60 мсек, а скорость обмена составляет 17 тыс. слов в 1 сек. Предусмотрена возможность дополнительно под-



Цифровая вычислительная машина «М-220».

пульсных потенциальных элементах. В машине использовано 4500 электронных ламп и 35 тыс. полупроводниковых диодов.

Лит.: Ляшенко В. Ф. Программирование для цифровых вычислительных машин М-20, БЭСМ-3М, БЭСМ-4, М-220. М., 1967 [библиогр. с. 419].

Ю. В. Старченко.

ключать магн. барабаны, увеличивая общую емкость накопителя до 65 тыс. слов.

Устр-во управления выводом обеспечивает вывод информации на алфавитно-цифровое печатающее устройство типа АЦПУ-128 или на перфоратор результатов. Скорость работы

перфоратора — 100 карт/мин, АЦПУ — 400 строк/мин. АЦПУ позволяет печатать информацию в восьмеричной, десятичной или алфавитно-цифровой форме. Длина строки — 128 знаков. С помощью АЦПУ можно вывести таблицы и графики.

Устр-во ввода с перфокарт позволяет вводить информацию со скоростью 700 карт/мин. Наличие коммутации в нем позволяет обрабатывать карты, перфорированные на любом устр-ве. В машине имеется управляющий канал (вход и выход) на 45 двоичных разрядов для обмена информацией с др. устр-вами (напр., устр-во сопряжения с линиями связи) или с вычисл. машинами, имеющими режим прерывания программ. Управляющий канал (вход и выход) на 18 двоичных разрядов позволяет подключать аналоговые системы или реальные объекты через спец. преобразователи, а также графопостроители. Наличие сигналов прерывания и каналов обмена позволяет производить обмен информацией между машинами, а также вести выполнение одной программы параллельно на нескольких ЦВМ. Возможности машины значительно расширяются при подключении долговременного ЗУ (ДЗУ) емкостью на 16 тыс. слов. Обращение к ДЗУ производится с помощью команды переключения.

Для построения схем в «М-220» использована импульсно-потенциальная система элементов, работающая на частоте 660 кГц. Для повышения надежности, облегчения контроля за выполнением вычисл. процесса и устранения неисправностей в машине осуществлен контроль по модулю 2 передачи информации между магн. ОЗУ, центр. вычислителем, внешними магн. ЗУ, внеш. выходными и входными устройствами и контроль над выборкой числа или команды по адресу.

Для увеличения скорости выполнения операций применен ряд логич. приемов: прием следующей команды совмещен с выполнением текущей, умножение производится одновременно на два разряда с запоминанием переносов, сложение и вычитание при операциях умножения и деления совмещены во времени со сдвигами.

Лит.: Ляшенко В. Ф. Программирование для цифровых вычислительных машин М-20, БЭСМ-3М, БЭСМ-4, М-220. М., 1967 [библиогр. с. 419].

Ю. В. Старченко.

**МАЖОРИТАРНЫЙ ЭЛЕМЕНТ** — устройство, реализующее мажоритарную операцию (см. *Логика мажоритарная*). Представляет собой частный случай порогового элемента. На базе М. э. может быть реализован функционально полный набор логических элементов ЦВМ. Наиболее естественно М. э. реализуются на основе параметронов и «твинов» — пар Готто на туннельных диодах. На практике получили распространение двузначные трехвходовые, реже пятивходовые, М. э. Применяется в качестве восстанавливающего органа в схемах с многократным резервированием, а также в качестве функционального элемента в вычислительных и управляющих устройствах дискретного действия.

Б. Л. Овсевич.

**МАЙЕРА ЗАДАЧА** — вариационная задача с подвижными концами и дифференциальными связями. Формулируется так: среди кривых  $y(x)$ , удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$\Phi_i(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

$$x_1 \leq x \leq x_2, y = (y_1, \dots, y_n),$$

$$i = 1, \dots, m, m < n$$

и граничным условиям

$$\Phi_i(x_1, y(x_1)) = 0, \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, k, k \leq n + 1,$$

$$\eta_j(x_2, y(x_2)) = 0, \quad (3)$$

$$j = 1, \dots, p, p \leq n + 1,$$

найти такую кривую, которая доставляет минимум функционалу

$$I = g(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)).$$

При этом ф-ции  $y, \Phi_i, \varphi_i, \eta_j, g$  должны удовлетворять определенным требованиям гладкости.

Ур-ния (2), (3) определяют в  $(n + 1)$ -мерном пространстве некоторые поверхности  $S_1$  и  $S_2$ . Одна из них (напр.,  $S_1$ ) может вырождаться в точку. В этом случае М. з. является задачей с одним фиксированным и одним подвижным концами.

М. з. совпадает с *Больца задачей*, если в последней в функционале  $I$  ф-ция  $f \equiv 0$ . Тогда и вся теория задачи Больца полностью переносится на М. з. В частности, для М. з. справедливо правило множителей и все следствия, вытекающие из него, — условия трансверсальности, ур-ния Эйлера и условия Вейерштрасса — Эрдмана для угловых точек.

Если рассматривать кривые  $(y_1(x), \dots, y_n(x), y_{n+1}(x))$ , удовлетворяющие условиям (1—3) и, кроме того, условиям  $y_{n+1}(x) = 0, y_{n+1}(x) \times (x_2 - x_1) = g$ , и записать  $I$  в виде  $I = \int_{x_1}^{x_2} y_{n+1}(x) dx$ , то в таком виде М. з. эквивалентна *Лагранжа задаче*.

Лит. см. к ст. *Вариационное исчисление*.

Ю. М. Данилин.

**МАК-КЛАСКИ АЛГОРИТМ** — алгоритм построения сокращенной дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) представления булевой функции из ее совершенной дизъюнктивной нормальной формы. М.-К. а. основан на использовании некоторого спец. способа представления конституэнт и импликант, а также задания совершенной ДНФ булевых функций. В соответствии с этим способом конституэнты единицы представляют с помощью условных чисел, называемых номерами соответствующих конституэнт. Номер конституэнты определяется числом, запись которого в двоичной системе счисления совпадает с набором значений переменных, на котором конституэнта принимает единичное значение. Совершенная ДНФ ф-ции задается мн-вом номеров конституэнт единицы этой ф-ции.

Если номера конституэнт записываются в двоичной системе счисления, то элементарные произведения при заранее фиксированной нумерации переменных представляются с помощью последовательностей нулей, единиц и меток. Переменной без отрицания соответствует «1», переменной с отрицанием — «0», а отсутствию переменной — метка (например, при  $n = 4$   $x_1 x_3 x_4$  обозначается 1—01,  $x_1$  — 1 — — и т. п.).

М.-К. а. при такой записи состоит в следующем. Номера конституэнт заданной булевой ф-ции разбиваются по числу единиц в их двоичной записи на непересекающиеся группы, и каждой группе присваивается такой индекс, что в группу с индексом ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) входят все конституэнты, в двоичной записи номеров которых содержится  $i$  единиц. Между номерами конституэнт, входящими в группы, индексы которых отличаются на единицу, производятся попарные сравнения. Если сравниваемые номера отличаются значением некоторого разряда (например, 0001 и 0101), на его месте ставят метку (0—01), а номера, над которыми выполнено сравнение, отмечаются. Сравнение номеров конституэнт и получение в результате некоторых новых номеров с метками, представляющих элементарные произведения, соответствует выполнению операции склеивания сравниваемых конституэнт. К полученным номерам снова применяют операцию попарного сравнения, которая в этом случае уже соответствует склеиванию элементарных произведений. Номера с метками, над которыми выполнено сравнение, снова отмечаются. Сокращенная ДНФ заданной ф-ции получается в результате выполнения всех возможных операций попарного сравнения и содержит только те элементарные произведения, номера которых после всех сравнений останутся неотмеченными. Выбор только неотмеченных элементарных произведений соответствует выполнению всех возможных операций поглощения. Наряду с двоичной системой счисления для записи номеров конституэнт иногда используют десятичную (т. н. усовершенствованный М.-К. а.). При такой записи не нужны спец. метки в представлении номеров элементарных произведений. Однако для отображения результатов сравнения номеров конституэнт и представлений элементарных произведений в этом случае приходится формировать дополнительные признаки, являющиеся некоторым упорядоченным мн-вом номеров и их разностей. Это приводит к усложнению процедуры сравнения. Более сложным при использовании десятичной системы счисления оказывается и переход от получающегося в результате работы М.-К. а. представления импликант к их записи в явном виде.

М.-К. а. является модернизацией первого этапа *Квайна метода минимизации* булевых функций. Метод минимизации, основанный на использовании М.-К. а., обычно называют методом Квайна — Мак-Класки. Этот метод очень удобен на практике, т. к. позволяет заменить громоздкую запись конституэнт и им-

пликант более простой и существенно уменьшает число сравнений конституэнт и элементарных произведений при построении сокращенной ДНФ.

Лит.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]; Mc Cluskey E. J. Minimization of boolean functions. «The bell system technical journal». 1956, v. 35, № 6.

Ю. Л. Иваськин.

**МАКРОКОМАНДА** — оператор в машинно-ориентированных языках программирования, реализуемый несколькими машинными командами. С помощью М. можно заказать для задачи некоторые ресурсы, возбудить процесс ввода — вывода, вызвать в решение подчиненную задачу и т. д. *Подпрограммам* операционной системы, обрабатывающим М., свойственен, как правило, высокий приоритет, особенно если они связаны с обработкой информации в реальном масштабе времени. Близким к М. понятием в языках машинных является экстракод-команда со спец. кодом операции, вызывающая обращение к операционной системе.

А. И. Никитин.

**МАКРОМОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ** — математическое представление наиболее существенных связей интегрально описываемого экономического процесса, позволяющее проследить его развитие на основе идей планирования или прогнозирования. М. э. являются средством объединения частных моделей для недопущения противоречий между отдельными компонентами экономики, способствующим получению объективной оценки развития различных эконом. подсистем. В первоначальном значении под М. э. понимали модели, оперирующие синтетическими показателями (общественный продукт, национальный доход, инвестиции и т. п.). Первым опытом макроэконом. анализа является «Экономическая таблица» франц. экономиста Ф. Кенэ (1758), в которой в еще не развернутом виде сформулирована идея простого воспроизводства и введены понятия совокупного общественного продукта, основных и оборотных фондов, «эконом. излишка» (прибавочная стоимость в понимании физиократов) и т. д. Создание теории воспроизводства связано с работами К. Маркса, чьи числовые двухсекторные модели являются основой для теории воспроизводства (в т. ч. макро моделирования) и для практики планирования. Схемы К. Маркса и В. И. Ленина, предназначенные для целей общего политэконом. анализа, абстрагируются от многих сторон реального эконом. процесса. В трудах сов. экономистов и экономистов социалистич. стран они развиваются в следующих направлениях: 1) исследование процесса воспроизводства при переменных параметрах и с учетом возможно большего числа факторов; 2) согласование различных стадий итерационного процесса планирования; 3) оптимизация управления нар. хозяйством.

Существует двойное деление на макро- и микро модели экономические. Во-первых, модели классифицируют с позиций рассматриваемого объекта: М. э. описывают нар. х-во в целом, а микро модели характеризуют наиболее

«низкие» эконом. единицы. Такая классификация является результатом отражения структуры эконом. системы. Во-вторых, деление моделей связывают с к-вом позиций, представленных в модели для характеристики уже фиксированного рассматриваемого объекта, т. е. с номенклатурой позиций модели. Оба направления классификации связаны с аспектом укрупненности описания эконом. процессов. Иногда исключают из класса М. э. модели с векторной ф-цией состояния системы, напр., модели, характеризующие нар. х-во вектором выпуска продуктов-агрегатов (в качестве агрегатов можно рассматривать отрасли, секторы или подразделения). Тогда уже двухсекторные модели не принадлежат к классу М. э. В другом случае М. э. отождествляют с *моделями роста* или развития экономики, а так как к моделям роста относят и многоотраслевые модели, последние также рассматриваются как М. э. Все же определяющим признаком в понятии М. э., по-видимому, является макроуровень, так как макроподход с позиций укрупнения лучше отражать посредством указания на степень агрегирования. При таком понимании имеет смысл употреблять термины «макроагрегированная» и «макрорезаггированная» модель (напр., межпродуктовый баланс нар. х-ва). М. э., как модели общэконом. системы, должны включать двойной аспект макро, т. е. и по объекту исследования и по степени агрегирования переменных.

В зависимости от имеющейся информации и принятой при моделировании гипотезы относительно поведения системы М. э. делятся: по назначению — на оптимизационные и неоптимизационные (среди последних выделяются, напр., *балансовые модели, модели равновесия, многофакторные корреляционные*); по виду функциональных соотношений — линейные и нелинейные; по учету фактора времени — статические и динамические (в т. ч. с конечным и бесконечным интервалом планирования непрерывного и дискретного характера); по степени отражения неопределенности случайного характера — детерминированные и вероятностные; по используемому уровню агрегирования показателей, характеризующих объект. Эти последние, в свою очередь, подразделяются на такие виды: предельно укрупненные или однопродуктовые модели (в частности, модели роста в виде макропроизводственных функций); сильно агрегированные модели, с числом секторов до нескольких десятков; слабо агрегированные модели (до нескольких сотен секторов); макрорезаггированные (т. е. практически детализированные модели).

Во временном аспекте М. э. может теоретически охватывать любой промежуток времени  $0 \leq T \leq \infty$ , практически  $t_{\min} \leq T \leq t_{\max}$ , где  $t_{\max}$  определяется надежностью информации,  $t_{\min}$  — целесообразностью и необходимостью обновления некоторых элементов модели. М. э. в равной мере базируются на качественном и количественном анализе, причем

только модели, отражающие производственно-тех. факторы и социально-эконом. природу моделируемого процесса могут претендовать на адекватность.

Осн. управляющим параметром в предельно и сильно агрегированных М. э. является соотношение между потреблением и накоплением (числовые модели С. Г. Струмилина, модели В. С. Немчинова, О. Ланге и др.). Напр., по схеме Струмилина трудоспособное население страны создает в базисном году  $Y_0$  единиц национального дохода, который возрастает только за счет фондовооруженности труда, т. е.  $\Delta Y_t = EF_t$ , где  $E$  — эффект вложений, аналог фондоотдачи,  $F_t$  — основные и оборотные фонды на начало периода  $t$ . Прирост фондов  $\Delta F_t$  осуществляется за счет направления на их расширение части  $x$  национального дохода, т. е.  $\Delta F_t = x \Delta Y_t$ . На потребление расходуется  $C_t = C_0 + \Delta Y_t - \Delta F_t$ . Необходимо определить долю  $x$  национального дохода, при которой в течение 40 лет (срока трудоспособности поколения) максимизируется суммарный фонд потребления

$$\sum_{t=1}^{40} C_t = 40C_0 + F_1 \frac{1-x}{x} [(1+Ex)^{40} - 1].$$

В ряде случаев к схеме Струмилина добавляют условие монотонного роста потребления, а в критерий вводят взвешивающую функцию  $g(t) = e^{-ht}$ , т. е. рассматривают функцию по-

требления  $\sum_{t=1}^n C_t e^{-ht}$ . В процессе ее анализа

устанавливают зависимость глобального максимума от выбора ф-ции взвешивания, определяя границы области, которой должна принадлежать норма накопления  $x$ . Результаты расчетов по сочетанию накопления и потребления привлекаются при построении модели соотношения между ростом производительности труда и заработной платы. Среди вопросов, рассматриваемых на основе сильно укрупненных М. э., следует указать на соотношение темпов роста I и II подразделений. Из менее агрегированных М. э. необходимо выделить модель Л. В. Канторовича, основанную на задаче *программирования линейного*. Ингредиенты модели разбиты на 4 группы: 1) первичные ресурсы (население, природные запасы полезных ископаемых и т. п.); 2) производственные факторы (категории труда, производственные мощности, освоенные природные ресурсы); 3) промежуточные продукты (сырье, материалы и др.); 4) конечные продукты (предметы народного потребления и непроизводственные услуги). Производственные способы, относящиеся к одному периоду (производство, транспорт) и ко многим периодам (создание и использование фондов, освоение природных ресурсов), записываются в виде матрицы  $\{a_{it}^s\}$ , где  $i$  — вид продукта, ресурса и т. п.;  $t$  — год;  $s$  — технологический



способ;  $a_{it}^s < 0$  соответствует затратам,  $a_{it}^s > 0$  — выпуску продукции. План определяется заданием интенсивностей  $r_s$  технологических способов, чем фиксируются балансы по различным ингредиентам  $x_{it} = \sum_s r_s a_{it}^s$ . С помощью этих балансов записываются ограничения, определяющие допустимый план: ограничения по первичным ресурсам для всех периодов  $x_{i,t} \geq -L_{i,t}$ ; задание производственных мощностей, освоенных природных ресурсов и т. п. в начальный период  $x_{i,1} \geq -L_{i,1}$ ; балансы по промежуточным продуктам  $x_{i,t} \geq 0$ ; ограничения по конечным продуктам, напр., требование их выпуска в определенном ассортименте:  $x_{i,t} = C_{it} D_t$ . Здесь  $L_{i,t}$  — наличие различных видов ресурсов,  $C_{i,t}$  — характеристика  $i$ -й компоненты набора  $D_t$ . В качестве критерия оптимизации принимается максимум темпа роста  $\alpha$  конечных продуктов, при котором разрешима задача  $D_t = (1 + \alpha) D_{t-1}$ . Возможны и другие критерии эффективности.

Значительное внимание макро моделированию уделяется в капиталистических странах, где М. э., оперирующие синтетическими показателями, появились в начале 30-х гг. Эти М. э. отражают взаимосвязь *эконометрии* и буржуазной политэкономии. Хотя они и не разрешают кардинальных проблем политэкономии и развития капиталистической экономики, накопленный эконометрией опыт представляет большой интерес как в смысле моделирования производственно-тех. стороны воспроизводства, так и анализа ее ошибок и перспективных линий развития. Важным шагом в исследовании проблемы оптимизации экономики явилась предложенная амер. математиком Дж. фон Нейманом (1903—1957) концепция расширения и равновесия для замкнутой модели в предположении развития с постоянными темпами. В последнее время уделяется большое внимание как обобщениям модели Неймана, так и некоторым ее частным случаям, напр., простой модели Леонтьева (см. *Баланс межотраслевой*), по отношению к которой теория «расширенного равновесия» становится проще. Для исследования расширенного воспроизводства в общем случае, т. е. не только в смысле Неймана, применяются различные модификации модели Леонтьева. Осн. функциональным соотношением в модели Купманса является:  $x_t + \dot{z}_t = f(z_t) - \lambda z_t$ , где  $z_t$  — капитал в расчете на одного рабочего в момент  $t$ ,  $f(z)$  — выпуск продукции в зависимости от капитала,  $x_t$  — потребление в расчете на одного рабочего,  $\lambda z_t$  — возрастание инвестиций пропорционально росту рабочей силы, который в свою очередь пропорционален росту населения  $L_t = L_0 e^{\lambda t}$  ( $\lambda > 0$ ),  $L_t$  — население в момент  $t$  ( $L_0 = \text{const}$ ),  $\dot{z}_t$  — чистое приращение капитала на одного рабочего. В качестве

критерия принимаются:  $\max \int_0^\infty e^{-\rho t} u(x_t) dt$  — интегр. полезность на душу населения,  $\max \int_0^\infty e^{-\rho^* t} u(x_t) dt$  — суммарная полезность

для всех людей ( $\rho^* = \rho - \lambda$ ) или более сложные варианты построения *целевой функции*, напр., посредством рекуррентных соотношений, связывающих значения целевой ф-ции двух бесконечных временных интервалов, один из которых является частью другого.

Лит.: Маркс К. Капитал, т. 2. К., 1954; Ленин В. И. В приводе так званого питания про рынка. Повне зібрання творів, т. 1; Струмилин С. Г. К проблеме оптимальных пропорций. «Плановое хозяйство», 1962, № 6; Немчинов В. С. Экономико-математические методы и модели. М., 1965; Канторович Л. В. Математические проблемы расчета и анализа оптимальных динамических моделей. Новосибирск, 1965; Аллен Р. Математическая экономия. Пер. с англ. М., 1963 [библиогр. с. 647—655]; Макроэкономические модели планирования и прогнозирования. Пер. с англ. и франц. М., 1970.

В. В. Демьяненко, В. А. Коноплицкий.

**МАКСИМИНА ПРИНЦИП** — принцип оптимального поведения игроков в *игр теории*. М. п. состоит в стремлении максимизировать миним. выигрыш, имеет особенно большое значение в *играх антагонистических*, в которых приводит к получению 1-м игроком *игры значения*. Следуя М. п., игроки нередко вынуждены применять *стратегии смешанные*.

**МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ МЕТОД** — метод определения оценок неизвестных параметров для случая, когда распределение *случайной величины* принадлежит классу распределений, зависящему от конечного числа параметров. См. *Статистические оценки*.

**МАНИПУЛЯТОР** — механизм, осуществляющий под управлением оператора манипуляции, эквивалентные действиям руки человека. М. применяются для выполнения работ, требующих захвата предметов, перемещения их в любую зону рабочего пространства в недоступной для человека среде (высокая т-ра, радиоактивность и т. п.), или выполнения подобных действий с приложением больших сил (напр., манипулирование крупной поковкой под молотом). Ведутся работы по созданию систем управления М. с использованием цифровых вычислительных машин. И. Т. Пархоменко.

**«MARK-1»** — первая в мире автоматическая электромеханическая цифровая вычислительная машина. Создана фирмой «*Интернейшенал бизнес машинз корпорейшен*» в 1944 в сотрудничестве с Гарвардским ун-том (США).

Машина представляла собой синхронное вычислительное устр-во параллельного действия, оперировала с числами, имевшими 23 десятичных цифровых разряда и один знаковый разряд; предусматривалась возможность производить вычисления с 46-разрядными словами. «М.-1» выполняла пять осн. операций (сложение, вычитание, умножение, деление и отыскание в таблицах величин, предварительно вычисленных машиной). В ней было 60 регистров

для записи констант, 72 накапливающих регистра, центр. блок умножения и деления, устр-ва для вычисления элементарных трансцендентных ф-ций  $\log_{10} x$ ,  $10^x$  и  $\sin x$  и 3 механизма для считывания кодов программ с перфолент. Ввод данных — с перфокарт и позиционных переключателей (использовались затем и электрифицированные пишущие машинки).

Каждый из 60 регистров констант состоял из 24 десятипозиционных переключателей. Каждый из 72 накапливающих регистров состоял из 24 цифровых колес, посредством которых можно было складывать и запоминать числа. Цифровое колесо представляло собой, по существу, десятипозиционный переключатель, переключаемый с помощью магнитной муфты. Операция вычитания (как обратная операции сложения) выполнялась путем представления чисел в дополнительном коде. Блок умножения и деления производил умножение следующим образом. Вначале образовывались и запоминались 9 целых чисел, кратных множителю, затем из них выбирались числа, соответствующие всем цифрам множителя. Отобранные числа сдвигались и складывались в столбик. Положение запятой — фиксированное и устанавливалось на коммутационной панели. Деление выполнялось тем же блоком аналогичным образом. Логарифмы, антилогарифмы и синусы величин вычислялись методом разложения в ряд этих ф-ций с использованием спец. регистров. Каждый из трех механизмов считывания с перфоленты был снабжен кольцевой лентой с проперфорированными на ней через равные промежутки кодами ф-ций и интерполяционными коэфф. Вначале лента автоматически перематывалась в направлении ближайшего значения аргумента, затем машина считывала значение ф-ции и производила интерполирование. Устр-во управления состояло из зубчатого колеса, которое перематывало «управляющую» перфоленту. Лента имела поперечные ряды отверстий. В любом из рядов было по 24 равноотстоящих отверстия, разбитых на 3 группы А, В и С по 8 отверстий. Каждый ряд отверстий содержал команду: «Взять число из ячейки А, послать его в В, произвести операцию С». Устр-во управления, интерполяторы и цифровые колеса работали синхронно, т. к. их привод осуществлялся мех. системой зубчатых передач от одного электромотора. Оsn. цикл длился 300 мсек. Среднее время выполнения операции умножения составляло около 3 сек.

«М.-1» была передана Гарвардскому ун-ту и проработала более 15 лет. На ней были выполнены расчеты для многих вычисл. лабораторий США.

Лит.: Atken H. N., Norreg G. M. The automatic sequence controlled calculator. «Electrical engineering», 1946, v. 65, august — september — october — november: У и л к с М. В. Автоматические цифровые вычислительные машины. Пер. с англ. Л., 1960 [библиогр. с. 316—329]. П. В. Походило.

**МАРКЕР** — специальный знак, наносимый на носитель информации (магнитную ленту или магн. барабан, перфоленту, перфокарту и

т. п.) вместе с основными запоминаемыми данными. М. предназначен для некоторых служебных ф-ций, связанных с переработкой информации (поиск начала или конца требуемой зоны, стирания), распознаванием характера записанной информации (М. адресный, числовой), размещением информации на носителе (напр., М. отделяет одну зону на магн. ленте или барабане от другой) и т. д. Синхронизирующие М. служат для управления процессом записи и считывания информации. Для представления значений М. используют пространственные (отдельная дорожка на магн. ленте), временные (порядок следования) или физические (перфорация, цветные метки на магн. ленте) признаки.

Ю. Л. Иваськин.

**МАРКОВА ЦЕПЬ** — марковский процесс с дискретным временем и конечным или счетным множеством состояний. Пусть  $\{x_1, x_2, \dots\}$  — состояния М. ц.; обычно считают, что временной параметр  $t$  пробегает неотрицательные целые числа. М. ц. определяется набором вероятностей перехода  $p_{ij}(n)$ , т. е. вероятностями на  $n$ -ом шаге перейти из состояния  $i$  в состояние  $j$ . Если эти вероятности не зависят от  $n$ , то М. ц. наз. однородной. С помощью М. ц. описывается эволюция любой системы, имеющей конечное или счетное мн-во состояний и изменяющей свои состояния под влиянием независимых случайных импульсов. Пусть  $X_n$  — состояние системы в момент  $n$ , а  $g(n, x, y)$  — состояние, в которое переходит система из состояния  $x$ , если в момент  $n$  на нее воздействует импульс  $y$ . Тогда, если  $Y_1, Y_2, \dots$  — последовательность независимых импульсов, то последовательность  $x_n = g(n, X_n, Y_n)$  будет М. ц. с переходной вероятностью  $p_{ij}(n) = p\{g(n, x_i, Y_n) = x_j\}$  (величина  $g(n, x_i, Y_n)$  — случайная величина, принимающая значения  $x_1, x_2, \dots$ ; слева указана вероятность того, что эта случайная величина равна  $x_j$ ). Если  $p_i(0)$  обозначает вероятность того, что система в начальный момент ( $t = 0$ ) находится в состоянии  $x_i$ , то можно вычислить вероятность любого отрезка траектории системы, т. к. траектория системы на отрезке  $[0, n]$  является последовательностью ее значений  $x(0), x(1), \dots, x(n)$ :  $p\{x(0) = x_{i_0}, x(1) = x_{i_1}, \dots, x(n) = x_{i_n}\} = p_{i_0 i_1}(1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(n)$ . Зная вероятности перехода  $p_{ij}(n)$ , которые наз. вероятностями перехода за один шаг, можно вычислить вероятности перехода за несколько шагов  $p_{ij}(m, n)$ , т. е. вероятность системы в момент  $n$  попасть в состояние  $j$ , если она в момент  $m < n$  находилась в состоянии  $i$ . Справедлива формула

$$p_{ij}(m, n+1) = \sum_k p_{ik}(m, n) p_{kj}(n, n+1) \quad (1)$$

(суммирование справа производится по всевозможным значениям индекса, указанного под

знаком суммы). При изучении вероятностей перехода удобно располагать их в матрицы

$$P(m, n) = (p_{ij}(m, n)), \quad P(n) = (p_{ij}(n))$$

( $i$  указывает номер строки, а  $j$  — номер столбца, на пересечении которых стоит элемент, указанный в обоих равенствах справа). Матрицы такого вида наз. *стохастическими*; они представляют собой матрицы с неотрицательными элементами, причем сумма элементов по строке равна 1. Произведение стохастических матриц также является стохастической матрицей. Соотношение (1) с помощью матриц записывается так:

$$P(m, n) = P(m+1) P(m+2) \dots P(m+n).$$

Одной из важнейших задач М. п. является изучение поведения вероятностей  $p_{ij}(m, n)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Эта задача рассматривается преимущественно для однородных цепей. В этом случае  $P(n) = P$  не зависит от  $n$  и, следовательно,  $P(m, n) = P^{n-m}$  (справа стоит  $(n - m)$ -ая степень матрицы  $P$ ). Т. о., задача сводится к изучению поведения  $n$ -й степени стохастической матрицы при  $n \rightarrow \infty$ . Наиболее интересным с практической точки зрения является тот случай, когда выполняется эргодическая теорема, т. е.  $p_{ij}(m, n)$  при  $n \rightarrow \infty$  стремятся к пределу  $p_j$ , не зависящему от исходного состояния  $i$ . Для М. п. с конечным мн-вом состояний для выполнения эргодической теоремы необходимо и достаточно, чтобы при некотором  $n$  матрица  $P^n$  имела хотя бы один столбец, составленный из положительных элементов; в частности, если таковой является матрица  $P$ , то эргодическая теорема выполняется (см. *Эргодическая теория*). Вероятности  $p_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(m, n)$  наз. *эргодическими вероятностями*, они являются стационарными вероятностями: если  $p\{x(0) = x_j\} = p_j$ , то  $p\{x(n) = x_j\} = p_j$  при всех  $n > 0$ . Стационарные вероятности удовлетворяют уравнению  $\sum_i p_i p_{ij} = p_j$  (здесь

$p_{ij}$  — вероятности перехода за один шаг однородной цепи). Это ур-ние с условием  $\sum_j p_j =$

$= 1$  в эргодическом случае (если справедлива эргодическая теорема) однозначно определяет эргодические вероятности. См. также *Случайных процессов теория*.

Лит.: Колмогоров А. Н. Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний. «Бюллетень Московского университета», 1937, т. 1, № 3; Сарым-сак Т. А. Основы теории процессов Маркова. М., 1954 [библиогр. с. 202—205]; Чжун К. Однородные цепи Маркова. Пер. с англ. М., 1964 [библиогр. с. 406—415]; Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения, т. 1. Пер. с англ. М., 1967; Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. Пер. с англ. М., 1970.

А. В. Скороход.

**МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС** — случайный процесс, обладающий тем свойством, что его поведение после момента  $t$  зависит только от его

значения в этот момент и не зависит от поведения процесса до момента  $t$ . Понятие М. п. как обобщение понятия динамической системы ввел сов. математик А. Н. Колмогоров (р. 1903). Говорят, что в некотором фазовом пространстве  $X$  динамическая система определена, если задана ф-ция  $p(t, x, s)$  для  $t < s$ ,  $x \in X$ , со значением в  $X$ , определяющая положение системы (последнее определяется точкой фазового пространства) в момент  $s$ , если в момент  $t$  ее положение было  $x$ . Эта ф-ция удовлетворяет эволюционному соотношению  $p(t, x, u) = p(s, p(t, x, s), u)$ , если только  $t < s < u$ . Это соотношение означает, что, находясь в момент  $t$  в точке  $x$  и попадая в определенный момент в состояние  $p(t, x, u)$ , система попутно в момент  $s$  попадет в состояние  $p(t, x, s)$ . В некотором фазовом пространстве  $X$  задан М. п., если определена ф-ция  $p(t, x, s, E)$  — *вероятность* того, что система, находясь в момент  $t$  в состоянии  $x$ , в момент  $s > t$  попадет в одно из состояний мн-ва  $E$ . При этом требуется, чтобы: 1) функция  $p(t, x, s, E)$  была определена для всех  $t < s$ , принадлежащих некоторому мн-ву моментов  $T$  (последнее наз. областью определения процесса),  $x \in X$  и  $E$  принадлежит некоторой  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{X}$  подмножеств из  $X$ ; 2) функция  $p(t, x, s, E)$  была мерой по  $E$  (так должно быть, поскольку  $p(t, x, s, E)$  есть вероятность); 3) при  $t < s < u$  выполнялось соотношение

$$p(t, x, u, E) = \int p(s, y, u, E) p(t, x, s, dy). \quad (1)$$

Чтобы это соотношение имело смысл, требуется также, чтобы  $p(t, x, s, E)$  для всех  $t < s$  и  $E \in \mathcal{X}$  было измеримо по  $x$ . Ур-ние (1) наз. уравнением Чепмена—Колмогорова и является аналогом эволюционного соотношения: при переходе из  $x$  в  $E$  за время от  $t$  до  $u$  система попутно с вероятностью  $p(t, x, s, dy)$  попадет в окрестность точки  $y$ , а затем с вероятностью  $p(s, y, u, E)$  переходит из  $y$  в  $E$ . При этом, поскольку  $y$  может быть любым, то по  $y$  нужно произвести интегрирование (просуммировать все возможности). Область определения  $T$  М. п. может быть либо некоторой последовательностью моментов времени, тогда М. п. наз. процессом с дискретным временем (в качестве  $T$  в этом случае берется гл. о. последовательность натуральных чисел), либо  $T$  является конечным или бесконечным интервалом. Различают М. п. и в зависимости от фазового пространства. Наиболее распространенные следующие случаи: а)  $X$  — конечное мн-во, тогда М. п. наз. процессом с конечным мн-вом состояний; б)  $X$  — счетное мн-во, тогда М. п. является процессом со счетным мн-вом состояний; в)  $X$  — конечномерное евклидово пространство, тогда М. п. наз. процессом с непрерывным мн-вом состояний. М. п. с дискретным временем и конечным или счетным мн-вом состояний наз. *Маркова цепями*.

Функция  $p(t, x, s, E)$ , с помощью которой определяется М. п., наз. *переходной вероятностью*, или *переходной вероят-*

ностной ф-цией М. п. Определение возможных переходных вероятностей является одной из осн. задач теории М. п. Это определение сводится в основном к тому, что для вероятности перехода нелинейное уравнение (1) заменяется линейными уравнениями, которые наз. уравнениями Колмогорова. Последние имеют различный вид для разных классов М. п. Наиболее простой случай — если  $X$  — конечное или счетное фазовое пространство, а время непрерывно; тогда переходная вероятность определяется ф-циями  $p_{ij}(t, s)$ , равными условной вероятности того, что система находится в  $j$ -ом состоянии в момент  $s$ , если в момент  $t$  она находилась в  $i$ -ом состоянии. Функции  $p_{ij}(t, s)$  удовлетворяют двум системам уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} p_{ij}(t, s) &= \sum_k p_{ik}(t, s) a_{kj}(s), \\ - \frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(t, s) &= \sum_k a_{ik}(t) p_{kj}(t, s), \end{aligned}$$

которые в этом случае и являются уравнениями Колмогорова. Эти уравнения существенно упрощаются в случае, если М. п. однородны. М. п. наз. однородным, если

$$p(t, x, s, E) = p(t + h, x, s + h, E).$$

М. п. наз. чисто разрывным, если существуют пределы

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0, h_1 \downarrow 0} \frac{1}{h + h_1} p(t - h_1, x, t + h, E) = \\ = \lambda(t, x, E) \end{aligned}$$

для всех  $E$ , не содержащих  $x$ , и

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0, h_1 \downarrow 0} \frac{1}{h + h_1} [p(t - h_1, x, t + h, \{x\}) - 1] = \\ = -\lambda(t, x), \end{aligned}$$

где  $\{x\}$  — мн-во, состоящее из одной точки  $x$ . Следует отметить, что с помощью чисто разрывных процессов описывается большинство систем, которые меняют свое состояние под влиянием случайных возмущений, возникающих в случайные моменты времени (к таким случайным возмущениям относятся, напр., поступление нового вызова на телефонную станцию, разладка одного из приборов автомат. системы и пр.).

Очень важный класс М. п. с непрерывным мн-вом состояний составляют *диффузионные процессы*. Их можно интерпретировать как вероятностное описание явления диффузии. Кроме указанных М. п., рассматриваются также М. п. смешанного типа, в которых на непрерывное (диффузионное) движение накладываются скачки. Тогда ур-ния Колмогорова имеют вид интегро-дифференциальных ур-ний.

Кроме определения переходной вероятности М. п., важной задачей является определение распределения различных функционалов от М. п. При этом М. п. рассматривается как случайный процесс (или точнее, как некоторая

совокупность марковских случайных процессов с одной и той же вероятностью перехода). Теория М. п. изучает также поведение вероятности перехода  $p(t, x, s, E)$  при  $s \rightarrow \infty$ , особенно в случае, если процесс однороден. Эта задача является основной для процессов с дискретным временем и отвечает одной из форм эргодического принципа (см. *Эргодическая теория*).

Лит.: Сарымсаков Т. А. Основы теории процессов Маркова. М., 1954 [библиогр. с. 202—205]; Дынкин Е. Б. Основания теории марковских процессов. М., 1959 [библиогр. с. 219—220]; Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М., 1963 [библиогр. с. 840—850]; Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. К., 1968 [библиогр. с. 353—354]; Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. 1—2. М., 1971—73 [библиогр. т. 1, с. 656—661; т. 2, с. 632—636]; Чжун К. Однородные цепи Маркова. Пер. с англ. М., 1964 [библиогр. с. 406—415]; Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. Пер. с англ. М., 1968 [библиогр. с. 371—379]. А. В. Скороход.

**МАССИВ** — 1) В задачах *автоматической обработки данных* — совокупность однотипных по структуре и способу использования *записей*, относящаяся к определенному этапу управленческих работ и рассматриваемая как единое целое. Иногда М. наз. *файлом* (от англ. file). Примером М. может служить совокупность учетных анкет (карточек) работников предприятия. Как правило, М. содержит большие объемы информации и размещается на внешних носителях памяти ЦВМ. При обработке М. его записи поочередно переносятся в оперативную память. Кроме записей, М. обычно содержит некоторые сведения (метки М.), позволяющие отличить один М. от другого, определить последнюю запись М. и др. 2) В языках типа *АЛГОЛ-60* —  $n$ -мерная упорядоченная совокупность однотипных элементов. Л. П. Бабенко.

**МАССИВ ИНФОРМАЦИОННЫЙ** — набор поисковых образов документов или записей фактов (данных) в *информационно-поисковой системе*. Первичные документы, поисковые образы которых хранятся в информационно-поисковой системе, образуют информационный массив документов. Существуют прямой и инверсный способы организации М. и. При *прямой* организации осн. структурным элементом массива является *запись*, включающая *адрес* хранения документа и его поисковый образ. Элементы массива в этом случае обычно размещают и нумеруют в порядке их поступления в систему. При *инверсной* организации элементом массива являются запись, включающая слово *языка информационного* (дескриптор), и адреса хранения всех документов, в поисковые образы которых входит данное слово. Э. Ф. Скороходько.

**МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМА** — одна из возможных математических формализаций реальных систем технического, производственного, экономического или биологического характера, осуществляемая с целью исследования работы системы и нахождения наиболее рационального режима ее функционирования. М. о. с. — основной объ-

ект изучения *массового обслуживания теории*. Наибольший интерес с практической и теор. точки зрения представляет изучение т. н. вероятностных М. о. с., в функционировании которых принимают участие различные вероятностные факторы: *случайные величины*, системы взаимно зависимых случайных величин, *случайные процессы* различной природы.

Исследование вероятностных М. о. с. представляет собой специфический раздел *случайных процессов теории*. Реальной системой, допускающей формализацию в виде М. о. с., является, напр., производственная станочная линия. Каждый стапок такой линии можно рассматривать как обслуживающий прибор, выполняющий ту или иную операцию обслуживания. Поступления материалов, заготовок, полуфабрикатов на линию извне образуют совокупность входящих потоков системы. Время обработки детали на станке интерпретируется как время обслуживания. Запас заготовок, подлежащих обработке, образует очередь. Выходящими потоками М. о. с. являются потоки готовых деталей, прошедших обработку, отсея бракованных изделий, производственные отходы. Группа станков, осуществляющих выполнение одной и той же производственной операции для различных деталей, образует *многолинейную* М. о. с.

*Многофазная* М. о. с. — это группа станков, последовательно выполняющих различные операции обработки одних и тех же деталей. Вынужденные перерывы в производственном процессе и в снабжении рассматриваются как блокировка (см. *Блокировка обслуживания*). Исследовать эту систему могут, напр., с целью определения таких значений параметров системы, при которых достигается максимум выпускаемой продукции за фиксированное время или минимум ожидаемых затрат при выпуске заданного к-ва продукции.

Функционирование М. о. с. сопряжено с поступлением извне или возникновением внутри системы определенных требований, вызовов, сообщений (абонентов), прохождением их через систему, расщеплением на несколько новых требований или рекомбинацией нескольких требований в одно, выходом требований из системы. Процесс поступления или возникновения абонентов носит характер *потока случайного*. М. о. с. может обладать одним или несколькими однородными или неоднородными, взаимно независимыми или зависимыми, равноправными или неравноправными входящими случайными потоками.

Осн. элементом каждой М. о. с. служит т. н. обслуживающий механизм (прибор, линия, канал) — функциональный элемент, осуществляющий непосредственно операцию обслуживания требований (задержки во времени). В различных случаях М. о. с. может содержать только один обслуживающий механизм или мн-во их (конечное или бесконечное). Длительность обслуживания требований (время обслуживания) — одна из существенных характеристик процесса обслуживания, про-

текающего в системе. Длительности обслуживания различных требований могут быть постоянными (одинаковыми или различными для различных обслуживающих механизмов), случайными (взаимно независимыми или зависимыми, распределенными по одному и тому же закону или по различным законам), управляемыми (могут зависеть от состояний в данный момент некоторых из элементов системы). Перемещение требований внутри системы от одних обслуживающих механизмов к другим происходит на основании спец. правил функционирования системы, входящих в ее описание.

Во многих М. о. с. происходит ожидание требований, поступивших к обслуживающему механизму в тот момент, когда последний занят обслуживанием ранее прибывшего требования. При этом образуется очередь требований. Очередь может быть общей для всех обслуживающих механизмов системы или перед отдельными механизмами или их группами может формироваться отдельная очередь. Требования, покидающие систему в процессе ее функционирования, образуют выходящий поток. В различных случаях системы могут иметь выходящие потоки полностью обслуженных требований, потоки частично обслуженных или совсем необслуженных требований (потери потерь). Для потребностей практики часто необходимо изучать М. о. с., в которых обслуживающие приборы время от времени могут выходить из строя. Встречаются также ситуации, когда отдельные входящие потоки системы периодически на некоторое время перестают действовать — т. е. происходит блокировка входов системы.

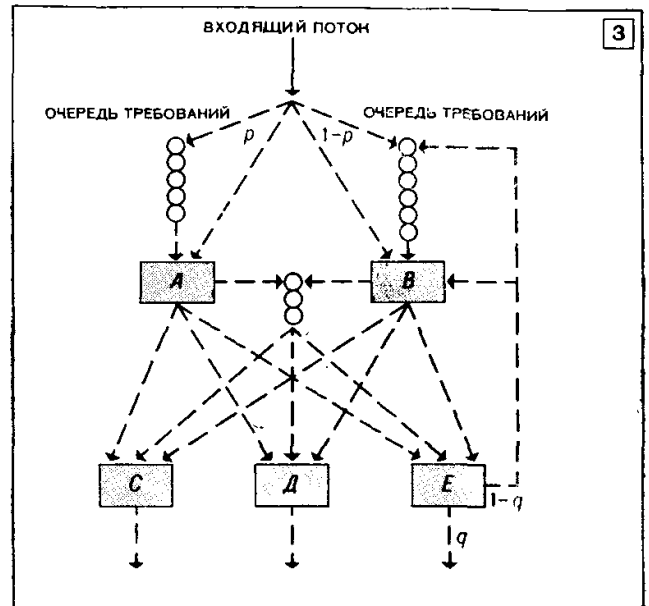
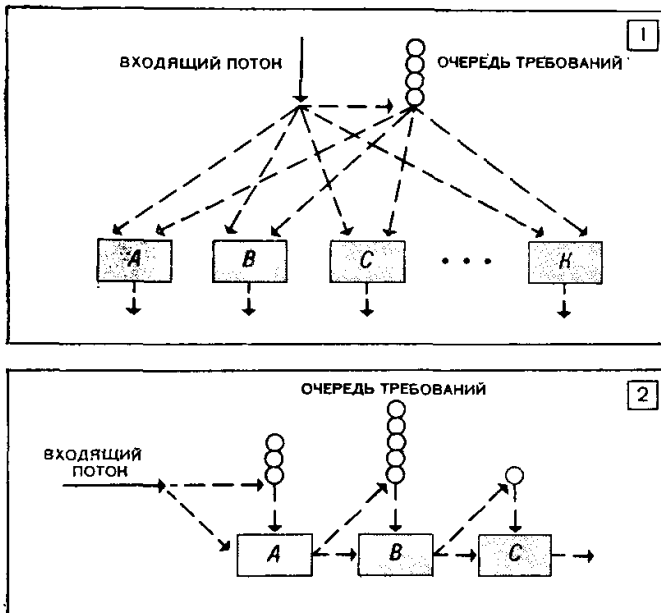
Для М. о. с. весьма существенна ее структура. В понятие структуры М. о. с. включается информация о том, сколько в системе обслуживающих механизмов каждого типа, о наличии входящих и выходящих потоков, об их взаимной приоритетности, о возможности формирования очередей перед определенными обслуживающими механизмами или их группами, о путях перемещения требований внутри системы. Различают однолинейные и многолинейные системы, однофазные и многофазные (многоэтапные). Многолинейная система в отличие от однолинейной имеет несколько (конечное, или счетное, множество) обслуживающих механизмов, выполняющих однородные операции обслуживания, т. е. осуществляющих параллельное обслуживание. Требование считается обслуженным системой, если оно прошло обслуживание на одном из ее обслуживающих механизмов.

На рис. 1 схематически изображена многолинейная система обслуживания с общим входящим потоком и одной общей для всех обслуживающих механизмов очередью ожидающих требований. Прямоугольниками *A, B, C, ..., K* представлены обслуживающие приборы, кружками — ожидающие требования, сплошной стрелкой — входящий поток, штриховыми стрелками — возможные пути движения требований. Во многофазной М. о. с.

обслуживающие механизмы выполняют разнородные операции обслуживания и осуществляют последовательный процесс обслуживания. Требование считается полностью обслуженным данной системой, если оно было полностью обслужено на каждой из ее фаз (этапов). Схематическое представление о такой системе дает рис. 2 (обозначения на нем такие же, как и на рис. 1).

Перед каждой фазой формируется самостоятельная очередь. М. о. с., являющаяся системой смешанного типа, т. е. обладающая в одно

поступающие требования однородны, допускается их накопление в очереди в любом к-ве, требования выбывают из очереди для обслуживания строго в порядке очередности их поступления в очередь. Несколько более сложным является принцип формирования очереди с *приоритетами*. При этом каждому поступившему требованию ставится в соответствие определенная характеристика — показатель приоритетности. Требование претендует на право постановки в определенное место очереди согласно значению его показателя



1. Схема многолинейной системы массового обслуживания.
2. Схема многофазной системы массового обслуживания.
3. Схема сети массового обслуживания.

и то же время свойствами многолинейных и многофазных систем, а также иногда характеризуемая и усложненными связями других типов (напр., возможность для части требований проходить повторное обслуживание на некоторых фазах), наз. сетью массового обслуживания. Схема одной из таких сетей приведена на рис. 3 (буквенные символы, проставленные около некоторых стрелок, означают вероятности направления требования по данному пути). Некоторые М. о. с. обладают, напр., такими свойствами, как ограничение времени ожидания или времени пребывания в системе, блокировка обслуживания и входящего потока, резервирование запасных элементов и восстановление вышедших из строя. Такие свойства позволяют причислять, в принципе, каждую М. о. с. к тому или иному классу систем. Рассмотрим подробнее некоторые наиболее важные классы таких систем.

М. о. с. с ожиданием — система, в которой предусматривается возможность формирования очереди требований, ожидающих обслуживания. Это самый распространенный и общий тип М. о. с. Наиболее простой частный случай такой системы имеет место, когда при функционировании системы происходит образование т. н. простой очереди, когда все

требования, ожидающие в очереди, должны быть охарактеризованы рядом числовых показателей. Такая ситуация наиболее типична для задач управления, при решении которых производится выбор требования из очереди на основании многих его характеристик. Примеры реальных М. о. с. с ожиданием: склад, отпускающий продукцию по заявкам, система автоматизированной обработки поступающей информации на электронных или перфорационных машинах, морской порт, выполняющий обработку прибывающих судов.

М. о. с. с ограничениями — система, функционирование которой обусловлено определенными ограничениями, касающимися различных ее характеристик и показателей требований, проходящих через систему. Чаще всего ограничения налагают на длину очереди, время ожидания требования и на время его пребывания в системе. При ограничении длины очереди с помощью постоянной или случайной величины требования, прибывшие в систему и заставшие там очередь предельно допустимой длины, теряются и не проходят обслуживания. При ограничении, налагаемом на время ожидания, происходят потери требований, которые, пробыв в очереди предельно допустимое время, не дождались начала



обслуживания. Если в алгоритме функционирования М. о. с. предусмотрено ограничение, накладываемое на время пребывания требования в системе, то требование покидает систему всякий раз, когда время с момента его прибытия в систему достигнет максимально возможной величины. Это может произойти либо в момент, когда требование обслуживается (происходят потери частично обслуженных требований), либо когда он ожидает в очереди (потери полностью не обслуженных требований). На практике М. о. с. с ограничениями весьма распространены. Это, напр., устройства для обработки информации, обладающие памятью конечного объема, склады ограниченной емкости, счетчики для регистрации элементарных частиц, которые вызывают свечение экрана только на протяжении определенного времени после их попадания и т. д. Исследования М. о. с. с ограничениями имеют для практики весьма важное значение, т. к. дают возможность судить о способности системы работать без потери информации или допускать такую потерю в заданных пределах.

М. о. с. с п о т е р я м и — системы, в которых не допускается образование очереди перед обслуживающими механизмами. Системы такого типа являются частными случаями систем с ограничением, когда длина очереди требования ограничена величиной нуль. На практике — это системы обработки информации без ассоциативной памяти, в частности, системы автомат. телефонных станций. Осн. интерес при изучении М. о. с. с потерями представляет определение доли всех поступивших требований, которым удалось пройти обслуживание.

М. о. с. с р е з е р в и р о в а н и е м — системы, в которых предполагается возможность выхода из строя обслуживающих механизмов и замены неисправных механизмов резервными. Для систем этого типа характерны следующие понятия (в общем случае — это случайные величины): время безотказной работы (продолжительность жизни) обслуживающего механизма, время восстановления неисправного элемента, наличный запас резервных элементов, длина очереди неисправных элементов, ожидающих восстановления. Различают нагруженный и ненагруженный резервы. Элементы нагруженного резерва в любой момент готовы к использованию для обслуживания требований. Чтобы вышедший из строя элемент заменить элементом из ненагруженного резерва, последний необходимо предварительно перевести из ненагруженного состояния в нагруженное. Издержки содержания элемента в нагруженном состоянии, как правило, больше издержек содержания его в ненагруженном состоянии. М. о. с. с резервированием широко применяются в теории надежности. Формализация реальных систем в виде М. о. с. с резервированием позволяет наиболее подробно отразить существо функционирования систем с ненадежными элементами. В частности, это относится к различным электронным схемам. Круг М. о. с. с резервированием доста-

точно обширный и многообразный. Для некоторых наиболее часто встречающихся М. о. с. введено систему сокращенных обозначений. Каждое обозначение состоит из трех символов. Первый характеризует входящий поток, второй — время обслуживания, третий — число обслуживающих приборов. Обозначение стандартное:  $M$  — Пуассона поток, или показательное время обслуживания;  $E_k$  — поток Эрланга или время обслуживания;  $G$  — рекуррентный поток;  $GI$  — независимые одинаково распределенные длительности обслуживания. Так,  $M | E_k | S$  означает многолинейную М. о. с. с  $S$  приборами, пуассоновским входящим потоком и эрланговским временем обслуживания.

В большинстве случаев никакое указание на принадлежность М. о. с. к тому или другому классу систем или о наличии у системы тех или иных особенностей не определяет полностью ни структуры системы, ни алгоритма ее функционирования. Для этого необходимо достаточно подробное словесное или матем. описание системы. Описание системы независимо от формы его задания должно содержать сведения о вероятностных факторах, влияющих на систему. Одним из наиболее универсальных и самых распространенных методов матем. описания М. о. с., являющимся одновременно и методом матем. исследования таких систем, служит аппарат вероятностных марковских процессов. При этом в каждый момент времени система может быть охарактеризована с помощью некоторого вектора, компонентами которого служат временные характеристики системы. Изменение значений этого вектора во времени определяют с помощью либо стохастической матрицы вероятностей перехода, либо некоторой системой ур-ний: разностных, дифф., интегр., интегро-дифференциальных, стохастических и т. д. Распространенными методами решения таких ур-ний и получения окончательных результатов исследования М. о. с. служат методы операционного исчисления, особенно метод производящих ф-ций и интегр. преобразований.

При исследовании достаточно сложных М. о. с., для которых марковский вектор состояний имеет большую размерность, применение аппарата марковских процессов в чистом виде становится затруднительным. В этих случаях приходится применять другие, более тонкие методы описания и исследования систем. Одним из таких методов является метод вложенных цепей Маркова, заключающийся в рассмотрении состояний системы не во все моменты времени ее функционирования, а лишь в определенные моменты, когда компоненты марковского вектора состояний, интересующие исследователя, образуют *Маркова цепь*. При описании и исследовании М. о. с. успешно применяется такой совершенный современный метод, как метод полумарковских процессов.

Во многих случаях возникает необходимость при описании системы учитывать изменение

размерности марковского вектора состояний в процессе функционирования М. о. с. При этом бывает удобно пользоваться аппаратом марковских процессов. Задание такого процесса обычно осуществляется с помощью вектора, одна из компонент которого является целочисленной и показывает размерность состояния системы в данный момент времени. Из других методов описания и исследования систем, применяемых при изучении М. о. с., следует указать на процессы с дискретным вмешательством случая, процессы, управляемые марковской цепью, управляемые полумарковские процессы и т. д. Если исследуемая система настолько сложна по своей структуре и алгоритму функционирования, что изучать ее всеми перечисленными аналитическими методами затруднительно, прибегают к методам статистического моделирования (см. *Монте-Карло метод*) с использованием ЭВМ.

При исследовании М. о. с., особенно систем с ожиданием, весьма существенным является вопрос о существовании для системы стационарного режима функционирования, т. е. вопрос о возможности установления для системы со временем такого устойчивого равновесия состояний, при котором каждому состоянию системы из определенного мн-ва состояний соответствует определенная, не изменяющаяся в дальнейшем частота появления. Для одних и тех же М. о. с. в зависимости от значений параметров системы стационарный режим может либо существовать, либо не существовать. Условия существования стационарного режима М. о. с. обычно могут быть записаны в виде систем неравенств и равенств относительно параметров системы и моментов случайных величин, влияющих на ее работу. Определение условий существования стационарного режима — один из важных этапов исследования М. о. с. Для его осуществления обычно применяются различные эргодические теоремы *вероятностей теории*.

В зависимости от задач, стоящих перед исследователем, целью исследования может быть вычисление того или иного неслучайного функционала от характеристик системы. Чаще всего таким функционалом оказываются показатели распределений вероятностей определенных характеристик системы (напр., длины очереди, времени ожидания, периода занятости и т. д.). Если исследование носит оптимизационный характер, вычисляемый функционал имеет вид *целевой функции*, отвечающей выбранному критерию эффективности системы. Оптимизация М. о. с. заключается в определении значений параметров системы, ее структуры или таких алгоритмов функционирования, при которых целевая функция принимает минимальное или максимальное значение. Эту задачу иногда удается выполнить, применяя методы линейного, нелинейного, динамического или эвристического программирования.

Лит.: Климов Г. П., Алиев Г. А. Решение на вычислительных машинах одной задачи теории массового обслуживания методом Монте-Карло. «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1961, т. 1, № 5; Хинчин А. Я. Работы

по математической теории массового обслуживания. М., 1963; Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., 1966 [библиогр. с. 421—428]; Ежов И. И., Королук В. С. Полумарковские процессы и их приложения. «Кибернетика», 1967, № 5; Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения. Пер. с франц. М., 1965 [библиогр. с. 284—299]; Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. Пер. с англ. М., 1971 [библиогр. с. 450—509].

Н. В. Яровицкий.

**МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТЕОРИЯ**, теория очередей — раздел прикладной математики, изучающий процессы, связанные с удовлетворением массового спроса на обслуживание к.-л. вида, с учетом случайного характера спроса и обслуживания. М. о. т. возникла в нач. 20 в. на базе задач телефонии: требовалось найти способ определения числа телефонных линий, обеспечивающего удовлетворительное обслуживание абонентов. Специфика этой задачи состоит в случайном характере моментов времени, когда абоненты вызывают друг друга, и длительности разговора. Вначале задача решалась эмпирическим путем, затем начала строиться теория расчета телефонных систем, основанная на *вероятностей теории*. Задачи, аналогичные по матем. форме телефонным задачам, возникали при расчете предприятий массового обслуживания, аэродромов, автомобильных дорог, при планировании железнодорожных перевозок, запасов продуктов различного рода и пр. Во второй половине 60-х годов М. о. т. стала применяться ко многим задачам *кибернетики*: организации взаимодействия *вычислительных машин*, теории надежности, *операций исследования*, а также ко многим задачам радиотехники, радиолокации и др. Основной задачей М. о. т. является изучение процесса образования спроса на обслуживание во времени. В М. о. т. такие процессы рассматриваются как потоки однородных событий, т. е. совокупности случайных моментов времени (см. *Поток случайный*). Основным в теор. и практических работах является *Пуассона поток*. Сначала выводы о пуассоновском характере потока делались лишь на основании наблюдений; в последующем развитии М. о. т. к подобным выводам стали приходить на основании различного рода предельных теорем: о суперпозиции независимых малоинтенсивных потоков, о разрежении случайного потока и т. п. Так, если предположить, что каждый из  $n$  абонентов телефонной станции посылает вызов в случайный момент времени  $\xi$  с плотностью  $p_n(t)$ , причем  $n$  неограниченно возрастает, а  $np_n(t)$  стремится к интегрируемой ф-ции  $\lambda(t)$ , тогда поток вызовов будет приближаться к потоку Пуассона с переменным параметром  $\lambda(t)$ . Подобные выводы особенно существенны при решении задач планирования, когда наблюдение случайного потока невозможно прежде, чем создана сама система. Если же задан случайный поток, управляющий процессом образования спроса на обслуживание, то этот поток рассматривается как входящий поток некоторой системы. Эта система представляет собой устр-во, выполняющее однородные эле-

ментарные операции обслуживания поступающих требований. Так, в телефонной системе элементарная операция состоит в предоставлении абоненту телефонной линии для требуемого разговора. Обычно возможность осуществления операции обслуживания связывается с наличием свободного оператора или обслуживающего прибора, канала или линии обслуживания. Время обслуживания одного требования считается *случайной величиной* с некоторым законом распределения (см. *Распределение вероятностей*). Обычно предполагают, что длительности обслуживания различных требований — независимые, одинаково распределенные случайные величины. Если эти величины обозначить через  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ , а моменты поступления в систему требований — через  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ , то определяется некоторый *случайный процесс*  $\xi(t)$ , значение которого в любой момент времени характеризует состояние *массового обслуживания системы*; траекторию процесса  $\xi(t)$  полностью определяют последовательности  $\{z_n\}$  и  $\{\eta_n\}$ .

В М. о. т., как правило, изучаются только такие случайные процессы  $\xi(t)$ , которые либо являются марковскими, либо некоторым образом связаны с *марковскими процессами*. Это соответствует реальным системам массового обслуживания, для которых обычно можно указать один или несколько параметров, характеризующих состояние системы в момент  $t$  и сосредоточивающих в себе всю существенную информацию о функционировании ее до момента  $t$ . Наиболее простая ситуация имеет место, когда входящий поток требований является пуассоновским потоком, а распределение длительности обслуживания требования подчиняется экспоненциальному распределению. В этом случае оказывается возможным описать функционирование системы массового обслуживания марковским процессом  $v(t)$  с конечным или счетным мн-вом состояний. Так, для системы массового обслуживания с ожиданием таким процессом будет число требований в системе в момент  $t$ , для системы массового обслуживания с потерями — число занятых в этот момент приборов. Системы массового обслуживания, поведение которых описывается марковскими процессами с конечным или счетным мн-вом состояний, были исследованы раньше других. Но в случае структурно сложных систем типа многокаскадных телефонных сетей при этом требуется спец. методы расчета в связи с очень большой размерностью задачи. Были созданы спец. методы анализа структурно сложных систем массового обслуживания, основанные на укрупнении состояний марковского процесса и использовании свойств специфических для М.о.т. стохастических матриц.

Более сложные полумарковские процессы могут служить *моделью математической* процессов действия систем массового обслуживания. Их применение возможно при условии, когда среди случайных величин, характеризующих состояние системы в момент  $t$ , может

быть одна с произвольным законом распределения, все же остальные распределены по экспоненциальному закону (возможно, при некотором расширении пространства состояний процесса). Так, в системе массового обслуживания с экспоненциально распределенным временем обслуживания при входящем *потоке с ограниченным последствием* число требований в системе в момент  $t$  представляет собой полумарковский процесс  $v(t)$ . Метод, в аналитическом отношении эквивалентный методу полумарковских процессов и называемый методом вложенных цепей Маркова, разработал англ. математик Д. Кендал (по существу, этот же метод сов. математик А. Я. Хинчин использовал при решении конкретных задач М. о. т. раньше Д. Кендала). Этот метод состоит в выборе такой последовательности моментов времени  $\{t_n\}$ , при которой последовательность значений процесса  $\{\xi(t_n)\}$  образует *Маркова цепь* с конечным или счетным мн-вом состояний. Чаще всего последовательность  $\{t_n\}$  образуется моментами поступления в систему требований или моментами окончания операций обслуживания. Таким методом получены осн. ф-лы М. о. т. (см. *Длина очереди, Хинчина — Полачека формула, Период занятости* в системах массового обслуживания). Получена также теорема об общем аналитическом виде стационарных характеристик широкого класса однолинейных систем массового обслуживания и обобщена на нестационарный случай.

Системы массового обслуживания, к которым метод полумарковских процессов не применим, изучаются с помощью многомерных марковских процессов вида  $\xi(t) = (v(t); \xi_1(t), \xi_2(t), \dots)$ , где  $v(t)$  — дискретная компонента с конечным или счетным мн-вом возможных значений, обозначающая такие величины, как число занятых приборов, величину очереди и т. п.;  $\xi_i(t)$  — числовые переменные, интерпретируемые либо как время, прошедшее с момента начала к.-н. операции, либо как время до ее окончания. Методом процессов такого рода исследован широкий класс систем массового обслуживания с потерями. В 60-х годах 20 ст., когда обнаружили, что многие ф-лы М. о. т., выведенные в предположении о независимости длительностей обслуживания требований, сохраняют силу и при зависимых длительностях обслуживания, была построена теория для широкого класса систем. В значительной степени в М. о. т. применяются методы теории суммирования независимых случайных величин и теории случайных блужданий. В 60-х годах интенсивно развивались асимптотические методы М. о. т. Замечено, что во многих случаях, когда изучение системы обслуживания, характеризующейся некоторыми распределениями  $F_i(x)$  (интервала между поступлением требований, времени обслуживания и т. п.), анализ осн. характеристик системы при общем виде  $F_i(x)$  затруднителен; в то же время, в определенных предельных

условиях, связанных с поведением параметров распределений  $F_i(x)$ , выполняются простые асимптотические ф-лы. Напр., рядом авторов изучено поведение систем обслуживания с ожиданием в случае загрузки, стремящейся к критической (т. е. к такой загрузке, при которой отношение числа поступающих в систему требований к числу требований, которое может быть обслужено, близко к единице). При соответствующей нормировке распределение времени ожидания и длины очереди сходятся к экспоненциальному распределению. Параллельно развивается теория систем с малой загрузкой (интенсивность входящего потока рассматривается, как малый параметр), что имеет существенное значение для теории высоконадежных систем (см. *Облегченное резервирование*). В большинстве задач М. о. т. находят распределения различных величин, связанных с процессом функционирования системы  $\xi(t)$  (длины очереди, времени ожидания и вероятности полного обслуживания); дальнейшая ступень развития теории состоит в решении задач оптимизации структуры системы и процесса обслуживания. Для широкого класса случаев была решена задача об установлении оптимального режима обслуживания в схеме обслуживания с приоритетом, когда имеется несколько типов требований, каждый из которых характеризуется определенным ср. временем обслуживания и к.-л. ф-цией потерь (напр., стоимостью единицы времени ожидания). Для исследования сложных систем массового обслуживания широко применяется *Монте-Карло метод*, связанный с моделированием процесса поведения системы. Для алгоритмизации решения задач М. о. т. на ЭВМ созданы некоторые алгоритм. языки (напр., СЛЭНГ).

Первыми исследователями М. о. т. являются датский ученый А. Эрланг и сов. математик А. Я. Хинчин. В своих работах А. Эрланг в 1909—1922 гг. исследовал М. о. т. в связи с организацией телефонных сетей. А. Я. Хинчин в 1932—1933 гг. решил ряд задач из области многостаночного производства, а позднее разработал матем. теорию исследования систем массового обслуживания. Развитие производства, техники, эконом. связей в 50-е гг. привело к необходимости исследования новых систем массового обслуживания. В настоящее время М. о. т. успешно применяется в различных областях нар. х-ва, экономики, техники и науки, разрабатываются новые методы исследований, расширяется круг методов изучения и оптимизации систем массового обслуживания, поддающихся решению, ищутся новые пути практического приложения имеющихся теор. результатов. Исследования М. о. т. имеют большое значение при проектировании и построении различных систем автоматизированного управления производством и транспортом, для рациональной орг-ции производства и снижения себестоимости продукции.

Лит.: Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М., 1963; Бус-

ленко Н. П. Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах. М., 1964 [библиогр. с. 361—362]; Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., 1966 [библиогр. с. 421—428]; Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М., 1966 [библиогр. с. 242—243]; Саати Т. Л. Элемент теории массового обслуживания и ее приложения. Пер. с англ. М., 1971 [библиогр. с. 450—509]. И. Н. Коваленко.

**МАТЕМАТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ** — см. *Вычислительная математика*.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА** — раздел математики, изучающий методы обработки и классификации статистических данных для получения на их основании обоснованных выводов. Простейшим примером статистических данных является последовательность конечного числа наблюдений некоторой случайной величины, напр., последовательности результатов взвешивания некоторого тела на аналитических весах, последовательность числа распадов радиоактивного вещества в течение каждого из 100 одинаковых промежутков времени и др. Такие статистические данные являются результатом подсчетов или измерений и представляют собой наборы чисел. Такие данные наз. дискретными. Другой тип статистических данных — непрерывные данные, напр., записи колебаний напряжения на выходе приемника в некотором промежутке времени, записи колебаний земной коры и т. п. По определению одного из основателей М. с. англ. ученого Р. А. Фишера М. с. можно рассматривать как учение о методах приведения данных к компактной форме. Это означает, что М. с. дает методы замены мало пригодного для получения сведений о случайной величине набора наблюдаемых значений небольшим к-вом чисел, содержащих как можно больше нужных сведений о случайной величине. М. с. широко используется в исследованиях демографии, эконом. науках, в с. х-ве, биологии, медицине, геологии, физ. науках, лингвистике, психологии и т. д. Основой М. с. является *вероятностей теория*. Однако, если задачей теории вероятностей является разработка методов определения вероятностей некоторых событий по заданным вероятностям др. событий, то задачей М. с. является построение методов оценки вероятностей событий или принятия решений о характере событий на основе статистических данных. При теор. анализе предполагается, что статистические данные являются случайными величинами. Это предположение дает возможность использовать методы теории вероятностей и обуславливает вероятностный характер выводов.

Необходимость в привлечении М. с. возникает в том случае, когда нужно получить сведения о характеристиках некоторой случайной величины на основании  $n$  ее значений, наблюдаемых в эксперименте  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Пусть  $F(x)$  — ф-ция распределения вероятностей (ф. р. в.) действительной случайной величины  $\xi$ . Мн-во значений случайной величины  $\xi$  с ф-цией  $F(x)$  наз. *генеральной совокупностью* (часто просто совокупностью), имеющей ф-цию распределения

$F(x)$ . Наблюденные значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  величины  $\xi$  наз. *выборочными* значениями или *выборкой* из совокупности с ф-цией распределения  $F(x)$ . Число выборочных значений  $n$  наз. *объемом выборки*. Обычно предполагается также, что наблюдения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  независимы, т. е. что величина  $x_i$  не оказывает влияния на остальные наблюдения. В совр. М. с. исходным пунктом теор. анализа является следующее допущение: выборка объема  $n$  из совокупности с ф-цией распределения  $F(x)$  есть  $n$ -мерная случайная величина  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  с совместной ф. р. в.

$$P\{x_1 < t_1, x_2 < t_2, \dots, x_n < t_n\} = \prod_{i=1}^n F(t_i).$$

Выборка объема  $n$  наз. также *выборкой* объема  $n$  независимых наблюдений в отличие от случая связанных наблюдений, с которым имеет дело статистика *случайных процессов*.

Одной из осн. задач М. с. является прикл. построение распределений параметров положения и мер рассеяния случайной величины. Полное описание случайной величины  $\xi$  дает ее ф. р. в.  $F(x)$ . Поэтому естественно попытаться, основываясь на выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , сделать заключение о том, какой является ф. р. в.  $\xi$ . Если рассматриваемая случайная величина дискретна, т. е. принимает только значения  $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ , то первое представление о неизвестном распределении получают, построив эмпирическое распределение и сравнив его с некоторым из известных дискретных распределений. Эмпирическое распределение в данном случае — это набор точек плоскости

с координатами  $\left(a_i, \frac{n_i}{n}\right)$ , где  $n_i$  — к-во наблюдений в выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , равных  $a_i$  (отличны от 0 не более  $n$  значений  $n_i$ ). Чаще всего из дискретных распределений употребляются биномиальное распределение, *Пуассона распределение* и гипергеометрическое распределение. В ряде случаев простые предположения о рассматриваемом эксперименте позволяют сделать определенный вывод о распределении. Напр., если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  есть числа вызовов, поступивших на телефонную станцию за  $n$  равных промежутков времени, то иногда можно предполагать, что интенсивность поступления вызовов остается неизменной, что число вызовов, поступивших за данный промежуток, не влияет на число вызовов, поступивших за промежуток времени, не перекрывающийся с первым, и что за конечный промежуток времени может поступить конечное число вызовов. Если эти допущения верны, то неизвестное распределение случайной величины является распределением Пуассона. Это распределение используется в ряде физ. задач, таких, как описание числа частиц, зарегистрированных счетчиком Гейгера за единицу времени, описание числа бактерий некоторой колонии, находящихся в заданной области простр., числа происшествий за данный период времени и т. п.

Биномиальное распределение используется в задачах генетики, контроле произ-ва и т. п. Для непрерывной случайной величины хорошее представление о неизвестной плотности распределения вероятностей при достаточно большом объеме выборки дает *гистограмма*. Сравнивая гистограмму с одним из известных непрерывных распределений, делают первое заключение о неизвестной плотности распределения вероятностей. Важными примерами непрерывных распределений являются *нормальное распределение* с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

( $a$  — ср. значение,  $\sigma^2$  — *дисперсия* распределения) и сосредоточенное на положительной полуоси показательное распределение с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0$$

( $\theta$  — ср. значение распределения,  $\theta > 0$ ). В некоторых случаях из общих предположений относительно условий эксперимента можно сделать определенный вывод о неизвестном распределении. Напр., в теории погр. измерений исходят из того, что *погрешности* измерений являются результатом сложения большого числа незначительных независимых «элементарных погрешностей». Если принять это допущение, то *центральная предельная теорема* теории вероятностей гарантирует близость распределения ошибок к нормальному распределению. Соображения, основанные на центр. предельной теореме, справедливы и во многих др. случаях; этим частично объясняется важная роль нормального распределения в статистике. Из др. причин, по которым нормальное распределение употребляется очень часто, назовем такие: с помощью нормального распределения получают хорошие приближения к распределениям, не являющимся нормальными; некоторые распределения после преобразований либо становятся нормальными, либо хорошо приближаются нормальными; некоторые распределения хорошо приближаются к нормальным при больших или малых значениях параметров. Нормальное распределение постоянно встречается во многих областях использования М. с. Показательное распределение используют в тех случаях, когда случайную величину можно рассматривать как время жизни, время ожидания, время исправной работы и т. п. Осн. допущением, приводящим к показательному распределению, является «отсутствие последствия»: если  $\xi$  есть время жизни, то это допущение равносильно тому, что при любом возрасте время оставшейся жизни не зависит от прошлого и имеет то же распределение, что и время жизни в начальный момент. Важные приложения показательное распределение имеет в теории надежности.

Подбор распределения, соответствующего эмпирическому распределению или гистограмме, составляет первый этап статистической обработки. Содержанием второго этапа является ответ на вопрос: насколько хорошо соответствует предполагаемое (гипотетическое) распределение выборочным данным. Обоснованный ответ на этот и др. подобные вопросы дает глава М. с. — теория проверки статистических гипотез (см. *Статистическая проверка гипотез, Эмпирическая функция распределения*).

Часто бывает удобно описывать функцию распределения вероятностей с помощью моментов. Для случайной величины с плотностью вероятности  $f(x)$  моменты и центр. моменты (если они существуют) определяются как

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

и

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k f(x) dx$$

соответственно. В качестве оценок  $m_k$  и  $\mu_k$  по выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  используют выборочные моменты

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k,$$

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m}_1)^k$$

(о свойствах выборочных моментов см. *Статистические оценки*).

Для многих практических задач (особенно при предварительном исследовании) достаточно знать простейшие характеристики случайной величины  $\xi$ . Такими характеристиками являются параметр положения и мера рассеяния. Параметром положения является среднее значение (или математическое ожидание)  $m_1$  величины  $\xi$ . Оценкой по выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  для параметра  $m_1$  является вы-

борочное среднее  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . Другой параметр положения — медиана величины  $\xi$ . Медиана  $m$  случайной величины  $\xi$  — это такое число  $m$ , для которого  $F(m) \leq \frac{1}{2} \leq F(m+0)$  ( $F(x)$  — ф. р. в.  $\xi$ ). Оценкой медианы является средний член вариационного ряда при нечетном  $n$  или полусумма двух средних членов вариационного ряда при  $n$  четном. Если распределение симметрично (т. е. если  $P\{\xi - u \leq x\} = P\{\xi - u \geq -x\}$  при каждом  $x$  и некотором  $u$ ), то среднее и медиана совпадают. Следует отметить, что в случае симметричных распределений оценка среднего с помощью выборочной медианы обладает малой эффективностью. Для получения нужной точности в оценке среднего нормального распределения с помощью медианы нужно при-

мерно на 64% больше наблюдений, чем для получения той же точности с помощью  $\bar{x}$ . Простейшей мерой рассеяния случайной величины является среднее квадратичное отклонение — кв. корень из дисперсии случайной величины. Оценкой среднего квадратичного отклонения по выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$

является величина  $s$ , где  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ . На практике часто используются следующие свойства  $\bar{x}$  и  $s$ . Если  $n$  достаточно велико, то в интервале  $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$  расположено около 2/3 всех наблюдений, а в интервале  $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$  — около 95%;  $\bar{x}$  и  $s^2$  — случайные величины, причем среднее величины  $\bar{x}$  равно неизвестному среднему, дисперсия  $\bar{x}$  равна  $\frac{\sigma^2}{n}$  ( $\sigma^2$  — дисперсия величины  $\xi$ ), а среднее  $s^2$  равно  $\frac{\sigma^2(n-1)}{n}$ .

Важнейшей задачей М. с. является построение оценок неизвестных параметров. Во многих случаях можно обосновать принадлежность неизвестного распределения случайной величины к некоторому семейству ф. р. в., зависящих от конечного числа параметров, напр., установить, что распределение является нормальным (в этом случае неизвестных параметров два — среднее значение и дисперсия). Возникает задача построения по выборочным данным наилучших возможных оценок для неизвестных параметров. Методам нахождения оценок, изучению их свойств и сравнению различных оценок, описанию семейств распределения вероятностей, допускающих хорошие оценки, посвящен важный раздел М. с. — теория оценок. В этой теории различают точечные оценки и интервальные оценки. Точечная оценка — функция наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  случайной величины, по которой судят о значении неизвестного параметра. Интервальная оценка — интервал с концами, зависящими от выборочных значений, содержащий с заранее определенной вероятностью значение неизвестного параметра (см. *Доверительный интервал* для параметра  $\theta$ , соответствующий доверительному уровню  $\varepsilon$ , *Доверительная область*). Теория оценок неизвестных параметров связана с теорией проверки гипотез. Мерой качества рассматриваемых оценок является обычно среднее квадратичное отклонение. В наст. время используют и др. меры качества. Большое значение для получения точных выводов относительно оценок имеет отыскание точного распределения оценок или описание приближений к некоторым хорошо известным распределениям (напр., нормальному) при большом объеме выборки. Точное распределение оценок в пригодном для применения виде удается получить редко; в удобной форме получено распределение оценок параметров нормального распределения.



Методы регрессии и корреляции часто используются в М. с. при решении задач, в которых рассматриваются совместно несколько случайных величин. Если случайные величины связаны, то возникает задача описания зависимости, напр., с целью оценки значений одной величины по наблюдениям другой. Под зависимостью случайных величин понимается вероятностная зависимость — задание одной величины влияет на значение другой, но не определяет ее полностью (т. е. оставляет случайной величиной). Примерами такой зависимости является связь роста ребенка и его возраста, роста отца и роста сына, роста и веса человека и т. п. Построение методов описания этих зависимостей по результатам экспериментов составляет содержание регрессионного анализа. Полезной мерой связи между случайными величинами  $\xi$  и  $\eta$  является коэфф. корреляции

$$\rho = \frac{M(\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta},$$

где  $m_\xi$ ,  $m_\eta$  и  $\sigma_\xi^2$ ,  $\sigma_\eta^2$  — средние значения и дисперсии величин  $\xi$  и  $\eta$ . В том случае, когда  $\rho = 1$ , величины  $\xi$  и  $\eta$  линейно зависимы, т. е.  $\xi = a\eta + b$  ( $a$  и  $b$  — постоянные числа); если  $\rho = 0$ , то величины  $\xi$  и  $\eta$  наз. некоррелированными (для совместно нормально распределенных  $\xi$  и  $\eta$  некоррелированность эквивалентна статистической независимости). Оценкой неизвестного коэфф. корреляции  $\rho$  по  $n$  парам наблюдений  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , ...,  $(x_n, y_n)$  величин  $\xi$  и  $\eta$  является выборочный коэфф. корреляции

$$\rho = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_1 \cdot s_2},$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2.$$

В ряде задач важно решить, равно ли 0 значение  $\rho$ . Для проверки этой гипотезы по выборочным данным построены спец. критерии. Из спец. методов М. с. следует отметить *дисперсионный анализ*, методы планирования экспериментов, теорию *последовательного анализа*.

Исторически первыми серьезными работами, относящимися к М. с., являются исследования швейцарского математика Я. Бернулли (1711 г., о применении теоретикопровероятностного подхода к вопросам экономики) и исследование франц. математика П. Лапласа (18 в., первые применения М. с. в астрономии). Ряд применений теоретикопровероятностных методов к демографии и страховому делу дал рус. математик В. Я. Буняковский (19 в.). Нем. математик К.-Ф. Гаусс (1777—1855) разработал

теорию погр. и дал ее применение к астрономии, а также предложил *наименьших квадратов метод*, широко употребляемый в М. с. (19 в.). Ряд важных исследований, относящихся к методу наименьших квадратов и свойствам получаемых при этом оценок, провел рус. математик А. А. Марков (1856—1922). Общую технику статистических исследований применительно к социальным наукам дали в 19 в. англ. ученый Ф. Галтон и бельгийский математик и статистик А. Кетле. Важный вклад в М. с. внес англ. математик К. Пирсон (конец 19 — начало 20 вв.). Ему принадлежат распределения Пирсона, метод моментов, критерий  $\chi^2$  и ряд других методов и понятий М. с., статистические таблицы и конкретные приложения М. с. в ряде областей науки. Ряд важных совр. понятий и методов М. с. предложил англ. математик и статистик Р.-А. Фишер (метод максимума правдоподобия, дисперсионный анализ и понятия состоятельности, достаточности, эффективности и др.). Работы Р.-А. Фишера оказали большое влияние на развитие совр. методов М. с. Ряд новых идей М. с., интенсивно разрабатываемых и широко используемых в настоящее время, предложили англ. математики Стюдент (псевдоним В. Госсета), Э. Пирсон и амер. математики Ю. Нейман и А. Вальд. В СССР важные результаты в области М. с. получили В. И. Романовский, Е. Е. Слуцкий, А. Н. Колмогоров, Н. В. Смирнов, Б. В. Гнеденко, Ю. В. Линник и И. И. Гихман. Полный обзор работ советских ученых в области М. с. можно найти в книгах: «Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947» (М. — Л., 1948); «Математика в СССР за сорок лет. 1917—1957» (т. 1—2. М., 1959); «Математика в СССР. 1958—1967», т. 2, в. 1—2. М., 1969—70). М. с. вместе с теорией вероятности является осн. матем. аппаратом кибернетики при описании недетерминированных (стохастических) систем; она применяется при оценке и планировании надежности сложных систем, при построении с помощью эмпирических данных моделей различных процессов поведения и управления, а также в теории стохастических автоматов и т. п.

Лит.: Крамер Г. Математические методы статистики. Пер. с англ. М., 1948 [библиогр. с. 612—620]; Уилкс С. Математическая статистика. Пер. с англ. М., 1967 [библиогр. с. 601—619].

А. Я. Дороговцев.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА** — направление в теоретической экономике, сложившееся на основе использования математических моделей и методов для выявления различного рода закономерностей и эффектов в экономических системах. В отличие от *эконометрии*, изучающей в реальных эконом. системах преимущественно закономерности статистического характера и вопросы адекватности реальных явлений теор. представлениям, М. э. изучает динамику развития и характер функционирования абстрактных матем. моделей эконом. систем. По отношению к практике М. э. и эконометрия играют роль аналогичную, напр., теории вероятностей и статистике. При формулировании матем.

моделей эконом. систем делаются попытки максимально приблизить теор. представления к реальным фактам. Но вследствие исключительной сложности социально-эконом. явлений, модели, изучаемые в настоящее время в М. э., довольно грубо отражают реально происходящие эконом. процессы, более того, набор моделей М. э. носит разрозненный характер и не является еще целостной системой, способной дать объяснение всех эконом. явлений практики. Матем. символика для представления закономерностей развития и связей между эконом. факторами применялась сравнительно давно, более того, часто математически получались выводы, характеризующие динамику и особенности этих закономерностей и связей. Еще К. Маркс, а позже В. И. Ленин чисто математически изучали условия простого и расширенного воспроизводства. Модель К. Маркса была, по существу, первой в ряду *макромodelей экономических*. От модели К. Маркса ведут начало также линейные модели экономики. В виде линейных закономерностей изображают межотраслевые связи в моделях *баланса межотраслевого, техпромышленности предприятий матричный* также может быть представлен как линейная модель, т. е. модель, выражаемая системой линейных уравнений. Введение идеи оптимизации в такого рода модели, линейной или нелинейной функции-критерия превращает балансовые линейные модели в модели *программирования математического*. Поиск оптимальных решений в таких моделях ведется с помощью методов матем. программирования. Интересно, что в основу некоторых методов матем. программирования положены идеи моделирования соответствующих систем (см. *Дифференциальных рент метод*).

Одним из важнейших результатов М. э. при исследовании линейных моделей явилось выявление природы и регулирующего характера цен в этих моделях с точки зрения теории двойственности в матем. программировании. Уже исследование простейших функциональных зависимостей между эконом. факторами (см. *Производственная функция*) может дать много для прогнозирования развития эконом. систем, результаты этих исследований хозяйственники могут использовать для предотвращения нежелательных тенденций. Разложение таких функций в ряд Тейлора приводит к простым моделям линейного, динамического и квадратичного программирования. Даже графические представления такого рода зависимостей (напр., паутинообразная модель динамики спроса и предложения) позволяют делать нетривиальные выводы и рекомендации (знаменитый свиной цикл). К простейшим моделям такого рода можно отнести и хорошо известную макроэкономическую модель Кейнса, количественно показавшего (качественно это доказал еще К. Маркс), что в капиталистической экономике нет гармонического саморегулирования. Выводы Кейнса имели большое значение для развития идей программирования в бурж. экономике.

Аппарат дифф. и интегр. исчислений, теории дифф. уравнений, теории устойчивости использован в более поздних экономических макромоделях. Эти направления продолжают интенсивно развиваться за рубежом. В последние годы получили развитие микроэкономические модели, направленные в основном на получение выводов, имеющих значение для программирования и планирования развития эконом. систем. Исследовать такие модели и решить возникающие экстремальные задачи чаще всего удается с помощью методов имитационного моделирования систем на ЭВМ. Развитие такого рода методов и моделей М. э. особенно бурно началось с внедрением в практику *алгоритмических языков* и языков моделирования: методы имитационного моделирования стали осн. аппаратом исследования эконом. моделей. Введение в такого рода модели идеи управления (управляющих параметров) позволило просматривать с помощью ЭВМ поведение эконом. систем при разного рода внешних эффектах. Особенно интенсивно в настоящее время развиваются разделы М. э. применительно к теории фирм и производства, теории рынка и запасов (см. *Запасов теория*), вопросам равновесия и роста в моделях национальной экономики. Широкое практическое применение получили модификации модели межотраслевого баланса в программировании экономики различных стран. Применительно к конфликтным ситуациям в экономике (открытой и скрытой конкуренции) развитие получили модели, основанные на использовании аппарата *игр теории*. Практическое использование моделей М. э. выдвинуло ряд новых проблем идентификации моделей, агрегации переменных и построения человеко-машинных систем экспертно-процедурного характера, решаемых в рамках *кибернетики экономической*.

*Лит.:* Применение математики в экономических исследованиях, т. 1—3. М., 1959—65 [библиогр. т. 1, с. 461—473]; Канторович Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., 1960; Моисеев Н. Н. Математика — управление — экономика. М., 1970; Аллен Р. Математическая экономия. Пер. с англ. М., 1963 [библиогр. с. 647—655]; Ваумоль У. Экономическая теория и исследование операций. Пер. с англ. М., 1965 [библиогр. с. 480—485]. В. В. Шкурба.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПОЭТИКЕ** — количественные и символично-логические методы изучения художественных текстов и стоящего за этими текстами и проявляющегося в них «поэтического языка». В той мере, в которой художественные тексты рассматриваются как источник для изучения общенаучного языка, к ним применимы любые математические методы, используемые в описательном языкознании. Однако поэтика имеет и собственный столетний опыт использования и разработки специфических матем. методов — от первых чисто вспомогательных арифм. подсчетов до попыток теоретико-множественного и алгебраического моделирования таких центральных понятий, как «поэтический язык». Разработка количественных методов изучения поэтики и теории поэтической речи была начата в трудах А. Белого, А. Пешковского,

Б. Томашевского и Б. Ярхо, в украинском литературоведении — в работах Г. Шенгели и др.

Новый этап в развитии М. м. в п. связан с внедрением идей кибернетики, которое не только позволило дать строгое обоснование ранее применявшимся М. м. в п., но и вызвало к жизни новый подход, использующий понятия *информации* и *энтропии*, а также моделирование творческих процессов на ЭВМ (см. *Алгоритмизация творческих процессов*). Опыт разработки М. м. в п. имеет определенную эвристическую ценность для самой кибернетики. Во-первых, поэтика доставляет примеры описания наиболее сложно организованных знаковых управляющих систем, в моделировании устр-ва и функционирования которых кибернетика делает лишь первые шаги. Общекибернетическое значение имеют, напр., разработанные поэтикой понятия «остранения» и «эффекта обманутого ожидания». Во-вторых, поэтика изучает такие сравнительно элементарные знаковые образования типа «метров», на которых могут быть «проиграны» процессы, происходящие в более сложных системах типа естественного языка. В-третьих, наряду с М. м. в п., направленными на изучение специфических особенностей художественной речи, существуют и М. м. в п., связанные с поэтикой лишь историей своего возникновения и традиционного применения, но принципиально применимые и за ее пределами, в анализе различных информационных процессов. Так, статистические методы изучения словаря писателя можно использовать в целях автомат. аннотирования и реферирования текстов (см. *Реферирование автоматическое*), а работы по определению информационных характеристик художественных текстов послужили одним из стимулов к исследованию сложности автоматов и комбинаторного и алгоритмических подходов к *информации теории*.

Наряду с др. методами и понятиями поэтики и литературоведения М. м. в п. применяются и при целостном анализе литературного произведения как единого художественного организма во взаимосвязи и взаимодействии всех его структурных слоев и уровней. Кибернетические представления полезны и при уточнении общих схем литературного процесса.

Наибольшие успехи в применении матем. методов достигнуты в с т и х о в е д е н и и — части поэтики, изучающей принципы организации стиха как формы речи. Разрабатываются матем. приемы описания метрики и ее связей с фонетической и интонационной системами языка, многие модели и графики ритма, методика вычисления степени близости рифмующихся сочетаний и т. д. (см. *Структурное стиховедение*). За пределами стиховедения наиболее разработаны матем. методы изучения словаря писателей и отд. произведений. Вызванные к жизни необходимостью определения авторства анонимных (прежде всего — античных) текстов, они оказались полезными и для исторической лексикологии и стилистики. Разнообразные статистические коэффициенты характеризуют богатство словаря, ди-

намику его развития во времени и внутри одного произведения и распределение слов по лексико-грамматическим классам. Производились опыты сравнения семанτικο-тематических разбиений *словарей частотных* как своеобразных моделей «мира поэта». Выдвинута гипотеза, что частая совместная встречаемость слов в тексте в пределах некоторого интервала фиксированной длины отражает парадигматическую, языковую связь этих слов. На основе этой гипотезы предложены алгоритмы, реконструирующие по текстам стоящую за ними семантическую систему или распределяющие эти тексты по различным стилям.

Из аппарата теории информации наиболее полезным в применении к художественным текстам оказалось понятие энтропии. А. Н. Колмогоров усовершенствовал экспериментальный метод К. Шенонна для определения энтропии речи и предложил разграничение в художественных текстах «энтропии мысли» и «энтропии построения», а также способы оценки объема «локального словаря» поэта и определения числа равнообъемных осмысленных текстов, удовлетворяющих известным формальным требованиям. Имеются попытки матем. моделирования тропов и приемов выразительности (математико-логическая модель русской метафоры и способов ее образования Ю. И. Левина, его же статистика типов метафоры) и исчисления всевозможных типов сюжетов и ситуаций художественных произведений (см. *Структурная поэтика*). Проблема соотношения «языка поэзии» и «языка науки» изучается ныне при помощи абстрактного моделирования этих понятий (С. Маркус) и путем непосредственного статистического сопоставления различных, прежде всего — синтаксических, характеристик художественных и научных текстов.

В украинском литературоведении и лингвостилистике М. м. в п. применяются, в основном, как вспомогательное средство структурной типологии функциональных стилей современного украинского языка.

Лит.: Шенгели Г. Тракта́т о русском стихе, ч. I. Органическая метрика. М.—Пг., 1923; То́машевский Б. О стихе. Л., 1929; Ревзин И. Сочетание в г. Горьком, посвященное применению математических методов к изучению языка художественной литературы. В кн.: Структурно-типологические исследования. М., 1962; Ша́йкевич А. Я. Распределение слов в тексте и выделение семантических полей. В кн.: Иностранные языки в высшей школе, в. 2. М., 1963; Ле́вин Ю. И. О некоторых чертах плана содержания в поэтических текстах. В кн.: Структурная типология языков. М., 1966; Ко́птілов В. В., Нікітіна Ф. О. Число і слово. К., 1966; Статистичні параметри стилів. К., 1967; Содружество наук и тайны творчества. М., 1968 [библиогр. с. 433—449]; Га́спаров М. Л. Работы Б. И. Ярхо по теории литературы. В кн.: Труды по знаковым системам, в. 4. Тарту, 1969; Семиотика и искусствометрия. М., 1972; Bailey R., Doležel L. An annotated bibliography of statistical stylistics. Ann Arbor, 1968; Marcus S. Poetica Mathematica. Bucuresti, 1970 [библиогр. с. 339—374]. См. также лит. к ст. *Структурное стиховедение*, *Структурная поэтика*.

С. И. Гиндин.  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЦВМ** — комплекс программ, описаний и инструкций, позволяющих автоматизировать вычислительный процесс на ЦВМ в процессе программиро-

вания, отладки и решения задач. Понятие М. о. ЦВМ возникло в середине 50-х гг. 20 ст. в период становления и развития ЦВМ 2-го поколения, когда стало очевидным, что для их эффективного использования необходимо провести большие и весьма трудоемкие работы по программированию для ЦВМ.

Различают общее и специальное М. о. ЦВМ. В общее М. о. ЦВМ входят программы, являющиеся в большинстве случаев обязательными для организации вычисл. процесса на данной ЦВМ. Достаточно развитое общее М. о. ЦВМ наз. также *операционной системой*. Специальное М. о. ЦВМ состоит из программ, ориентированных на конкретную специализацию вычислительной системы. Эта классификация относительна, т. к. в развитии М. о. ЦВМ намечается тенденция постепенного перевода программ специального М. о. ЦВМ в состав общего.

Программы общего М. о. ЦВМ бывают управляющие и обрабатывающие. Управляющие программы обеспечивают функционирование ЦВМ в процессе подготовки, отладки и решения задач в наиболее удобных для пользователя режимах. Обрабатывающие программы общего М. о. ЦВМ реализуют собственно общие методы обработки информации в процессе отладки и решения задач. Обрабатывающие программы общего М. о. ЦВМ делят на программы, входящие в системы программирования и отладки, и на программы наиболее распространенных методов вычислительной математики, обработки массивов данных и др., объединяемые в библиотеки стандартных подпрограмм.

Наиболее типичными обрабатывающими программами общего М. о. ЦВМ являются трансляторы (в частности, с языков ФОРТРАН, АЛГОЛ и КОБОЛ), ассемблеры, программы вычисления элементарных ф-ций, решения систем алгебр. и дифф. уравнений, программы сортировки, слияния, выборки и т. д. Во многих случаях в общее М. о. ЦВМ включаются программы обработки графической информации, функционирующие на базе устр-в отображения (см. *Экранный пульт*).

Специальное М. о. ЦВМ функционирует, как правило, в тесном взаимодействии с программами общего М. о. ЦВМ и реализует специфические методы решения задач, которые либо вовсе не могут быть решены программами общего М. о. ЦВМ, либо решаются недостаточно эффективно (по быстродействию или использованию оборудования). ЦВМ 3-го поколения (см. *Электронная вычислительная машина*) оснащают общим матем. обеспечением объемом в миллионы машинных команд, что дает возможность решать значительную часть задач в вычислительных центрах общего назначения.

В настоящее время созданы большие библиотеки специализированных программ, описанных, как правило, на языках программирования высокого уровня. Использование общего и специального М. о. ЦВМ в обрабатываемых ЦВМ связано с проблемой обеспечения программной совместимости (преемственности) машин на уровне машинных

команд. Создание М. о. для новых ЦВМ связано с проблемой их эффективной интерпретации на старых машинах с целью отладки матем. обеспечения в процессе проектирования. Разработка интегральных схем и запоминающих устройств и связанное с этим развитие логич. возможностей ЦВМ привели к воплощению многих программ общего М. о. ЦВМ непосредственно в устр-вах ЦВМ. Примером ЦВМ со встроенным общим М. о. ЦВМ являются машины семейства «МИР». Для распространения программ общего и специального М. о. ЦВМ среди пользователей в СССР организуются ассоциации пользователей определенного типа ЦВМ и централизованные фонды алгоритмов и программ.

Лит.: Фишер Ф. П., Суиндл Дж. Ф. Системы программирования. Пер. с англ. М., 1971; Флорес А. Программное обеспечение. Пер. с англ. М., 1971; Джермейн К. Программирование на IBM/360. Пер. с англ. М., 1973. А. И. Никитин.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЦВМ ВНУТРЕННЕЕ** — состав алгоритмов и данных, зафиксированных в цифровой вычислительной машине структурным способом (см. *Управление структурное в ЦВМ*). В практике вычисл. машиностроения сложились определенные принципы построения компонент внутреннего математического обеспечения (МО). Константы, как правило, помещаются в долговременное запоминающее устройство (ДЗУ). Для фиксации алгоритмов управления существуют два основных способа — в виде схем автоматов управляющих и в виде управляющих кодов в ДЗУ. Оба способа в конечном счете обеспечивают образование необходимых последовательностей микрокомандных сигналов, т. е. микропрограмм (см. *Язык ЦВМ внутренний*) — в этом смысле они равнозначны — однако конструктивные отличия обуславливают различные области их применения. Первый способ, называемый аппаратным, применяется, как правило, во всех машинах, и он наиболее эффективен для управления несложными, но часто встречающимися операциями. Второй способ, называемый обычно микропрограммным, наиболее распространен в последнее время и эффективен для управления сложными операциями типа различных встроенных процедур.

В соответствии с видом использования алгоритмы М. о. ЦВМ в. подразделяются на стандартные и служебные, первые из которых включаются в рабочие программы решаемых задач, а вторые носят вспомогательный характер и вызываются автоматически без указаний программиста и транслятора.

В зависимости от функционального назначения алгоритмы внутр. МО могут быть разделены на два осн. класса — алгоритмы системы интерпретации и алгоритмы операционной системы. Алгоритмы 1-го класса, как правило, охватывают всю систему интерпретации программного уровня внутр. языка, начиная от анализа программы и кончая образованием микрокомандных сигналов, обуславливающих выполнение соответствующих микроопераций. Алгоритмы 2-го класса являются составной

частью операционной системы. В первую очередь, с их помощью реализуются алгоритмы распределения памяти, управления внеш. оборудованием и прерыванием и т. п.

В настоящее время наблюдается явная тенденция продвижения компонент операционной системы из внешнего в сторону внутр. МО, что способствует повышению их эффективности. Распирение сети встроенных стандартных и служебных процедур, аппаратной и микропрограммной реализации ряда компонент операционной системы, развитие системы М. о. ЦВМ в целом можно считать одним из гл. направлений развития структур ЦВМ. См. также *Математическое обеспечение ЦВМ*.

Лит.: Глушков В. М. [и др.]. Вопросы развития структур ЦВМ в связи с системами их математического обеспечения. «Кибернетика», 1967, № 5; Глушков В. М. [и др.]. Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации. К., 1970 [библиогр. с. 254—257]. З. Л. Рабинович.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ**, среднее значение — числовая характеристика распределения вероятностей случайной величины. М. о. случайной величины  $\xi$  определяется

ф-лой  $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$ , где  $F(x)$  —

ф-ция распределения величины  $\xi$ ,  $M$  — символ М. о. Если  $\xi$  принимает значения  $x_1, \dots, x_n, \dots$  с вероятностями  $p_1, \dots, p_n, \dots$ , то  $M\xi =$

$= \sum_n x_n p_n$ . В частности, если  $\xi$  принимает конечное число значений  $x_1, \dots, x_n$  с одинаковыми

вероятностями, то  $M\xi = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ . Для

случайной величины, имеющей плотность распределения  $p(x)$ ,  $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$ . В силу

больших чисел закона среднее арифметическое  $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$  независимых результатов на-

блюдений над случайной величиной  $\xi$  при большом  $n$  в определенном смысле близко к М. о.  $M\xi$ . М. о. существует не для любой случайной величины. Если конечен хотя бы

один из интегралов  $a = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx$ ,  $b =$

$= \int_{-\infty}^0 F(x) dx$ , то М. о. существует и равно

$a - b$ . М. о. суммы случайных величин равно сумме М. о. соответствующих слагаемых, М. о. произведения двух независимых случайных величин равно произведению М. о. сомножителей.

М. И. Ядренко.  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ** — см. *Программирование математическое*.

**МАТРИЦА** — прямоугольная таблица чисел  $a_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n$ ), состоящая

из  $m$  строк и  $n$  столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Если  $m = n$ , то М.  $A$  наз. квадратной, а число  $n$  — ее порядком. Числа, образующие М., наз. ее элементами. Наряду с конечными М. вида (1) в математике встречаются и М., имеющие бесконечное к-во строк или столбцов. М. в математике чаще всего интерпретируются как операторы.

Минором  $k$ -го порядка матрицы  $A$  ( $k \leq m, k \leq n$ ) наз. определитель  $D$ , составленный (с сохранением порядка) из  $k^2$  элементов М., лежащих на пересечении некоторых ее  $k$  строк и  $k$  столбцов (см. схему).

$$\|A\| = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Наибольший порядок, который могут иметь миноры М., не равные нулю, наз. рангом М.

М. применяются при решении систем линейных алгебр. ур-ний (см. *Линейных алгебраических систем уравнений способы решения*), в игр теории (см. *Игра биматричная, Игры матричные*), в матем. анализе при интегрировании систем дифф. ур-ний, в механике и теорет. электротехнике, при исследовании малых колебаний мех. и электр. систем, в квантовой механике и др. областях естествознания. О классификации М. и действиях над ними см. *Алгебра матриц*. А. Т. Хахро.

**МАТРИЦА ВТОРЫХ МОМЕНТОВ** случайного вектора  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  — квадратная матрица  $n$ -го порядка  $B_\xi = \|b_{ij}\|$ , где  $b_{ij} = M\xi_i \xi_j$  — смешанные моменты 2-го порядка величин  $\xi_i$  и  $\xi_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). М. в. м. существует, если для всех  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ )  $M\xi_k^2 < \infty$ . М. в. м. симметрична и неотрицательно определена:  $b_{ij} = b_{ji}$  и при любых вещественных  $t_1, t_2, \dots, t_n$

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} t_i t_j = \sum_{i,j=1}^n M\xi_i \xi_j t_i t_j = M \left( \sum_{i=1}^n \xi_i t_i \right)^2 \geq 0.$$

Пусть  $a = M\xi = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , где  $a_k = M\xi_k$ . М. в. м.  $D_\xi$  вектора  $\xi$  — а наз. дисперсионной матрицей вектора  $\xi$ ;  $D_\xi = \|d_{ij}\|$ , где  $d_{ij} = M(\xi_i - a_i) \times (\xi_j - a_j)$  — смешанные центральные моменты 2-го порядка величин  $\xi_i$  и  $\xi_j$ . При  $i = j$   $d_{ii} = D\xi_i$ ; при

$i \neq j$   $d_{ij} = r_{ij} \sqrt{D_{\xi_i} D_{\xi_j}}$ , где  $r_{ij}$  — коэфф. корреляции между координатами  $\xi_i$  и  $\xi_j$  вектора  $\xi$ . Если координаты вектора  $\xi$  взаимно независимы, то  $d_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Обратное утверждение в общем случае неверно; однако, если распределение  $\xi$  нормально и  $d_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , то его координаты взаимно независимы. Дисперсионная матрица вектора  $\xi$ , вообще говоря, характеризует степень линейной зависимости между его координатами. Если ранг матрицы  $D_{\xi}$  равен  $r$ , ( $0 \leq r \leq n$ ), то между координатами вектора  $\xi$  существует  $n - r$  линейно независимых линейных соотношений и, следовательно, его распределение сосредоточено в  $r$ -мерном подмножестве  $n$ -мерного пространства. М. в. м. используется для определения точности оценок неизвестных параметров. В случае нормального распределения вектора  $\xi$  М. в. м. вместе с математическим ожиданием является полной характеристикой вектора  $\xi$ . Н. П. Слободенюк.

**МАТРИЦА ЗАПОМИНАЮЩАЯ** — совокупность конструктивно связанных запоминающих элементов (ферритовых сердечников, пленочных магнитопроводов и т. п.), расположенных в плоскости в порядке, удобном для построения накопителя. Как конструктивный узел М. з. предназначена для обеспечения технологичности изготовления накопителя и используется преимущественно в запоминающих устройствах с координатной системой выборки. Запоминающие элементы в матрице располагаются на пересечении взаимно перпендикулярных координатных шин. По способу изготовления различают интегральные и сборные матрицы. Первые характерны изготовлением матрицы со всеми запоминающими элементами в едином технологическом цикле (напр., матрицы на тонких магнитных пленках, многоотверстные ферритовые матрицы). Изготовлению сборной матрицы предшествует изготовление и отбор запоминающих элементов, которые затем монтируются в матрицу. Одна или несколько матриц, объединенных координатными шинами, образуют кассету. В кассете, как правило, размещены запоминающие элементы либо одного разряда всех ячеек, либо несколько полиразрядных ячеек накопителя. Несколько кассет, соединенных между собой по координатным шинам, образуют накопитель. В зависимости от типа матриц и технологии их производства координатные шины наносятся либо в процессе изготовления (сборки) матриц, либо при изготовлении кассет. В некоторых случаях часть координатных шин наносится при изготовлении матриц, а часть — при сборке кассет или накопителя. Запоминающих элементов в матрице может быть от нескольких десятков до нескольких тысяч. Количество их ограничивается для интегр. матриц приемлемым выходом годных матриц, а для сборных — технологичностью сборки. Н. К. Бабенко.

**МАТРИЦА ОБУЧАЕМАЯ** — простейшее распознающее устройство, основанное на вычислении скалярных произведений вектора-изо-

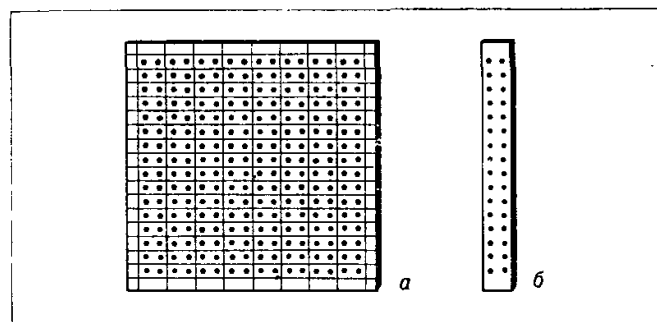
бражения на векторы-эталон. Каждое из этих произведений соответствует одному из распознаваемых классов. М. о. указывает номер класса, эталон которого обеспечивает макс. значение скалярного произведения. Обучение М. о. заключается в вычислении векторов-эталонов усреднением или суммированием изображений обучающей выборки, отнесенных учителем к одному классу. М. о. может решать некоторые простейшие задачи распознавания образов. Появление систем типа М. о. (как и систем «адалин» и «мадалин») в период зарождения теории распознавания образов сыграло определенную положительную роль в становлении этой теории.

Лит.: Steinbuch K., Widrow B. A critical comparison of two kinds of adaptive classification networks. «IEEE transactions on electronic computers», 1965, v. EC-14, N 5.

М. И. Шлезингер.

**МАТРИЦА ФЕРРИТОВАЯ МНОГООТВЕРСТНАЯ** — массив запоминающих элементов, образующихся в окрестности отверстий в пластинке ферромагнетика с прямоугольной петлей гистерезиса. Работа запоминающего элемента в М. ф. м. основана на свойстве ферромагнетика устойчиво сохранять остаточную намагниченность и изменять ее под действием внешнего магн. поля, создаваемого электр. током в проводниках, проходящих через отверстия (рис.).

Конструктивно М. ф. м. выполняются в виде монолитной пластины или собираются из т. н. числовых линеек, хранящих одно полноразрядное число. Один из селектирующих проводов матрицы с целью упрощения монтажа накопителя наносится обычно печатным способом. Запоминающие устройства (ЗУ) на М. ф. м. строятся, как правило, по системе с непосредственной выборкой, а сами матрицы выполняются с использованием двухотверстных элементов. Для коммутации адресных управляющих токов используются магнитные или магнито-диодные коммутаторы, основой которых также являются многоотверстные пластины, но несколько большей толщины и с большими отверстиями. Благодаря возможности изготовления отверстий малого диаметра



Матрица ферритовая многоотверстная: а — в виде пластины; б — в виде числовых линеек

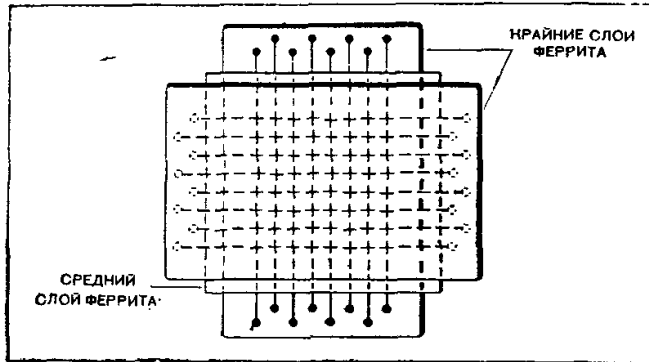
(0,16 мм и меньше) накопителя на М. ф. м. отличаются высокой плотностью размещения запоминающих элементов. Для управления ими требуются сравнительно малые токи и мощности, что позволяет использовать микроэлектронные схемы управления. По основным



параметрам ЗУ на М. ф. м. относятся к быстродействующим *оперативным запоминающим устройствам* малой емкости (цикл обращения порядка 0,5—2 мксек, емкость — несколько сот чисел). Используются преимущественно в *специализированных вычислительных машинах*.

Н. К. Бабенко.

**МАТРИЦА ФЕРРИТОВАЯ СЛОЙСТАЯ** — набор запоминающих элементов, которые образуются вокруг перекрестий ортогональных проводников с током в феррите с прямоугольной петлей гистерезиса. М. ф. с. прессуется



Матрица ферритовая слоистая.

из трех слоев феррита (см. рис.): двух крайних — с нанесенными проводниками и одного среднего без проводников; затем матрица отжигается. В зависимости от толщины среднего слоя каждое перекрестие эквивалентно ферритовому сердечнику, биаксу и др. Из М. ф. с. строятся запоминающие устройства (ЗУ) преимущественно системы 2D с одним или двумя перекрестиями на бит. По основным параметрам ЗУ на М. ф. с. относятся к быстродействующим *оперативным запоминающим устройствам*. Размеры элементов М. ф. с., а, следовательно, и токи управления — небольшие, плотность размещения элементов велика, способ изготовления — интегральный. Все это делает М. ф. с. перспективными для машин на *интегральных схемах*.

Ю. В. Остапенко.

**МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ** — см. *Игры матричные*.

**МАШИНА** — 1) Совокупность механизмов и устройств, осуществляющих заданные движения для преобразования энергии, производства работ или для сбора, передачи, хранения, обработки и использования информации. Все многообразие М. делят на три осн. класса: М.-двигатели, с помощью которых один вид энергии преобразуется в другой, удобный для эксплуатации; рабочие М. (М.-орудия), с помощью которых производится изменение формы, свойств, состояния и положения объекта труда; М., выполняющие вместо человека некоторые ф-ции умственного труда (счетные М., вычислительные М.).

В процессе развития техники возник современный маш. агрегат (автомат, автомат. линия), представляющий собой комплекс, в работе которого наряду с элементами развитой рабочей М. участвуют механизмы и аппараты управления (механические, электрические,

электронные). Тенденцией развития М. является создание комбинированных М.-комбайнов и автомат. заводов. Важную роль в развитии М. играют современные гидромех., пневматические, электромеханические и особенно электронные устр-ва, позволяющие создавать следящие системы, которые автоматически управляют и регулируют процессы, выполняемые М. С развитием автоматизации и особенно в связи с возникновением кибернетики термин М. распространился на очень широкий круг понятий (см. *Бионика, Цифровая вычислительная машина*).

2) Абстрактное математическое понятие, синоним понятия *автомат*. В кибернетике термин «машина» чаще всего используют для обозначения бесконечных автоматов (напр., *Тьюринга машина*), а для автоматов конечных чаще употребляется термин «автомат».

Лит.. Машина. М., 1959 [библиогр. с. 503—509]; Пути развития техники в СССР. 1917—1967. М., 1967 [библиогр. с. 263—273].

Д. К. Лисенбарт.

**МАШИНА ЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО КОНТРОЛЯ** — управляющая вычислительная машина, автоматически реализующая функции контроля и регистрации параметров технологического процесса.

**МАШИННАЯ ПЕРЕМЕННАЯ** — физическая величина (ток, угол поворота вала, электрическое напряжение, время и т. д.), изменяющаяся по заданному в аналоговой вычислительной машине математическим соотношениям (машинным уравнениям) и связанная с независимой величиной  $t$  и зависимыми  $x, y, \dots$  переменными решаемой задачи, соотношениями  $X = m_x x, Y = m_y y, \dots, \tau = m_t t$ , где  $m_x, m_y, \dots, m_t$  — размерные масштабные коэфф. В универсальных АВМ зависимыми М. п. являются электр. напряжения, а независимой — время. Масштабные коэфф. выбирают, исходя из условия точности и эквивалентности маш. ур-ний решаемой задаче. Масштабные коэфф. выбирают таким образом, чтобы М. п. принимали по величине возможно большие значения в пределах допустимого диапазона (100, 50 или 10 в).

При  $\tau = t$  (если  $t$  — время) моделирование ведется в реальном масштабе времени. При  $m_t > 1$  исследуемый процесс «растягивается», при  $m_t < 1$  — «сжимается».

Масштабные коэфф. могут быть переменными:  $m_x(\tau), m_y(\tau), \dots$ , в частности, при решении «неустойчивых» задач.

В. А. Земцев.

**МАШИННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ** — автоматизация этапов разработки и производства интегральных схем и их элементов с помощью *электронных вычислительных машин*. *Интегральные схемы* (ИС) являются основой элементной базы вычисл. машин третьего поколения, а М. п. и с. — один из этапов автоматизации проектирования ЦВМ. Автоматизированная система М. п. и с. — это комплекс взаимосвязанных алгоритмов и программ, входящих в следующие подсистемы: 1) структурного и логич. моделирования функциональных схем; 2) анализа

и моделирования принципиальных схем; 3) проектирования топологии; 4) статистического проектирования и оптимизации; 5) программного обеспечения работы специализированных устр-в изготовления шаблонов; 6) матем. обеспечения тех. средств машинного проектирования. Структура автоматизированной системы М. п. и. с. не зависит от конкретной элементной базы и технологии, изменение которых определяют достоверностью *моделей математических*, выбором методов формирования ур-ний, проектирования топологии, последовательностью функционирования подсистем.

Преимущества М. п. и. с., выражающиеся в сокращении сроков, затрат и повышении качества ИС, проявляются в полной мере лишь при сквозной автоматизации всех этапов проектирования и комплексном решении задач. Применение машинного проектирования обусловлено следующими осн. условиями: 1) при полном исследовании вариантов схемы еще до их воплощения в «масках» или «шаблонах», поскольку без изменения последних нельзя изменять компоненты схемы, чтобы оптимизировать ее качество; 2) взаимосвязью этапов проектирования ИС (особенно для *больших интегральных схем*), в которых результаты одного этапа, например, электр. расчета схем, являются исходными данными для других, напр., для проектирования топологии, а результаты топологического решения, в свою очередь, непосредственно определяют параметры схемы и, следовательно, влияют на результаты электрического расчета; 3) анализом работоспособности схем на всех этапах разработки и проверкой соответствия: функциональных структурных схем — логич. и матем. ур-ниям, принципиальных электр. схем — функциональным структурным схемам, топологических схем — принципиальным электр. схемам, фотошаблонов — топологическим схемам, изготовленных схем — исходным логич. и матем. ур-ниям; 4) взаимным соблюдением технологических, конструктивных и схемных требований и ограничений, обусловленных неизбежным статистическим характером технологического процесса произ-ва и возможностями применяемых тех. и технологических средств и оборудования.

Существующее теоретическое и программное обеспечение М. п. и. с., в основном, относится к рассмотрению отдельных этапов проектирования, в частности, к анализу и моделированию компонентов схем. В последнее время выполнен ряд работ по *системному подходу* к автоматизации проектирования.

Для ИС, содержащих, напр., МОП-транзисторы, матем. обеспечение 1-ой подсистемы состоит из программ, обеспечивающих автомат. формирование логич. модели МОП-ИС, представляющей собой систему *булевых функций*, ее анализ, диагностику и необходимую корректировку. Исходными данными для программы логич. моделирования является система ур-ний непосредственных связей ИС и система тестовых параметров. Выходной ин-

формацией 1-ой подсистемы является таблица преобразованных на ЭВМ ур-ний непосредственных связей с учетом ограничений, накладываемых на выбранную элементную базу, и требований «заказчика». Эта информация (вместе с перечнем технологических и топологических ограничений) используется как исходная в 3-ей подсистеме. Программы этой подсистемы осуществляют подготовку на ЭВМ «коммутационной» схемы ИС, на которой фиксируются с помощью условных координат места расположения коммутационных (аллюминиевых и диффузионных) шин, МОП-транзисторов, контактных площадок и т. д. Спец. подпрограммы обеспечивают пересчет топологических параметров «коммутационной» схемы в электр. параметры транзисторов, рабочих и узловых емкостей и выполняют электр. расчет, анализ и корректировку параметров «критических» каскадов (используя программы 2-й и 4-й подсистем). Автомат. формирование массивов перехода от условных координат геом. фигур к действительным координатам, компоновка топологического чертежа (с прорисовкой для контроля на графопостроителе с помощью программ 4-й подсистемы) производится с учетом стыковки логич. каскадов и элементов обрамления ИС. Программы 4-ой подсистемы хранятся в библиотеке готовых топологических решений, записанной в долговременной памяти ЭВМ. С помощью программ 5-й подсистемы осуществляется автомат. подготовка исходных данных (на перфоленте, перфокартах) для программного управления изготовлением шаблонов на специализированных установках (координатограф, фотонаборная установка). Используя перечень технологических и топологических ограничений (библиотека 4-й подсистемы), программы 3-ей подсистемы размещают элементы схемы на подложке, проводят трассировку межсоединений, корректировку в размещении элементов ИС и межсоединений на подложке.

Выходной информацией автоматизированной системы проектирования служат топологический чертеж ИС и *перфорационная лента* (перфорационная карта) для изготовления фотошаблонов.

Отдельные программы 3-й, 5-й и 6-й подсистем можно выделить в подсистему тех. проектирования — преобразования исходной информации и формирования выходной информации с выпуском документов и перфолент (перфокарт, магн. лент) для специализированных устр-в и оборудования (см. «Київ-67»).

Применение автоматизированной системы М. п. и. с. дает наибольший технико-эконом. эффект в области проектирования схем дискретной техники благодаря существующей здесь унификации и стандартизации элементной базы (см. *Стандарты по вычислительной технике*). Разработка и внедрение методов М. п. и. с. в настоящее время направлены на сокращение (а впоследствии на полное устранение) ручного труда, на повышение производительности труда в отрасли приборостроения.

Лит.: Сигорский В. П., Петренко А. И. Алгоритмы анализа электронных схем. К., 1970 [библиогр. с. 381—392]; Автоматизация проектирования радиоэлектронной аппаратуры. «Обмен опытом в радиопромышленности», 1971, № 7, 1972, № 4; Ильин В. Н. Машинное проектирование электронных схем. М., 1972 [библиогр. с. 274—278]; Моралев С. А. [и др.]. Система машинного проектирования БИС на МОП-транзисторах. «Электронная промышленность», 1972, № 2; Калахан Д. Методы машинного расчета электронных схем. Пер. с англ. М., 1970; Мэдленд Г. Р. [и др.]. Интегральные схемы. Основы проектирования и технологии. Пер. с англ. М., 1970; Машинный расчет интегральных схем. Пер. с англ. М., 1971. В. Г. Табарный.

**МАШИННОЕ СЛОВО** — последовательность символов, которая занимает одну ячейку памяти машины. В частности, М. с. может быть командой, числом или буквенно-числовой последовательностью. Обычно М. с. обрабатывается и передается схемами вычислительной машины как единое целое, хотя в некоторых вычислительных машинах возможна обработка и частей М. с.

**МАШИННЫЙ «ИНТЕЛЛЕКТ»** — совокупность таких характеристик вычислительной машины, как запас сведений в ней и способность к его пополнению путем обучения, степень «понимания» языков программирования высокого уровня, степень структурного воплощения методов переработки информации и организации вычислительного процесса в целом. Эти характеристики имитируют такие черты человеческого интеллекта, как эрудиция и восприимчивость к приобретению опыта, понятливость, сообразительность и организованность в процессе деятельности. Отсюда и происходит термин «машинный „интеллект“», осн. черты которого для удобства можно охарактеризовать так: машинные эрудиция и восприимчивость, понимание входных языков, относительная быстрота реакции и уровень организации. М. «и.» как совокупность данных свойств характеризует определяемые алгоритмической структурой ЦВМ возможности машины, которые проявляются, гл. образом, в сфере взаимодействия машины с пользователем (непосредственно и через посредство других объектов внеш. среды). Т. о., понятие «М. „и.“» отражает потребности развития структур вычисл. машин, возникающие вследствие того, что ЦВМ используют различные специалисты. Это понятие принципиально иное, чем «искусственный интеллект», который является моделью определенных свойств интеллекта — вне зависимости от характеристик средств моделирования. Вместе с тем, уровень М. «и.» существенно отражается на возможностях и эффективности применения этих средств для представления искусственного интеллекта.

М. «и.» воплощается во внутреннем, а также квазивнутр. матем. обеспечении (МО) машины (см. Математическое обеспечение ЦВМ внутреннее). В соответствии с этим все алгоритмы и др. компоненты М. «и.» всегда (т. е. без предварительной «ручной» подготовки работы с ними) доступны для использования, независимо от способа их реализации в качестве того или иного вида машинного оборудования. Вместе

с тем, выбор способов реализации компонентов М. «и.» зависит от их ф-ций, назначения машины, экономических и др. факторов, причем наибольшая эффективность и надежность процесса матем. эксплуатации машины достигается преимущественным использованием первых двух способов, превышающих в то же время третий по фактору стоимости.

Важной особенностью понятия «М. „и.“» является возможность выработки количественных оценок его уровня как показателя приспособленности машины к решению разнообразных задач и к эффективному взаимодействию человека с вычислительной машиной (из этого вытекает возможность сравнения различных машин по этому показателю). В запас хранимых сведений, определяющих машинную эрудицию, включаются стандартные и служебные алгоритмы (предназначенные для выполнения вычисл. и управляющих процедур), константы, заполняемые формы (структуры таблиц), а также данные, получаемые в процессе обучения и эксплуатации машины и используемые при решении последующих задач. Характерной чертой использования всей этой информации («знаний» машины) в процессах программирования, отладки и решения при достаточно высоком уровне М. «и.» является простота и оперативность.

«Понимание» машиной задания обуславливает непосредственное его выполнение при помощи интерпретации, т. е. целиком понимаемое задание — это то, которое записано на программном уровне внутр. языка машины в качестве рабочей программы (см. Интерпретация языка структурная). Т. о., степень «понимания» машиной алгоритм. языков программирования определяется соотношением между этими языками и программным уровнем внутр. языка. Предусмотрение в последнем элементов и конструкций алгоритм. языков повышает степень их «понимания» машиной, за счет чего упрощается система трансляции, повышается эффективность реализации программ, составляемых на алгоритм. языке, облегчается процесс подготовки и отладки задач и т. п., но при этом усложняется система структурной интерпретации внутр. языка. Тенденция к увеличению степени «понимания» алгоритм. языков проявляется весьма отчетливо, в особенности при использовании машин для работы в диалога режиме.

Последняя черта М. «и.» определяется соответственно ускоренным выполнением операций, совмещенностью процессов, организацией вычисл. процесса средствами самой машины (напр., воплощением в ее структуре компонент операционной системы). Здесь охватывается весьма широкий круг принципов, связанных со структурно-конструктивными особенностями машины и с технико-организационными особенностями процесса ее матем. эксплуатации. Тенденция к повышению М. «и.» обуславливается возрастанием требований к машинам; с другой стороны, развитие их конструктивно-технологической базы способствует реализации этой тенденции.

Лит.: Глушков В. М. [и др.]. Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации. К., 1970 [библиогр. с. 254—257]; Фогель Л., Оуэнс А., Уолш М. Искусственный интеллект и эволюционное моделирование. Пер. с англ. М., 1969 [библиогр. с. 220—228]. З. Л. Рабинович.

**МАШИННЫЙ ПЕРЕВОД**, автоматический перевод — в узком смысле — перевод текстов с одного естественного языка на другой при помощи электронных вычислительных (универсальных или специализированных) машин; в широком смысле — область научных исследований, связанных с созданием систем М. п. в указанном выше узком смысле. Вопрос о возможности использования ЦВМ для перевода с одного естественного языка на другой был впервые поставлен в США 1947. С 1954 начались исследования по М. п. в СССР. В настоящее время работы в этой области ведутся в СССР, США, Франции, Великобритании, ГДР, Чехословакии, Болгарии, Венгрии, Канаде, Японии, ФРГ, Италии и др. странах.

В системах М. п. (в узком понимании этого термина) обычно различают следующие составные части: словарь (см. *Словарь автоматический*), алгоритм и его реализующую программу. Первоначально лингвистические сведения о двух языках, участвующих в переводе, не выделяли как нечто самостоятельное, т. е. они не составляли описания языка, отдельного от правил перевода. Данные о языках были разбросаны по тем или иным правилам алгоритма, причем в одном правиле могли использоваться сведения очень разнородного характера.

Со временем стало принято различать: сведения о языке, форму записи этих сведений, т. е. используемый формализм, и собственно алгоритм, т. е. правила работы, сформулированные применительно к принятому формализму и не зависящие от конкретного запаса лингвистических сведений. Однако, несмотря на то, что такое деление общепринято, и теперь еще нередко термин «алгоритм М. п.» употребляют, подразумевая и собственно алгоритм и сведения о языке, записанные в принятой форме. При таком широком понимании слова «алгоритм» именно алгоритм и является основной частью системы М. п., поскольку словарь и программа им определяются. Поэтому, говоря о разных подходах к построению систем М. п., в первую очередь имеют в виду разные подходы к построению алгоритмов М. п. В работах по созданию алгоритмов перевода можно выделить (несколько приблизительно и условно) три этапа и говорить соответственно о системах М. п. 1-го, 2-го и 3-го поколений.

В системах 1-го поколения алгоритмы имели бинарный характер, т. е. были рассчитаны только на два языка, участвующие в переводе. При этом анализ переводимого текста был ориентирован на свойства выходного языка, т. е. при обработке текста на входном языке ставилась задача выяснения данных не только о переводимом тексте, но сразу и о переводящем; иначе говоря, анализ и синтез довольно тесно переплетались друг с другом. Как

правило, такие алгоритмы были последовательно одновариантными, т. е. они имели конечной целью получение одного варианта перевода для каждой фразы и, кроме того, для всех тех случаев, когда возникала необходимость сделать выбор из некоторого круга возможностей, предлагался рецепт выбора одной из них. При этом в одних алгоритмах возвращение к месту, где однажды решение было принято, было уже невозможно, в других предусматривались способы отметки таких сомнительных мест с тем, чтобы к ним можно было вернуться, если по некоторым признакам удавалось установить неудовлетворительность результата. В системах 1-го поколения описание свойств языков не было выделено в самостоятельную часть.

В системах 2-го поколения произошло отделение анализа от синтеза в следующем смысле. Анализ стал независимым от языка, на который переводят, его целью стало выяснение строения переводимого текста и записи результата в виде некоторого представления этого текста в определенной форме (см. *Синтаксический анализ автоматический* естественных языков). Синтез стал независимым от языка, с которого переводят, его целью стало развертывание заданного ему представления в текст на выходном языке. Системы 2-го поколения уже не ориентированы на получение одного варианта и принятие одного решения в каждом сомнительном случае. На смену такому подходу пришел многовариантный анализ, т. е. подход, основанный на переборе возможностей и разветвлении процесса (см. о фильтрах в статье «Синтаксический анализ автоматический»). Анализ и синтез в этих системах стали подразделяться на уровни, соответственно расчленению уровней в языке. Кроме того, в системах 2-го поколения произошло упомянутое выше деление алгоритма на собственно алгоритм и на данные о языке, записанные с использованием определенного формализма. В большинстве своем системы 2-го поколения — это системы, в которых основное внимание уделено этапу синтаксического анализа, завершающему анализ входного текста. Синтез в них играет в некотором смысле вспомогательную роль, он обычно намного беднее и проще анализа.

К системам 3-го поколения можно отнести системы, в которых, во-первых, появляются этапы семантического анализа и синтеза; во-вторых, меняется соотношение между анализом и синтезом: анализ перестает быть центром системы, степень сложности и «нагрузка» анализа и синтеза выравниваются, синтез также становится многовариантным. Последнее означает, что на смену нацеленности синтеза на один вариант приходит нацеленность на построение многих вариантов текста по заданной структуре с использованием перефразирования (см. *Модель «смысл ↔ текст»*). В остальном системы 3-го поколения сохраняют многие черты систем 2-го поколения: независимость анализа и синтеза, их расчлененность на уровни, ориентация на переборный (фильтровый) подход в

анализе, выделение собственно алгоритма и наличие сформулированных формализмов для записи сведений о языке (в частности, использование *грамматик формальных*).

Процесс перевода текста машиной подразделяется на ряд этапов. В разных системах М. п. они несколько различны, однако можно представить некоторую общую схему, которая достаточно характерна для систем 2-го и 3-го поколений (системы 1-го поколения в настоящее время не строят).

Общую схему и встречающиеся отклонения можно описать так. В некоторых случаях началу машинной переработки текста предшествует подготовительный этап. Он может включать в себя либо достаточно сложное редактирование текста, либо только некоторую несложную разметку (напр., введение спец. знаков для формул и т. п.). Текст поступает в машину в закодированном виде. При полной автоматизации перевода ввод будет осуществляться при помощи *читающих автоматов*. В настоящее время ввод осуществляется путем перекодирования текста на перфокарты или записи его на *ленту магнитную* и т. п.

Первым этапом машинной переработки текста обычно является этап поиска слов в автоматическом словаре, хранящемся в запоминающем устройстве машины. Затем следует этап обработки словосочетаний, непереводаемых пословно. В случае, если используется словарь основ, после этих двух этапов начинается морфологический анализ. Затем следует этап синтаксического анализа, а после него — этап семантического анализа, которым и завершается анализ. В результате анализа получается некоторое представление переводимого текста, записанного на *языке-посреднике*. Синтез переводящего текста содержит этапы, соответствующие перечисленным этапам анализа, но они следуют в обратном порядке. Так, синтез начинается с семантического синтеза, затем следует этап синтаксического синтеза, потом этап морфологического синтеза, который и завершает машинную обработку текста и после которого машина печатает полученный перевод (после окончания машинной обработки текста может еще следовать этап постредактирования полученного перевода человеком).

Возможны следующие отклонения от общей схемы, приведенной выше. В том случае, когда в словаре содержатся не основы слов, а словоформы целиком, этап морфологического анализа отсутствует. В некоторых системах перевода, где используется словарь основ, этап морфологического анализа осуществляется первым, он приводит к отсечению от слов окончаний и получению основ, которые после этого отыскиваются в словаре основ. Этапов семантического анализа и синтеза в системах 1-го и 2-го поколений нет, в полном объеме их пока нет ни в одной системе, хотя необходимость их осознают в настоящее время все исследователи. В некоторых системах имеются те или иные разделы, которые представляют собой попытки семантической переработки текста

(такова, напр., система русско-французского М. п., созданная в Гренобльском ун-те во Франции).

Наряду с этим есть работы, в которых предлагается начинать семантический анализ без предварительного синтаксического. В алгоритмах между анализом и синтезом есть и промежуточный этап — преобразование, целью которого является переделка результата анализа, т. е. представления переводимого текста, полученного при анализе, в представление, которое может быть исходным материалом для синтеза, т. е. в такое представление, в котором учтены особенности выходного языка (такова, напр., система англо-русского перевода, разработанная в Ленинградском ун-те). В большинстве существующих систем объектом работы является одна фраза текста, причем даже для одной фразы каждый из названных выше этапов может повторяться несколько раз (столько, сколько вариантов фразы приходит к этому этапу).

Работы в области М. п. в широком смысле можно разделить на работы, направленные непосредственно на создание систем перевода (создание словарей, грамматик, собственно алгоритмов) и их реализацию на ЦВМ, и работы, имеющие целью глубокую теор. разработку тех или иных проблем матем. или лингвистического характера, решить которые нужно для создания эффективных систем перевода.

Непосредственная разработка систем М. п. требует от лингвистов решить следующие задачи: 1) определить запас лингвистических сведений, который будет использоваться в системе (напр., установить критерии, по которым будет происходить классификация слов, и получить классы слов в соответствии с этими критериями); 2) создать словарь, т. е. отобрать словник и приписать словарным единицам наборы признаков; и 3) создать подробные грамматики для всех уровней языка, в частности, сформулировать лингвистические требования (фильтры, правила предпочтения) к каждому уровню представления текста. Проблему выделения разных уровней представления текста в процессе преобразования должны решать математики и лингвисты совместно.

Математики решают следующие задачи: 1) создают формализмы для описания каждого уровня представления текста, или иначе говоря, для описания входных и выходных данных каждого этапа; 2) изучают строение собственно алгоритмов в системах перевода и разрабатывают эффективные алгоритмы для всех этапов процесса перевода, т. е. для перехода от уровня к уровню; и 3) разрабатывают спец. языки для описания этих алгоритмов.

Главными проблемами реализации систем М. п. на ЦВМ являются следующие.

Вопросы кодирования информации. Сюда относится, во-первых, кодирование информации в словарях. Ввиду того, что большие автомат. словари содержат тысячи слов с подробной информацией о них, эти словари обычно хранятся во внешних, медлен-

но действующих запоминающих устройствах (напр., на магнитных лентах или барабанах). Поэтому приходится думать о таких методах кодирования, которые были бы удобны для работы системы перевода и вместе с тем не приводили бы к большим затратам машинного времени на обращение к этим медленно действующим запоминающим устройствам. Во-вторых, на разных этапах работы систем М. п. удобно иметь разные формы записи и кодирования перерабатываемого материала, причем тут важно найти такие способы кодирования, чтобы одновременно было удобно работать на каждом этапе, и вместе с тем, чтобы переход от одного способа кодирования к другому не требовал большой работы машины.

В о п р о с ы п р о г р а м м и р о в а н и я. Реализация систем М. п. требует разработки специальных методов программирования. Это связано, во-первых, с тем, что алгоритмы перевода имеют весьма специфическую и очень сложную логическую структуру. Этим они существенно отличаются от вычисл. алгоритмов, на которые ориентировано как обычное программирование (включая создание языков программирования типа АЛГОЛ, ФОРТРАН и др.), так и само конструирование ЦВМ. Во-вторых, общим свойством всех систем М. п., осуществляемых до сих пор на ЦВМ, является то, что все они открыты, т. е., что системы М. п., даже реализованные на машине, подвергаются доработке, исправлению и расширению. Больше того, часто значительная доля самой разработки алгоритма осуществляется в процессе экспериментов, проводимых на машине. Это объясняется тем, что переводческие системы очень сложны, число учитываемых в них факторов очень велико и создать «на бумаге» полностью готовый алгоритм, в котором все согласовано и проверено, очень трудно; проверить алгоритм и его отдельные части на больших массивах текста можно только в процессе машинного эксперимента. При этом обычно выясняется, что же именно в алгоритме надо изменить или дополнить. Поэтому надо уметь быстро и легко менять программы, реализующие алгоритм М. п. Указанные две особенности ведут к необходимости разрабатывать для систем М. п. специальные языки различного назначения: для описания алгоритмов, для описания программ и др.

Исследования, направленные на построение систем перевода и на разработку различных лингвистических проблем в связи с построением таких систем, вызвали к жизни совершенно новые подходы в лингвистике (см. *Лингвистика прикладная*). Построение систем М. п. дало возможность практически опробовать лингвистические теории, поскольку оно потребовало такого описания языковых фактов, которое дало возможность создать алгоритмическую имитацию владения языком хотя бы в процессе перевода с одного языка на другой; эта алгоритмическая имитация проверяется машинным экспериментом. Начавшиеся на базе М. п. пересмотр и упорядочение системы лингвистических понятий и теорий в сочета-

нии с требованием высокой логико-матем. отчетливости привели к созданию нового научного направления — построения моделей языка (см. *Языка модели аналитические, Языка модели математические*).

Связь исследований в области М. п. с общекрибернетической и, в частности, математикокриберн. проблематикой определяется следующими факторами. *Кибернетика* изучает процессы управления и строение управляющих систем с помощью методов точных наук. При этом кибернетика изучает и управляющие системы, возникающие в природе (напр., нервную систему), и управляющие системы, созданные в процессе существования человечества (напр., экономику), и искусственно созданные модельные управляющие системы. Проблематика кибернетики в значительной степени формируется вокруг единой задачи — выяснения соотношений между возможностями человеческого мышления и машин в процессах переработки информации. Дело в том, что всякий процесс управления представляет собой процесс переработки информации, записанной на некотором языке (естественном или искусственном). Решение указанной выше задачи предполагает передачу машинам возможности пользоваться человеческой речью, т. е. перерабатывать тексты на естественных языках.

Задача автомат. перевода текстов с одного естественного языка на другой является частным случаем подобной переработки, причем в некотором смысле наиболее простым случаем. Кроме того, многие реальные управляющие системы, изучаемые кибернетикой, имеют дело с информацией, записанной на естественных языках, и при переработке этой информации возникают те же проблемы анализа и синтеза текстов, что и при переводе. Такое наличие аналогий и родство информационных задач разной природы ведет к тому, что продвижение вперед в любой области машинной переработки текстов облегчает формулировку задач в М. п. и нахождение подходов к их решению, а продвижение в области М. п. означает продвижение к решению указанной выше общей задачи кибернетики. Этим определяется ценность М. п. как научного направления, в отвлечении от того, что автоматизация перевода будет практически полезна, т. к. она поможет человечеству справиться с чрезмерно возрастающим потоком информации в науке и различных областях хозяйственной и культурной деятельности людей.

Связь матем. проблематики М. п. с другими областями кибернетики определяется тем, что в М. п., пусть часто и не в точной постановке, возникают такие же проблемы, которые в том или ином виде возникают при всякой попытке построения алгоритмической имитации сложной природной системы переработки информации, а в точной постановке изучаются в дискретном анализе на модельных объектах (напр., функциях алгебры логики). Сюда относятся такие проблемы, как установление неразрешимости некоторых задач без перебора; проблема локализации переборов, выяс-



нение соотношений между переборными и одновариантными этапами в процессе переработки информации; выяснение соотношения трудоемкости и эффективности универсальных алгоритмов и ограниченных алгоритмов разной степени мощности, использующих определенную часть информационных связей между объектами изучаемой и моделируемой управляющей системы; установление априорных критериев для выяснения того, какой степени мощности алгоритм следует применить в том или ином конкретном случае; выяснение структуры всей массы задач относительно наиболее трудоемкой и т. д. Многие из этих задач для модельных объектов имеют точное решение. Хотя непосредственный перенос результатов решения этих задач в область М. п. невозможен, однако использование идей, на которых базируется решение, может быть полезно в машинном переводе.

Лит.: Лейкина Б. М. [и др.]. Система автоматического перевода, разрабатываемая в группе математической лингвистики ВЦ ЛГУ. «Научно-техническая информация», 1966, № 1; Машинный перевод. Пер. с англ. М., 1957 [библиогр. с. 305—314]; O e t t i n g e r A. G. Automatic language translation. Cambridge, 1960 [библиогр. с. 367—375]; Machine translation. Amsterdam, 1967; М е л ь ч у к И. А., Р а в и ч Р. Д. Автоматический перевод. 1949—1963. Критико-библиографический справочник. М., 1967. О. С. Кулагина.

**МЕДИЦИНСКАЯ ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА** — комплекс математических и технических средств, обеспечивающий сбор, хранение, переработку и выдачу медицинской информации в процессе решения задач клинической медицины или здравоохранения. М. и. с. создают с целью облегчения и упорядочения работы с потоками мед. информации. В зависимости от характера решаемых задач различают системы информационно-поисковые (справочные и с ф-цией переработки информации); диагностические; прогнозирующие; следящие; информационно-измерительные и управляющие системы. По характеру информации эти системы предназначены для клинической медицины, профилактической медицины, аптечного дела, гигиены труда, проведения науч. эксперимента, обучения, поиска мед. библиографии, управления мед. учреждениями разного профиля.

В зависимости от степени механизации процесса сбора и переработки информации М. и. с. делят на автоматизированные и автоматические. Первые предполагают обязательное участие в информационном процессе человека, а вторые — исключают его. В качестве носителей информации для переработки ее в М. и. с. используют перфокарты для ручной обработки, перфокарты для работы на сортировочных машинах и различные первичные носители, приспособленные для обработки на ЦВМ. М. и. с., обеспечивающие процессы профилактики и лечения, могут быть двух видов: информационно-поисковые системы (ИПС) и управляющие.

Функцией ИПС является сбор, накопление и выдача по запросу информации о больном, о ходе лечения или профилактических мероприятиях. Переработка информации произ-

водится по определенным правилам (алгоритмам). В результате анализа информации выдаются заключения, диагнозы, прогнозы и рекомендации различного типа для того, чтобы их использовал врач или управляющая система. Управляющие системы вырабатывают с помощью обратной связи управляющие воздействия на объекты управления. Лечебный процесс обеспечивается управляющей системой, в которой обязательно участвует врач. Однако в эксперименте на животных уже отработывают мед. управляющие системы, функционирующие без участия врача. Системы, производящие сбор и переработку информации для управления мед. учреждениями — больницами, поликлиниками, объединениями больниц, учебно-лечебными комплексами и т. п., делят на ИПС справочного типа (учет кадров, аптечное дело, ИПС хозяйственных служб), ИПС с ф-цией переработки информации (статистический учет и отчетность, планирование деятельности мед. учреждения, финансирование) и автоматизированные системы управления мед. учреждениями или группой учреждений.

Автоматизированная система управления мед. учреждениями включает в себя ИПС обоих типов. Она работает в тесном контакте с внутрибольничными информационными системами, обеспечивающими профилактический и лечебный процессы, черпая из них необходимую информацию. Этим достигается оперативность в управлении. Управление системой здравоохранения страны должно обеспечиваться сетью информационно-вычислительных центров. Низшими центрами в ней являются автоматизированные системы управления мед. учреждениями, высшими — респ. региональные и общесоюзный информационно-вычислительные центры. Информация от учреждений по каналам связи может поступать непосредственно в высший информационный центр, минуя респ. центры. Это делает управление гибким и оперативным (илл. см. т. 2 между стр. 96—97). При создании М. и. с. для лечения можно исходить из следующих принципов. 1) Разрабатывая систему, следует отчетливо сформулировать конечную цель создаваемой системы и всю последовательность задач, которая позволяет выполнить ее. 2) Для создания М. и. с. надо применять унифицированные носители информации — стандартизированные истории болезни (СИБ), эпикризы и т. п. Разрабатывать мед. вопросники должны только высококвалифицированные специалисты, работающие в этой области медицины. 3) Объем сведений, которые можно включать в СИБ, находится в прямой зависимости от объема информации, содержащейся в информационном массиве системы. 4) Информация, вводимая в М. и. с., должна быть объективной (как можно меньше зависеть от «квалификации и настроения» операторов системы). 5) Чем больше информационный массив и объем информации в модели, тем больше времени идет на обработку информации. М. и. с. для лечения заболеваний разрабаты-

вается специалистами медиками и системотехниками.

М. и. с. относятся к классу киберн. систем «человек—машина», в которых распределение функций между обслуживающим персоналом (врачи, инженеры, техники и др.) и устр-вами (вычисл. машина, спец. мед. аппаратура и др.) зависит от степени механизации и автоматизации приема, хранения, переработки и выдачи мед. информации.

Мед. специалисты разрабатывают для М. и. с. номенклатуры методов лечения, клинических диагнозов, методов исследований, признаков, характеризующих ф-цию органов, и стандартизированные истории болезни (СИБ); создают модели патофизиол. состояний различных органов и *регулирующих систем организма*. Номенклатуры и СИБ должны быть не просто повторением уже имеющихся документов, а служить основой для решения задач медицины. К ним относят: раннюю диагностику тяжелых заболеваний; прогнозирование течения болезни в зависимости от лечения, выполняемой работы, наследственных факторов; выбор оптим. пути обследования и оптим. метода лечения больного. СИБ и номенклатуры едины и для врачей и для ЦВМ. Обычно врач производит опрос больного, заполняет СИБ, дает дополнительную информацию, необходимую машине для уточнения диагноза, прогноза, или выбора методов лечения при первичном и повторных обследованиях больного; анализирует полученную от машины информацию о больном, которую он может либо изменить, либо дополнить; проводит и корректирует на основе этой информации лечение. В М. и. с. врач играет ведущую роль, решение о лечении принимает только он или консилиум врачей.

Математик-вычислитель разрабатывает совместно с врачом мед. информационно-логический язык; создает *программы* по оптим. распределению информационных массивов в памяти ЦВМ; разрабатывает программы по матем. обработке исходной мед. информации. Математик алгоритмизирует способы определения оптим. пути сбора информации о больном, мед. диагностический процесс и лечение; разрабатывает способы повышения надежности информационной системы; составляет программы анализа отчетности работы системы, программы расчета и учета ее финансового и материального обеспечения. Инженерно-тех. персонал обеспечивает четкую, бесперебойную работу тех. частей системы. Процесс решения некоторых задач в М. и. с. делят на такие этапы.

**П р и е м и н ф о р м а ц и и.** Одним из условий эффективного функционирования М. и. с. является возможность оперативного накопления и выдачи мед. информации в привычном для врача или руководителя виде. Т. к. существующие ЦВМ не приспособлены для решения задач, записанных на мед. языке, возникает проблема создания мед. информационно-логич. языка. Перевод с естественного языка на язык конкретной ЦВМ связан с использованием ряда *языков-посредников*, уро-

вень которых определяется степенью формализации. В настоящее время уже разработаны некоторые *алгоритмические языки* для решения информационно-логич. задач. Другим направлением в осуществлении более эффективной связи между врачом и ЦВМ является разработка единых для всех лечебных учреждений данной М. и. с. СИБ или вопросников для записи результатов обследования больных.

**Х р а н е н и е и н ф о р м а ц и и.** Мед. информация хранится в информационном массиве на внеш. накопителях — магн. лентах, барабанах, дисках. Вновь поступившей информации назначается ее идентификатор, который состоит, напр., для СИБ из ее номера и года заполнения. Структура информационного массива определяется формой машинного представления исходных медицинских данных, которая различна для разных клиник и учреждений.

**П е р е р а б о т к а и н ф о р м а ц и и.** Поступившая в память ЦВМ исходная мед. информация сначала освобождается от служебных символов, из нее устраняются и некоторые виды ошибок. Следующей операцией является адресное упорядочение ее с целью разграничения порядка величин (напр., симптомов и их значений). Дальнейшая обработка информации в зависимости от типа решаемых задач производится в несколько этапов. На первом этапе (обучение) мед. информация подвергается статистической обработке с целью получения *модели математической* (статистической) исследуемых процессов и явлений. На втором этапе (экзамен) по вновь поступившим исходным мед. данным решаются осн. задачи М. и. с.: устанавливается диагноз (см. *Автоматизация медицинской диагностики*); определяется оптим. маршрут обследования больного с автомат. оповещением соответствующих спец. мед. служб данной М. и. с. Кроме того, прогнозируется течение заболевания в зависимости от лечения; производится выбор методов лечения и лекарственных средств; определяется степень риска применения конкретного вида лечения или операции; даются всякого рода справки о больном; проводится консилиум врачей и ЦВМ и т. п. (см. *Управление лечебным процессом*).

**В ы в о д и н ф о р м а ц и и.** При выводе информации из ЦВМ возникают задачи, с одной стороны, аналогичные задачам ввода, а с другой стороны, специфичные для этого этапа. Своевременное эффективное использование переработанной информации зависит от возможностей устр-в вывода ЦВМ. Эти устр-ва служат либо для скоростной и наглядной печати соответствующих результатов, либо для стыковки с другими системами по каналам связи. Разрабатываются устр-ва, у которых выходной сигнал представлен человеческой речью (синтезируется человеческая речь из звуковых сигналов).

Во многих странах работают над созданием М. и. с. различного характера. В США создана и функционирует библиографическая система мед. литературы. Во Франции, Швеции,

Дании разработаны системы сбора информации для управления некоторыми отделениями частных клиник. Разрабатываются и создаются «банки мед. данных» в США, Швеции и Англии. В СССР создают автоматизированные системы сбора и переработки информации для лечения и для учреждений здравоохранения. В 1970 в Москве создан Главный вычислительный центр Мин-ва здравоохранения СССР, который является центром разветвленной сети мед. информационных региональных и респ. центров сбора и переработки информации. Эти центры предполагают сбор информации непосредственно от автоматизированных систем управления больницами и больничными объединениями. Прообразы таких систем созданы в Ин-те кибернетики АН УССР. В Ин-те хирургии им. А. В. Вишневского, в Ин-те туберкулеза и грудной хирургии МЗ УССР в Киеве функционируют диагностические системы по приобретенным и врожденным порокам сердца. В Минске, Ленинграде и Новосибирске созданы диагностические системы по психоневрологии; диагностика злокачественных опухолей с помощью ЦВМ налажена в Ин-те проблем онкологии АН УССР. Создается система управления курортами Украины.

*Лит.: Вишневский А. А., Артоболевский И. И., Быховский М. Л. Принципы построения диагностических машин. «Вестник АМН СССР», 1964, № 2; Парин В. В., Баевский Р. М. Введение в медицинскую кибернетику. М.—Прага, 1966; Медицинская информационная система. К., 1971 [библиогр. с. 283—288]; Старк Л. [и др.]. Состояние исследований в биомедицинской технике. «Зарубежная радиоэлектроника», 1969, № 5—6. С. Я. Заславский, В. Г. Мельников, А. А. Попов, В. М. Яненко.*

**МЕДИЦИНСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА** — научное направление в электронике, разрабатывающее электронные приборы и технику их применения для медико-биологических исследований и лечения человека. Мед. электронные приборы и устр-ва применяют: для сбора и регистрации; индикации и анализа мед. информации; лечебного воздействия на человека; управления некоторыми функциями человеческого организма; замены функций отдельных органов и систем человека; электронного моделирования процессов деятельности некоторых систем и органов человека.

Сбор мед. информации осуществляют с помощью датчиков, при помощи которых можно принимать и преобразовывать информацию о функциях органов и систем человека или окружающей среды. По характеру воспринимаемой информации датчики можно разделить следующим образом: фотоэлектрические приемники излучения (фотоэлементы, фотоумножители, фотосопротивления, полупроводниковые приемники), применяемые в оксигеометрах и оксигеомографах, электрорентгеномографах, фотоэлектрореографических и т. п.: датчики, определяющие температурные колебания в организме или внешней среде (ртутно-стеклянные термометры, термопары, термисторы), применяемые в термостатах и электро-термометрах для определения скорости кровотока и др.; датчики, определяющие влаж-

ность воздуха, одежды и пр. (гигрометры, в которых применяют термопары, герметизированные термисторы, электролитические пирометры); датчики, определяющие ионизирующее излучение (ионизационные камеры, счетчики Гейгера — Мюллера, пропорциональные счетчики, сцинтилляционные счетчики); датчики преобразования мех. величин в электр. Они делятся на динамические (пьезоэлектрические, электродинамические, электромагнитные и магнитоэлектрические) и статические (реостаты, жидкостные потенциометры, тензометрические, индуктивные и фотоэлектрические датчики, механотроны). В динамических датчиках выходной сигнал создается только при деформации или движении датчика. Они не требуют дополнительной энергии, тогда как статические не могут работать без нее, и механически управляют мощностью этого источника энергии. Управление осуществляется в их схемах через сопротивления, емкость и индуктивность. И динамические, и статические датчики получили широкое применение в кардиологии (баллистокардиографические приставки, сфигмоматричные, кинето- и сейсмоматричные и т. д.). Мех. датчики с круговым вращением (тахометры) преобразуют данные о величине поворота вала в электр. сигналы; датчики регистрации и измерения потенциалов (капиллярные микроэлектроды с жидкостными и металлическими проводниками), неполяризующиеся электроды (серебро, платина, цинк), простые металлические электроды, электроды для вживления в ткани, широко применяемые в электро- и векторкардиографии и электрофизиологии; датчики для измерения напряжения кислорода, водорода,  $\text{CO}_2$  и т. п., в тканях (с открытым и скрытым кольцом, металлические и стеклянные, радиопиллюли и т. п.). Все датчики должны гарантировать требуемую точность измерения и быть по возможности небольших размеров, относительно простыми и надежными в пользовании.

Кроме датчиков для сбора информации необходимы электронные усилители и устр-ва для регистрации.

Электронные усилители применяют в большинстве случаев при сборе физиол. информации, так как датчик часто не имеет на выходе достаточного напряжения для того, чтобы регистрирующее устр-во могло записать эту информацию. Усилители биопотенциалов бывают низкой частоты — от 0—0,5 до 200—250—500 гц. В приборах для сбора и регистрации физиол. информации может быть один или несколько каналов регистрации — соответственно числу датчиков. При последовательном опросе датчиков через определенные промежутки времени, канал регистрации может оставаться одним и тем же. Число усилителей при этом соответствует числу каналов регистрации. Снятая датчиком информация после предварительного усиления регистрируется с помощью электронолучевых гальванометров, электромагнитных самописцев с чернильной записью или нагревом пера на

фото- или бумажную ленту. При длительной регистрации информации, напр., при записи кардиотопограмм используют киноленту. В последнее время информацию в виде цифровых или аналоговых характеристик все чаще записывают на магнитную ленту, анализируя ее впоследствии с помощью различных методов.

К регистрирующим приборам относят электроннолучевые трубки с различной длительностью послесвечения. По этому принципу в Киевском политехническом ин-те создан «запоминающий вектор-кардиоскоп». С помощью приборов такого рода можно вести наблюдения за функциями сердца и мозга в процессе операции, физической нагрузки и т. п., так как по желанию исследователя в различных участках кинескопа могут сохраняться ранее записанные кривые. Регистрация информации с помощью голографии, по-видимому, один из наиболее перспективных методов сбора и регистрации объемной информации мед. характера, напр., запись человека в различных позах в процессе движения до и после заболевания и т. п. Для сбора, передачи и регистрации информации применяют метод биотелеметрии. Для этого разработаны спец. телеэлектрокардиографы, телефонокардиографы и др. устр-ва. Индикаторами информации могут быть приборы, которые отклонением стрелки (стрелочные приборы) или в виде последовательности цифр на световом табло (цифровые приборы) показывают изменения, происходящие в организме. При индикации выявляются одна или две осн. характеристики изучаемого процесса. Напр., хирурга, проводящего операцию на сердце, интересует число сердечных сокращений за одну минуту и степень гипоксии миокарда. Для этого к электрокардиографу следует подключить счетно-решающее устр-во, которое после преобразования сигнала подсчитывает число зубцов  $R$  электрокардиограммы за минуту и выдает его на стрелочный индикатор или на световое табло. После преобразования информации вычисл. блок определяет отклонение от заданных пределов интервала  $S - T$  и показывает это в числах на световом табло. То же самое можно сделать, преобразуя информацию с помощью индикаторного устр-ва, при регистрации кривой давления плечевой артерии или кривой венозного давления.

В последние годы в М. э. большое внимание уделяют созданию анализаторов, в которые мед. информацию вводят с магнитных лент спец. или бытовых магнитофонов, анализируют ее, получая в результате *гистограммы* и кривые авто- и кросскорреляционной функции, по которым врач может судить о состоянии организма больного и его отдельных органов и систем. Такие устр-ва могут действовать автономно или в комплексе с ЭЦВМ. во внешнем ЗУ которой запоминаются результаты анализа диагностики состояний (напр., определение по энцефалограмме уровня бодрствования, появления ошибочных реакций, оценки умственной активности и т. п.). Создан прибор для определения взаимной *ди-*

*сперсии* данных различных энцефалографических отведений, который отличает уменьшение взаимных дисперсий на фоне нарастающей гипоксии во время наркоза, что очень важно знать анестезиологу. Создан цифровой измеритель скорости пульсовой волны, выполненный в виде небольшой приставки к многоканальному электрокардиографу, на котором записываются кривые пульса и электрокардиограмма. Прибор позволяет определить время распространения пульсовой волны с точностью до  $\pm 0,001$  сек.

Наряду с простыми приборами создаются сложные информационно-измерительные системы с несколькими программами обработки информации. Так в США разработаны специализированные мед. машины «Mediac», «АТАС-501-10», «АТАС-501-20» и др. Создана информационная система по векторному анализу электр. поля сердца СВЭК (стереовекторэлектрокардиограф), которая позволяет определить азимут, угол подъема и модуль моментного вектора, угловую и линейную скорость формирования пространственных петель  $QRS$  и  $P$ . Разработан векторкардиоскоп с записью информации на магнитную ленту и передачей информации по телефонным каналам непосредственно в ЭВМ, которая не только вычисляет параметры, но и ставит диагноз осн. заболеваний сердца.

Наметилось направление, разрабатывающее мед. диагностические устр-ва, напр., диагностическая релейная машина, созданная в Ин-те математики АН УССР, специализированное диагностическое устр-во для определения степени недостаточности кровообращения, разработанное в Ин-те хирургии им. А. В. Вишневского.

Разрабатываются киберн. комплексы для измерения и диагностики состояния человека, находящегося в центре реанимации. Все приборы такого комплекса стыкуются со средними или малыми ЭВМ. Каждый больной, поступивший в центр реанимации, подлежит наблюдению в комплексе, в систему оценок которого входят показатели: электрокардиограммы, температуры тела, центрального и периферического пульса, дыхания, кровяного давления. Такого рода прикроватный блок мед. приборов позволит врачу или медсестре постоянно следить за характером изменений органов и систем реанимированного больного. При изменении состояния больного к нему вызывается, с помощью аварийной сигнализации, врач. Такие устройства уже функционируют в СССР, США, Франции, ФРГ, Швеции.

Создаются электронные анализаторы для клиничко-диагностических и биохимических лабораторий, позволяющие выполнять за один час до 100—200 анализов с выпечиванием результатов анализа в виде бланка заключения и передачей его содержания по *телетайпу* в клиники, из которых прибыл для анализа материал. Разработаны информационно-измерительные системы, совмещающие в себе электронный микроскоп и ЭВМ. Эти системы по-

звоняют определить форменные элементы крови, анализировать гистологические срезы и т. п. Делаются попытки анализировать на ЭВМ гемодинамику с помощью ангиокардиограммы, электро- и фонокардиограммы на основе спец. матем. моделей и внеш. устр-в, создающих объемное изображение сердца и сосудов. Созданы сложные рентгено-диагностические устр-ва с биол. управлением от зубцов электрокардиограммы, с возможностью сбора информации в разные фазы систолы и диастолы сердца.

Создаются и внедряются в клиническую практику экспресс-анализаторы, позволяющие анализировать по нескольким показателям большие потоки людей. В этом отношении очень перспективны разработки автоматизированных флюорографических, теплогрфических, радиографических и кардиометрических анализаторов, совмещенных со счетно-решающими и диагностическими устр-вами. Такие анализаторы нужны для создания систем диспансеризации в больших производственных коллективах.

Аппаратура для лечебного воздействия на человека охватывает, в основном, два класса приборов: приборы, действующие при помощи электр. тока через контактно наложенные электроды, и приборы, действующие с помощью электр., магн. и электромагн. полей без контактного наложения электродов. В области применения этой аппаратуры сложным остается выбор соответствующих доз и времени действия лечебного фактора. Они, несмотря на появление специально разработанных дозиметров, во многих случаях остаются эмпирическими, основанными на опыте врача. Разработан дозатор постоянного и импульсного действия для регуляции состояния сердечно-сосудистой системы животного. Ведутся работы по созданию дозаторов для регулирования углеводного обмена у больного сахарным диабетом, для расчета дозы радиоактивного иода при лечении больного тиреотоксикозом, для определения дозы радиорентгенологической терапии при лечении злокачественных опухолей. При создании таких дозаторов необходимо, чтобы они учитывали действие проведенного ранее лечения, контролировали дозу при проведении терапии в зависимости от изменения показателя эффективности назначенного лечения. Таким образом, в медицинскую электронику проникают идеи теории автоматического регулирования.

Некоторые устр-ва основаны на использовании *биоблектрического управления*. Их можно разделить на два класса. 1) Устр-ва, действующие на организм с помощью биол. процессов, записанных от здорового донора на магнитную ленту или другой носитель информации, напр., устр-ва «Миотон-1» и «Миотон-2»; подобное действие оказывают и электростимуляторы мышечной активности, кардиостимуляторы и др.; 2) устр-ва, в которых для управления применяют биол. процессы, протекающие в самом человеке. Это, напр., водители сердечного ритма, усиливающие сигнал

от предсердия больного и подающие его на миокард желудочков того же человека, при полной атриовентрикулярной блокаде сердца. Система биопреуправления искусственным дыханием, разработанная во Всесоюзном ин-те приборостроения, обрабатывает информацию о содержании  $\text{CO}_2$  в выдыхаемом воздухе, а также биотоки дыхательных мышц. На основе этого определяются характеристики дыхательного цикла. Устр-во имеет импульсный исполнительный механизм и *обратную связь*, которая реализуется по скорости потока воздуха, автоматически изменяя частоту и дыхательный объем потока. Созданы приборы, автоматически регулирующие кровяное давление человека во время операции. Существуют приборы и устр-ва, управляющие ф-циями человека без биол. управления, напр., «Электросон», «Электронаркоз», разработанные в Ин-те кибернетики АН УССР, а также дефибрилляторы и т. п. Разрабатываются устр-ва и приборы для замены некоторых органов и систем человека.

М. э. разрабатывает и создает спец. устр-ва, позволяющие моделировать деятельность отдельных органов и систем; электр. активность сердца; динамические отношения между сердцем и телом и т. п.

М. э. находится на стыке с *кибернетикой биологической, кибернетикой медицинской и бионикой*.

Лит.: Амосов Н. М., Шкабара Е. А. Опыт постановки диагноза при помощи диагностических машин. «Экспериментальная хирургия и анестезиология», 1961, № 4; Ливенцев Н. М. Электромедицинская аппаратура. М., 1964; Сидоренко Г. И. Кибернетика и терапия. М., 1970 [библиогр. с. 191—210]; Ахути В. М. [и др.]. Кибернетический комплекс для центра реанимации. В кн.: Автоматизация. Организация. Диагностика, ч. 2. М., 1971; Дональдсон П. Электронные приборы в биологии и медицине. Пер. с англ. М., 1963. А. А. Попов.

**МЕЖДУНАРОДНАЯ АССОЦИАЦИЯ ПО АНАЛОГОВЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ** (Association internationale pour le calcul analogique), АИКА — организация, способствующая развитию сотрудничества в области аналоговой и аналого-цифровой вычислительной техники. Членами ее могут быть отдельные специалисты, организации и фирмы. Создана 1955 на 1-м учредительном конгрессе, состоявшемся в Брюсселе. В работе конгресса приняли участие представители 20 стран.

Согласно уставу секретариат Ассоциации размещается в Бельгии. Руководящий комитет (дирекция) АИКА может состоять из 15 выборных членов, представителей различных стран. Руководящий комитет состоит из президента, трех вице-президентов, членов комитета, ученого секретаря и казначея (последний имеет совещательный голос). АИКА состоит из действительных индивидуальных и коллективных членов. К 5-му Междунар. конгрессу (1967) АИКА состояла из 321 индивидуального действительного члена, 16 коллективных членов — фирм, 32 коллективных членов — науч. организаций. От коллективных членов в состав Ассоциации был выделен 131 член-представитель. Междунар. конгресс

АИКА созывается каждые три года. На заседаниях конгрессов, участниками которых могут быть не только члены АИКА, заслушиваются научн. доклады и проводятся дискуссии. Во время конгресса проводится заседание присутствующих членов АИКА, на котором заслушивается отчет Руководящего комитета, утверждается бюджет и план работы на три года, переизбирается одна треть состава Руководящего комитета. Второй конгресс состоялся в 1958 в г. Страсбурге (Франция), третий — в 1961 в г. Опатия (Югославия), четвертый — в 1964 в г. Брайтоне (Англия), пятый — в 1967 в г. Лозанне (Швейцария), шестой — в 1970 в г. Мюнхене (ФРГ). 6-й конгресс проводился совместно с *Международной федерацией по обработке информации*. В 1970 президентом АИКА вновь избран Ж. Гоффман; новыми членами Руководящего комитета были избраны представители США, Франции, ФРГ, Югославии и Японии. Между конгрессами АИКА проводит симпозиумы по отдельным вопросам, интересующим членов ассоциации. Седьмой — состоялся в 1973 в Праге (ЧССР), на котором президентом избран Р. Випневский. Доклады конгрессов публикуются в виде сборников. Ежеквартально АИКА выпускает науч.-тех. журнал — «Annales de l'Association internationale pour le calcul analogique — Proceedings of the international Association for Analog Computation». («Труды Международной ассоциации по аналоговому вычислению»). Ученые СССР участвуют в АИКА с 1955. Для организации сотрудничества ученых и специалистов СССР, работающих в области аналоговой и гибридной вычисл. техники с зарубежными учеными, входящими в АИКА, в 1967 создан Национальный комитет СССР М. а. по а. в. в составе 35 членов, председателем его является Г. Е. Пухов.

В. Б. Ушаков.

**МЕЖДУНАРОДНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ПО СТАНДАРТИЗАЦИИ** (International Organization for Standardization), ИСО — организация, содействующая развитию стандартизации с целью расширения сотрудничества в области умственной, научной, технической и экономической деятельности. Создана в 1946. СССР входит в орг-цию со дня основания. Высший орган ее — Генеральная ассамблея — собирается раз в три года. Между сессиями деятельностью М. о. по с. руководит Совет во главе с президентом и вице-президентом. Для изучения общих вопросов и подготовки по ним решений создан ряд комитетов: по изучению научных принципов стандартизации, по улучшению деятельности, комитет помощи развивающимся странам и др.

Осн. функция организации — разработка, утверждение и издание международных рекомендаций по стандартизации, которые выполняются в тех. комитетах, но не являются юридически обязательными для стран-членов. Рекомендации реализуются странами через национальные стандарты. На 1 сентября 1969 в этой международной организации было 132 технических комитета.

Технический комитет ИСО/ТК 97 «Вычислительные машины и обработка информации» создан в 1961. Он объединяет работу 14 подкомитетов: 1) «Словарь» — разрабатывает международные рекомендации по терминологии на основе «Толкового словаря IFIP/ISS»; 2) «Набор знаков и кодирование» — определил семиэлементный код из 128 знаков для обмена информацией между электронными цифровыми вычисл. машинами (ЭЦВМ), разработал рекомендации по маркировке *лент магнитных* и по структуре картотек на них; 3) «Распознавание знаков» — стандартизует наборы знаков для бланков, в том числе и для оптического распознавания; 4) «Языки программирования» — разработал проекты рекомендаций по языкам программирования АЛГОЛ, ФОРТРАН и КОБОЛ; 5) «Передача данных» — разработал систему управления передачей информации при помощи семиэлементного кода М. о. по с. и систему обнаружения ошибок (в программу работ входят акустическая связь, каналы связи, сети передачи данных); 6) «Системы документации, базирующиеся на вычислительной технике»; 7) «Цифровой контроль машин»; 8) «Языки программирования для цифрового контроля» — вопросы описания технологии и конструкций устройств; 9) «Магнитные диски» — стандартизует 6-дисковые пакеты и расположение на них информации; 10) «Магнитные ленты для вычислительных машин» — разработал систему рекомендаций по 12,7 мм ленте с 7-и 9-дорожечной записью и кассету для нее; 11) «Магнитные ленты для записи измерений»; 12) «Взаимостыковка оборудования»; 13) «Представление элементов информации»; 14) «Этикетирование и структура картотек».

Лит.: Демусьяк А. Г. Международная организация по стандартизации. М., 1967.

В. Н. Квасницкий.

**МЕЖДУНАРОДНАЯ ФЕДЕРАЦИЯ ПО АВТОМАТИЧЕСКОМУ УПРАВЛЕНИЮ** (International Federation of Automatic Control), ИФАК — организация, объединяющая ученых, занимающихся развитием теории автоматического управления и ее применением в различного рода системах. Создана в связи с необходимостью установления творческих контактов между учеными и специалистами разных стран, а также для обмена информацией между ними. В 1957 в Париже состоялась Генеральная ассамблея М. ф. по а. у., которая положила начало ее существованию: приняла устав организации, избрала президента, Исполнительный совет в составе 11 членов, Консультативный комитет и приняла решение о проведении в 1960 в Москве первого международного конгресса ИФАК. В соответствии с уставом, ИФАК — международная научная организация, осн. целью которой является содействие развитию проблем автоматического управления, обмен научно-технической информацией, организация международных конгрессов и симпозиумов. Высшим руководящим органом федерации является Генеральная ассамблея, состоящая из представителей стран —



членов ИФАК. Между конгрессами работой международной федерации руководит Консультативный комитет.

Организационную и научно-методическую работу по отдельным направлениям (частично изменившимся за время существования ИФАК) проводят тех. комитеты: по теории автоматического управления; техническим средствам; их применению; космическому пространству; системотехнике; образованию; по терминологии. Комитеты, в частности, организуют междунар. конференции и симпозиумы по отдельным направлениям.

Каждые три года созывается конгресс ИФАК, где на заседании Генеральной ассамблеи избирается президент федерации на последующие три года. Первым президентом в 1957 был избран амер. ученый Г. Честнат, в 1959 — сов. ученый А. М. Летов, в 1961 — швейц. ученый Э. Гереке, 1963 — англ. ученый Дж. Коулз, 1966 — польский ученый Н. Новацкий. В работе первого международного конгресса ИФАК-60 приняли участие 1190 делегатов от 29 стран. Национальные комитеты 21 страны представили на конгресс 285 докладов. В работе второго конгресса 1963 в Базеле участвовали 1500 делегатов от 32 стран, доклады представили национальные комитеты 30 стран. Третий конгресс состоялся в 1966 в Лондоне, на нем было 1700 делегатов от 35 стран, всего было заслушано 282 доклада. На четвертом конгрессе ИФАК в 1969 в Варшаве было более 1500 участников, заслушано и обсуждено 303 доклада. Одновременно с конгрессом состоялось заседание Генеральной ассамблеи с участием представителей от 33 национальных комитетов стран, президентом был избран франц. ученый В. Бройда. Очередной пятый конгресс федерации состоялся в 1972 в Париже, на нем были делегаты от 38 стран; заслушано 218 докладов; президентом избран амер. ученый Дж.-С. Лозье.

Каждая страна представлена в ИФАК Национальным комитетом. Председателем Национального комитета Советского Союза является акад. АН СССР В. А. Трапезников. Кроме того, в СССР существуют еще территориальные группы Национального комитета.

После каждого конгресса ИФАК издаются сборники его трудов, в которых публикуются доклады. ИФАК издает журнал «Автоматика» и «Информационный бюллетень ИФАК» (оба на англ. языке). Комитет по терминологии издает словарь терминов по автоматическому управлению (на 6 языках).

П. В. Походило.

**МЕЖДУНАРОДНАЯ ФЕДЕРАЦИЯ ПО ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ** (International Federation for Information Processing), ИФИП — организация, способствующая развитию теории и применения электронных вычислительных машин (ЭВМ), в первую очередь в области научных расчетов, автоматизации обработки экспериментальных данных, автоматизации проектирования, а также моделирования процессов мышления, творческих процессов, машинного перевода и т. п. Цель —

обмен информацией и установление творческих и деловых контактов между учеными, научными центрами и фирмами, ведущими исследования и разработки в указанных областях, а также выработка стратегии их развития.

В 1959 в Париже состоялся 1-й конгресс ИФИП'а, положивший начало деятельности федерации. В состав организации входило 15 стран (в том числе СССР). Руководящий орган — Генеральная ассамблея во главе с президентом и вице-президентом. На конгрессе была определена основная форма организации работы ИФИП'а, в частности, принято решение о созыве через каждые три года конгрессов. Вторым конгрессом состоялся в 1962 в Мюнхене, 3-й — в Нью-Йорке, 4-й — в г. Эдинбурге, 5-й в 1971 в г. Любляне. По мере увеличения количества стран-членов федерации (в 1968 их было уже 29) был создан Совет ИФИП'а. Генеральная ассамблея и Совет ИФИП'а определяют направление деятельности федерации. Совет является рабочим органом, решающим организационные (определение места и времени очередного конгресса, создание комитетов и подкомитетов, прием новых членов и т. п.) и финансовые вопросы (установление размеров взносов, учет доходов от издания «Трудов ИФИП'а» и т. п.).

Всей деятельностью ИФИП'а, опираясь на Генеральную ассамблею и Совет, руководят президент и два вице-президента. Их кандидатуры выдвигает Совет из числа его членов, а утверждает Генеральная ассамблея путем голосования представителей всех стран. Деятельность ИФИП'а обеспечивается Исполнительным комитетом и постоянным секретариатом (находятся в Женеве). Рабочими органами по отдельным вопросам являются технические комитеты, которые, в частности, организуют конференции и симпозиумы по определенным направлениям кибернетики. Имеются следующие тех. комитеты: по языкам программирования, терминологии, обучению и медицине, и постоянно действующие — по планированию деятельности, публикациям, международным связям.

Инициатором создания федерации и ее первым президентом был амер. ученый А. Ауэрбах, в 1968 президентом был избран сов. ученый академик АН СССР А. А. Дородницын.

Каждая страна, входящая в ИФИП, представлена определенной организацией и выделяет официального представителя для участия в руководящем органе — Генеральной ассамблее. Советский Союз в ИФИП'е представляет АН СССР, официальным представителем на протяжении всех лет является акад. АН СССР А. А. Дородницын.

Третьим по значению органом является Программный комитет, избираемый Советом. Основной задачей комитета является разработка научной программы очередного конгресса ИФИП'а. Возглавляют его председатель и два вице-председателя. Председатель Программного комитета предыдущего конгресса входит во вновь избранный состав на правах консультанта. Председатель и члены Программного

комитета избираются на каждый новый срок. Членов комитета, именуемых руководителями областей (в соответствии с основными направлениями деятельности Федерации) на 4-м конгрессе (1968) было пять (по областям: математика, математическое обеспечение, аппаратная часть, применение ЭВМ и обучение).

Председателем Программного комитета 5-го конгресса ИФИП'а был избран советский ученый акад. АН СССР В. М. Глушков. Определено 7 основных направлений (областей) конгресса: вычислительная математика, математические основы обработки информации, математическое обеспечение ЭВМ, аппаратная часть ЭВМ и вычислительные системы, управленческие и административные системы управления, технологическое приложение ЭВМ, применение ЭВМ в естественных и гуманитарных науках.

ИФИП издает труды международных конгрессов, конференций и симпозиумов, многоязычный словарь, бюллетень по языку АЛГОЛ и бюллетень новостей (почти все издания на англ. языке). П. В. Походило.

**МЕМИСТОР** — электрохимическое управляемое сопротивление с памятью. Представляет собой (рис.) миниатюрную электролитическую ячейку с двумя электродами — управляющим 6 и электродом считывания 3 — тонкой проводящей пленкой из инертного материала на диэлектрической подложке 4. На обоих концах электрода считывания имеются выводы 1 для измерения сопротивления, кратность изменения которого колеблется от 20 до 100 для различных типов элементов. Корпус 2 ячейки заполнен электролитом 5 с ионами металла управляющего электрода.

При прохождении тока через М., когда управляющий электрод является анодом, а электрод считывания — катодом, на электроде считывания осаждается тонкая пленка металла, изменяющая его сопротивление. Сопротивление электрода считывания зависит от количества прошедшего электричества: оно уменьшается, когда анодом является управляющий электрод, и возрастает, когда анодом становится электрод считывания и осажденный на нем металл переносится на управляющий электрод.

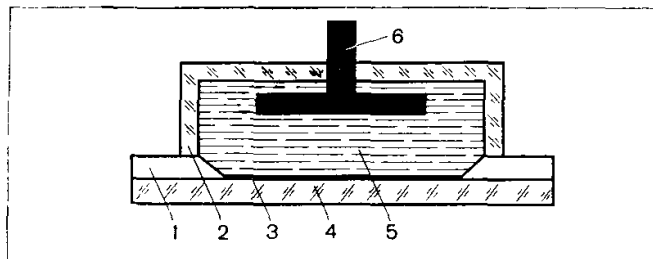


Схема устройства мемистора.

Считывание величины изменяющегося сопротивления обычно производят с помощью моста переменного тока. При отключенном управляющем электроде сопротивление металлической пленки сохраняется с точностью до

1% в неделю. Ток в управляющем электроде составляет обычно несколько миллиампер, наименьшее время полного изменения сопротивления пленки колеблется у различных типов М. от 10 до 60 сек. Потребляемая мощность по управляющему входу М. около 1 мвт. М. способны выдерживать довольно большое (порядка нескольких тысяч) число циклов полного изменения сопротивления без нарушения осн. характеристик.

М. применяют в измерительной технике в качестве реле времени, модуляторов токов высокой частоты, счетчиков импульсов, интеграторов и т. п. Особенно перспективно применение М. в самонастраивающихся автоматах, системах, т. к. он легко управляем и имеет свойство долговременного запоминания.

Лит.: Боровков В. С. [и др.]. Электрохимические преобразователи информации. М., 1966 [библиогр. с. 102—103]; Крафтс (Crafts H.S.). Элементы самообучающихся систем и методы их использования. «Электроника» («Electronics»), 1963, №12. А. А. Снегур.

**МЕРЫ СЛОЖНОСТИ** в теории автоматов. Для постановки и исследования задач автоматов теории характерным является сравнение автоматов или реализуемых ими операторов по степени их сложности. Как правило, это связано с поиском оптим. решения (напр., при автоматическом синтезе). Меры и критерии сложности классифицируют исходя из того, что именно они характеризуют сложность самих автоматов или же сложность вычисл. процессов, протекающих в автоматах (см. *Сложность вычислений*).

Сложность автоматов. В качестве М. с. здесь рассматривается некоторый функционал  $\mu$ , относящийся каждому автомату  $M$  из исследуемого класса автоматов число  $\mu(M)$ , характеризующее его громоздкость (сложность). Напр., в качестве М. с. конечного детерминированного автомата можно принять число  $k$  его состояний; более тонким критерием сложности является число его команд, равное произведению  $mk$ , где  $m$  — число букв во входном алфавите. Это же произведение можно рассматривать в качестве М. с. и для некоторых типов автоматов растущих. К ним относятся *Тьюринга машина*, имеющая  $m$  ленточных символов и  $k$  состояний головки, автомат Неймана, элементы которого являются автоматами конечными с параметрами  $m$ ,  $k$  и т. д. Удачность такого выбора меры подтверждается, напр., следующим фактом: работу любой машины Тьюринга  $M$  можно достаточно хорошо имитировать работой другой машины  $N$ , имеющей лишь два состояния (или два ленточных символа), причем для обеих машин число команд  $m, k$  остается почти неизменным.

Другие результаты, которые используют эту М. с., устанавливают верхние и нижние оценки сложности автоматов универсальных в том или ином классе растущих автоматов. В структурной теории конечных автоматов автомат задается в виде схемы, напр., в виде *сети логической*. В этой ситуации М. с. обычно характеризуют к-во и ассортимент элементарных компонент (элементов), из которых состоит схема. Пусть, напр., рассматриваются логич.

сети над базисом  $L = \{B_1, \dots, B_i, \dots, B_r\}$  таким, что элементу типа  $B_i$  приписан вес  $r_i$ . Тогда в качестве сложности логич. сети, содержащей  $m_i$  экземпляров типа  $B_i$  ( $i \leq r$ ), естественно принять сумму  $\sum m_i r_i$ . В частности, когда элементы считаются равноценными, сложность определяется общим числом элементарных компонент (кстати, сложность *схемы контактной* также определяется числом ее контактов). Указанные меры имеют тот недостаток, что они не учитывают топологии схемы, т. е. специфики соединений между отдельными элементами (напр., максимальное число входных полюсов, которые могут быть подсоединены к одному выходному полюсу и т. д.). Среди мер, учитывающих это обстоятельство, следует отметить глубину схемы без циклов, т. е. максимальную среди длин путей, ведущих от входа схемы к ее выходу. Глубину схемы можно интерпретировать как время ее срабатывания. В качестве других мер можно рассматривать также произведение к.-н. ранее описанных мер или результат другой подходящей операции над ними (напр., произведение числа элементов схемы на ее глубину).

Если зафиксирована некоторая М. с. для автоматов, то тем самым индуцируется и М. с. для реализуемых ими операторов. А именно, сложностью оператора  $T$  естественно объявить минимальную из сложностей автоматов, реализующих этот оператор. В этом смысле можно рассматривать, напр., сложность *булевых функций* (булева ф-ция рассматривается как истинностный оператор — поведение автомата без памяти). Исходя из указанных выше концепций структурной сложности конечного автомата, удалось получить много тонких оценок (верхних и нижних) сложности булевых ф-ций различных классов, и вообще конечно-автоматных операторов различных типов (см. *Синтез автоматов структурный*). Аналогичные М. с. используются и в др. областях математики и кибернетики. Напр., сложность формулы, по которой вычисляется многочлен, измеряется числом арифм. операций, фигурирующих в этой формуле.

В *алгоритмов теории* рассматривается общая ситуация, когда  $\mu$  является функционалом, определенным на к.-л. мн-ве конструктивных объектов (напр., слов, *нормальных алгорифмов*, *исчислений* и т. п.), и исследуются сложные закономерности при весьма общих предположениях о функционале  $\mu$  (см. *Алгоритмов сложность*).

**Сложность вычислений.** Пусть зафиксированы некоторый класс  $K$  автоматов и концепция поведения автоматов из  $K$ , в соответствии с которой каждый автомат реализует словарный оператор. Считают, что все эти операторы заданы на словах в одном и том же алфавите  $Z$  (но не обязательно определены для всех слов в этом алфавите). В качестве М. с. вычислений рассматривается функционал  $\sigma$ , относящий каждой паре  $\langle M, \alpha \rangle$ , где  $M \in K$ ,  $\alpha$  — слово в  $Z$ , для которого опера-

тор, реализуемый автоматом  $K$ , определен, — число  $\sigma(M, \alpha)$ . Это число характеризует сложность работы автомата  $M$  применительно к исходным данным, закодированным в виде слова  $\alpha$ , до выдачи соответствующего результата. Напр., в качестве  $\sigma(M, \alpha)$  можно взять число элементарных шагов, из которых складывается эта работа (иначе говоря — длительность процесса вычисления), или объем памяти, который может понадобиться для записи всех промежуточных результатов по ходу данного процесса и т. д. Можно также считать, что в рассматриваемой ситуации М. с. является оператор (т. н. сигнализирующий оператор), который сопоставляет автомату  $M$  ф-цию  $\sigma_M(\alpha) = \sigma(M, \alpha)$  аргумента  $\alpha$  (сигнализирующую функцию).

М. с. вычислений, как и М. с. автоматов, можно использовать для характеристики сложности операторов, реализуемых автоматами данного класса. Однако имеется существенное различие между этими двумя подходами, заключающееся в следующем. Поскольку сложность автомата  $M$  измеряется действительным числом, то любые два автомата рассматриваемого класса сравнимы по сложности. Обычно считают, что  $\mu$  в качестве значений принимает лишь натуральные числа, поэтому для каждого оператора существует реализующий его автомат с миним. сложностью, которая и принимается за сложность оператора.

Если же рассматривается М. с. вычислений, то сигнализирующие ф-ции  $\sigma_M, \sigma_N$  двух автоматов  $M, N$  могут оказаться и несравнимыми (даже если считать, как это принято, что  $\sigma_M < \sigma_N$ , если почти для всех  $\alpha$ , т. е. для всех  $\alpha$  за исключением, быть может, конечного их числа  $\sigma_M(\alpha) < \sigma_N(\alpha)$ ). Поэтому наилучшего вычисления может априори и не существовать; строго доказано, что так и бывает на самом деле. В связи с этим ограничиваются более слабой характеристикой сложности оператора  $T$ , а именно: отыскивают ф-ции  $\phi_1(\alpha)$  (ниж. оценку) и  $\phi_2(\alpha)$  (верх. оценку) по возможности близкие друг к другу и такие, что, во-первых, существует автомат  $M$ , реализующий оператор  $T$ , причем  $\sigma_M(\alpha) < \phi_2(\alpha)$  почти для всех  $\alpha$ , а во-вторых, для всякого автомата  $M$  рассматриваемого класса, который реализует оператор  $T$ ,  $\sigma_M(\alpha) \geq \phi_1(\alpha)$  почти для всех  $\alpha$ .

**Явления инвариантности.** Рассматривают различные М. с. в зависимости от исследуемого класса автоматов. Однако даже для одного и того же класса автоматов возможны различные сигнализирующие операторы, подобно тому, как выше были указаны различные М. с. для автоматов одного класса. Напр., для машин Тьюринга можно рассматривать сигнализирующие времена, сигнализирующие емкости (т. е. памяти) и т. д. Оценки сложности операторов зависят от того, какая М. с. автоматов или какая М. с. вычислений положена в основу теории. Но при этом обнаруживаются и некоторые явления

инвариантности, заключающиеся в следующем: если оператор  $T_1$  значительно сложнее оператора  $T_2$  при одной концепции сложности, то это отношение сохранится и при другом выборе меры. Явления такого рода применительно к вычислениям удобнее всего исследовать в рамках аксиоматической теории вычислений. При исследовании сложной схемной реализации конечно-автоматных операторов (в частности, булевых ф-ций) установлено также, что сложность оператора слабо зависит от избранного базиса. Все это свидетельствует о том, что указанные подходы к оценке сложности операторов действительно выясняют объективную трудность, присущую тем или иным преобразованиям информации.

Лит.: «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51; Трахтенброт Б. А. Сложность алгоритмов и вычислений. Новосибирск, 1967 [библиогр. с. 255—258]; Проблемы математической логики. Сложность алгоритмов и классы вычислимых функций. М., 1970.

Б. А. Трахтенброт.

**МЕТАЛОГИКА** — наука, изучающая строение логических теорий. М. включает исследования *исчислений* и строго отличает содержательные выводы, которые делаются при доказательстве различных положений, касающихся исчисления, от формальных выводов самого исчисления, представленных в виде операций над высказываниями и рассматриваемых только в качестве таковых.

**МЕТАМАТЕМАТИКА** — то же самое, что и *доказательства теории*.

**МЕТАСИМВОЛЫ** — символы, которые не принадлежат к числу символов предметного языка, а вводятся в логику для описания свойств этого языка, формулирования правил вывода и т. п.

**МЕТАТЕОРИЯ** — логическая теория, изучающая свойства некоторой другой теории, именуемой предметной (напр., металогика — это логика, изучающая свойства соответствующего предметного логического языка). В качестве предметной теории может выступать любая теория, подвергаемая тщательному логич. анализу. Предметная теория и М. образуют единое целое, которое изучается логич. средствами. Понятие М. возникло в связи с развитием логич. формализма в работах нем. математика Д. Гильберта (1862—1943).

**МЕТАТРАНСЛЯТОР** — *транслятор*, ориентированный на класс входных языков. Исходной информацией для М. является *программа* в некотором исходном языке и описание этого языка (синтаксиса и семантики) на определенном *метаязыке*. Выходной массив М. представляет собой программу на машинном или на некотором языке *промежуточном*. См. также *Языки машины*.

Лит.: Фельдман Дж., Грис Д. Системы построения трансляторов. Пер. с англ. «Алгоритмы и алгоритмические языки», 1971, в. 5. А. Е. Куликович.

**МЕТАЯЗЫК** — язык, применяемый для исследования и описания некоторого класса языков. Широкое применение М. для строгого (формального) описания синтаксиса языков программирования позволило разработать алгоритмы синтаксического контроля и анализа

программ и тем самым привело к существенно-му упрощению отладки программ (см. *Отладочные программы*), а также создало предпосылки для реализации параметрически управляемых (в частности, синтаксически управляемых) *трансляторов*, ориентированных на классы входных — выходных языков. Примерами М. являются грамматики Хомского и их частный случай *Бэкуса нормальная форма*.

А. Е. Куликович.

**МЕТКА** — 1) Имя (название) оператора, используемое в языках программирования для обозначения (идентификации) операторов. 2) Информация о массиве данных или томе, с помощью которой массивы или тома идентифицируют, контролируют и эффективно обрабатывают программами *управления данными*. **МЕТОД ЗАМЕНЫ ЯДРА ВЫРОЖДЕННЫМ** — один из приближенных методов решения линейных интегральных уравнений. См. *Интегральных линейных уравнений способы решения*.

**МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИЗЬЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ** — свойства количественных проявлений дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), т. е. свойства разнообразных параметров, связывающих ДНФ и процедуры над ними с числами и отражающих измерение этих объектов. Интерес к М. с. д. н. ф. вызван тем, что членам ДНФ отвечают элементы схем и требуется оценивать затраты оборудования в схемах. Изучение М. с. д. н. ф., связанное с построением для данной *булевой функции*  $f$  кратчайшей ДНФ, используют в *автоматов теории*, *теории тестов*, *кодирования теории*, *комбинаторном анализе* и *программировании динамическом*. Изучение М. с. д. н. ф. возникло под влиянием работ амер. математика К. Э. Шеннона (р. 1916) по синтезу переключательных схем и работ сов. математика С. В. Яблонского (р. 1924) по алгоритмическим трудностям синтеза схем. Специфика ДНФ как т. н. формул глубины два обусловила три плана, в которых рассматривают М. с. д. н. ф. Во-первых, при схемных реализациях ДНФ число ступеней в схемах равно двум, что важно для надежности и быстродействия схем. С этим связана роль ДНФ в структурной теории автоматов и широкое применение их при синтезе матем. машин. В этом плане интересны длины различных видов ДНФ.

Во-вторых, минимизация сложности ДНФ строится на основе т. н. упрощений и имеет ряд общих черт с поиском оптим. решений, напр., в некоторых задачах динамического программирования. Случай ДНФ выделяется простотой исходных условий, отчетливостью картины, удобством совместного рассмотрения оптим. объектов и алгоритмов оптимизации. Каждое из упрощений локально (затрагивает лишь один какой-либо член ДНФ) и все разнообразие их сводится к двум типам — вычеркиваниям букв в членах ДНФ и вычеркиваниям самих членов. Переходя посредством упрощений от одной ДНФ для данной ф-ции  $f$  к другой ДНФ для  $f$ , приходят к тупиковой

ДНФ для  $f$ , играющей роль экстремума локального. Часто одни упрощения исключают другие, и в зависимости от выбора их приходят к различным дизъюнктивным нормальным формам тупиковым. Для ДНФ характерна ярко выраженная полиэкстремальность, когда глобальный экстремум находится среди большого числа локальных экстремумов. Характерно также наличие у любой  $\phi$ -ции  $f$  ДНФ, называемой сокращенной. В ней отражается вся картина минимизации: и экстремумы, и, в известной степени, алгоритмы минимизации, так что М. с. д. н. ф. отражают измерение и полученного решения, и алгоритмов получения его. Хотя при этом делаются различные допущения об алгоритмах, имеющиеся результаты тривиальны и полезны. Наряду с длинами ДНФ здесь интересны абсолютные и относительные к-ва различных видов ДНФ, относительные длины ДНФ, протяженность, совмещение на одной  $\phi$ -ции различных свойств, связность и др.

Геом. трактовка ДНФ придает им наглядность, проясняет их комбинаторную природу, облегчает постановку и поиски решения задач. В этом случае ДНФ проявляются как комплексы, составленные из граней  $n$ -мерного единичного куба  $E^n$ , и через переход к абстрактным комплексам имеют связи с другими комбинаторными задачами. Напр., изучение типичных ситуаций для ДНФ оказало влияние на исследование т. н. статистических, или частотных, свойств поведения автоматов, при котором имеют дело с одномерными комплексами в виде диаграмм переходов. В этом плане интересны некоторые общие черты числовых оценок ДНФ, а также принципы получения этих оценок.

К решению задачи минимизации ДНФ может быть несколько подходов, требующих конечного числа шагов. При этом возникает ряд серьезных препятствий. Принципиальное значение совокупности М. с. д. н. ф. состоит в том, что она при тех или иных ограничениях характеризует переборы; прикладное значение — в том, что знание препятствий в общем случае дает ориентиры для использования возможностей в конкретных ситуациях.

Рассмотрение М. с. д. н. ф. и соответствующих числовых параметров приурочено ко мн-ву  $P_n$  всех булевых  $\phi$ -ций от  $n$  переменных. Если  $\chi(f)$  такого рода параметр, то через  $\chi(n)$  обозначается макс. значение его, т. е.  $\chi(n) = \max_{f \in P_n} \chi(f)$ . Выделение типичных ситуаций

производится в форме высказывания, что для почти всех  $\phi$ -ций  $a(n) \leq \chi(f) \leq b(n)$  — под этим подразумевают, что часть тех  $\phi$ -ций из  $P_n$ , которые удовлетворяют указанным оценкам, стремится к 1 при  $n \rightarrow \infty$ . Рассмотрение ограничивается оценками макс. значений и оценками значений для почти всех  $\phi$ -ций. Осн. внимание уделяется тому, как изменяются эти величины с ростом  $n$ . В рассмотренных ниже оценках заметно различие между максимальными и типичными значениями параметров.

Рассмотрение числовых параметров приурочено также к естественной упорядоченности ДНФ булевой  $\phi$ -ции  $f$ : совершенная ДНФ, сокращенная ДНФ, тупиковые ДНФ, кратчайшие ДНФ. Совершенная и сокращенная ДНФ у любой  $f$  единственны и замечательны следующим. Первая весьма просто строится по табличному заданию  $\phi$ -ции  $f$ , и из нее можно получить упрощениями любую ДНФ для  $f$ . Вторая представляет собой итог всевозможных упрощений совершенной ДНФ, состоящих в вычеркивании букв; благодаря этому она позволяет получать все тупиковые ДНФ данной  $\phi$ -ции, пользуясь упрощениями только второго типа, состоящими в вычеркивании членов.

Макс. значение длины совершенной ДНФ для  $\phi$ -ции от  $n$  переменных равно  $2^n$ , а типичное значение  $\sim 2^{n-1}$ . Пусть  $s(f)$  — длина сокращенной ДНФ. Оценки макс. значения

$$c_1 \cdot \frac{3^n}{n} \leq s(n) \leq c_2 \cdot \frac{3^n}{\sqrt{n}}; \text{ для почти всех } \phi\text{-ций}$$

$n^{(1-\varepsilon) \log \log n} \cdot 2^n \leq s(f) \leq n^{(1+\varepsilon) \log \log n} \cdot 2^n$ , где  $\varepsilon \rightarrow 0$  — при  $n \rightarrow \infty$ . В обоих случаях длина сокращенной ДНФ во много раз превышает длину совершенной ДНФ, и свое название, которое ей дано намного раньше, чем получены эти оценки, сокращенная ДНФ оправдывает лишь для небольшого числа  $\phi$ -ций.

В связи со сказанным о полиэкстремальности интересны следующие числовые параметры, характеризующие совокупность тупиковых ДНФ булевой  $\phi$ -ции  $f$ . Из определения следует, что длина тупиковых ДНФ не превосходит длины совершенной и сокращенной ДНФ для  $f$ . Число тупиковых ДНФ  $t(f)$  велико. Для макс. значения найдены оценки  $(2^{2^n}) \sqrt[n]{n} \leq t(n) \leq (2^{2^n})^{n/2}$ , а для почти всех  $\phi$ -ций  $(2^{2^n})^{(1-\varepsilon) \log n \cdot \log \log n} \leq t(f) \leq (2^{2^n})^{(1+\varepsilon) \log n \cdot \log \log n}$ . Подход к минимизации ДНФ, основанный на переборе всех тупиковых ДНФ, чрезвычайно трудоемок. Для числа кратчайших ДНФ  $m(f)$  известно лишь, что макс. его значение  $m(n)$  имеет оценку снизу  $(2^{2^n})^{c \cdot n} \leq m(n)$ ,  $0 < c < 1$ .

Тупиковые ДНФ булевой  $\phi$ -ции  $f$  могут быть существенно длиннее кратчайшей ДНФ. Относительной длиной тупиковой ДНФ наз. отношение ее длины к длине кратчайшей ДНФ. Макс. относительная длина тупиковых ДНФ данной  $\phi$ -функции  $f$  наз. разбросом  $\phi$ -ции  $f$ ; обозначают ее через  $Y(f)$ . Разброс длин в известной мере характеризует актуальность минимизации  $\phi$ -ции  $f$ . Макс. значение разброса длин  $Y(n) = 2^{n(1-\varepsilon)}$ , где  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для почти всех  $\phi$ -ций разброс существенно меньше, но тоже увеличивается с ростом  $n$ , и для него известны оценки  $\log n < Y(f) < \log n \times \log \log n$ . Относительные длины почти всех тупиковых ДНФ  $\phi$ -ций  $f$  ведут себя аналогично: у «самых плохих»  $\phi$ -ций они тоже равны  $2^{n(1-\varepsilon)}$ , а у почти всех  $\phi$ -ций они лежат между  $\log n$  и  $\log \log n$ . Это означает, что т. н. ста-

тистический подход к минимизации ДНФ, при котором ограничиваются перебором в некоторой выборке из мн-ва тупиковых ДНФ  $\phi$ -ции  $f$ , приводит к ДНФ, которая во много раз длиннее, чем кратчайшая ДНФ. Имеется оценка разброса длин через более доступный параметр. Для произвольной  $\phi$ -ции  $Y(f) \leq 2^{\text{Dim } f}$ , где  $\text{Dim } f$  — размерность  $\phi$ -ции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , т. е. макс. значение размерности для грани в комплексе, отвечающем сокращенной ДНФ  $\phi$ -ции  $f$ . В общем случае улучшить эту оценку нельзя.

Пусть для данной  $\phi$ -ции  $\lambda(f)$  — максимально возможная длина тупиковой ДНФ, а  $l(f)$  — длина кратчайшей ДНФ.  $\lambda(f)$  ведет себя примерно так же, как длина совершенной ДНФ: макс. значение  $\lambda(n) \sim 2^n$ , а для почти всех  $\phi$ -ций  $\lambda(f) \sim 2^{n-1}$ . Более того, у почти всех  $\phi$ -ций так ведут себя длины почти всех тупиковых ДНФ. Что касается  $l(f)$ , то макс. значение ее  $l(n) = 2^{n-1}$ . Для почти всех  $\phi$ -ций

$$\frac{2^n}{\log n \cdot \log \log n} < l(f) < \frac{2^n}{\log n}, (*)$$

т. е. почти всегда длина  $l(f)$  на порядок меньше длины совершенной ДНФ. Это означает, что минимизация длины представляет интерес. Вместе с тем  $l(f)$  достаточно велика, и это свидетельствует о том, что т. н. тривиальный подход к минимизации (перебор всех ДНФ длины 1, 2, 3 до тех пор, пока не встретится ДНФ, реализующая данную  $\phi$ -цию) потребует просмотра ДНФ с достаточно большой длиной, т. е. весьма большого перебора. Так что задача минимизации нетривиальна и с этой стороны. Наряду с оценками (\*) найдены алгоритмы, дающие для почти всех  $\phi$ -ций ДНФ такой длины. В частности, таков аналог градиентного метода.

М. с. д. н.  $\phi$ . в связи с локальным подходом рассмотрены в трех направлениях. Как известно, алгоритм локальный  $A$  строит набор упрощений сокращенной ДНФ  $S(f)$  и приводит к ДНФ  $A(f)$ , получаемой на  $S(f)$  этими упрощениями; от ДНФ  $A(f)$  не требуется, чтобы она была даже тупиковой, но требуется, чтобы для произвольной  $\phi$ -ции  $f$  она была единственной. Алгоритм  $A$  имеет параметры — индекс  $r$  и величину памяти  $v$ . Он состоит в последовательном сборе и переработке информации на ограниченных частях ДНФ  $S(f)$ , представляющих собой окрестности членов ДНФ  $S(f)$ , индекс  $r$  задает радиус окрестностей. Идея локальности состоит в ограничении трудоемкости алгоритма  $A$  посредством ограничения радиуса окрестностей. Протяженностью  $p(f)$  булевой  $\phi$ -ции  $f$  наз. миним. значение радиуса, при котором окрестность любого члена ДНФ  $S(f)$  составляет уже всю ДНФ  $S(f)$ . Разность длин ДНФ  $S(f)$  и  $A(f)$  наз. результативностью локального алгоритма  $A$  на  $f$  и обозначается через  $\delta_A(f)$ . Ц и к л о м наз.

булева  $\phi$ -ция  $\phi(x_1, \dots, x_n)$ , сокращенной ДНФ которой отвечает в  $E^n$  комплекс из ребер, причем каждая вершина покрыта двумя ребрами, и комплекс связан. Упомянутые три направления таковы. Во-первых, прямым построением циклов получено макс. значение протяженности  $p(n) = c_n \cdot 2^n$ ,  $\frac{1}{8} < c_n < \frac{1}{2}$

для почти всех булевых  $\phi$ -ций  $p(f) \sim \frac{n}{\log \log n}$ .

Одна из осн. теорем теории локальных алгоритмов — теорема невозможности упрощения цикла  $\phi$  при  $r \cdot v \leq p(\phi)$  — с учетом этих оценок трактуется как свидетельство трудности минимизации ДНФ.

У почти всех  $\phi$ -ций число т. н. ядровых членов в сокращенной ДНФ  $S(f)$  и число регулярных вершин невелико. Это означает, что характер перекрытия граней в комплексе  $S(f)$  для типичных  $\phi$ -ций довольно сложен, а также, что результативность локальных алгоритмов при  $r = 1$  и  $r = 2$  для типичных  $\phi$ -ций мала. Таковы все применяемые локальные алгоритмы — *Квайна метод минимизации* ( $r = 1$ ), построение ДНФ «сумма тупиковых» ( $r = 2$ ). Вместе с тем имеются примеры  $\phi$ -ций, на которых результативность высока. При оценке ее следует также иметь в виду усложнение сокращенной ДНФ по сравнению с совершенной.

Наконец, построены т. н. плотные булевы  $\phi$ -ции  $\lambda(x_1, \dots, x_n)$ , на которых локальные алгоритмы при  $r \geq 2$  имеют трудоемкость порядка  $c^n$  ( $1 < c < 2$ ), которая сравнима с  $t(n)$  — макс. значением числа тупиковых ДНФ для  $\phi$ -ций от  $n$  переменных. Это означает, что упомянутая выше идея локальности нуждается в уточнении, т. к. на некоторых  $\phi$ -циях уже при  $r = 2$  нет удовлетворительного ограничения трудоемкости. У плотных  $\phi$ -ций малая протяженность ( $p(\lambda) = 2$ ) совмещается с выраженностью трудностей минимизации  $t(\lambda) \geq c^n$ ,  $Y(\lambda) \geq c^n$ ,  $\delta_A(\lambda) = 0$  при  $r \geq 1$ , относительная длина почти всех тупиковых ДНФ  $\geq c^n$ , все члены сокращенной ДНФ  $S(\lambda)$  имеют одинаковое число букв. Таковы осн. задачи, приведшие к изучению М. с. д. н.  $\phi$ .

Для почти всех  $\phi$ -ций  $\text{Dim } f \leq [\log n] + 1$  и у почти всех  $\phi$ -ций почти все грани, составляющие сокращенную ДНФ, имеют размерность, существенно меньшую и равную примерно  $\log \log n$ . Связность комплексов, отвечающих сокращенным ДНФ типичных  $\phi$ -ций, такова, что эти комплексы сосредоточены почти целиком в одной компоненте связности, а прочих компонент немного и они нульмерны. Кратчайшая ДНФ может не быть минимальной по числу букв и наоборот. Максимально возможное отношение их длин  $\sim \frac{n}{2}$ , а для типичных  $\phi$ -ций это отношение  $\sim 1$ .

Следует также упомянуть минимизацию при ограничении по размерности. Для произвольных комплексов, составленных только из од-



номерных граней, и для отвечающих им ДНФ имеется алгоритм, основанный на построении макс. паросочетания в *графах*, который дает минимальную ДНФ для случая  $n$  переменных при памяти порядка  $2^{2n}$  и числе шагов порядка  $2^{3n}$ . Какое-либо развитие этого подхода для больших значений размерности неизвестно.

Получение приведенных оценок само оканчивается решением экстрем. задач на бесконечном мн-ве, отвечающем бесконечной совокупности значений  $n$ . Отыскание макс. значений параметров состоит в построении таких комплексов граней в  $E^n$ , которые удовлетворяют тем или иным ограничениям на локальное и глобальное строение (отсутствие поглощений одних граней другими, связность и т. п.) и на которых достигаются значения параметра, достаточно близкие к верхней оценке, получающейся обычно из общих количественных соотношений. Грубо говоря, здесь требуется максимально плотная упаковка фигурных изделий в заданном объеме.

Отыскание типичных значений сочетает аналогичное конструирование с подсчетами средних, *дисперсий* и применением неравенства Чебышева. Конструкция расчленяет задачу на определенные этапы, на которых вводятся вспомогательные параметры и производятся для них названные подсчеты, и связывает вспомогательные параметры и оценки для них с осн. оцениваемым параметром. С нескольких нетривиальных конструкций в  $E^n$  и даваемых ими различий макс. и типичных значений началось широкое изучение типичных ситуаций для различных видов комплексов.

*Лит.*: Яблонский С. В. Функциональные построения в  $k$ -значной логике. «Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР», 1958, т. 51; Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики. «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8; Васильев Ю. Л. О сравнении сложности тупиковых и минимальных дизъюнктивных нормальных форм. «Проблемы кибернетики», 1963, в. 10; Васильев Ю. Л. Трудности минимизации булевых функций на основе универсальных подходов. «Доклады АН СССР», 1966, т. 171, № 1; Глаголев В. В. Некоторые оценки дизъюнктивных нормальных форм функций алгебры логики. «Проблемы кибернетики», 1967, в. 19; Глаголев В. В. О длине тупиковой дизъюнктивной нормальной формы. «Математические заметки», 1967, т. 2, в. 6; Сапоженко А. А. О наибольшей длине тупиковой дизъюнктивной нормальной формы у почти всех булевых функций. «Математические заметки», 1968, т. 4, в. 6; Евдокимов А. А. О максимальной длине цепи в единичном  $n$ -мерном кубе. «Математические заметки», 1969, т. 6, в. 3. Ю. Л. Васильев.

**МИКРОКОМАНДА** — код одной или нескольких *микроопераций*, выполняемых за один элементарный такт работы цифровой вычислительной машины. Последовательность  $M$  наз. *микропрограммой* (см. также *Управление структурное в ЦВМ*).

**МИКРОМОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ** — модель математическая экономического объекта, позволяющая на основе изучения его составных частей установить отображение реально существующих функциональных, логических и информационных связей в виде векторных и функциональных зависимостей. В отличие от макроподхода (см. *Макромодели экономи-*

*ческие*) микроподход предполагает знание ф-ций каждого составного звена моделируемого объекта и описание их в виде адекватных моделей, детальное изучение механизма взаимодействия составных частей моделируемого объекта, их влияние на формирование управляющих и информирующих параметров. При этом отношение модели и моделируемого объекта не является отношением тождества, а аналогии, гл. о., на уровне структур и ф-ций. Микроподход характеризуется не величиной моделируемого объекта и его местом в системе нар.-хоз. планирования и управления, а системой знаний об объекте и их использованием при построении модели управления или информационной модели. Среди структурных подразделений экономики наиболее изученным является предприятие, поэтому часто определение микро- и макромоделирования проводится по иерархическому признаку, т. е. исходя из места эконо. объекта в системе нар.-хоз. планирования и управления. В этой системе предприятие — низшая ступень, поэтому часто макромоделю отождествляют с отображением различных сторон межотраслевых связей и всего нар. х-ва в целом, а  $M$ . э. — с отображением деятельности производственных участков, цехов, предприятий. В таком определении подчеркивается два момента: 1) подчиненность в формировании входных параметров модели; 2) расшифровка понятия микро. Названные признаки относительны и не дают правильного представления о микро- и макромоделировании.

В зависимости от предположений о характере взаимодействия различных звеньев системы, а также степени неопределенности используемой информации,  $M$ . э. можно разделить на детерминированные и вероятностные. Примером детерминированной модели является задача оптим. загрузки оборудования при заданной технологической последовательности обработки деталей и однозначно определенных временных характеристиках. В качестве вероятностной модели можно рассматривать прогнозирование ограничений по выпуску продукции, уровня ее рентабельности. Если объект, описываемый детерминированной или вероятностной моделью, изучают в отдельные фиксированные моменты времени, то соответствующая модель наз. статической, если же в некоторые взаимосвязанные моменты времени, — динамической.

Уровень разработки матем. аппарата оптимизации параметров управления микромоделями наложил определенный отпечаток на характер моделирования; видимо, по этой причине первоначально реализованными оказались линейные модели. Для построения более сложных зависимостей между звеньями системы требуется применение методов *программирования нелинейного и программирования динамического, игр теории, эвристических методов анализа вариантов* (см. *Последовательный анализ вариантов*).

*Лит.*: Штофф В. А. Роль моделей в познании. Л., 1963; Головин К. В. Некоторые вопросы

изучения экономических систем и их моделей. В кн.: Вычислительная техника и алгоритмизация экономических задач. М., 1968; Терехов Л. Л. Экономико-математические методы. М., 1968 [библиогр. с. 297—298]; Завельский М. Г. Оптимальное планирование на предприятии. М., 1970 [библиогр. с. 384—392]; Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. Пер. с англ. М., 1967.

А. А. Карагодова.

**МИКРООПЕРАЦИЯ** — элементарная операция в процессе переработки информации, соответствующая элементарному машинному действию, обозначенному в языке ЦВМ *внутренним*, и не содержащее в себе других элементарных операций (машинных действий), обозначенных в этом языке. См. *Управление структурное в ЦВМ*.

### МИКРОПРОГРАММ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Цели преобразований микропрограмм очень разнообразны. Существуют преобразования, которые дают возможность оптимизировать имеющуюся микропрограмму, напр., по быстройдействию; есть класс преобразований микропрограмм, которые применяются для чисто инженерных целей, напр., учет нагрузочных свойств элементов, их быстродействия, синхронизации сигналов и т. д.

Поскольку средства задания микропрограмм разнообразны, техника М. п. опирается на различные результаты *автоматов теории*, теории логических схем программ и *дискретных преобразователей теории*. Задание автомата в виде микропрограммы позволяет применять методы минимизации автоматов для упрощения микропрограммы. Такие преобразования касаются лишь способа записи и хранения микропрограмм, но они не могут изменять микроопераций и логических условий, а также порядка выполнения микроопераций.

В связи с развитием теории дискретных преобразователей и алгоритм. алгебр появились совершенно новые средства преобразования микропрограмм. Так как любую микропрограмму можно представить в регулярной форме (см. *Алгебра алгоритмов*), т. е. записать как элемент некоторой алгебры, для ее преобразования можно применять хорошо развитые в алгебре средства применения соотношений. Если в соответствующей алгоритм. алгебре получена система определяющих соотношений, то, отправляясь от исходной микропрограммы, заданной в регулярном виде, можно получить значительно более экономную микропрограмму, применив соотношения к исходной микропрограмме. При этом можно, взяв, напр., за исходную микропрограмму алгоритм умножения, основанный на определении умножения, получить микропрограмму умножения в том виде, в котором она обычно реализуется в ЦВМ. Ценность такого аппарата преобразований состоит в том, что преобразования можно выполнять формально. Лит.: Глушков В. М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм. «Кибернетика», 1965, № 5.

С. С. Горюховский.

**МИКРОПРОГРАММА** — последовательность микрокоманд, реализующая заданный алгоритм, в которой каждая микрокоманда соответствует одной или нескольким микрооперациям. Микрокоманда задает проверку логи-

ческого условия и переходы в другие участки М. Этой М. (их системой) задают в *вычислительных машинах* взаимодействие управляющего и операционного автоматов при выполнении операций машинных в устройствах переработки и хранения информации (данных).

От задания автомата управляющего в виде системы М. можно осуществить переход к заданию его с помощью способов, используемых в абстрактной теории автоматов (таблицами, графами, матрицами и др.). Такой переход позволяет решать оптимизационные задачи, связанные с упрощением устройства управления машины и вычислительного устройства методами абстрактной теории автоматов. В этом случае элементами входного алфавита являются значения упорядоченных некоторым образом логических условий М., а число состояний равно числу всех микрокоманд. Однако классические автоматов способы задания (таблицы, графы, матрицы) становятся громоздкими при большом числе входов и состояний автомата. Более компактную запись автоматов (в частности, управляющих автоматов с большим числом входов и состояний) можно получить, если каждому состоянию  $a_i$  автомата поставить в соответствие мн-во  $N_i$  (называемое микрокомандой) упорядоченных троек:  $N_i = \{ \langle f_1, \lambda_1, \delta_1 \rangle, \langle f_2, \lambda_2, \delta_2 \rangle, \dots, \langle f_k, \lambda_k, \delta_k \rangle \}$ , где  $f_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) — булево выражение, соответствующее подмножеству тех и только тех входных сигналов автомата, на каждый из которых автомат, находясь в состоянии  $a_i$ , соответствующей микрокоманде  $N_i$ , реагирует одинаково, т. е. имеет одинаковые значения функций переходов ( $\delta_j$ ) и выходов ( $\lambda_j$ ). Такой способ задания автоматов наз. *микропрограммным*.

Разработаны методы формального синтеза М. с учетом физ. характеристик сигналов и элементов. Для более глубоких формальных преобразований М., включающих замену одних микроопераций другими, изменение порядка их следования и т. п., были созданы специальный алгебраический аппарат и особый язык для записи М. Их основой послужил аппарат микропрограммных алгебр, разработанный сов. математиком В. М. Глушковым (р. 1923). См. также *Управление структурное в ЦВМ*.

Лит.: Глушков В. М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм. «Кибернетика», 1965, № 5; Чеботарев А. Н. Абстрактный синтез управляющего автомата по микропрограмме. «Кибернетика», 1966, № 5; Мищенко А. Т. О задании автоматов микропрограммой. «Кибернетика», 1970, № 3.

Е. П. Баилаков.

**МИКРОПРОГРАММНАЯ АЛГЕБРА** — алгебра алгоритмов, интерпретируемая в терминах микроопераций цифровых вычислительных машин.

**МИКРОПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ** — способ построения в цифровой вычислительной машине структурного управления как набора последовательностей элементарных операций (микроопераций), в совокупности реализующих алгоритмы управления ЦВМ (см. *Микро-*

программа, Управление структурное в ЦВМ). **МИКРОСХЕМА** — элемент, узел или устройство (либо его часть) вычислительной машины, систем автоматики и радиотехники, изготовленные средствами микроэлектроники в виде взаимозаменяемого модуля. В основе технологии производства М. лежит способ изготовления всех деталей схемы или их части в едином технологическом цикле — групповой способ. В соответствии с технологией различают М. интегральные и гибридные. В гибридных пассивные компоненты изготавливают групповым способом (вакуумной конденсацией, электрохимическим осаждением или шелкографией на изоляционной подложке), а активные (транзисторы, диоды без корпусов) подсоединяются с помощью навесного монтажа с последующей герметизацией всего модуля. При произ-ве интегральных схем в одном случае пассивные и активные компоненты формируются в объеме полупроводника или на его поверхности и соединяются тонкопленочными проводниками (интегральные монокристаллические схемы), в другом — активные и пассивные элементы (а также соединения между ними) выполняются на изоляционной подложке из тонких пленок (интегральные тонкопленочные М.).

М., используемые в вычисл. технике, содержат логич. элементы, составляющие функционально полный набор и объединяются в рабочую схему узла или устр-ва внеш. монтажом. Интегральные М., набор логич. элементов которых в процессе изготовления объединен соединениями в узел или устр-во (регистры, платы запоминающих устройств, процессоры) на одной пластине или подложке, наз. большими интегральными схемами (БИС).

Применение М. для построения вычислительных машин третьего поколения позволило существенно сократить их габариты и потребление энергии, повысить быстродействие и надежность. При переходе от М. к БИС еще больше снижается стоимость ЭВМ и увеличивается их надежность.

Ф. Н. Зыков, Ю. В. Остапенко.

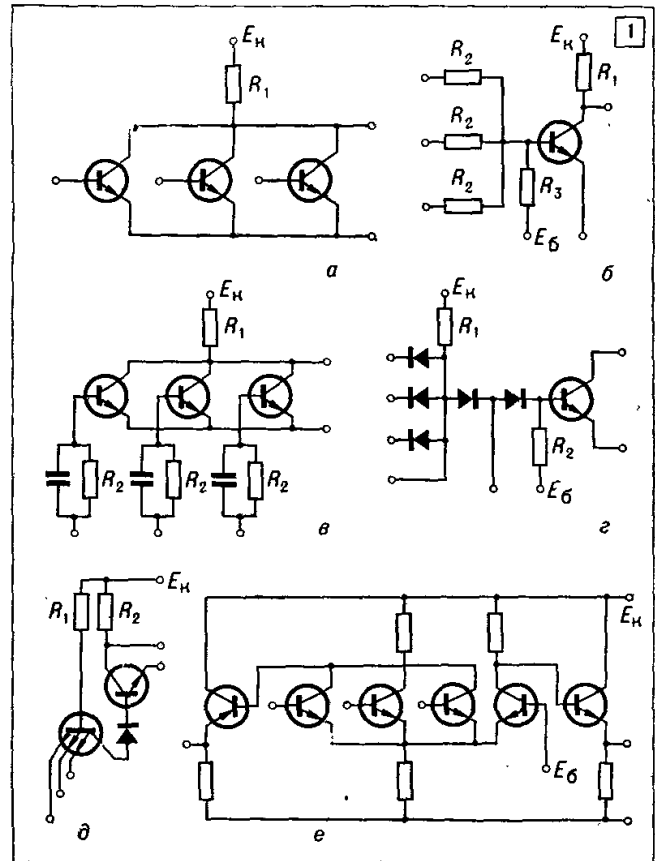
**МИКРОЭЛЕКТРОННАЯ ЭЛЕМЕНТАРНАЯ БАЗА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ** — система предназначенных для синтеза ЭВМ элементов и конструктивно-технологических методов их монтажа, в основу технической реализации которой положены принципы микроэлектроники.

Микроэлектроника — раздел электроники, разрабатывающий проблемы микроминиатюризации электронных схем и устройств с одновременным повышением их надежности.

М. э. б. в. т. — закономерный этап развития элементной базы электронных вычислительных машин. Цифровая вычисл. техника, для которой характерно использование большого количества однотипных элементов, явилась первой и наиболее эффективной областью приложения микроэлектроники.

На первом этапе становления М. э. б. в. т. осн. элементами ЦВМ стали интегральные схемы (ИС) с малой степенью интеграции,

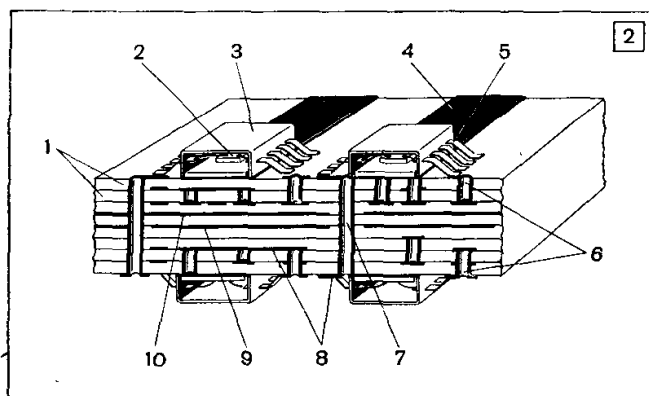
включающие в себя по несколько десятков компонентов и предназначенные для выполнения функций таких простейших электронных узлов, как инвертор, триггер, логические схемы «НЕ И», «НЕ ИЛИ» и т. п. На этом этапе разработано большое количество различных функционально полных систем интегральных логических элементов в основном на обычных (биполярных) транзисторах и транзисторах со структурой металл — диэлектрик — полупроводник (МДП-транзисторах). Системы логических ИС на биполярных тран-



1. Типовые электрические схемы интегральных логических элементов на биполярных транзисторах.

зисторах можно разделить на следующие основные типы (рис. 1): а — схемы с непосредственной связью, б — резистивно-транзисторные схемы, в — схемы с RC-связями, г — диодно-транзисторные схемы, д — транзистор-транзисторные логические схемы с одно- и многоэмиттерными транзисторами; е — транзисторные схемы с эмиттерной связью (токовые ключи). В каждом из этих основных типов можно выделить несколько подтипов, причем даже схемы одного подтипа могут отличаться по конструкции, технологии и параметрам. В самых быстродействующих из выпускаемых интегральных логических схем среднее время задержки сигнала составляет от 2 до 5 нсек при рассеиваемой мощности 50 ÷ 100 мвт, а самые маломощные рассеивают не более 1 мвт при средней задержке 5 ÷ 10 мсек; допустимый уровень помех 0,2 ÷ 1 в. Функционально полная система логических

ИС содержит обычно универсальный логический элемент типа «НЕ И», «НЕ ИЛИ», который для обеспечения большей гибкости проектирования дополняется другими схемами, напр., «мощной» схемой с коэффициентом разветвления свыше  $20 \div 25$  и большой допустимой емкостью нагрузки, схемами, позволяющими увеличивать коэффициент объединения на входе, триггерными схемами и т. д. Всего в функционально полную систему входит, как правило, от 5 до 8 различных ИС, но иногда и свыше 20. Все системы интегральных логи-



2. Структура многослойной печатной платы для монтажа интегральных схем: 1 — слои из эпоксидного стеклопластика; 2 — активный элемент; 3 — интегральная схема; 4 — теплоотводящие полоски; 5 — контактные лепестки; 6 — межслойные соединения; 7 — ввод; 8 — слои печатного монтажа; 9 — шины питания; 10 — заземление.

ческих элементов, как правило, являются потенциальными.

Для монтажа ИС при компоновке их в узлы и блоки широко используют *печатные схемы*. Соединение ИС в узлы без пересечений проводников вообще можно обеспечить с помощью двухсторонних печатных плат. Стремление к повышению плотности монтажа привело к созданию более сложных многослойных печатных плат, состоящих из ряда чередующихся слоев изолирующего материала и плоских схемных проводников. Различия между многими видами многослойного монтажа заключаются гл. обр. в методах выполнения межслойных соединений. ИС размещают обычно на внешней стороне платы (рис. 2) и соединяют их с печатными проводниками, применяя электроннолучевую и лазерную сварку, пайку и сварку сопротивлением, программированную электросварку, групповые методы пайки (волной, погружением и т. п.), ультразвуковую и диффузионную связь и др. Паяные и сварные соединения остаются пока наиболее ненадежным звеном сложных микроэлектронных систем. На одной печатной плате располагают обычно по несколько десятков, а иногда и сотен ИС. Платы 1-го уровня (т. н. ТЭЗы — типовые элементы замены) в свою очередь монтируют на крупных печатных панелях.

При переходе на М. э. б. в. т. изменились не только физическая реализация и технология изготовления логических элементов, но и

подход к проектированию узлов и блоков электронной вычислительной машины (ЭВМ). При разработке машин 1-го и 2-го поколений, напр., традиционной была задача минимизации числа активных элементов (ламп, транзисторов и диодов). Развитие новой технологии привело к тому, что сложность и стоимость изготовления активных и пассивных компонентов почти сравнялись, а в ряде схем замена пассивных компонентов активными оказалась даже выгодной. В результате на первый план выдвинулись задачи разработки таких методов синтеза логических и монтажных схем, которые бы приводили к уменьшению количества используемых ИС, к минимизации числа соединений и длины связей между ними, к сокращению количества пересечений соединительных проводников и т. д. Применение даже простейших ИС позволило заметно уменьшить габариты ЭВМ, снизить потребляемую ими мощность и стоимость, резко сократить количество паяных или сварных соединений и в результате — значительно повысить надежность. Благодаря этому появилась возможность ввести в ЭВМ дальнейшие логические усложнения и строить системы, по сложности и информационной производительности намного превосходящие ЭВМ 1-го и 2-го поколений.

На 1-м этапе становления М. э. б. в. т. средняя плотность размещения компонентов в устройствах и системах в целом, будучи намного выше, чем в транзисторных ЭВМ, оказывалась все же в  $10^4 \div 10^5$  раз меньше достигнутой в микросхемах. Излишне большое количество корпусов и паяных (сварных) соединений, связанное с применением ИС с малой степенью интеграции, приводило также к значительному снижению надежности, в силу чего надежность аппаратуры в целом оказывалась намного ниже надежности ИС. Отсюда вытекало характерное для микроэлектроники в целом стремление к повышению степени интеграции схем, к размещению и герметизации в едином корпусе целых функциональных блоков, содержащих все большее число компонентов и простейших схем.

Совершенствование технологии изготовления ИС, непрерывное уменьшение размеров компонентов и увеличение процента выхода годных схем позволили во 2-й половине 60-х годов создать ИС с повышенной степенью интеграции, а затем и т. н. *большие интегральные схемы* (БИС), содержащие уже не десятки, а сотни — тысячи микрокомпонентов, и способные выполнять более сложные функции, чем простейшие логические операции типа «НЕ И», «НЕ ИЛИ». Значительных уровней интеграции удалось достичь в гибридно-пленочных и полупроводниковых (твердых) схемах (см. *Интегральная схема*), особенно в микросхемах на МДП-транзисторах. Создание и применение БИС положило начало 2-му этапу в развитии М. э. б. в. т., очередному скачку в увеличении надежности и плотности компоновки и в снижении стоимости, объема и веса кибернетических устройств.

Переход к БИС выдвинул ряд новых проблем. Одна из них (технологическая) связана с тем, что с увеличением числа компонентов в схеме быстро возрастает и вероятность порчи некоторых из них при изготовлении, в результате чего становится непригодной вся БИС. Поэтому для каждого уровня развития технологии существует оптимальная степень сложности, при которой процент выхода годных схем еще оправдан экономически. Для полупроводниковых схем на биполярных транзисторах, напр., эта степень сложности составляла к концу 60-х годов 20 ст. порядка 100 компонентов на схему, а для схем на МДП-транзисторах и гибридно-пленочных была несколько выше. Производство БИС более высокой сложности требует наличия избыточных компонентов. В этом случае для создания БИС применяют метод избирательных соединений: с помощью микрозондов определяют расположение годных компонентов, ориентируясь только на них, проектируют требуемую БИС и соответствующий ей рисунок межсоединений, который выполняют с помощью программно управляемого электронного или светового луча. Другой метод — создание универсальных БИС с большой избыточностью компонентов, которые уже после изготовления и испытаний можно настраивать на выполнение требуемой функции с учетом неработоспособных элементов (напр., диодные и транзисторные матрицы, в которых любой элемент может быть отключен от соответствующего узла схемы пропусканием импульса тока, достаточного для разрушения легкоплавкой соединительной перемычки). БИС высокого уровня сложности изготавливают также посредством монтажа на единой многослойной плате с заранее подготовленными межсоединениями малых ИС, выполненных в виде отдельных кристалликов с балочными или шариковыми выводами (многокристалльные БИС).

Вторая проблема, связанная с применением БИС, — стандартизация. Чем выше уровень интеграции схем, чем больше компонентов размещено в одном корпусе, тем огромное разнообразие возможных типов БИС и труднее выбрать ограниченную номенклатуру стандартных схем. Частичным решением этой проблемы является создание и использование в первую очередь БИС широкого применения, таких как статические и сдвиговые регистры, сумматоры, счетчики и т. д. Второе возможное решение — построение формируемых БИС, содержащих избыточные элементы и настраиваемых на выполнение той или иной заданной функции после изготовления, о которых уже шла речь выше. Наиболее перспективным решением проблемы является разработка и освоение таких методов производства БИС, которые позволяли бы легко перестраиваться на выпуск функциональных схем различных типов, специально разработанных для конкретного кибернетического устройства или системы. Этот путь позволяет получить наибольший выигрыш от применения БИС, сохраняя в то же время необходимую гибкость проектиро-

вания устройств и систем. При этом проектирование и производство вычислительных машин все более тесно переплетаются с проектированием и производством функциональных схем и узлов.

Раньше проектирование функциональных узлов ЭВМ могло быть оторвано от изготовления элементов (транзисторов, диодов, резисторов, конденсаторов и простых ИС) и отправлялось от них, как от готовых деталей. При проектировании же функциональных узлов, изготавливаемых в виде БИС, нужно отправляться уже непосредственно от свойств полупроводников и тонких пленок, разрабатывая и рассчитывая не просто схему соединения готовых элементов, а всю топологическую и физическую структуру БИС и технологический процесс ее изготовления с учетом сложных электромагнитных, тепловых и других взаимодействий всех ее компонентов. Такие усложнения задач проектирования и производства при переходе к БИС, необходимость оперативного решения многих из них (напр., проектирование рисунка межсоединений в БИС с учетом «расположения» годных компонентов в ходе изготовления; перестройка технологической линии на выполнение нового рисунка или на выпуск БИС другого типа и т. д.) требуют автоматизации этих работ с применением ЭВМ. Ввиду этого развитие микроэлектроники и вычислительной техники становятся взаимно обусловленными процессами (см. *Автоматизация проектирования ЦВМ*). На 1-м этапе развития М. э. б. в. т. стало ясно также, что низкая плотность компоновки и низкая надежность кибернетических систем по сравнению с достигнутыми в микросхемах являются следствием не только применения ИС с малой степенью интеграции, но и того, что значительная часть оборудования ЭВМ, в частности внешнее оборудование и вспомогательные устройства (ЗУ), не были переведены на микроэлектронное исполнение. Необходимость комплексной микроминиатюризации вычислительной техники привела к созданию наряду с цифровыми и различных типов линейных ИС для ЭВМ. Такими ИС являются, напр., операционные дифференциальные усилители постоянного тока с большим коэфф. усиления напряжения, усилители считывания, формирователи токов записи и считывания, усилители-формирователи выходных импульсов. Значительные усилия были направлены на микроминиатюризацию, повышение надежности, быстродействия и информационной емкости, снижение потребляемой мощности и стоимости ЗУ. На первом этапе развития М. э. б. в. т. наилучшие результаты дало совершенствование ферритовых ЗУ. Созданы и стали широко использоваться миниатюрные тороидальные ферритовые сердечники с внутренним диаметром 0,2—0,3 мм и микроферриты с несколькими отверстиями. Стоимость оперативных ЗУ (ОЗУ) на ферритовых сердечниках остается пока ниже стоимости ОЗУ других типов. Поиски групповых методов изготовления привели к созданию ЗУ на ферритовых

пластинах с микроотверстиями и на т. н. «слоистых» ферритах.

Другое направление — это разработка ЗУ на тонких магнитных пленках (плоских и цилиндрических). Во 2-й половине 60-х годов были созданы и начали применяться магнитопленочные ОЗУ средней информационной емкости с периодом обращения порядка  $10^{-6} \div 10^{-7}$  сек, совместимые с устройствами управления на ИС. В ЗУ этого типа массивы магнитных запоминающих элементов со всеми необходимыми селективирующими проводниками формируются в ходе единого технологического процесса и по существу представляют собой БИСы, функция которых — запоминание, хранение и выдача информации.

Многообещающим направлением в микроминиатюризации ЗУ является создание монолитных блоков памяти на основе полупроводниковых БИС. С развитием микроэлектронной технологии стало вполне реальным построение быстродействующих, надежных и в то же время сравнительно дешевых устройств хранения фиксированной информации на основе интегральных диодных и транзисторных матриц, а также оперативных ЗУ на основе транзисторных (биполярных и МДП) триггеров и полупроводниковых приборов с отрицательным дифф. сопротивлением. Основными достоинствами интегральных полупроводниковых ЗУ являются высокое быстродействие ( $\sim 10^7 \div 10^8$  считываний в 1 сек) при емкости  $10^5 \div 10^6$  бит, а также хорошая схемная и технологическая совместимость с логическими ИС, что позволяет создавать ЦВМ по единой технологии. ЗУ на полупроводниковых БИС широко используют для создания т. н. сверхоперативной памяти, а также буферных и других промежуточных ЗУ. Определенные успехи достигнуты и в микроминиатюризации устройств отображения информации. Появились компактные плоские электролюминесцентные индикаторные экраны, а также полупроводниковые цифровые индикаторы на основе светодиодов из карбида кремния и фосфида галлия, которые по своим электрическим характеристикам хорошо согласуются с ИС.

Достижения в области М. э. б. в. т. могут быть проиллюстрированы на нескольких типичных примерах ЦВМ 3-го поколения. Одним из первых описанных в литературе образцов микроэлектронных вычисл. устройств была разработанная в США бортовая ЦВМ весом 285 г, выполненная на монолитных кремниевых ИС. Это синхронная ЦВМ общего назначения, последовательного типа, работающая в двоичном коде с фиксированной запятой с частотой синхронизации 100 кГц. Длина машинного слова — 11 разрядов, один из них знаковый. Машина состояла из 587 ИС трех типов, которые размещались на 47 модулях, соединяемых с основной панелью при помощи разъемов. Каждый модуль эквивалентен блоку, содержащему в среднем 150 обычных дискретных элементов, а вся машина в целом — примерно 8500 элементам. Потребляемая ею мощность не превышала 16 Вт. Выполняя все

функции использовавшейся ранее транзисторной ЦВМ на дискретных элементах, микроэлектронная машина оказалась в 150 раз меньше по объему, в 48 раз легче и имела значительно более высокую надежность.

ЦВМ «IBM 360—92» при почти одинаковых габаритах оказывается надежнее, примерно в 100 раз производительнее и может решать значительно более сложные задачи, чем известная ЦВМ той же фирмы «IBM 7090», относящаяся ко 2-му поколению.

Ближайшие перспективы развития М. э. б. в. т. связаны с продолжающейся тенденцией ко все большей «интегрализации», т. е. к одновременному изготовлению и герметизации в едином корпусе все большего количества элементов и узлов ЭВМ. В недалеком будущем в виде единой БИС или ГИС («гигантской» интегральной схемы) будут изготавливаться целые узлы или даже устройства вычислительных машин. Совершенствование технологии и автоматизация изготовления сделают возможным проектирование и производство ЭВМ почти целиком из БИС, что приведет к дальнейшему повышению надежности и удельной информационной мощности машин. Немаловажную роль должно сыграть и то, что М. э. б. в. т., благодаря повышению надежности, уменьшению размеров и стоимости узлов и устройств позволяет строить весьма разветвленные информационные системы, открывает новые пути для совершенствования их логической структуры.

Более далекие перспективы М. э. б. в. т. связаны с характерным для микроэлектроники выдвижением и развитием новых принципов и направлений, в которых делаются попытки выйти за рамки понятий классической теории электрических цепей и реализовать требуемые схемные функции проще, основываясь на использовании и других физических свойств материалов. В оптоэлектронике, напр., для улучшения характеристик и расширения функциональных возможностей схем, наряду с электрическими и магнитными, используются также оптические явления и свойства материалов. В криогенной электронике для создания малогабаритных, экономичных и быстродействующих логических схем и ЗУ используют физические явления в твердых телах при низких температурах. Новые перспективные направления могут быть связаны и с устройствами переработки информации на нейристорах — активных передающих линиях. Всем новым направлениям в микроэлектронике присуще стремление к микроисполнению соответствующих устройств, что является залогом непрерывного уменьшения габаритов и стоимости, повышения надежности и расширения функциональных возможностей вычислительных машин и систем.

Лит.: Долкарт В. М., Новик Г. Х., Колтыгин И. С. Микроминиатюрные аэрокосмические цифровые вычислительные машины. М., 1967 [библиогр. с. 345—346]; Микроэлектроника, в. 1. М., 1967; Микроэлектроника. Пер. с англ. М., 1966; Микроэлектроника и большие системы. Пер. с англ. М., 1967; Введение в микроэлектронику. Пер. с англ. М., 1968. В. М. Корсунский.



**МИЛИ АВТОМАТ** — автомат конечный, выход которого в данный такт  $t$  существенно зависит от его состояния в этом такте и значения входа, т. е.  $g(t+1) = \lambda(g(t) \text{ и } x(t))$ . Такое определение автомата ввел Г. Мили. См. также *Алгебраическая теория автоматов*.

**МИНИМАКС** — значение функции  $f(x, y)$  двух векторных аргументов  $x$  и  $y$ , которое она принимает, когда сначала берется максимум по  $y$  из множества  $Y$ , а затем — минимум по  $x$  из множества  $X$ . Понятие М. играет важную роль в *игр теории*, теории наилучших приближений функций, в *программировании математическом* и *операций исследовании*.

Если мн-ва  $X$  и  $Y$  рассматривать как мн-ва стратегий двух игроков  $A$  и  $B$ ,  $f(x, y)$  — как сумму, которую должен заплатить игрок  $A$  игроку  $B$  при выбранных стратегиях  $x \in X$  и  $y \in Y$ , то значение М. определяет для игрока  $A$  верхнюю грань его проигрыша, если игрок  $B$  при выборе своей стратегии  $y$  знает выбор стратегии игроком  $A$ . Действительно, зная  $x$ , игрок  $B$  будет выбирать свою стратегию так, чтобы получить доход

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y).$$

С другой стороны, игрок  $A$  при разумном поведении должен выбрать стратегию  $x$  так, чтобы минимизировать  $\varphi(x)$ .

Изучение свойств ф-ции  $\varphi(x)$  составляет одну из основных проблем теории М. Если ф-ция  $f(x, y)$  непрерывна, а мн-во  $Y$  компактно, то  $\varphi(x)$  есть непрерывная ф-ция  $x$ . Если, к тому же,  $f(x, y)$  непрерывно дифференцируема по  $x$ , то  $\varphi(x)$  дифференцируема по направлению.

С понятием М. тесно связано понятие **максимина**, т. е. величины

$$\max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y).$$

Максимин есть гарантированный доход игрока  $B$  при условии, что при выборе своей стратегии  $x$  игрок  $A$  знает выбор стратегии  $y$  игроком  $B$ . Максимин всегда не больше минимакса. Если эти два значения совпадают, то говорят, что игра, определяемая мн-вами стратегий  $X$  и  $Y$  и платежной ф-цией  $f(x, y)$ , имеет цену.

**МИНИМАКСНОЕ РЕШАЮЩЕЕ ПРАВИЛО** — статистическое решающее правило, позволяющее получить наименьшее значение максимального (по искомому параметру) условного риска решения. Под условным риском понимается следующее. Имеются объекты или ситуации, определенные параметры которых представляют интерес (напр., названия классов, к которым эти объекты принадлежат). Информация об объектах задается в форме наборов признаков  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , получаемых путем прямых измерений.

Предполагается, что при каждом возможном значении искомого параметра  $\gamma$  наборы признаков  $x$  представляют собой реализации случайной величины с известным условным рас-

пределением вероятностей  $p(x|\gamma)$ . Для определения искомых параметров можно указать некоторое решающее правило  $\delta$ , которое отображает пространство признаков  $\mathcal{X}$  на мн-во решений  $\Lambda$ , т. е. указывает для каждого объекта, описываемого набором признаков  $x \in \mathcal{X}$ , решение  $\lambda = \delta(x) \in \Lambda$ . Это решение оценивает действительное значение искомого параметра  $\gamma \in \Gamma$  для данного объекта.

Множество решений  $\Lambda$  в общем случае может не быть тождественно (точнее, изоморфно) мн-ву значений искомых параметров  $\Gamma$ . Задается ф-ция потерь  $L(\gamma, \lambda)$ , которая устанавливает, какой количественный убыток приносит решение  $\lambda$  в случае, когда действительное значение параметра равно  $\gamma$ .

Условный риск решения  $r(\delta|\gamma)$  определяется как условное матем. ожидание потерь при использовании данного решающего правила  $\delta$  при условии, что искомый параметр равен  $\gamma$ :  $r(\delta|\gamma) = \sum_x L(\gamma, \lambda = \delta(x)) p(x|\gamma)$ , где знаком

$\Sigma$  обозначено суммирование дискретных или интегрирование по вероятностной мере непрерывных величин. При фиксированном решающем правиле  $\delta$  условный риск  $r(\delta|\gamma)$  является ф-цией от искомого параметра  $\gamma$ . М. р. п.  $\delta^\circ$  определено условием:  $\max_{\gamma \in \Gamma} r(\delta^\circ|\gamma) \leq \max_{\gamma \in \Gamma} r \times$

$\times (\delta|\gamma)$  при всех возможных правилах  $\delta$  (в общем случае вместо  $\max$  следует поставить  $\sup$ ). При построении М. р. п., в отличие от случая *байесовского решающего правила*, не нужно знать априорного распределения вероятностей искомых параметров  $\xi(\gamma)$ .

При довольно общих условиях М. р. п. совпадает с байесовским решающим правилом для «наименее благоприятного» априорного распределения  $\xi^\circ(\gamma)$ , т. е. такого, при котором средний риск  $r(\delta, \xi) = \sum_{\gamma} r(\delta|\gamma) \xi(\gamma)$  макси-

мален;  $r(\delta, \xi^\circ) \geq r(\delta, \xi)$  при всех возможных распределениях  $\xi$ . В некоторых случаях, что типично для дискретных распределений  $p(x|\gamma)$ , М. р. п. сводится к рандомизированному правилу, в котором выбор решения производится случайным образом в соответствии с определенными условными вероятностями решений  $g(\lambda|x)$ , которые задают рандомизированное правило (вместо ф-ции  $\delta(x)$ ). В последнем случае условный риск удобнее всего представлять в форме  $r(\delta|\gamma) = \sum_{\lambda} \sum_x L(\gamma, \lambda) \times$

$\times p(x|\gamma) g(\lambda|x)$ . Напр.,  $x$  — одномерный признак, принимающий целочисленные значения:  $\mathcal{X} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ . Требуется по измеренному значению признака принять минимаксное решение, к какому из двух возможных классов:  $\gamma_1$  или  $\gamma_2$  принадлежит наблюдаемый объект, если условные вероятности  $p(x|\gamma)$  равны соответственно:

$$p(x|\gamma_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{|x|}} \text{ и } p(x|\gamma_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{|x-2|}}, \text{ а}$$

ф-ция потерь задана в форме:  $L(\gamma, \lambda) = 0$  при  $\lambda = \gamma$  и  $L(\gamma, \lambda) = 1$  при  $\lambda \neq \gamma$ . Здесь пространство  $\mathcal{X}$  — это счетное мн-во целых чи-

сел, а мн-во искоемых параметров и тождественное ему множество решений — двухточечное мн-во  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ . При указанных условиях М. р. п. получается рандомизированным:  $g^\circ(\gamma_1|x) = 1$  при  $-\infty < x \leq 0$ ,  $g^\circ(\gamma_1|x) = 0,5$  при  $x = 1$  и  $g^\circ(\gamma_1|x) = 0$  при  $2 \leq x < \infty$ ;  $g^\circ(\gamma_2|x) = 1 - g^\circ(\gamma_1|x)$ . Минимаксный риск (при указанной ф-ции потерь риск — это вероятность ошибочных решений)  $\max_{\gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2\}} r(\delta^\circ|\gamma) = 0,25$ .

Если в рассмотренном примере ограничиться поиском М. р. п. только в классе нерандомизированных правил, то минимаксный риск увеличится до 0,33. При этом получим следующие равноценные нерандомизированные М. р. п.:  $\delta^\circ(x) = \gamma_1$  при  $x \leq 1$  и  $\delta^\circ(x) = \gamma_2$  при  $x > 1$  или же  $\delta^\circ(x) = \gamma_1$  при  $x < 1$  и  $\delta^\circ(x) = \gamma_2$  при  $x \geq 1$ .

М. р. п. применяется в теории статистич. решений, в *игр теории* и пр. В *распознавании образов* М. р. п. используется редко, что вызвано исключительной трудностью его построения в конкретных задачах распознавания. Г. Л. Гимельфарб.

**МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВАЯ СИСТЕМА** — система автоматического управления с однозначной связью между ее амплитудной и фазовой частотными характеристиками. Эта связь (с точностью до коэффициента усиления) выражается как

$$\left. \begin{aligned} \ln A(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(u)}{u - \omega} du; \\ \varphi(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln A(u)}{u - \omega} du, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $A(\omega)$  — амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), а  $\varphi(\omega)$  — фазовая частотная характеристика ФЧХ (см. *Частотные характеристики систем автоматического управления*). Соотношения (1) имеют место, если *передаточная функция* (ПФ)  $W(s)$  системы не имеет нулей и полюсов в правой полуплоскости, включая мнимую ось. Однозначная связь между АЧХ и ФЧХ М.-ф. с. позволяет синтезировать М.-ф. с. с заданными свойствами, используя только один вид частотных характеристик, напр., АЧХ.

В отличие от М.-ф. с., часть нулей и полюсов ПФ неминимально-фазовой системы (НМФС) может находиться в правой полуплоскости. В связи с тем, что в НМФС нет однозначной связи между АЧХ и ФЧХ, при синтезе таких систем в частотной области требуется знание обоих видов характеристик. Для НМФС характерен больший сдвиг по фазе на всех частотах по сравнению с М.-ф. с., обладающей такой же АЧХ.

Пусть, напр., ПФ системы имеет один нуль в правой полуплоскости, т. е.  $W(s) = B_1(s) \times (s - q_1) A^{-1}(s)$ . В этом случае ПФ можно представить в виде  $W(s) = W_1(s) W_2(s)$ , где  $W_1(s) = B_1(s) (s + q_1) A^{-1}(s)$ ;  $W_2(s) =$

$(s - q_1)(s + q_1)^{-1}$ . АЧХ  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$  одинаковы, так как  $|W_2(s)| = 1$ , ФЧХ, определяемая множителем  $W_2(s)$ ,  $-\varphi_2(\omega) = \arctg \frac{2q_1\omega}{\omega^2 - q_1^2}$ . При равенстве АЧХ ПФ

$W_1(s)$  и  $W(s)$  фаза  $W(j\omega)$  больше по абс. величине фазы  $W_1(j\omega)$  на  $|\varphi_2(\omega)|$ . Приведенным выше условиям однозначности (1), напр., не удовлетворяют запаздывающее звено с ПФ  $e^{-\tau s}$ , АЧХ которого постоянна и не зависит от ФЧХ —  $\tau\omega$ , астатические и дифференцирующие звенья с ПФ  $p^{-\nu}$  и  $p^\nu$  соответственно, ФЧХ которых постоянны и не зависят от АЧХ. Однако в последнем случае звенья относят к М.-ф. с., т. к. достаточно учесть, что полюс или нуль в начале координат дают сдвиг по фазе соответственно на  $-\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)$  и  $\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , где  $\nu$  — кратность полюса или нуля.

Лит.: Теория автоматического регулирования, кн. 1. М., 1967 [библиогр. с. 743—763]; Честнат Г., Майер Р. В. Проектирование и расчет следящих систем и систем регулирования. Пер. с англ., ч. 1—2. М.—Л., 1959 [библиогр. ч. 1, с. 485—487].

В. П. Яковлев.

**МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ МЕТОДЫ** — методы поиска минимумов функций. Поиск максимумов сводится к поиску минимумов путем изменения знака ф-ции. М. ф. м. — раздел *вычислительной математики*, играющий большую роль в таких приложениях, как выбор оптим. вариантов в задачах планирования, проектирования и операций исследования, управления технологическими процессами, управления движением сложных объектов и т. п. М. ф. м. применяются также для решения систем ур-ний и неравенств при отыскании спектра операторов, при решении *краевых задач* и т. п.

Наиболее изучены М. ф. м. применительно к ф-циям, определенным во всем  $n$ -мерном евклидовом простр.  $E_n$ . Рассмотрим их, не касаясь дискретных и дискретно-непрерывных задач минимизации, а также задач минимизации при наличии ограничений. Последние во многих случаях можно свести к задаче безусловной минимизации (напр., с использованием штрафных ф-ций). Не будем рассматривать методы нахождения минимума, основанные на непосредственном использовании необходимых условий *экстремума*, т. к. решение получаемых при этом систем нелинейных ур-ний можно рассматривать как задачу минимизации суммы квадратов невязок (или максимума модуля невязок). Возможность применения и сравнительная эффективность различных М. ф. м. во многом определяется классом ф-ций, к которому они применяются. Большинство М. ф. м. дают возможность находить локальный минимум, и лишь априорная информация о свойствах ф-ции (выпуклость, унимодальность) позволяет считать этот минимум глобальным. Методы, гарантирующие поиск глобального минимума с заданной точностью для достаточно общих классов ф-ций, являются весьма трудоемкими. На

практике для нахождения глобального минимума в основном используется сочетание *Монте-Карло метода* и одного из методов локальной минимизации.

Широкий класс М. ф. м. описывают следующей *вычислительной схемой*. Пусть  $f(x)$  — минимизируемая ф-ция, определенная в  $E_n$ , а  $x_0 \in E_n$  — произвольно выбранная начальная точка. Допустим, что  $f(x)$  имеет непрерывные частные производные до  $r$ -го порядка включительно ( $r \geq 0$ ) ( $f(x)$  будем рассматривать как производную нулевого порядка). Для получения последовательных приближений к локальному минимуму строится последовательность точек  $x_1, \dots, x_k, \dots$  по ф-лам следующего вида:

$$\begin{aligned} x_k = p_k(x_0, \dots, x_{k-1}, f(x_0), \dots, f(x_{k-1}), \\ \partial' f(x_0), \dots, \partial' f(x_{k-1}), \dots \\ \dots, \partial^r f(x_0), \dots, \partial^r f(x_{k-1})), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\partial^l f$  обозначает вектор частных производных  $l$ -го порядка ( $1 \leq l \leq r$ ), а  $p_k$  — вычисляемые ф-ции своих аргументов. Порядок высших частных производных, вычисляемых для реализации ф-лы (1), наз. порядком метода. Осн. группа применяемых на практике методов имеет ту особенность, что информация, необходимая для вычисления очередного значения  $x_{k+1}$ , выражается через ограниченное к-во параметров, вычисляемых на данном шаге и предыдущих шагах процесса. Метод называют *S-ступенчатым*, если схема *алгоритма* имеет, начиная с некоторого  $k_0 \geq S$ , следующую структуру: на  $(k+1)$ -м шаге вычисляем параметры  $\varphi_1^{(k+1)}, \dots, \varphi_t^{(k+1)}$ , где  $t$  — некоторое натуральное число, и вектор  $x_{k+1}$  по ф-лам следующего вида:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(k+1)} = \varphi_1^{(k)}, \dots, \varphi_1^{(k-s+1)}, \dots; \\ \varphi_t^{(k)}, \dots, \varphi_t^{(k-s+1)}; x_k, f(x_k), \partial' f(x_k), \dots \\ \dots, \partial^r f(x_k); \\ \varphi_t^{(k+1)} = \varphi_t^{(k)}, \dots, \varphi_t^{(k-s+1)}, \dots; \\ \varphi_t^{(k)}, \dots, \varphi_t^{(k-s+1)}; x_k, f(x_k), \\ \partial' f(x_k), \dots, \partial^{(r)} f(x_k); \\ \dots \\ x_{k+1} = p_k(\varphi_1^{(k)}, \dots, \varphi_1^{(k-s+1)}, \dots; \varphi_t^{(k)}, \dots \\ \dots, \varphi_t^{(k-s+1)}; x_k, f(x_k), \partial' f(x_k), \dots, \partial^r f(x_k)) \end{aligned} \quad (2)$$

(начальные параметры вычисляются с помощью спец. процедур). В широко распространенных методах спуска оператор  $p_k$  конкретизируется в следующей форме:

$$x_{k+1} = x_k - h_k a_k, \quad (3)$$

где  $h_k$  — вещественное число, которое наз. *шаговым множителем*, вектор  $a_k$  определяет направление спуска. Среди методов спуска выделяются методы монотонного спуска или релаксационные методы. Метод (3) наз. релаксационным, если  $f(x_k) > f(x_{k+1})$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Если  $f(x)$  непрерывно дифференцируема, то релаксационность метода (3) обеспечивается, когда направление спуска  $a_k$  образует острый угол с направлением градиента и  $h_k$  достаточно мал. Общая теория релаксационных процессов развита наиболее полно для случая выпуклых ф-ций. В качестве осн. параметров, характеризующих процесс, рассматриваются углы релаксации  $\theta_k$  (углы между  $a_k$  и направлением градиента), а также множители релаксации  $q_k$ , определяемые равенством

$$1 - \frac{q_k}{2} = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{(\partial f(x_k), x_k - x_{k+1})},$$

где  $\partial f$  — градиент ф-ции  $f$  (для квадратичного функционала  $q_k = 1$  при наискорейшем спуске). Обозначим через  $\kappa_k = q_k(2 - q_k) \cos^2 \theta_k$  приведенный коэфф. релаксации. Необходимое и достаточное условие сходимости релаксационного процесса для сильно выпуклой ф-ции  $f(x)$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \kappa_k = \infty.$$

Среди релаксационных методов наиболее известны *градиентные методы*. Рассмотрим более подробно одноступенчатые методы градиентного типа. Общая схема их следующая:

$$x_{k+1} = x_k - A(x_k) \partial f(x_k).$$

В рамках этой схемы можно выделить такие модификации:

а) *градиентный спуск с постоянным шагом*:  $A(x_k) = \alpha I$ ;  $\alpha = \text{const}$ ;  $I$  — единичная матрица;

б) *наискорейший градиентный спуск*:  $A(x_k) = h_k I$ , где  $h_k$  определяется из условия минимума  $f(x_k - h_k \partial f(x_k))$ ;

в) *метод Ньютона—Рафсона*:  $A(x_k) = H^{-1}(x_k)$ , где  $H$  — гессиан в точке  $x_k$ ,  $H = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_1^n$ ;

г) *промежуточные схемы*:  $x_{k+1} = x_k - (\alpha_k I + \beta_k H^{-1}(x_k)) \partial f(x_k)$ .

К числу наиболее распространенных двухступенчатых градиентных методов можно отнести методы сопряженных градиентов; примером двухступенчатой схемы является метод сопряженных градиентов Флетчера—Ривза:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k^* \varphi_k;$$

$$\varphi_k = -\partial f(x_k) + \beta_k \varphi_{k-1}; \quad \varphi_0 = -\partial f(x_0);$$

$$\beta_k = \frac{\|\partial f(x_k)\|^2}{\|\partial f(x_{k-1})\|^2};$$

$$\alpha_k^*: f(x_k + \alpha_k^* \varphi_k) = \min_{\alpha_k \geq 0} f(x_k + \alpha_k \varphi_k).$$

Методы а) и б) при достаточно общих условиях (первый — при достаточно малом  $\alpha$ ) сходятся к локальному минимуму со скоростью геом. прогрессии. Метод в) при достаточно общих условиях сходится из достаточно малой окрестности минимума с квадратичной скоростью. Промежуточная схема г) более гибкая и позволяет при определенной регулировке последовательностей  $\{\alpha_k\}$  и  $\{\beta_k\}$  также получить квадратическую скорость сходимости при более слабых требованиях на начальное приближение.

Недостатком методов в), г) является необходимость вычисления гессиана. От этого недостатка избавлены методы сопряженных градиентов и так называемые алгоритмы с изменяемой метрикой, обладающие свойствами ускоренной сходимости для достаточно гладких  $\Phi$ -ций в окрестности минимума. Схемы алгоритмов с изменяемой метрикой по своему характеру являются комбинацией схемы сопряженных градиентов и метода Ньютона — Рафсона. Одновременно с движением по схеме типа сопряженных градиентов происходит итеративная аппроксимация матрицы, обратной гессиану в точке минимума. После каждого  $n$  шагов процесса происходит шаг по методу Ньютона — Рафсона, где вместо  $H^{-1}$  выступает ее аппроксимация.

Если градиент  $f(x)$  разрывен, перечисленные выше методы не применимы. Поэтому большое значение имеют методы минимизации выпуклых (не обязательно дифференцируемых)  $\Phi$ -ций; эти методы можно условно разбить на 2 группы: 1) методы градиентного типа и 2) методы «секущих плоскостей». К 1-й группе относятся различные модификации *обобщенных градиентов метода*, а также схемы с ускоренной сходимостью, основанные на растяжении простр. в направлении градиента или разности двух последовательных градиентов. К методам 2-й группы относятся, напр., метод Келли. Пусть  $M$  — выпуклое (ограниченное) мн-во, на котором определена  $f(x)$ , и  $x_1, \dots, x_k$  — последовательность точек, в которых вычисляется обобщенный градиент  $g_f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Тогда  $x_{k+1}$  находится как решение задачи: найти

$$\min_{x \in M} \max_{i=1,2,\dots,k} |f(x_i) + (g_f(x), x - x_i)|.$$

Метод Келли сходится по функционалу при любом начальном  $x_1$ . Из распространенных методов минимизации следует отметить, в частности, метод оврагов для минимизации  $\Phi$ -ций с сильно вытянутыми гиперповерхностями уровня; методы по координатного поиска с изменяемой системой координат; методы случайного поиска; комбинированные мето-

ды быстрого спуска и случайного поиска, когда направление убывания  $\Phi$ -ции находится методом Монте-Карло; методы дифференциального спуска, *стохастической аппроксимации* методы и др. В задачах оптим. регулирования большое значение имеют методы поиска нулевого порядка. В основе алгоритмов минимизации для этого случая обычно лежит идея линейной или квадратичной аппроксимации минимизируемой  $\Phi$ -ции или разностной аппроксимации соответствующих частных производных. Для поиска *экстремума глобального* предложен ряд методов. Осн. из них: метод Монте-Карло, комбинация метода Монте-Карло определения начальной точки с одним из алгоритмов локального поиска, методы, основанные на построении нижней огибающей данной  $\Phi$ -ции, методы последовательного отсечения подмн-в, методы построения траекторий, всюду плотно покрывающих область определения  $\Phi$ -ции, и минимизации вдоль этих траекторий.

Для решения спец. классов многоэкстремальных задач используются методы *программирования динамического*.

В наст. время создаются оптим. алгоритмы минимизации  $\Phi$ -ций разных классов. Пусть  $C_{s+1,L}^n \equiv F$  — класс  $\Phi$ -ций, определенных в кубе  $\pi_n: 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n$ , и имеющих в  $\pi_n$  частные производные до  $s$ -го порядка, удовлетворяющие условию Липшица с константой  $L$ . Любой алгоритм минимизации  $f(x)$  из  $F$ ,  $x \in \pi_n$ , использующий информацию о значении  $f$  и ее производных до  $r$ -го порядка включительно ( $r \geq 0$ ) не более чем в  $N$  точках  $\pi_n$ , эквивалентен (в смысле результата) некоторому алгоритму  $A$  получения последовательности итераций (1) для  $k = 1, \dots, N-1$  и аппроксимации искомого значения  $\inf_{x \in \pi_n} f(x)$  при

помощи итоговой операции

$$r_N(f, A) = S_N(x_0, \dots, x_{N-1}, f(x_0), \dots, \partial^r f(x_{N-1})),$$

где  $S_N$  — некоторая вычислимая  $\Phi$ -ция.

Введем следующие обозначения:

$$v(f, N, A) = |r_N(f, A) - \inf_{x \in \pi_n} f(x)|;$$

$$v(F, N, A) = \sup_{f \in F} v(f, N, A);$$

$$v(F, N) = \inf_A v(F, N, A).$$

Алгоритм, для которого достигается  $v(F, N)$ , наз. оптимальным. Условия  $v(F, N, A) / v(F, N) \rightarrow 1, N \rightarrow \infty$  и  $v(F, N, A) / v(F, N) \leq \text{const}, N \rightarrow \infty$  означают соответственно асимптотическую оптимальность и оптимальность по порядку алгоритма  $A$ . Можно показать, что  $v(S_{s+1,L}^n, N) = O(1/N^{\frac{s+1}{n}})$ ,

причем выбор  $r, 0 \leq r \leq s$ , влияет лишь на константу в указанной оценке. В частном случае  $s = 0$  и  $N = m^n$  имеем:

$$v(C_{1,L}^n; m^n) = \sup_{f \in C_{1,L}^n} \left| \min_{0 \leq v \leq N-1} f(x_0) - \frac{1}{4m} - \inf_{x \in S_n} f(x) \right| = \frac{L}{4m},$$

где  $x_v = \frac{1}{2m}$ -миним. сеть в  $\pi_n$ .

Другой подход к построению оптим. алгоритмов минимизации связан с обобщением идей последовательных статистических решений. Алгоритм минимизации рассматривается как управляемая последовательность опытов, каждый из которых дает тот или иной исход. На совокупности исходов определяется априорная вероятностная мера. После получения конкретного исхода очередного опыта происходит перераспределение вероятностей по ф-ле Байеса и выбирается следующий опыт или принимается окончательное решение. Алгоритмы отличаются друг от друга правилом, по которому выбирается следующий опыт, правилами остановки и выбора окончательного решения. Качество решения определяется ф-цией потерь, которая усредняется в соответствии с полученным на данном этапе вероятностным распределением. В этих терминах ставится задача выбора оптим. алгоритма как построения последовательного байесовского правила поиска решений. Такая постановка интересна тем, что в ее рамках можно учитывать статистические свойства класса решаемых задач, сопоставлять «средние» потери, связанные с погрешностью решения, с затратами, связанными с уточнением решения. Лит.: Любич Ю. И., Майстровский Г. Д. Общая теория релаксационных процессов для выпуклых функционалов. «Успехи математических наук», 1970, т. 25, в. 1; Михалевич В. С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. «Кибернетика», 1965, № 1—2; Иванов В. В. Об оптимальных алгоритмах минимизации функций некоторых классов. «Кибернетика», 1972, № 4; Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума. Пер. с англ. М., 1967.

В. В. Иванов, В. С. Михалевич, Н. З. Шор.  
**МИНИМИЗАЦИЯ НАБОРА ПРИЗНАКОВ** — нахождение для заданного исходного множества (набора) признаков такого минимального (в смысле количества признаков) подмножества этих признаков, которое при выбранном решающем правиле позволяет обеспечить заданные ограничения риска распознавания, в частности, вероятности ошибки распознавания. В результате М. н. п. уменьшается размерность пространства сигналов, в котором осуществляется распознавание. М. н. п. имеет смысл тогда, когда заранее известно, что исходный набор признаков может обеспечить распознавание с риском, не большим допустимого. Весьма часто М. н. п. осуществляется в условиях, когда не допускается увеличение риска по сравнению с риском для исходного набора.

Примеры задач М. н. п. 1) Задан исходный набор из  $n$  признаков  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  и из-

вестно совместное распределение вероятностей этих признаков для каждого класса. Пусть также известно, что байесовское решающее правило (см. *Байесовский метод*) обеспечивает для исходного набора признаков вероятность ошибки распознавания, равную нулю. Требуется путем исключения отдельных признаков из набора найти миним. набор, обеспечивающий при байесовском решающем правиле вероятность ошибки распознавания, не больше заданной ошибки  $P$ . 2) В пространстве  $n$  двоичных признаков  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ , задана обучающая выборка. Пусть известно, что в этом пространстве подвыборки отдельных классов не пересекаются. Требуется путем исключения отдельных признаков найти миним. набор признаков, в пространстве которых подвыборки отдельных классов по-прежнему не пересекаются.

Задача М. н. п. возникает в результате расчленения сложной задачи распознавания на ряд более простых подзадач. М. н. п. осуществляется в процессе разработки *распознающей системы* и способствует упрощению и уменьшению стоимости последней. В матем. плане задачи М. н. п. являются задачами *программирования математического*, в основном дискретного, и решаются с помощью соответствующих методов. Наряду с точными методами решения задач М. н. п. иногда применяют методы, не гарантирующие наилучшего решения, но являющиеся более простыми для вычислений. Сюда относятся методы, обеспечивающие нахождение решений, достаточно близких к точному (напр., использование случайного поиска).

Решать многие практически важные задачи М. н. п. довольно трудно по двум осн. причинам: 1) существует необходимость определения риска распознавания, а значит, и необходимость решения задачи распознавания для отдельных наборов признаков (это не всегда удается выполнить из-за большого количества таких наборов и сложности задачи распознавания); 2) отсутствуют эффективные вычисл. методы дискретного программирования, пригодные для решения задач М. н. п. По этим причинам весьма часто отсеивание неинформативных наборов признаков осуществляется на основе интуиции и только для небольшого числа отобранных наборов экспериментально оценивается риск распознавания и после этого находят миним. набор.

Иногда М. н. п. понимают несколько шире — как выбор миним. набора вторичных признаков, получаемых определенным образом из первичных признаков и являющихся некоторыми функциями последних. Такими признаками, напр., могут быть всевозможные линейные пороговые функции от исходного набора. Задачи М. н. п. в этом случае намного сложнее. Целесообразность решения таких задач не ясна, т. к. переход ко вторичным признакам не гарантируют уменьшения стоимости распознающей системы по сравнению со стоимостью такой системы при использовании ми-

ним. набора первичных признаков. Такая ситуация может быть вызвана существенными затратами на аппаратуру для вычисления значений вторичных признаков. Поэтому вопрос о целесообразности выбора миним. набора вторичных признаков нужно решать отдельно в каждом конкретном случае. Т. К. Виницок.

**МИНИМИЗАЦИЯ СХЕМ ЦВМ** — процесс улучшения структур различных компонентов цифровой вычислительной машины, ведущий к сокращению затрат аппаратуры. Задачу М. с. решают на этапе *элементного синтеза ЦВМ*, ее цель — повысить экономичность схем при условии сохранения (или улучшения) характеристик их эффективного функционирования (быстродействия и надежности). Эту задачу можно рассматривать в отдельности для *блоков ЦВМ типовых* и аппаратуры устройств управления — *автоматов управляющих*. Поскольку число различных типов блоков ЦВМ сравнительно невелико (*сумматоры, счетчики, регистры и дешифраторы*) и для каждой элементной структуры ЦВМ, как правило, определены различные конфигурации этих блоков, задача М. с. типовых блоков ЦВМ сводится в основном к выбору (в соответствии со спецификой использования блока в ЦВМ) из известных наборов типовых схем наиболее экономичных для используемой элементной структуры.

Большое разнообразие схем управляющих автоматов не позволяет аналогично решать задачу их минимизации. В настоящее время нет общих методов М. с. автоматов при произвольном выборе функционально полной системы *операторов элементарных*. В связи с этим решение общей задачи М. с. автоматов сводится, как правило, к решению нескольких частных подзадач. Так, напр., в рамках широко распространенного канонического метода *синтеза автоматов структурного* задача минимизации сводится к задаче *минимизации числа состояний автомата* (памяти автомата) и к задаче минимизации *комбинационных схем* автомата, описываемых системами *переключательных функций*. Первая из них решается в рамках *абстрактной теории автоматов* (напр., метод Ауфенкампа — Хопа), вторая — в рамках *структурной теории автоматов* с привлечением разработанных в *алгебре логики* (булевой алгебре) методов минимизации *переключательных функций* (см. *Блейка алгоритм, Квайна метод минимизации, Мак-Класки алгоритм, Карнау карта*) и последующим учетом реальных физ. характеристик, применяемых *логических элементов ЦВМ* и элементов памяти.

Более естественной является постановка задачи М. с. автоматов, при которой стремятся минимизировать общее к-во затрат аппаратуры, необходимой для реализации всего автомата, а не отдельных его частей — комбинационной и запоминающей, поскольку последнее в общем случае не обеспечивает минимума суммарных затрат аппаратуры на схему в целом. Идея такой постановки состоит в пред-

ставлении схемы автомата в виде сети из более простых *автоматов частичных*, удовлетворяющих тем или иным свойствам (напр., свойству независимости функций дешифрования автомата от числа его состояний и т. п.). В результате этого к-во элементарных автоматов, выбираемых для реализации автомата, оказывается больше необходимого минимума, но функции комбинационной части схемы, состоящие из функций возбуждения, выходов и дешифрования, получаются достаточно простыми. В целом же к-во логич. операторов, реализующих синтезируемую схему, значительно сокращается.

Рассмотренные выше методики М. с. широко использовались при проектировании схем ЦВМ 1-го и 2-го поколений. Это объясняется тем, что минимизация общего к-ва логич. операторов схемы приводила к сокращению общего к-ва *операторов элементарных*, поскольку в ЦВМ первых поколений каждый логич. оператор, как правило, реализовался на базе самостоятельного конструктивно оформленного элементного оператора. Однако для ЦВМ 3-го поколения (а тем более для машин последующих поколений) рассмотренные выше методики М. с. оказываются менее эффективными. Причина этого — значительно возросший за последние годы уровень развития элементно-технологической базы ЦВМ, в частности, высокая степень интеграции, приводящая к тому, что один технологический неделимый элементный оператор (модуль) содержит несколько десятков (а в будущем — и сотен) логич. операторов.

В этих условиях эффективное использование рассмотренных методик ограничивается минимизацией числа элементарных компонент ( $p - n$ -переходов) отдельных модулей, но это практически не сокращает общего к-ва модулей, составляющих синтезируемую схему. Поэтому при решении проблемы М. с. современных ЦВМ, с одной стороны, приходится решать ряд новых задач (напр., таких, как задача минимизации общего числа модулей, реализующих схему, задача выбора наборов типовых модулей для синтеза схем ЦВМ, различные оптимизированные задачи покрытия функциональных схем ЦВМ наборами типовых модулей и т. п.), а с другой стороны, проблема М. с. получает интерпретацию в терминах задач оптимизации алгоритмов функционирования схем устройств ЦВМ.

Комплексное решение упомянутых задач переносит решение проблемы М. с. современных ЦВМ с этапа элементного синтеза схем на более высокие этапы: *алгоритмического синтеза ЦВМ* и *блочного синтеза ЦВМ*. Эффективная реализация последних осуществляется в рамках систем *автоматизации проектирования ЦВМ*.

Лит.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]; Рабинovich З. Л. Элементарные операции в вычислительных машинах. К., 1966 [библиогр. с. 299—301]; Рабинovich З. Л., Капитанова Ю. В., Комухаев Э. И. Методика кодирования состояний конечных автоматов с точки зрения минимизации аппаратных затрат. В кн.: Теория дискретных автоматов. Рига, 1967. В. Н. Коваль.



**МИНИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА СОСТОЯНИЙ АВТОМАТА** — построение по произвольному заданному конечному автомату автомата с наименьшим возможным числом состояний, обладающего тем же поведением, что и исходный автомат. Решение задачи минимизации состоит в нахождении эффективного алгоритма минимизации. Оно представляет интерес как в абстрактной теории автоматов, так и в проектировании реальных автоматов.

Для всюду определенных инициальных *Мили* автоматов задача минимизации сводится к построению приведенного автомата, эквивалентного данному (т. е. представляющего то же самое отображение, что и исходный автомат). В этом случае используют теорему о существовании и единственности приведенного автомата. Наиболее известным алгоритмом минимизации всюду определенных автоматов является алгоритм Ауфенкампа — Хона, состоящий в построении последовательности спец. разбиений мн-ва состояний исходного автомата. В разбиении, получающемся на  $n$ -ом шаге ( $n = 1, 2, \dots$ ), в один класс объединяются состояния, представляющие отображения, которые совпадают на всех словах длины  $\leq n$ . Через конечное число шагов такая последовательность разбиений стабилизируется на разбиении, определяющем некоторое отношение конгруэнтности. Фактор-автомат по этому отношению является приведенным автоматом, эквивалентным исходному. Алгоритм легко поддается автоматизации.

Решение задачи минимизации для частичных *X-Y*-автоматов предполагает перебор покрытий мн-ва состояний автомата классами состояний со свойством подстановки, т. е. таких покрытий  $(A_i)_{i \in I}$ , что для любой пары  $(i, x)$ ,

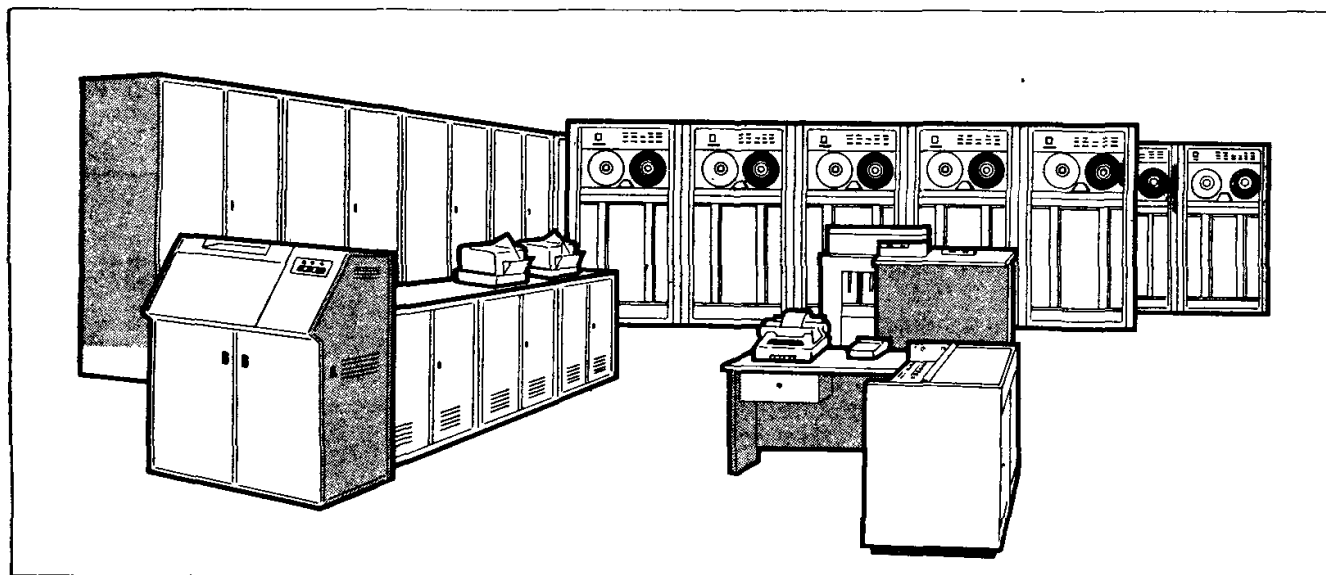
автомата, т. е. определяет автомат, который представляет продолжение автоматного отображения, отвечающего исходному автомату. Покрытие с миним. числом классов определяет миним. автомат.

Лит.: Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962 [библиогр. с. 464—469]

Ю. В. Капитонова.

**«МИНСК»** — семейство электронных цифровых вычислительных машин общего назначения средней производительности. Машины серии «Минск-1» («Минск-11», «Минск-12», «Минск-14») применялись в основном для решения инженерных, науч. и конструкторских задач матем. и логического характера. Машины серии «Минск-2» («Минск-2», «Минск-22») предназначены для решения науч.-тех. и планово-эконом. задач. ЭЦВМ серии «Минск-2» выполнены на полупроводниковой элементной базе. Агрегатная конструкция и возможность варьировать состав устр-в позволяет широко использовать машины в *вычислительных центрах*, в н.-и. ин-тах, конструкторских бюро и на пром. предприятиях. «Минск-22» имеет следующие тех. характеристики: форма представления чисел — с фиксированной и плавающей запятой; система счисления — двоичная; длина слова — 37 двоичных разрядов; структура команд — двухадресная; среднее быстродействие — 5 тыс. операций в 1 сек; емкость оперативного ЗУ на ферритах — 8 тыс. слов; емкость внешнего ЗУ на магн. лентах — 1,6 млн. слов. Предусмотрен ввод информации с перфолент, перфокарт и рулонного телетайпа, вывод информации на перфоленты, перфокарты, телетайп, печать алфавитно-цифрового текста.

ЭЦВМ «Минск-23» по своим параметрам ма-



Цифровая вычислительная машина «Минск-32».

где  $i \in I$ ,  $x \in X$  существует  $i \in I$  такое, что  $A_i x = A_j$  и для любых  $a, b \in A_i$ ,  $X(a, x) = \lambda(b, x)$ . Каждое такое покрытие определяет эквивалентное продолжение данного

ксимально приближена к процедурам обработки различных видов информации и имеет следующие особенности: разрядность ее — произвольной длины; система счисления — десятичная; машина может работать с 64 внеш.

устройств; имеет эффективную систему команд для обработки массивов информации. «Минск-23» может обрабатывать информацию, представленную на перфокартах, перфолентах, формализованных бланках, а также принимать и выдавать информацию по телефонным или телеграфным каналам связи (через аппаратуру передачи данных типа «Минск-1500» или «Минск-1550»). ЭЦВМ «Минск-23» может быть использована для предварительной обработки информации при совместной работе с машинами более высокой производительности.

ЭЦВМ «Минск-32» (рис.) — многопрограммная вычисл. машина общего назначения средней производительности, является дальнейшим развитием семейства машин типа «Минск-2». «Минск-32» имеет программную совместимость с машиной «Минск-22» (при добавлении согласующего устр-ва или программ совмещения).

Осн. отличиями ЭЦВМ «Минск-32» от семейства машин «Минск-2» является: большая емкость оперативного ЗУ; возможность многопрограммной работы; наличие защиты программ в оперативном ЗУ; возможность подключения к медленному каналу машины до 104 внеш. устр-в; наличие быстрого канала, позволяющего подключать внешние накопители типа магн. барабанов, дисков и магн. лент (до 32 устр-в); возможность одновременной работы внеш. устр-в быстрого и медленного каналов; возможность посимвольной обработки информации; наличие программно-аппаратурной службы времени; возможность работы в многомашиной системе (до 8 ЭЦВМ «Минск-32» через спец. коммутатор).

Осн. характеристики ЭЦВМ «Минск-32»: структура команд одно- и двухадресная; форма представления чисел — двоичная, с плавающей и фиксированной запятой, и десятичная; разрядность — 37 двоичных разрядов, а при обмене с внеш. устр-вами — 8 двоичных разрядов. Среднее быстродействие процессора — 25 тыс. операций в 1 сек. Емкость оперативного ЗУ — до 65 тыс. машинных слов, емкость внешнего ЗУ на магн. лентах — до 16 млн. слов. Скорость ввода с перфокарт — 600 карт в 1 мин, скорость ввода с перфолент — 1500 знаков в 1 сек, скорость вывода на перфокарты — 100 карт в 1 мин, скорость вывода на перфоленту — 80 знаков в 1 сек, скорость печати алфавитно-цифрового текста — 600 знаков в 1 сек, скорость ввода — вывода с пишущей машинки — 10 знаков в 1 сек. Спец. электронные часы позволяют программе «диспетчер» следить за решением до 4 рабочих программ одновременно. Машина выполнена на полупроводниковых элементах и ферритах.

Поставляется ЭЦВМ «Минск-32» вместе с матем. обеспечением, в т. ч. программная система совместимости с ЭЦВМ «Минск-22», транслятор с алгоритм. языка КОБОЛ, транслятор с машинно-ориентированного языка символического кодирования, служебные программы системы «диспетчер», типовые программы для обработки информации, тестовые программы для проверки работоспособности отдельных устройств и ЭЦВМ в целом.

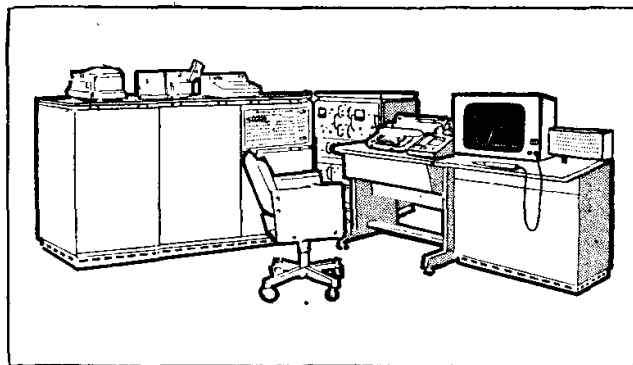
На базе ЭЦВМ «Минск-32» можно создавать тех. комплексы для автоматизированных систем управления предприятиями, объединениями, м-вами и ведомствами.

Лит.: Пр ж и я л к о в с к и й В. В. [и др.]. Мультипрограммная электронно-вычислительная машина «Минск-32». В кн.: Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам, в. 1. Новосибирск, 1968; К о ш а р с к и й Б. Д. [и др.]. Автоматические приборы, регуляторы и управляющие машины. Справочное пособие. Л., 1968.

Н. И. Кирилук.

«МИР», машина для инженерных расчетов — семейство малых электронных цифровых вычислительных машин, предназначенных для решения широкого круга инженерно-конструкторских математических задач. Разработаны в Ин-те кибернетики АН УССР. Характерной чертой семейства машин является простота общения человека с машиной. В первой серийной машине семейства, названной «МИР» (1965), впервые в СССР структурно реализуется алгоритм. язык «МИР», близкий к математическому. Внутр. язык машины в значительной степени совпадает с внешним, что дает возможность контролировать выполнение алгоритма и легко «вмешиваться» в ход вычислений путем изменения уже введенного алгоритма, формулы, коэффициента, точности вычислений и т. п.

Машина «МИР» может решать системы линейных алгебр. уравнений до 20 порядка, системы обыкновенных дифф. уравнений, дифф. уравнения в частных производных в сеточной области на 200—250 узлов, системы нелинейных уравнений до 6 порядка. Можно находить собственные значения для симметричных матриц до 18-го порядка, все корни алгебр. многочлена до 120-го порядка, решать интегр. уравнения типа Фредгольма 2-го рода. Можно решать некоторые задачи линейного программирования с количеством узлов до 100, рассчитывать сетевые графики на 100 событий и т. д. В системе внеш. матем. обеспечения имеются также программы для интерполирования и аппроксимации функций, вычисления



Цифровая вычислительная машина «МИР-2».

различных спец. функций, численного интегрирования и дифференцирования, получения псевдослучайных чисел, статистической обработки результатов и т. д.

Устройство управления (УУ) машины — микропрограммное многоуровневое асинхрон-

ное — состоит из двух микропрограммных матриц различного уровня, реализованных на основе долговременного ЗУ общей емкостью около 700 тыс. бит, с циклом обращения 4 мксек. УУ предварительно производит синтаксический контроль программы и экономично размещает поэтно информацию в оперативном ЗУ (ОЗУ), выполненном на ферритовых сердечниках (емкость 4096 символов, время обращения 14 мксек).

В случае переполнения ОЗУ производится сжатие информации, а освободившийся объем используется для дальнейшей записи. Для организации стеков (до шести) в любых участках памяти служит сверхоперативное ЗУ — СОЗУ (оперативные регистры). Арифметическое устройство (АУ) — табличное, построенное на основе арифм. матрицы последовательно-параллельного действия. В качестве регистров порядка и мантииссы используется весь объем ОЗУ. Время сложения (или умножения) двух 6-разрядных цифр — до 50 мксек, эффективное быстродействие при решении инженерных задач — до 8 тыс. операций в 1 сек. Форма представления чисел, их разрядность и диапазон — произвольные. Ввод и вывод информации осуществляется при помощи электрифицированной печатающей машинки.

Модификация «МИР-1» (создана в 1968) отличается наличием устройства ввода—вывода на перфоленту, в ней применены узлы повышенной надежности.

«МИР-2» (разработана в 1969) — первая серийная машина, реализующая структурными способами аналитико-цифровые преобразования и языки АНАЛИТИК и машины «МИР». Предусмотрена возможность общения человека с машиной в режиме диалога с помощью устройства со световым карандашом, обеспечивающего оперативный вывод, контроль и редактирование информации и отображение на экране

электроннолучевой трубки промежуточных и окончательных результатов решения задач. Выводимая информация хранится в буферном ЗУ, выполненном на ферритовых сердечниках (емкость 4096 слов, время обращения 12 мксек). «МИР-2» решает широкий круг матем. задач в буквенном и цифровом виде и обеспечивает решение основных задач линейной алгебры (как числовых, так и аналитических), раскрытие определителей в буквах, решение систем линейных уравнений с буквенными коэффициентами и др. Машина обеспечивает решение всех задач, записанных на языке машины «МИР» и допускает их ввод с перфолент, подготовленных для машины «МИР-1». Селекторный канал допускает подключение до 64 внешних устройств (в т. ч. и ЦВМ). Имеется двухуровневая система приоритетного прерывания. В «МИР-2» применено арифметико-логическое устройство (АЛУ) для буквенно-аналитических преобразований. Семь операционных регистров (СОЗУ) служат для организации стеков и выполнения служебных функций при работе АЛУ. Для хранения микропрограмм служит ДЗУ трансформаторного типа емкостью 1,5 млн. бит, время обращения — 4 мксек. ОЗУ емкостью 8192 слова выполнено на ферритовых сердечниках, время обращения — 12 мксек. Машина оборудована устройствами ввода — вывода на магнитных картах и перфоленте, а также электрифицированной печатающей машинкой. Эффективное быстродействие машины — до 12 тысяч операций в 1 сек.

Элементная база ЭЦВМ семейства «МИР» — потенциальная. В ней использованы унифицированные элементы типа «МИР-1», выполненные на дискретных полупроводниковых приборах в модульном исполнении.

Лит.: Электронная цифровая вычислительная машина МИР. К., 1966; Электронная вычислительная машина МИР-2. К., 1971.

Л. Г. Хоменко.

## ЭНЦИКЛОПЕДИЯ КИБЕРНЕТИКИ

(В двух томах), том 1

Адрес Главной редакции Украинской Советской Энциклопедии: 252650.  
Киев-30, ГСП, ул. Ленина, 51.

В томе помещены 201 внутритекстовая иллюстрация и 8 цветных иллюстраций на вклейках. Цветные иллюстрации напечатаны на Головном предприятии республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР. Бумага для текста изготовлена на фабрике им. Ю. Янониса. Том сдан в набор 27 декабря 1973 г., подписан к печати 2 апреля 1974 г. БФ 04861. Тираж 30 000. Формат  $70 \times 100^{1/16}$ . Физ.-печ. листов 38+0,75 лист. вклеек; условных печ. листов 50, учетно-изд. листов 85,2. Цена одного тома 4 руб. 36 коп. Зак. 4-210. Напечатано с матриц Головном предприятии республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР (Киев, ул. Довженко, 3) на Харьковской книжной фабрике имени М. В. Фрунзе республиканского производственного объединения «Полиграф-